SOLUCIONES DÉBILES DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARABÓLICAS

NAZARIO PEÑAFIEL BERNAL

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Matemáticas
Popayán, Cauca
2013

SOLUCIONES DÉBILES DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARABÓLICAS

NAZARIO PEÑAFIEL BERNAL

TRABAJO DE GRADO
En la modalidad de seminario, presentado como requisito parcial para optar al título de Matemático.

DIRECTOR:
Dr. RAMIRO MIGUEL ACEVEDO MARTÍNEZ

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Matemáticas
Popayán, Cauca
2013

Nota de aceptación

Director: **Dr. Ramiro Acevedo Martínez**

Jurado: **Dr. Francisco Enríquez Belalcázar**

Jurado: **Mg. Jhon Jairo Pérez**

Fecha de sustentación: Popayán, 27 de mayo de 2013

Agradecimientos

En primer lugar agradezco a los profesores del comité de seguimiento Jhon Jairo Pérez y Francisco Enríquez por todo el tiempo que dedicaron para la realización de este trabajo, por poner a disposición todos sus conocimientos cada vez que lo necesite y por toda la ayuda brindada.

Agradezco de una forma muy especial al director de este trabajo de grado el profesor Ramiro, por su ayuda constante, por sus enseñanzas y consejos que fueron siempre bien valorados, pues me sirvieron para mí crecimiento como ser humano tanto en el ámbito profesional como en el ámbito personal.

A mis hermanos, padres y abuela, quienes me formaron como persona, les agradezco por su inagotable apoyo y porque siempre confian en mí.

Índice general

Introducción

Muchos problemas fundamentales en economía, física, ingeniería, matemáticas y otras áreas del conocimiento, se representan o se describen mediante ecuaciones diferenciales parciales. Este trabajo tendrá como finalidad estudiar un tipo especial de estas ecuaciones: las ecuaciones diferenciales parabólicas, las cuales modelan distintos fenómenos evolutivos (que varían en el tiempo) de la naturaleza. Estos problemas evolutivos son un comienzo para estudiar otro tipo de problemas más generales y su aplicación a diversas áreas de la física como: La dinámica de fluidos, el electromagnetismo, entre otros. Dichas ecuaciones surgen en problemas de propagación, por lo cual es de vital importancia plantear diferentes procesos para llegar a una solución adecuada de dichos problemas. En este caso, estudiaremos la formulación variacional de una familia de ecuaciones parabólicas, realizando su análisis de existencia y unicidad de soluciones por medio del método de Galerkin. Entre estas ecuaciones se puede destacar como uno de los ejemplos más representativos la ecuación del calor, la cual es un modelo matemático que trata de describir la evolución de la temperatura en un cuerpo sólido, es decir, busca modelar la propagación del flujo de calor en una dirección en función del tiempo.

Al utilizar la formulación variacional también llamada formulación débil del problema se tendrá que recurrir a la teoría del análisis funcional, debido a que la solución buscada vive en espacios funcionales que aparecen de forma natural en el análisis de las ecuaciones de tipo parabólico. Además, se debe estudiar las propiedades de dichos espacios funcionales, para determinar las exigencias que deben cumplir estos espacios para que el problema estudiado posea una única solución que dependa continuamente de los datos.

En este trabajo se estudiarán resultados que muestran condiciones suficientes para que una ecuación diferencial parabólica posea una única solución débil. Para realizar dicho estudio se requiere de la introducción de espacios funcionales adecuados, cuyo punto de partida para su definición es la integral de Bochner. Concretamente, se exhibirán algunos conceptos y resultados de la medida e integral de Lebesgue que se presentan el Capítulo 1, incluyendo además el estudio de los espacios funcionales $C_0^\infty(G)$, $L_p(E)$ y $H^1(E)$. En el Capítulo 2 se introducirá la integral de Bochner y se describirán sus principales propiedades. Posteriormente, en el Capítulo 3 se mostrará en detalle la definición de los espacios $L_p(0,T;X)$ y $W_p^1(0,T;V,H)$, así como las propiedades que estos poseen. En el Capítulo 4 se demostrará el teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas, haciendo uso del llamado método de Galerkin. Finalmente, se aplicará este teorema en el caso concreto de la ecuación del calor.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se recordarán algunos conceptos básicos indispensables para la elaboración de este trabajo, es decir, se mostrarán las bases necesarias para una buena interpretación de las nociones que se tratarán más adelante. En primer lugar se exhibirán ciertas definiciones del análisis funcional, después se recordará brevemente la construcción de la integral de Lebesgue y algunas de sus propiedades. Esto será imprescindible para la construcción de la integral de Bochner, la cual se estudia en el capitulo 2. Posteriormente se definirán ciertos espacios funcionales que serán de vital importancia para definir los espacios que surgen en problemas evolutivos. El estudio de estos espacios es uno de los objetivos primordiales del trabajo.

1.1. Conceptos de análisis funcional

Las definiciones y conceptos que se presentan en esta sección corresponden a resultados clásicos del análisis de funciones y pueden ser encontrados en cualquier texto de análisis funcional. En particular el material aquí presentado se ha tomado de los textos de Kreyszig [3] y Kufner [1]. Se considerará un espacio vectorial X sobre un campo $\mathbb{K}$, donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Definición 1.1. Sea X un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$. Una norma en X es una función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades válidas para todo $x, y \in X$ y todo $\alpha \in \mathbb{K}$:

i) $\|x\| \geq 0$,

ii) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0_X$,

iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$,

iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Si X es un espacio vectorial con una norma $\|\cdot\|$, decimos que $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado.

Teorema 1.2. *Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en X. Si existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a $x \in X$ entonces $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ también converge a $x \in X$.*

Definición 1.3. (Sucesión rápida de Cauchy)
Sea X un espacio vectorial normado. Se dice que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ es una sucesión rápida de Cauchy, si existe una sucesión $\{\epsilon_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^+$ tal que

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq \epsilon_k^2, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k < \infty.$$

Lema 1.4. *Toda sucesión de Cauchy en un espacio normado X posee una subsucesión rápida de Cauchy.*

Demostración. Sea $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ una sucesión de Cauchy. Luego para cada $k \in \mathbb{Z}^+$ existe $M_k \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$n, m \geq M_k \Rightarrow \|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{4^k}.$$

Si definimos $N_1 := M_1$ y $N_k := \text{máx}\{M_k, N_{k-1} + 1\}$, $k = 2, 3, ...$ entonces $N_1 < N_2 < \cdots$ y

$$n, m \geq N_k \Rightarrow \|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{4^k}.$$

En particular,

$$\left\|x_{N_{k+1}} - x_{N_k}\right\| \leq \frac{1}{4^k} \qquad \forall k \in \mathbb{Z}^+,$$

por lo tanto, definiendo $\epsilon_k := \frac{1}{2^k}$ se tiene que $\{x_{N_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es rápida de Cauchy. □

Definición 1.5. (Operador) Un operador es una función $T : X \to Y$ donde X, Y son espacios vectoriales. Además, decimos que T es un operador lineal si para todo $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ se tiene que

$$T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y).$$

Definición 1.6. Sean $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal. Se dice que T es acotado si existe $M > 0$ tal que

$$\|T(x)\|_Y \leq M \|x\|_X \qquad \forall x \in X,$$

además, si $T : X \to Y$ es un operador acotado se define la norma de T, denotada por $\|T\|$ como

$$\|T\| := \sup\left\{\frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} : x \in X, \quad x \neq 0_X\right\} = \sup\left\{\|T(x)\|_Y : x \in X, \quad \|x\|_X = 1\right\}.$$

Observación 1.7. *Notemos que si $T : X \to Y$ es un operador acotado, se cumple que*

$$\frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} \leq \|T\| \qquad \forall x \in X \backslash \{0_X\}$$

y en consecuencia,

$$\|T(x)\|_Y \leq \|T\| \|x\|_X \qquad \forall x \in X.$$

Teorema 1.8. *Sea $T : X \to Y$ un operador lineal. Entonces T es continuo si y sólo si T es acotado.*

Teorema 1.9. *Sean X, Y espacios de Banach. Sea el operador lineal*

$$A : D(A) \to Y$$

tal que

$$\|A(x)\|_Y \leq C \|x\|_X \qquad \forall x \in D(A)$$

para una constante C. Si $D(A)$ es un subespacio lineal de X que es denso en X, es decir

$$\overline{D(A)}^{\|\cdot\|_X} = X,$$

entonces el operador A admite una única extensión lineal y continua $\tilde{A} : X \to Y$ tal que

$$\left\|\tilde{A}(x)\right\|_Y \leq C \|x\|_X \qquad \forall x \in X.$$

Demostración. Ver [4, Proposición 18.29]. □

Definición 1.10. (Funcional) Un funcional es un operador $f : X \to \mathbb{K}$ donde X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Un funcional es llamado lineal, si como operador es un operador lineal, es decir

$$f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$$

para todo $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$.
De forma similar a los operadores, se dice que el funcional f es acotado si existe $M > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M \|x\|_X \qquad \forall x \in X$$

y su norma se define por

$$\|f\| := \sup\left\{\frac{|f(x)|}{\|x\|_X} : x \in X, \quad x \neq 0_X\right\}.$$

Definición 1.11. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Definimos el espacio dual topológico de X (ó simplemente llamado dual de X), denotado por X^* como

$$X^* := \{f : X \to \mathbb{K} : f \text{ es lineal y acotado}\}.$$

Además,

$$\|f\|_{X^*} := \sup\left\{\frac{|f(x)|}{\|x\|_X} : x \in X, \quad x \neq 0_X\right\} = \sup\left\{|f(x)| : x \in X, \quad \|x\|_X = 1\right\} \tag{1.1}$$

es una norma en X^*.

Si no hay lugar a confusión en lugar de escribir $\|\cdot\|_{X^*}$, escribiremos $\|\cdot\|_*$.

Observación 1.12. *Para $f \in X^*$ y $x \in X$, el valor de f en x es usualmente denotado por $\langle f, x\rangle_X$, es decir*

$$\langle f, x\rangle_X := f(x) \qquad \forall f \in X^*, \quad \forall x \in X. \tag{1.2}$$

Si el espacio X está claro en el contexto se omite el subíndice X en (1.2). *Además, la función*

$$\begin{aligned}\langle\cdot|\cdot\rangle : X^* \times X &\to \mathbb{K}\\ (f,x) &\mapsto \langle f,x\rangle\end{aligned}$$

es lineal en ambas componentes y es llamada producto de dualidad entre X^* y X.

Teorema 1.13. *Sea X un espacio normado sobre $\mathbb{R}$. El espacio vectorial X^* con la norma* (1.1) *es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X^*$ una sucesión de Cauchy, luego para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$\|f_n - f_m\|_* < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad n, m \geq N.$$

Así, para cada $x \in X$ dado $\epsilon' > 0$ existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |(f_n - f_m)(x)| \leq \|f_n - f_m\|_* \|x\|_X < \epsilon \|x\|_X = \epsilon'$$

siempre que $n, m \geq N$. En consecuencia, para cada $x \in X$ la sucesión $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$. Luego podemos definir $f : X \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad \forall x \in X.$$

Probemos que:

I) f es lineal y acotado.

II) $f_n \to f$ en X^*.

En efecto,

I) Sean $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Luego

$$\begin{aligned}f(\alpha x + y) = \lim_{n\to\infty} f_n(\alpha x + y) &= \lim_{n\to\infty} (\alpha f_n(x) + f_n(y))\\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} f_n(x) + \lim_{n\to\infty} f_n(y)\\ &= \alpha f(x) + f(y),\end{aligned}$$

por lo cual f es lineal.
Ahora, sea $N_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n \geq N_0$ implica que $\|f_n - f_{N_0}\|_* < 1$; así para todo $x \in X$ se tiene que

$$|f_n(x) - f_{N_0}(x)| \leq \|f_n - f_{N_0}\|_* \|x\|_X < \|x\|_X .$$

Entonces haciendo que $n \to \infty$ obtenemos

$$|f(x) - f_{N_0}(x)| \leq \|x\|_X \qquad \forall x \in X.$$

Luego $f - f_{N_0}$ es acotado. Por lo tanto, $f = f_{N_0} + (f - f_{N_0})$ es acotado.

II) Sea $\epsilon > 0$ y $N_1 \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$n, m \geq N_1 \Rightarrow \|f_n - f_m\|_* < \frac{\epsilon}{2}.$$

En consecuencia para todo $x \in X$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_* \|x\|_X < \frac{\epsilon}{2} \|x\|_X$$

haciendo $m \to \infty$, se tiene:

$$|f_n(x) - f(x)|_* \leq \frac{\epsilon}{2} \|x\|_X \,, \qquad \forall x \in X \quad \forall n \geq N_1;$$

por lo cual

$$\|f_n - f\|_* \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \qquad \forall n \geq N_1.$$

De donde se concluye que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_* = 0$$

y así, $f_n \to f$ en X^*.

□

Definición 1.14. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Un producto interior en X es una función: $(\cdot|\cdot)_X : X \times X \to \mathbb{R}$ que cumple las siguientes condiciones para todo $x, y, z \in X$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$:

I) $(x + y|z)_X = (x|z)_X + (y|z)_X$,

II) $(\alpha x|y)_X = \alpha\,(x|y)_X$,

III) $(x|y)_X = (y|x)_X$,

IV) $(x|x)_X \geq 0$ y $(x|x)_X = 0$ si y sólo si $x = 0_X$.

Un espacio con producto interior, completo con respecto a la norma inducida por dicho producto interior es llamado **Espacio de Hilbert**.

Los nociones que se presentan a continuación serán indispensables para la definición de lo que en nuestro trabajo consideraremos como base para un espacio con producto interior.

Definición 1.15. (Conjunto ortonormal) Sea X un espacio con producto interior $(\cdot|\cdot)_X$. Un conjunto ortonormal de X es un subconjunto $M \subseteq X$ tal que para todo $x, y \in M$ se tiene que

$$(x|y)_X = \begin{cases} 0, & x \neq y \\ 1, & x = y. \end{cases}$$

Observación 1.16. *Todo conjunto ortonormal es linealmente independiente.*

Definición 1.17. (Conjunto total) Un conjunto total en un espacio normado X es un subconjunto $M \subseteq X$, cuyo generado es denso en X, es decir

$$\overline{\text{gen } M} = X.$$

Definición 1.18. (Conjunto total ortonormal) Sea X un espacio con producto interior, un conjunto ortonormal de X que es total en X es llamado conjunto total ortonormal en X.

Teorema 1.19. *Todo espacio de Hilbert posee un conjunto total ortonormal.*

Demostración. Ver Kreyszig[3] 4.1-8. □

Teorema 1.20. *Sea H un espacio de Hilbert separable. Entonces todo conjunto total ortonormal de H es numerable.*

Demostración. Ver Kreyszig[3] 3.6-4. □

Otras definiciones que tendremos en cuenta más adelante serán las siguientes.

Definición 1.21. Sea $A : X \to X^*$ un operador. Decimos que A es un operador estrictamente monótono si existe $C > 0$ tal que

$$\langle A(x), x\rangle_X \geq C \left\| x \right\|_X^2 \qquad \forall x \in X.$$

Definición 1.22. (Forma bilineal) Sean H un espacio de Hilbert y $a : H \times H \to \mathbb{R}$ se dice que a es una forma bilineal sobre H si para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene que

- $a(\alpha u + \beta v, w) = \alpha a(u, w) + \beta a(v, w) \qquad \forall u, v, w \in H,$
- $a(u, \alpha v + \beta w) = \alpha a(u, v) + \beta a(u, w) \qquad \forall u, v, w \in H.$

Si además existe $M > 0$ tal que

$$|a(u, v)| \leq M \left\| u \right\|_H \left\| v \right\|_H \qquad \forall u, v \in H$$

entonces se dice que la forma bilineal a es acotada.

Definición 1.23. Sea $a : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal. Decimos que a es estrictamente positiva si existe $C > 0$ tal que

$$a(u, u) \geq C \left\| u \right\|_H^2 \qquad \forall u \in H.$$

1.2. Integral de Lebesgue

Primero presentaremos la definición de integral en un espacio de medida en general para posteriormente definir el espacio de medida en el cual se desarrolla la integral de Lebesgue. En particular el material que se presenta a continuación, puede encontrarse detalladamente en los textos Bartle [11], Royden [8], Jones [6] y Apostol [16].

Definición 1.24. (σ-álgebra). Sea X un conjunto no vacio. Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un conjunto X es llamada sigma álgebra de subconjuntos de X si satisface las siguientes condiciones:

I) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$,

II) Si $A \in \mathcal{A}$ entonces $X \backslash A \in \mathcal{A}$,

III) Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{A}$ entonces $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Al par $(X, \mathcal{A})$ se le llama espacio medible y a un conjunto $A \in \mathcal{A}$ se le llama conjunto $\mathcal{A}$-medible o simplemente se dice que A es medible.

Ejemplo 1.25. Si X es un conjunto cualquiera distinto de vacio entonces la colección de todos los subconjuntos de X, es decir, $\mathcal{P}(X)$ es una σ-álgebra de subconjuntos de X.

Ejemplo 1.26. Si $X = \mathbb{Z}^+$ entonces $\mathcal{A} = \{\emptyset, A_1, A_2, \mathbb{Z}^+\}$ donde $A_1 = \{1, 3, 5, 7, ...\}$, $A_2 = \{2, 4, 6, ...\}$; es una σ-álgebra de subconjuntos de X.

Ejemplo 1.27. : La σ-álgebra más pequeña que contiene a todos los subconjuntos abiertos y cerrados de $\mathbb{R}^n$ es denominada la **σ-álgebra de Borel**. A los elementos de esta σ-álgebra se les suele llamar conjuntos Borelianos.

Definición 1.28. Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible. Una medida en $\mathcal{A}$ es una función $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que:

I) $\mu(\emptyset) = 0$,

II) $\mu(A) \geq 0, \quad \forall A \in \mathcal{A}$,

III) Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{A}$ disjuntos dos a dos entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

está propiedad es conocida como propiedad de **aditividad**.

A la terna ordenada $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se le conoce como un espacio de medida. En este trabajo se representará el espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ simplemente por X.

Observación 1.29. *Sea P una proposición en X, es decir para todo $x \in X$, $P(x)$ es una proposición. Diremos que P se cumple en **casi toda parte** de X, si existe $E \in \mathcal{A}$ tal que*

- $\{x \in X : P(x) \text{ es falsa}\} \subseteq E.$
- $\mu(E) = 0.$

Definición 1.30. Sean μ una medida y $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) = 0$. Se dice que la medida μ es completa, si para todo $B \subseteq A$ se tiene que $B \in \mathcal{A}$ y $\mu(B) = 0$.

De ahora en adelante en vez de escribir la frase **para casi todo**, escribiremos p.c.t. . Además estaremos interesados en medidas completas, pues esté trabajo se basa en la medida m de Lebesgue que tiene la propiedad de ser una medida completa. La medida m de Lebesgue será definida posteriormente.

Definición 1.31. Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y $f : X \to \mathbb{R}$, decimos que f es $\mathcal{A}$-medible ó simplemente medible, si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto

$$A_\alpha := \{x \in X | f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}.$$

Ejemplo 1.32. La función característica de $E \subseteq X$, denotada por χ_E es una función de X en $\mathbb{R}$ que esta dada por:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

Se puede verificar que si $E \in \mathcal{A}$ entonces χ_E es $\mathcal{A}$-medible.

Observación 1.33. ***Propiedades de la función característica:*** *Sean $A, B \subseteq X$ entonces se tiene lo siguiente:*

- $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$,
- $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$,
- $\chi_{A \triangle B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_{A \cap B}$,
- $\chi_{X \setminus A} = 1 - \chi_A$.

Lema 1.34. *Sean $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y $f : X \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{A}$-medible. Las siguientes proposiciones son equivalentes: para $\alpha \in \mathbb{R}$,*

I) $A_\alpha := \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$.

II) $B_\alpha := \{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$.

III) $C_\alpha := \{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$.

IV) $D_\alpha := \{x \in X : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{A}$.

Teorema 1.35. *Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible. Sean $f : X \to \mathbb{R}$ y $g : X \to \mathbb{R}$ dos funciones $\mathcal{A}$-medibles y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces las funciones αf, f^2, $f + g$, fg y $|f|$ son $\mathcal{A}$-medibles.*

Lema 1.36. *Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones $\mathcal{A}$-medibles entonces $f : X \to \mathbb{R}$ y $F : X \to \mathbb{R}$ definidas por:*

$$f(x) := \inf_{n \in \mathbb{Z}^+} f_n(x) \qquad y \qquad F(x) := \sup_{n \in \mathbb{Z}^+} f_n(x)$$

son $\mathcal{A}$-medibles.

Teorema 1.37. *Sea* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de funciones* $\mathcal{A}$*-medibles. Si* $f^* : X \to \mathbb{R}$ *y* $F^* : X \to \mathbb{R}$ *se definen por:*

$$f^*(x) := \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \quad y \quad F^*(x) := \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$$

entonces f^* *y* F^* *son* $\mathcal{A}$*-medibles.*

Demostración. Primero notemos que

$$f^*(x) := \liminf_{n\to\infty} f_n(x) := \sup_{n\in\mathbb{Z}^+}\left(\inf_{k\geq n} f_k(x)\right) = \sup\{g_1(x), g_2(x), ...\},$$

donde $g_n : X \to \mathbb{R}$ está dada por $g_n(x) := \inf\{f_n(x), f_{n+1}(x), ...\}$ para cada $n \in \mathbb{Z}^+$. Luego por el Lema 1.36 se tiene que g_n es $\mathcal{A}$-medible para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ y en consecuencia, $f^*(x) = \sup\{g_1, g_2, ...\}$ es $\mathcal{A}$-medible. De forma similar se muestra que F^* es $\mathcal{A}$-medible. □

Corolario 1.38. *Sea* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de funciones* $\mathcal{A}$*-medibles de* X *en* $\mathbb{R}$ *tal que* $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *existe en* $\mathbb{R}$ *para casi todo* $x \in X$*. Si definimos* $f : X \to \mathbb{R}$ *por* $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *entonces* f *es* $\mathcal{A}$*-medible.*

Demostración. En este caso, $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$. □

Definición 1.39. Una función $\varphi : X \to \mathbb{R}$ es denominada función simple si su rango es finito.

Observación 1.40. *Sean* $\varphi : X \to \mathbb{R}$ *una función simple,* $Ran\varphi = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ *con* $a_i \neq a_j$ *siempre que* $i \neq j$ *y además, sean*

$$E_i := \{x \in X : \varphi(x) = a_i\} = \varphi^{-1}(\{a_i\}) \quad con \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Entonces:

I) $X = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$,

II) $E_i \cap E_j = \emptyset, \quad i \neq j$,

III) $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$.

Definición 1.41. A la representación de una función simple $\varphi : X \to \mathbb{R}$ dada en la observación 1.40, parte III se le llama representación estándar de φ.

Observación 1.42. *Sea* $\varphi : X \to \mathbb{R}$ *una función simple con representación estándar*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}.$$

Entonces es posible mostrar que φ *es* $\mathcal{A}$*-medible si y sólo si cada* $E_k \in \mathcal{A}$.

En este trabajo estamos interesados en las funciones simples que son $\mathcal{A}$-medibles, por está razón de ahora en adelante cada vez que se considere una función simple, implícitamente se estará exigiendo que esta función sea $\mathcal{A}$-medible.

Teorema 1.43. *Sea $f : E \to \mathbb{R}$ con E un conjunto medible. f es $\mathcal{A}$-medible si y sólo si existe una sucesión $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones simples sobre E tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x) \qquad \forall x \in E$$

y

$$|\varphi_n(x)| \leq |f(x)| \qquad \forall x \in E \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Definición 1.44. Sea φ una función simple y no negativa, con representación estándar

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \chi_{E_i}.$$

Definimos su integral en X, denotada por $\int_X \varphi(x)\, d\mu(x)$, como

$$\int_X \varphi(x)\, d\mu(x) := \sum_{i=1}^{n} a_i \, \mu(E_i).$$

Definición 1.45. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{A}$-medible no negativa, definimos su integral en X por

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) := \sup \left\{ \int_X \varphi(x)\, d\mu(x) : \quad \begin{array}{l} \varphi - \text{simple y no negativa.} \\ \varphi(x) \leq f(x), \ \forall x \in X. \end{array} \right\}$$

Además, definimos la integral de f en $E \subseteq X$ con $E \in \mathcal{A}$ como

$$\int_E f(x)\, d\mu(x) := \int_X f(x)\chi_E(x)\, d\mu(x).$$

Observación 1.46. *Sea $f : X \to \mathbb{R}$. Consideremos las siguientes funciones para $x \in X$,*

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad \text{ y } \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

Entonces f^+ y f^- son funciones no negativas y además $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$. Adicionalmente se puede verificar que si f es $\mathcal{A}$-medible entonces f^+ y f^- son $\mathcal{A}$-medibles.

Definición 1.47. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{A}$-medible. Decimos que f es integrable, si las funciones f^+ y f^- cumplen que

$$\int_X f^+(x) d\mu(x) < +\infty \quad \text{ y } \quad \int_X f^-(x) d\mu(x) < +\infty.$$

En tal caso,

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_X f^+(x) d\mu(x) - \int_X f^-(x) d\mu(x).$$

Además, si $E \subseteq X$ con $E \in \mathcal{A}$ entonces se dice que f es integrable en E si $f\chi_E$ es integrable. Así, dado que $(f\chi_E)^+ = f\chi_E^+$, $(f\chi_E)^- = f\chi_E^-$ entonces

$$\int_E f(x) d\mu(x) = \int_E f^+(x) d\mu(x) - \int_E f^+(x) d\mu(x).$$

Al conjunto de todas las funciones $f : X \to \mathbb{R}$ integrables respecto a la medida $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$, lo denotaremos por $L(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Observación 1.48. *En virtud de la definición anterior, si $f : X \to \mathbb{R}$ es una función $\mathcal{A}$-medible y no negativa entonces f es integrable si*

$$\int_X f(x)d\mu(x) := \sup\left\{\int_X \varphi(x)\, d\mu(x) : \quad \begin{array}{l} \varphi - \textit{simple y no negativa.} \\ \varphi(x) \leq f(x),\ \forall x \in X \end{array}\right\} < +\infty.$$

1.2.1. La σ-álgebra y la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$.

Definición 1.49. Dados los intervalos $J_1, J_2, ..., J_N$ (acotados o no) de $\mathbb{R}$ al producto cartesiano $R = J_1 \times J_2 \times ... \times J_N$ lo denominaremos rectángulo de $\mathbb{R}^N$. Además, definimos el volumen N-dimensional de R por:

$$v(R) = \prod_{i=1}^{N} l(J_i),$$

donde $l(J_i)$ es la longitud del intervalo J_i en $\mathbb{R}$ La medida exterior de Lebesgue es una función $m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$m^*(E) = \text{ínf}\left\{\sum_{i=1}^{\infty} v(R_i) : R_i - \text{rectángulo} \quad \text{y} \quad E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i\right\}$$

para todo $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$.

La medida exterior m^* cumple con todas las propiedades de una medida excepto la propiedad III) (propiedad de adictivida), por lo cual es necesario restringir esta función a una familia de subconjuntos que sea una sigma álgebra y así cumpla la propiedad de adictividad.

Teorema 1.50. *Sea*

$$\mathfrak{M} := \left\{E \subseteq \mathbb{R}^N : m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap (\mathbb{R}^N \backslash E)), \quad \forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)\right\}.$$

Entonces $\mathfrak{M}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}^N$.

Observación 1.51. *A $\mathfrak{M}$ se la conoce como la **σ-álgebra de Lebesgue** en $\mathbb{R}^N$ y a los elementos de esta σ-álgebra se les denomina conjuntos **Lebesgue medibles**.*

Definición 1.52. La **medida de Lebesgue** en $\mathbb{R}^n$ está definida como la restricción de la medida exterior de Lebesgue al conjunto $\mathfrak{M}$, esto es, $m := m^*|_{\mathfrak{M}}$.

$$m(E) = m^*(E), \quad \forall E \in \mathfrak{M}.$$

Teorema 1.53. *La medida de Lebesgue m es una medida completa (Ver definición 1.30).*

Lema 1.54. ***(Borel-Cantelli)*** *Si $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos Lebesgue medibles de $\mathbb{R}$ tal que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < \infty,$$

entonces para casi todo $x \in \mathbb{R}$, x pertenece a lo más a un numero finito de E_k. Es decir,

$$m\left(\{x \in \mathbb{R} : x \text{ pertenece a un número infinito de } E_k\}\right) = 0.$$

Demostración. Ver [8, The Borel-Cantelli Lemma, Pag. 46]. $\square$

Observación 1.55. *A las funciones que pertenecen al conjunto $L(\mathbb{R}^N, \mathfrak{M}, m)$ se les llama* ***Lebesgue integrables.***

Nota: De ahora en adelante trabajaremos con la σ-álgebra y la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ y denotaremos la integral de Lebesgue de una función $f : E \to \mathbb{R}$ sobre $E \subseteq \mathbb{R}^N$ Lebesgue medible por

$$\int_E f(x)dm(x) \overset{not}{=} \int_E f(x)dx.$$

1.2.2. Propiedades de la integral de Lebesgue

La integral de Lebesgue cumple una serie de propiedades clásicas como son la linealidad, monotonia y adictividad con respecto al dominio de integración.

Teorema 1.56. *Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función Lebesgue integrable no negativa. Entonces*

$$f(x) = 0 \;\; \text{p.c.t.} \;\; x \in E \;\; \textit{si y sólo si} \;\; \int_E f(x)dx = 0.$$

Demostración. Ver [8, Proposition 9]. $\square$

Teorema 1.57. *Sea $f : E \to \mathbb{R}$ Lebesgue medible. Entonces, f es Lebesgue integrable si y sólo si $|f|$ es Lebesgue integrable. Además,*

$$\left| \int_E f(x)dx \right| \leq \int_E |f(x)|dx.$$

Demostración. Ver [11, Teorema 5.3]. $\square$

Teorema 1.58. *Si $f : E \to \mathbb{R}$ es Lebesgue integrable entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$\textit{si} \;\; A \subseteq E \;\; \textit{es Lebesgue medible y} \;\; m(A) < \delta \;\; \textit{entonces} \;\; \int_A |f(x)|dx < \epsilon.$$

Demostración. Caso 1: $f > 0$. Sea $\epsilon > 0$, por la definición de integral para funciones no negativas (Ver definición 1.45) existe una función simple

$$\varphi_\epsilon(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}(x)$$

tal que $0 \leq \varphi_\epsilon \leq f$ y

$$\int_E f(x)dx - \int_E \varphi_\epsilon(x)dx < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea

$$M := \max_{x\in E} \varphi_\epsilon(x) = \max\{a_1, a_2, ..., a_n\} > 0.$$

Tomando $\delta = \frac{\epsilon}{2M}$, se tiene que si $m(A) < \delta$ entonces $M\ m(A) < \frac{\epsilon}{2}$. Luego

$$\int_A \varphi_\epsilon(x)dx \leq \int_A M dx = M\ m(A) < \frac{\epsilon}{2}.$$

En consecuencia si $A \subseteq E$ y $m(A) < \delta$ se sigue que

$$\begin{aligned}\int_A f(x)dx &= \int_A (f(x) - \varphi_\epsilon(x))dx + \int_A \varphi_\epsilon(x)dx \\ &\leq \int_E (f(x) - \varphi_\epsilon(x))dx + \int_A \varphi_\epsilon(x)dx \ < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.\end{aligned}$$

Caso general: Se sigue del hecho de que $|f| = f^+ + f^-$ donde $f^+, f^- > 0$. □

Lema 1.59. ***(de Fatou)*** *Sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones Lebesgue medibles no negativas definidas en $E \subseteq \mathbb{R}^N$. Supongamos que $f : E \to \mathbb{R}$ es tal que:*

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \text{p.c.t.} \quad x \in E.$$

Entonces

$$\int_E f(x)dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx. \tag{1.3}$$

Demostración. Ver [11, Lema 4.8]. □

Lema 1.60. ***(Desigualdad de Chebychev)*** *Si $f : E \to \mathbb{R}$ es Lebesgue medible y no negativa entonces para todo $\lambda > 0$ se tiene:*

$$m\left(\{x \in E | f(x) \geq \lambda\}\right) \leq \frac{1}{\lambda} \int_E f(x)dx.$$

Teorema 1.61. ***(Convergencia dominada de Lebesgue)*** *Sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones Lebesgue medibles definidas en E. Supongamos que existe una función $f : E \to \mathbb{R}$ tal que:*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \text{p.c.t.} \quad x \in E.$$

Si existe $g : E \to \mathbb{R}$ Lebesgue integrable tal que

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad y \quad \forall x \in E,$$

entonces f es Lebesgue integrable y

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

1.3. Algunos espacios funcionales

En esta sección se exhibirán alguno espacios funcionales y se enunciarán algunas de sus propiedades, esto es fundamental para definir más adelante los espacios funcionales que surgen en el tratamiento de ecuaciones diferenciales parabólicas.

1.3.1. El espacio $L_p(E)$

Definición 1.62. a) Sean $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p < +\infty$, $E \subseteq \mathbb{R}^N$. Entonces

$$L_p(E) := \left\{ f : E \to \mathbb{R} : f \text{ es medible y } \int_E |f(x)|^p dx < +\infty \right\}.$$

Además, si definimos:

$$\begin{array}{rl} \|.\|_p : L_p(E) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ f & \longmapsto (\int_E |f(x)|^p dx)^{1/p} \end{array}$$

entonces $\|.\|_p$ es una norma en $L_p(E)$.

b) Sean $p = +\infty$ y $E \subseteq \mathbb{R}^N$. Entonces

$$L_\infty(E) := \left\{ f : E \to \mathbb{R} : \begin{array}{c} f \text{ es medible y existe una constante } C \\ \text{tal que } |f(x)| \leq C \qquad \text{p.c.t.} \quad x \in E \end{array} \right\}.$$

A estos C se les conoce como cotas esenciales y si $f \in L_\infty(E)$ se dice que f es esencialmente acotada.
Además,

$$\begin{array}{rl} \|.\|_\infty : L_\infty(E) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ f & \longmapsto \text{ínf}\{C : |f(x)| \leq C \qquad \text{p.c.t.} \quad x \in E\} \end{array}$$

es una norma en $L_\infty(E)$.

En la definición anterior se tiene en cuenta la relación

$$f(x) = g(x) \qquad \text{p.c.t.} \quad x \in E.$$

Observación 1.63. *Sea $G \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto. El espacio $L_2(G)$ es un espacio de Hilbert con el producto interior*

$$(f|g)_{L_2(G)} := \int_G f(x)g(x)dx.$$

Observación 1.64. *Para $1 < p < +\infty$, $E \subseteq \mathbb{R}^N$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, (q es llamado el conjugado de p):*

- *$L_p(E)$ es separable.*
- *$L_p(E)$ es completo.*
- *El dual de $L_p(E)$ es $L_q(E)$.*

Para $p = 1$, $L_p(E)$ es separable, completo y su dual topológico es $L_\infty(E)$, mientras que $L_\infty(E)$ no es separable pero si es completo, además su dual contiene estrictamente a $L_1(E)$.

Teorema 1.65. *Sea $1 \leq p \leq \infty$ y q el conjugado de p. Si $f \in L_p(E)$ y $g \in L_q(E)$ entonces $fg \in L_1(E)$ y además*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Teorema 1.66. *Sea $1 \leq p \leq \infty$. Si $f, g \in L_p(E)$ entonces $f + g \in L_p(E)$ y además*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p .$$

1.3.2. El espacio $C_0^\infty(G)$

Definición 1.67. (soporte) Sea $f : G \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Sea $\{W_i\}_{i \in I}$ la colección de todos los abiertos W_i de $\mathbb{R}^N$ tales que $f(x) = 0$ para casi todo $x \in W_i$. Sea

$$W = \bigcup_{i \in I} W_i.$$

El soporte de f denotado por $\operatorname{supp} f$ se define como $\operatorname{supp} f := G \backslash W$.

Observación 1.68.

- *Si f es continua entonces* $\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in G : f(x) \neq 0\}}$.
- *Se dice que una función f tiene soporte compacto si* $\operatorname{supp} f$ *es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^N$.*

Definición 1.69. Sea $G \subseteq \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto no vacio. Denotamos el conjunto de todas las funciones infinitamente diferenciables de soporte compacto incluido en G por $C_0^\infty(G)$, es decir

$$\begin{aligned} C_0^\infty(G) := \{f : G \to \mathbb{R} \mid\ & f \text{ es infinitamente diferenciable,} \\ & \operatorname{supp} f \subset G \text{ es compacto}\} . \end{aligned}$$

Lema 1.70. ***(Lema variacional)*** *Sea $G \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto no vacio. Sea $u \in L_1(G)$ tal que*

$$\int_G u(x)\phi(x)dx = 0 \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(G),$$

entonces

$$u(x) = 0 \qquad \text{p.c.t.} \quad x \in G.$$

Definición 1.71. (**Derivada débil**) Sean $E \subseteq \mathbb{R}$ y $f \in L_2(E)$. Decimos que f es diferenciable en el sentido débil, si existe una función $g \in L_2(E)$ tal que para todo $\phi \in C_0^\infty(E)$, se tiene que

$$\int_E f(x)\phi'(x)dx = -\int_E g(x)\phi(x)dx.$$

A la función g se le llama la derivada débil de f y se denota por $g \overset{not}{=} f'$.

Capítulo 2

Integral de Bochner

En este capítulo se presentará la construcción de la integral de Bochner y algunas de sus propiedades más significativas. La integral de Bochner busca de cierta manera ampliar los conceptos de la integral de Lebesgue, pues mientras en la integral de Lebesgue se trabaja con funciones de $E \subseteq \mathbb{R}^N$ a $\mathbb{R}$, en la integral de Bochner se trabaja con funciones de dominio $E \subseteq \mathbb{R}^N$ y cuyo codominio es un espacio de Banach. Sin embargo, en este trabajo se estudiará un caso particular, el caso de funciones definidas en un intervalo acotado $I \subseteq \mathbb{R}$ con valores en $(X, \|\cdot\|_X)$, donde $(X, \|\cdot\|_X)$ representará un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$. Esto permitirá comprender mejor la *idea básica de la construcción de la integral de Bochner* y hará fácil el análisis para el caso general.
La definición de la integral de Bochner es fundamental para abordar los espacios que surgen al plantear la formulación variacional para la solución de las ecuaciones diferenciales parciales evolutivas. Es decir en concreto, este concepto nos ayudará en la definición de los espacios $L_p(0, T; X)$ y $W_p^1(0, T; V, H)$, en los cuales se garantizará bajo ciertas condiciones, la existencia y unicidad de soluciones de este tipo de ecuaciones.
Para la construcción de la integral de Bochner primero se precisará la integral para cierta clase de funciones, denominadas funciones simples, con base en estas funciones se definirá la noción de función Bochner medible y función Bochner integrable, habiendo introducido estos conceptos, finalmente se podrá definir la integral de Bochner para funciones en general.

2.1. Integral de Bochner para funciones simples

Definición 2.1. Sean I un intervalo acotado de $\mathbb{R}$ y $(X, \|.\|_X)$ un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$.

a) Una función $f : I \to X$ es llamada simple si existen puntos $a_1, a_2, ..., a_n \in X$ y subconjuntos Lebesgue medibles $E_1, E_2, ..., E_n$ de I tales que

$$I = \bigcup_{i=1}^{n} E_i, \qquad E_i \cap E_j = \emptyset \text{ si } i \neq j$$

y

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}(t) a_i \quad \forall t \in I. \tag{2.1}$$

Si los conjuntos E_i son subintervalos de I entonces la función f es llamada función escalonada.

b) La integral de Bochner sobre I de una función simple f se define por

$$\int_I f(t)dt := \sum_{i=1}^{n} m(E_i) a_i. \tag{2.2}$$

Si $E \subseteq I$ es un conjunto Lebesgue medible entonces definimos la integral de Bochner de f sobre E como

$$\int_E f(t)dt := \sum_{i=1}^{n} m(E_i \cap E) a_i. \tag{2.3}$$

Nota: La definición anterior es una extensión de la definición de integral para funciones simples dada en el capitulo anterior para funciones cuyo codominio es $\mathbb{R}$.

Observación 2.2. *Sean $f : I \to X$ una función simple y $E \subseteq I$ un conjunto Lebesgue medible.*

I) *Debido a que X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ se tiene que*

$$\int_E f(t)dt := \sum_{i=1}^{n} m(E_i \cap E) a_i \in X.$$

II) *Si $m(E) = 0$ entonces, puesto que la medida de Lebesgue es completa (Ver Teorema 1.53) se tiene que $m(E_i \cap E) = 0$, y así:*

$$\int_E f(t)dt := \sum_{i=1}^{n} m(E_i \cap E) a_i = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot a_i = 0_X.$$

III) *Si $f(t) = 0_X$ para todo $t \in E$ entonces*

$$\int_E f(t)dt := \sum_{i=1}^{n} m(E_i \cap E) a_i = \sum_{i=1}^{n} m(E_i \cap E) 0_X = 0_X.$$

IV) *Notemos que*

$$\int_E f(t)dt = \int_I \chi_E(t) f(t)dt. \tag{2.4}$$

Al igual que en la integral de Lebesgue en la integral de Bochner tienen lugar los siguientes resultados. Las demostraciones de estos hechos son similares a las pruebas clásicas de la integral de Lebesgue que pueden encontrarse en textos como Bartle[11] o Royden[8].

Lema 2.3. *Sean $f : I \to X$, $g : I \to X$ funciones simples y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces $\alpha f, f+g$ son funciones simples y*

$$\int_I \alpha f(t)dt = \alpha \int_I f(t)dt, \qquad \int_I (f(t)+g(t))dt = \int_I f(t)dt + \int_I g(t)dt. \tag{2.5}$$

además

$$\left\| \int_I f(t)dt \right\|_X \leq \int_I \|f(t)\|_X dt. \tag{2.6}$$

Teorema 2.4. *Sean $E, F \subseteq I$ conjuntos Lebesgue medibles y $f : I \to X$ una función simple. Entonces*

$$\int_{E\cup F} f(t)dt = \int_E f(t)dt + \int_F f(t)dt - \int_{E\cap F} f(t)dt.$$

Teorema 2.5. *Sean $E \subseteq I$ un conjunto Lebesgue medible y $f : I \to X$, $g : I \to X$ funciones simples. Si*

$$f(t) = g(t) \qquad \text{p.c.t.} \quad t \in E$$

entonces

$$\int_E f(t)dt = \int_E g(t)dt.$$

2.2. Funciones Bochner integrables

Definición 2.6. Sea $(X, \|.\|_X)$ un espacio de Banach. Una función $f : I \to X$ es llamada Bochner medible si existe una sucesión de funciones simples $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(t) - f(t)\|_X = 0 \qquad \text{p.c.t.} \quad t \in I. \tag{2.7}$$

Si adicionalmente, $\|f_n - f\|_X$ es Lebesgue integrable para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \|f_n(t) - f(t)\|_X dt = 0 \tag{2.8}$$

entonces f es llamada **Bochner integrable**.

Observación 2.7. *Notemos que si f es una función simple entonces f satisface trivialmente la ecuación 2.7, es decir f es Bochner medible.*

Lema 2.8. *Consideremos el espacio de Banach $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_1)$ donde*

$$\|x\|_1 := |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_N| \qquad \forall x = (x_1, x_2, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N.$$

Sea $f : [0,T] \to \mathbb{R}^N$ dada por $f(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_N(t))$. Entonces f es Bochner integrable si y sólo si f_k es Lebesgue integrable para todo $k = 1, 2, ..., N$.

Demostración. $\Rightarrow$) Si f es Bochner integrable entonces existe una sucesión de funciones simples $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ que satisface la definición 2.6. Ahora, por definición de función simple para cada $n \in \mathbb{Z}^+$

$$g_n(t) = \sum_{i=1}^{m_n} \chi_{E_{in}}(t)a_{in}$$

con $m_n \in \mathbb{Z}^+$, $a_{in} = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, ..., a_N^{(i)}) \in \mathbb{R}^N$ y $E_{in} \subseteq [0,T]$ conjuntos Lebesgue medibles que satisfacen la definición 2.1. Notemos que para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, la función g_n es de la forma

$$g_n = (g_1^{(n)}, g_2^{(n)}, ..., g_N^{(n)}),$$

donde

$$g_k^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^{m_n} \chi_{E_{in}}(t)a_k^{(i)} \quad \text{para} \quad k = 1, 2, ...N. \tag{2.9}$$

y así cada $g_k^{(n)}$ es Lebesgue medible. (Cada $g_k^{(n)}$ es una combinación lineal de funciones características de conjuntos Lebesgue medibles.) Ahora, como f es Bochner integrable entonces f es Bochner medible, esto es

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n(t) - f(t)\|_1 = 0 \qquad \text{p.c.t.} \quad t \in [0,T]$$

o equivalentemente,

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left|g_1^{(n)}(t) - f_1(t)\right| + \left|g_2^{(n)} - f_2(t)\right| + \cdots + \left|g_N^{(n)}(t) - f_N(t)\right|\right] = 0 \qquad \text{p.c.t.} \quad t \in [0,T];$$

así

$$\lim_{n\to\infty} \left|g_k^{(n)}(t) - f_k(t)\right| = 0 \qquad \text{p.c.t.} \quad t \in [0,T] \quad \forall k \in \{1, 2, ..., N\},$$

y de aquí

$$\lim_{n\to\infty} g_k^{(n)}(t) = f_k(t) \qquad \text{p.c.t.} \quad t \in [0,T] \quad \forall k \in \{1, 2, ..., N\}.$$

En consecuencia f_k es Lebesgue medible para $k = 1, 2, ...N$ pues es el límite de funciones Lebesgue medibles (Ver Corolario 1.38). Ahora demostremos que f_k es Lebesgue integrable para $k = 1, 2, ..., N$. En efecto, sea $k = 1, 2, ..., N$. Puesto que por hipótesis la sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ cumple la definición 2.6 entonces en particular esta sucesión tiene la propiedad de que la función $\|g_n - f\|_1$ es Lebesgue integrable para cada $n \in \mathbb{Z}^+$; luego

$$\left|g_k^{(n)}(t) - f_k(t)\right| \leq \|g_n(t) - f(t)\|_1 \qquad \forall t \in [0,T],$$

y

$$\int_{[0,T]} \left|g_k^{(n)}(t) - f_k(t)\right| dt \leq \int_{[0,T]} \|g_n(t) - f(t)\|_1 dt < \infty.$$

Por lo cual para $k = 1, 2, ..., N$ la función $\left|g_k^{(n)} - f_k\right|$ es Lebesgue integrable y así por el Teorema 1.57 se tiene que $g_k^{(n)} - f_k$ es Lebesgue integrable; además de (2.9) se tiene que

$$\int_{[0,T]} g_k^{(n)}(t)dt = \sum_{i=1}^{m_n} m(E_{in})a_1^{(i)} < \infty \quad \text{para} \quad k = 1, 2, ...N,$$

de donde $g_k^{(n)}$ es Lebesgue integrable para $k = 1, 2, ..., N$. En consecuencia se tiene que $f_k = g_k^{(n)} - (g_k^{(n)} - f_k)$ es Lebesgue integrable para cada $k = 1, 2, ...N$.

$\Leftarrow$) Por otro lado, si para todo $k = 1, 2, ..., N$ se tiene que f_k es Lebesgue integrable entonces f_k es Lebesgue medible para todo $k = 1, 2, ..., N$, así por el Teorema 1.43, para cada $k \in \{1, 2, ..., N\}$ existe una sucesión $\left\{\varphi_n^{(k)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones simples tal que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n^{(k)}(t) = f_k(t) \qquad \forall t \in [0, T] \tag{2.10}$$

y

$$\left|\varphi_n^{(k)}(t)\right| \leq |f_k(t)| \qquad \forall t \in [0, T] \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+. \tag{2.11}$$

Definamos para $n \in \mathbb{Z}^+$, $g_n : [0, T] \to \mathbb{R}^N$ dada por $g_n := (\varphi_n^{(1)}, \varphi_n^{(2)}, ..., \varphi_n^{(N)})$, notemos que cada g_n es una función simple pues

$$g_n(t) = \sum_{i=1}^{M} \chi_{F_i}(t) \left(\varphi_n^{(1)}(t), \varphi_n^{(2)}(t), ..., \varphi_n^{(N)}(t)\right) \qquad \forall t \in [0, T], \tag{2.12}$$

donde $M \in \mathbb{Z}^+$ y $F_i = g_i^{-1}\left(\left\{(\varphi_n^{(1)}(t), \varphi_n^{(2)}(t), ..., \varphi_n^{(N)}(t))\right\}\right)$ para $i = 1, ..., M$ y $t \in [0, T]$. Observemos que para todo $t \in [0, T]$ se verifica

$$\|g_n(t) - f(t)\|_1 = \left|\varphi_n^{(1)}(t) - f_1(t)\right| + \left|\varphi_n^{(2)}(t) - f_2(t)\right| + \cdots + \left|\varphi_n^{(N)}(t) - f_N(t)\right|,$$

y en consecuencia, de (2.10) se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n(t) - f(t)\|_1 = 0 \qquad \forall t \in [0, T].$$

Además, de (2.11) se obtiene

$$\begin{aligned} \|g_n(t) - f(t)\|_1 &= \left|\varphi_n^{(1)}(t) - f_1(t)\right| + \left|\varphi_n^{(2)}(t) - f_2(t)\right| + \cdots + \left|\varphi_n^{(N)}(t) - f_N(t)\right| \\ &\leq \left|\varphi_n^{(1)}(t)\right| + |f_1(t)| + \left|\varphi_n^{(2)}(t)\right| + |f_2(t)| + \cdots + \left|\varphi_n^{(N)}(t)\right| + |f_N(t)| \\ &\leq 2|f_1(t)| + 2|f_2(t)| + \cdots + 2|f_N(t)|. \end{aligned}$$

Por lo cual teniendo en cuenta que cada f_k es Lebesgue integrable y utilizando el teorema de convergencia dominada de Lebesgue se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,T]} \|g_n(t) - f(t)\|_1 dt = 0.$$

De lo anterior se puede concluir que f es Bochner integrable. $\square$

Definición 2.9. Sean $E \subseteq I$ un conjunto Lebesgue medible y $f : I \to X$ una función Bochner integrable. Definimos la integral de Bochner de f sobre E, denotada por $\int_E f(t)dt$, como un elemento de X que satisface lo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \int_E f(t)dt - \int_I \chi_E(t) f_n(t)dt \right\|_X = 0, \tag{2.13}$$

donde $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones simples que cumple la definición 2.6.

Observación 2.10. *Teniendo en cuenta la desigualdad*

$$\Big| \|f_n(t)\|_X - \|f(t)\|_X \Big| \leq \|f_n(t) - f(t)\|_X \qquad \forall t \in I,$$

la ecuación (2.7) implica

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(t)\|_X = \|f(t)\|_X \qquad \text{p.c.t.} \quad t \in I. \tag{2.14}$$

Además, (2.13) es equivalente a:

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \chi_E(t) f_n(t)dt = \int_E f(t)dt. \tag{2.15}$$

Observación 2.11. *Para verificar que la definición 2.9 es correcta, por la observación anterior se debe mostrar que para cualquier sucesión* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de funciones simples que satisface la definición 2.6, se tiene que la sucesión*

$$\left\{ \int_I \chi_E(t) f_n(t)dt \right\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X \tag{2.16}$$

es convergente en X *y que su limite es independiente de la sucesión* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$*.En efecto, debido a que* X *es un espacio completo para mostrar la convergencia de* (2.16) *es suficiente probar que dicha sucesión es de Cauchy. Para ello observemos que*

$$\begin{aligned}\left\| \int_I \chi_E(t) f_n(t)dt - \int_I \chi_E(t) f_m(t)dt \right\|_X &= \left\| \int_I (\chi_E(t) f_n(t) - \chi_E(t) f_m(t))dt \right\|_X \\ &\leq \int_I \|\chi_E(t) f_n(t) - \chi_E(t) f_m(t)\|_X dt\end{aligned}$$

y como

$$\|\chi_E(t) f_n(t) - \chi_E(t) f_m(t)\|_X \leq \chi_E(t) \|f_n(t) - f(t)\|_X + \chi_E(t) \|f_m(t) - f(t)\|_X \quad \forall t \in I,$$

entonces

$$\begin{aligned}\left\| \int_I \chi_E(t) f_n(t)dt - \int_I \chi_E(t) f_m(t)dt \right\|_X &\leq \int_I (\chi_E(t) \|f_n(t) - f(t)\|_X + \chi_E(t) \|f_m(t) - f(t)\|_X)dt \\ &= \int_I \chi_E(t) \|f_n(t) - f(t)\|_X dt + \int_I \chi_E(t) \|f_m(t) - f(t)\|_X dt \\ &= \int_E \|f_n(t) - f(t)\|_X dt + \int_E \|f_m(t) - f(t)\|_X dt.\end{aligned}$$

Así, puesto que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *satisface* (2.8) *se obtiene el resultado deseado. Ahora, para mostrar que no hay dependencia de la sucesión escogida tomemos* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *y* $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ *dos sucesiones de funciones simples que verifican* (2.7) *y* (2.8)*. Entonces siguiendo un procedimiento similar al anterior se obtiene*

$$\left\| \int_I \chi_E(t) f_n(t)dt - \int_I \chi_E(t) g_n(t)dt \right\|_X \leq \int_E \|f_n(t) - f(t)\|_X dt + \int_E \|g_n(t) - f(t)\|_X dt.$$

Teniendo en cuenta (2.8) *y la continuidad de la norma se tiene:*

$$\left\| \lim_{n\to\infty} \left(\int_I \chi_E(t) f_n(t)dt - \int_I \chi_E(t) g_n(t)dt \right) \right\|_X = 0.$$

En consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \chi_E(t) f_n(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_I \chi_E(t) g_n(t)dt.$$

Ejemplo 2.12. Sea $f : [0,T] \to \mathbb{R}^N$ la función dada en el ejemplo 2.8. Si f es Bochner integrable entonces

$$\int_0^T f(t)dt = \left(\int_{[0,T]} f_1(t)dt, \int_{[0,T]} f_2(t)dt, ..., \int_{[0,T]} f_N(t)dt \right),$$

donde

$$\int_{[0,T]} f_k(t)dt \qquad \forall k \in \{1,2,...,N\}$$

es la integral de Lebesgue de f_k.

En efecto, de acuerdo con la observación 2.11, el cálculo de la integral de Bochner no depende de la sucesión de funciones simples que satisfacen la definición 2.6. Entonces tomemos la sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada en (2.12), es decir

$$g_n(t) = \sum_{i=1}^{M} \chi_{F_i}(t) \left(\varphi_n^{(1)}(t), \varphi_n^{(2)}(t), ..., \varphi_n^{(N)}(t)\right) \qquad \forall t \in [0,T];$$

así

$$\begin{aligned}
\int_0^T f(t)dt &= \lim_{n\to\infty} \int_0^T g_n(t)dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^T \sum_{i=1}^{M} \chi_{F_i}(t) \left(\varphi_n^{(1)}(t), \varphi_n^{(2)}(t), ..., \varphi_n^{(N)}(t)\right) dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{M} m(F_i) \left(\varphi_n^{(1)}(t), \varphi_n^{(2)}(t), ..., \varphi_n^{(N)}(t)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{M} m(F_i)\varphi_n^{(1)}(t), \sum_{i=1}^{M} m(F_i)\varphi_n^{(2)}(t), ..., \sum_{i=1}^{M} m(F_i)\varphi_n^{(N)}(t) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\int_{[0,T]} \varphi_n^{(1)}(t)dt, \int_{[0,T]} \varphi_n^{(2)}(t)dt, ..., \int_{[0,T]} \varphi_n^{(N)}(t)dt \right) \\
&= \left(\lim_{n\to\infty} \int_{[0,T]} \varphi_n^{(1)}(t)dt, \lim_{n\to\infty} \int_{[0,T]} \varphi_n^{(2)}(t)dt, ..., \lim_{n\to\infty} \int_{[0,T]} \varphi_n^{(N)}(t)dt \right) \\
&= \left(\int_{[0,T]} f_1(t)dt, \int_{[0,T]} f_2(t)dt, ..., \int_{[0,T]} f_N(t)dt \right).
\end{aligned}$$

La última igualdad se da por el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue pues del ejemplo 2.8 se tiene que cada f_k es Lebesgue integrable y además que para todo $k = 1,2,...,N$ la sucesión $\left\{\varphi_n^{(k)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ satisface las ecuaciones (2.10) y (2.11).

Observación 2.13. *Consideremos el espacio de Banach* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. *Si* $f : I \to \mathbb{R}$ *entonces de los ejemplos 2.8 y 2.12 se tiene que* f *es integrable en el sentido de Bochner si y sólo si* f *es Lebesgue integrable y además que las integrales de Bochner y de Lebesgue coinciden para este caso particular.*

Teorema 2.14. *Si* $f : I \to X$ *es una función Bochner medible entonces* $\|f\|_X : I \to \mathbb{R}$ *es una función Lebesgue medible.*

Demostración. Por definición de función Bochner medible existe una sucesión de funciones simples $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ que cumplen la ecuación (2.14). Luego tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(t)\|_X = \|f(t)\|_X \qquad \text{p.c.t.} \quad t \in I.$$

Es decir, $\|f\|_X$ es el límite de funciones Lebesgue medibles y en consecuencia del Corolario 1.38 se tiene que $\|f\|_X$ es Lebesgue medible. □

Teorema 2.15. *Sean* $f : I \to X$, $g : I \to X$ *dos funciones Bochner integrables,* $\alpha \in \mathbb{R}$ *y* $E \subseteq I$ *un conjunto Lebesgue medible. Entonces* $\alpha f + g$ *es Bochner integrable y*

$$\int_E (\alpha f(t) + g(t))dt = \alpha \int_E f(t)dt + \int_E g(t)dt. \tag{2.17}$$

Demostración. Sean f, g dos funciones Bochner integrables y $\alpha \in \mathbb{R}$. Luego existen dos sucesiones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones simples que satisfacen (2.7) y (2.8). Por lema 2.3, $\{\alpha f_n + g_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones simples. Ahora, de (2.7) tenemos que existen dos conjuntos E_1, E_2 de medida cero tales que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(t) - f(t)\|_X = 0 \qquad \forall t \in I \backslash E_1$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n(t) - g(t)\|_X = 0 \qquad \forall t \in I \backslash E_2.$$

Además, puesto que para todo $t \in I$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|(\alpha f_n(t) + g_n(t)) - (\alpha f(t) + g(t))\|_X &\leq \|\alpha f_n(t) - \alpha f(t)\|_X + \|g_n(t) - g(t)\|_X \\ &= |\alpha| \, \|f_n(t) - f(t)\|_X + \|g_n(t) - g(t)\|_X \,, \end{aligned} \tag{2.18}$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \|(\alpha f_n(t) + g_n(t)) - (\alpha f(t) + g(t))\|_X = 0 \qquad \forall t \in I \backslash (E_1 \cup E_2),$$

donde $m(E_1 \cup E_2) \leq m(E_1) + m(E_2) = 0$. En conclusión, $\alpha f + g$ es Bochner medible.

Por otro lado integrando sobre I ambos lados de la desigualdad (2.18), utilizando la monotonía y linealidad de la integral de Lebesgue se obtiene

$$\int_I \|(\alpha f_n(t) + g_n(t)) - (\alpha f(t) + g(t))\|_X dt \leq |\alpha| \int_I \|f_n(t) - f(t)\|_X dt + \int_I \|g_n(t) - g(t)\|_X dt.$$

De donde

$$\lim_{n\to\infty}\int_I \|(\alpha f_n(t)+g_n(t))-(\alpha f(t)+g(t))\|_X dt = 0.$$

En consecuencia, $\alpha f + g$ es Bochner integrable.

Adicionalmente de (2.15) y utilizando la linealidad de la integral de Bochner para funciones simples se obtiene:

$$\begin{aligned}
\int_E (\alpha f(t)+g(t))dt &= \lim_{n\to\infty}\int_I \chi_E(t)\left(\alpha f_n(t)+g_n(t)\right)dt \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\alpha\int_I \chi_E(t) f_n(t)dt + \int_I \chi_E(t) g_n(t)dt\right] \\
&= \alpha\lim_{n\to\infty}\int_I \chi_E(t) f_n(t)dt + \lim_{n\to\infty}\int_I \chi_E(t) g_n(t)dt \\
&= \alpha\int_E f(t)dt + \int_E g(t)dt.
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 2.16. ***(de Bochner)*** *Sea $f : I \to X$ una función Bochner medible. Entonces f es una función Bochner integrable si y sólo si $\|f\|_X : I \to \mathbb{R}$ es una función Lebesgue integrable.*

Demostración. Sea $f : I \to X$ una función Bochner medible. Entonces existe una sucesión de funciones simples $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ que satisface (2.7) y además por el Teorema 2.14 $\|f\|_X$ es Lebesgue medible.

$\Rightarrow$) Supongamos que f es Bochner integrable, luego la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisface

$$\lim_{n\to\infty}\int_I \|f_n(t)-f(t)\|_X dt = 0.$$

Por lo cual, existe $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$\int_I \|f_{n_0}(t)-f(t)\|_X dt < 1.$$

Pero,

$$\|f(t)\|_X \le \|f_{n_0}(t)-f(t)\|_X + \|f_{n_0}(t)\|_X \qquad \forall t\in I.$$

De donde,

$$\int_I \|f(t)\|_X dt \le \int_I \|f_{n_0}(t)-f(t)\|_X dt + \int_I \|f_{n_0}(t)\|_X dt < 1 + \int_I \|f_{n_0}(t)\|_X dt < \infty.$$

En consecuencia, $\|f\|_X$ es Lebesgue integrable.

$\Leftarrow$) Supongamos que f es Lebesgue integrable. Por hipótesis la sucesión de funciones $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(t) - f(t)\|_X = 0 \qquad \text{p.c.t.} \quad t \in I.$$

Luego existe un conjunto $F \subseteq I$ de medida cero tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(t) - f(t)\|_X = 0 \qquad \forall t \in I \backslash F. \tag{2.19}$$

De la desigualdad

$$\Big| \|f_n(t)\|_X - \|f(t)\|_X \Big| \leq \|f_n(t) - f(t)\|_X \,, \qquad t \in I \backslash F,$$

se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(t)\|_X = \|f(t)\|_X \qquad \forall t \in I \backslash F.$$

De aquí, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow \Big| \|f_n(t)\|_X - \|f(t)\|_X \Big| < \epsilon. \tag{2.20}$$

Definamos para $n \in \mathbb{Z}^+$ las funciones simples $g_n : I \to X$ dadas por:

$$g_n(t) = \begin{cases} f_n(t), & \|f_n(t)\|_X < 2\,\|f(t)\|_X \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Mostremos que

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n(t) - f(t)\|_X = 0 \qquad \text{p.c.t.} \quad t \in I. \tag{2.21}$$

En efecto, sea $t \in I \backslash F$ fijo.

- Si $\|f(t)\|_X = 0$ entonces $g_n(t) = 0$, por lo cual

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n(t) - f(t)\|_X = 0.$$

- Si $\|f(t)\|_X \neq 0$ entonces tomamos $\epsilon = \|f(t)\|_X > 0$ en (2.20) para obtener

$$n \geq N \Rightarrow \|f_n(t)\|_X < 2\,\|f(t)\|_X$$

  y así,

$$g_n(t) = f_n(t) \qquad \forall n \geq N.$$

  Entonces teniendo en cuenta (2.19) se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n(t) - f(t)\|_X = \lim_{n\to\infty} \|f_n(t) - f(t)\|_X = 0 \quad \text{si} \quad \|f(t)\|_X \neq 0.$$

Es decir, para todo $t \in I \setminus F$ la sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a f. Por lo tanto debido a que F es un conjunto de medida cero se verifica (2.21). Por otro lado,

$$\|g_n(t) - f(t)\|_X \leq \|g_n(t)\|_X + \|f(t)\|_X < 3\,\|f(t)\|_X \quad \forall t \in I.$$

En consecuencia por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \|g_n(t) - f(t)\|_X dt = \int_I \lim_{n\to\infty} \|g_n(t) - f(t)\|_X dt = 0.$$

Luego existe una sucesión de funciones simples $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ que cumple (2.7) y (2.8). Por tanto f es Bochner integrable. □

Observación 2.17. *Sean $E \subseteq I$ un conjunto Lebesgue medible y $f : I \to X$ una función Bochner integrable. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de funciones simples garantizada por la definición 2.6. Como*

$$\|f(t)\|_X \leq \|f_n(t) - f(t)\|_X + \|f_n(t)\|_X \qquad \forall t \in I,$$

entonces de la monotonía de la integral de Lebesgue se sigue que

$$\int_E \|f(t)\|_X dt \leq \int_E \|f_n(t) - f(t)\|_X dt + \int_E \|f_n(t)\|_X dt.$$

Así,

$$\int_E \|f(t)\|_X dt \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E \|f_n(t)\|_X dt.$$

Ahora, de la siguiente desigualdad:

$$\|f_n(t)\|_X \leq \|f_n(t) - f(t)\|_X + \|f(t)\|_X \qquad \forall t \in I,$$

obtenemos:

$$\int_E \|f(t)\|_X dt \geq \limsup_{n\to\infty} \int_E \|f_n(t)\|_X dt.$$

En consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \|f_n(t)\|_X dt = \int_E \|f(t)\|_X dt. \tag{2.22}$$

Corolario 2.18. *Sea $f : I \to X$ una función Bochner integrable y $E \subseteq I$ un conjunto Lebesgue medible. Entonces*

$$\left\| \int_E f(t)dt \right\|_X \leq \int_E \|f(t)\|_X dt. \tag{2.23}$$

Demostración. Sea f una función Bochner integrable. Por el teorema 2.16 $\|f\|_X$ es Lebesgue integrable. Sea $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de funciones simples garantizada por la definición 2.6. Utilizando (2.15), (2.22) y teniendo en cuenta el lema 2.3 se tiene

$$\begin{aligned}
\left\| \int_E f(t)dt \right\|_X &= \left\| \lim_{n\to\infty} \int_I \chi_E(t) f_n(t) dt \right\|_X = \lim_{n\to\infty} \left\| \int_I \chi_E(t) f_n(t) dt \right\|_X \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \int_I \|\chi_E(t) f_n(t)\|_X dt = \lim_{n\to\infty} \int_I \chi_E(t)\, \|f_n(t)\|_X dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_E \|f_n(t)\|_X dt \qquad = \int_E \|f(t)\|_X dt.
\end{aligned}$$

□

Corolario 2.19. ***(Continuidad absoluta de la integral de Bochner)***
Si $f : I \to X$ es una función Bochner integrable entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que para todo subconjunto Lebesgue medible E de I con $m(E) < \delta$ tenemos que:

$$\left\| \int_E f(t)dt \right\|_X < \epsilon.$$

Demostración. Puesto que f es Bochner integrable entonces $\|f\|_X$ es Lebesgue integrable y además se verifica (2.23). Así, del teorema 1.58 se obtiene el resultado, es decir, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad m(E) < \delta \quad \text{entonces} \left\| \int_E f(t)dt \right\|_X \leq \int_E \|f(t)\|_X dt < \epsilon.$$

$\square$

Teorema 2.20. *Sea $f : I \to X$ una función Bochner medible y sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones Bochner integrables tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(t) - f(t)\|_X = 0 \qquad \text{p.c.t.} \quad t \in I.$$

Si existe una función $g : I \to \mathbb{R}$ Lebesgue integrable tal que $\|f_n(t)\|_X \leq g(t)$ para casi todo $t \in I$ y para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces f es Bochner integrable y para todo $E \subseteq I$ Lebesgue medible se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(t)dt = \int_E f(t)dt. \tag{2.24}$$

Demostración. Debido a que $\|f_n(t)\|_X \leq g(t)$ para casi todo $t \in I$ y para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ entonces

$$\|f(t)\|_X = \lim_{n\to\infty} \|f_n(t)\|_X \leq \lim_{n\to\infty} g(t) = g(t) \qquad \text{p.c.t.} \quad t \in I$$

y en consecuencia

$$\|f_n(t) - f(t)\|_X \leq \|f_n(t)\|_X + \|f(t)\|_X \leq 2g(t) \qquad \text{p.c.t.} \quad t \in I, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+. \tag{2.25}$$

Por la monotonía de la integral de Lebesgue la función $\|f - f_n\|_X$ es Lebesgue integrable para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, además por hipótesis se tiene que $f - f_n$ es Bochner medible para $n \in \mathbb{Z}^+$ (suma de funciones Bochner medibles). Así del Teorema de Bochner (Ver Teorema 2.16) se tiene que $f - f_n$ es Bochner integrable para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y en consecuencia $f = (f - f_n) + f_n$ es Bochner integrable.
Por otro lado como $\|f_n(t) - f(t)\|_X \to 0$ para casi todo $t \in I$, $n \to \infty$; entonces del Teorema de convergencia dominada de Lebesgue teniendo en cuenta (2.25) se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \|f_n(t) - f(t)\|_X dt = 0,$$

por lo cual de (2.23) se obtiene:

$$\left\| \int_E f_n(t)dt - \int_E f(t)dt \right\|_X = \left\| \int_E (f_n(t) - f(t))dt \right\|_X \leq \int_E \|f_n(t) - f(t)\|_X dt \to 0, \ n \to \infty$$

y en consecuencia se verifica (2.24). $\square$

Teorema 2.21. *Sea $T : X \to Y$ un operador entre dos espacios de Banach X, Y lineal y acotado. Si $f : I \to X$ es Bochner integrable entonces $T \circ f : I \to Y$ es Bochner integrable y*

$$\int_E T(f(t))dt = T\left(\int_E f(t)dt\right), \tag{2.26}$$

para cada $E \subseteq I$ Lebesgue medible.

Observación 2.22. *En el caso $Y = \mathbb{R}$, en virtud de la observación 2.13, se tiene que $T \circ f$ es Lebesgue integrable y que* (2.26) *es una igualdad en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Puesto que f es Bochner integrable entonces existe $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones simples que satisface (2.7) y (2.8). Además, como T es acotado entonces existe $M > 0$ tal que

$$\|T(x)\|_Y \leq M \|x\|_X \qquad \forall x \in X.$$

Consideremos la sucesión de funciones $\{T \circ f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Verifiquemos que $\{T \circ f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones simples. En efecto, por hipótesis para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, f_n es una función simple, es decir,

$$f_n(t) = \sum_{i=1}^{k_n} \chi_{E_{in}}(t) a_{in} \qquad \forall t \in I,$$

donde $a_{in} \in X$ y los conjuntos E_{in} con $i = 1, ..., k_n$ cumplen la definición 2.1. Así, de la linealidad de T tenemos:

$$(T \circ f_n)(t) = T(f_n(t)) = \sum_{i=1}^{k_n} \chi_{E_{in}}(t) T(a_{in}) \qquad \forall t \in I,$$

donde $T(a_{in}) \in Y$ y los conjuntos E_{in} con $i = 1, ..., k_n$ cumplen la definición 2.1. Luego, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ la función $T \circ f_n$ es una función simple. Ahora de (2.7), existe un conjunto F de medida cero tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(t) - f(t)\|_X = 0 \qquad \forall t \in I \backslash F.$$

Pero para todo $t \in I$

$$\|T(f_n(t)) - T(f(t))\|_Y = \|T(f_n(t) - f(t))\|_Y \leq M \|f_n(t) - f(t)\|_X ; \tag{2.27}$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \|T(f_n(t)) - T(f(t))\|_X = 0 \qquad \forall t \in I \backslash F.$$

Por otro lado, Integrando sobre I y posteriormente haciendo tender n a infinito en la desigualdad (2.27), tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \|T(f_n(t)) - T(f(t))\|_Y dt \leq M \lim_{n\to\infty} \int_I \|f_n(t) - f(t)\|_X dt = M \cdot 0 = 0.$$

Por lo anterior la sucesión de funciones simples $\{T \circ f_n\}_{n=1}^{\infty}$ cumple la definición 2.6 y por tanto $T \circ f$ es Bochner integrable. Además,

$$\begin{aligned}
\int_E T(f(t))dt &= \lim_{n\to\infty} \int_I \chi_E(t) T(f_n(t))dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_I T(\chi_E(t) f_n(t))dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_I T\left(\chi_E(t) \sum_{i=1}^{k_n} \chi_{E_{in}}(t) a_{in}\right)dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_I T\left(\sum_{i=1}^{k_n} \chi_{E\cap E_{in}}(t) a_{in}\right)dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_I \sum_{i=1}^{k_n} \chi_{E\cap E_{in}}(t) T(a_{in})dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} m(E\cap E_{in}) T(a_{in}) \\
&= \lim_{n\to\infty} T\left(\sum_{i=1}^{k_n} m(E\cap E_{in}) a_{in}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} T\left(\int_E f_n(t)dt\right) \\
&= T\left(\lim_{n\to\infty} \int_I \chi_E(t) f_n(t)dt\right) \\
&= T\left(\int_E f(t)dt\right).
\end{aligned}$$

□

Corolario 2.23. I) *Sea X un espacio de Banach con dual X^*. Si $E \subseteq I$ es un conjunto Lebesgue medible y $f : I \to X^*$ es una función Bochner integrable entonces*

$$\int_E \langle f(t), x\rangle dt = \left\langle \int_E f(t)dt, x \right\rangle \qquad \forall x \in X.$$

II) *Si H es un espacio de Hilbert con producto interior $(\cdot|\cdot)$ y $f : I \to H$ es una función Bochner integrable entonces*

$$\int_E (f(t)|h)dt = \left(\int_E f(t)dt \,|\, h\right) \qquad \forall h \in H.$$

Demostración.

I) Sea $x \in X$ fijo. Definamos el funcional $T_1 : X^* \to \mathbb{R}$ dado por:

$$T_1(u) := \langle u, x\rangle \qquad \forall u \in X^*.$$

Luego T_1 es lineal y acotado. En efecto, sean $u, v \in X^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces el funcional $x \mapsto \langle \alpha u + v, x \rangle$ es lineal y así

$$T_1(\alpha u + v) := \langle \alpha u + v, x \rangle = \alpha \langle u, x \rangle + \langle v, x \rangle = \alpha T_1(u) + T_1(v).$$

En consecuencia, T_1 es lineal. Ahora, para $u \in X^*$, es decir, para u lineal y acotado

$$|T_1(u)| = |\langle u, x \rangle| \leq \|u\|_* \|x\|_X := \|u\|_* M_1,$$

entonces T_1 es acotado. Así, aplicando el Teorema 2.21, teniendo en cuenta que f es Bochner integrable y que $f(t) \in X^*$ para todo $t \in I$, se tiene que $T_1 \circ f : I \to \mathbb{R}$ es Lebesgue integrable y por ende del Teorema 2.21 se tiene que

$$\int_E \langle f(t), x \rangle dt = \int_E T_1(f(t)) dt = T_1 \left(\int_E f(t) dt \right) = \left\langle \int_E f(t) dt, x \right\rangle.$$

II) Similarmente, tomemos $h \in H$ fijo y definamos el funcional $T_2 : H \to \mathbb{R}$ dado por

$$T_2(u) := (u|h) \qquad \forall u \in H.$$

Entonces por propiedades del producto interior y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$T_2(\alpha u + v) := (\alpha u + v|h) = \alpha (u|h) + (v|h) = \alpha T_2(u) + T_2(v).$$

y

$$|T_2(u)| = |(u|h)| \leq \|u\|_H \|h\|_H := \|u\|_H M_2.$$

Esto es, T_2 es lineal y acotado. Por lo cual, si utilizamos el teorema 2.21 para T_2 teniendo en cuenta que f es Bochner integrable y que $f(t) \in H$ se tiene que $T_2 \circ f$ es Lebesgue integrable y en consecuencia del Teorema 2.21 se sigue que

$$\int_E (f(t)|h) dt = \int_E T_2(f(t)) dt = T_2 \left(\int_E f(t) dt \right) = \left(\int_E f(t) dt | h \right).$$

$\square$

Capítulo 3

Espacios funcionales para ecuaciones diferenciales parabólicas

En este capítulo se estudiarán en detalle los espacios funcionales

$$L_p(0,T;X), \quad W_p^1(0,T;V,H),$$

donde T (variable temporal) es un número real positivo y $(X, \|\cdot\|_X)$ es un espacio de Banach. Estos espacios funcionales son fundamentales para el desarrollo del teorema de existencia y unicidad para problemas parabólicos; por esta razón es importante conocer sus propiedades, pues de esta manera se pueden plantear las condiciones necesarias para determinar si una ecuación diferencial parabólica en particular tiene solución. Iniciaremos este capítulo definiendo el espacio $C^m([0,T];X)$ con algunas de sus propiedades, para luego plantear diversos resultados que cumple el espacio $L_p(0,T;X)$.

3.1. El espacio de funciones $C^m([0,T];X)$

Definición 3.1. Sean $(X, \|.\|_X)$ un espacio Banach sobre $\mathbb{R}$ y $0 < T < \infty$. El conjunto $C^m([0,T],X)$ con $m = 0, 1, 2, ...$ consta de todas las funciones continuas $u : [0,T] \to X$ que tienen derivadas continuas hasta de orden m inclusive en $[0,T]$. Además, $C^m([0,T],X)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y

$$\|u\|_{C^m([0,T],X)} := \sum_{i=0}^{m} \max_{t\in[0,T]} \left\|u^{(i)}(t)\right\|_X \tag{3.1}$$

es una norma en $C^m([0,T],X)$, llamada norma estándar en $C^m([0,T],X)$.

En (3.1) $u^{(0)}$ significa u y en lugar de escribir $C^0([0,T],X)$ escribimos $C([0,T];X)$. La norma (3.1) está bien definida pues se está tomando el máximo de funciones continuas en conjuntos compactos de $\mathbb{R}$.

Teorema 3.2. *El espacio $C^m([0,T],X)$ con la norma (3.1) es un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$.*

Demostración. Caso 1: $m = 0$.
Sea $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $C([0,T];X)$, luego para todo $\epsilon > 0$ existe $N_0 > 0$ tal que

$$\forall n, k \geq N_0 \Rightarrow \|u_n - u_k\|_{C([0,T];X)} < \frac{\epsilon}{2},$$

por lo cual,

$$\forall n, k \geq N_0 \Rightarrow \|u_n(t) - u_k(t)\|_X < \frac{\epsilon}{2}, \qquad \forall t \in [0,T]. \tag{3.2}$$

Así, para cada $t \in [0,T]$ se tiene que $\{u_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en X, ahora como X es un espacio vectorial completo entonces esta sucesión converge a $u(t) \in X$, es decir, para cada $t \in [0,T]$

$$u_n(t) \to u(t) \ \text{ en } \ X \ \text{ si } \ n \to \infty.$$

Por tanto se puede definir $u : [0,T] \to X$ con $t \mapsto u(t)$. Demostremos que $u \in C([0,T];X)$ y además $u_n \to u$ en $C([0,T];X)$ si $n \to \infty$. En efecto, si hacemos $k \to \infty$ en (3.2) se tiene que

$$\forall n \geq N_0 \Rightarrow \|u_n(t) - u(t)\|_X < \epsilon \qquad \forall t \in [0,T], \tag{3.3}$$

es decir u_n converge uniformemente a u en $[0,T]$, ya que N_0 no depende de t. Así por ser $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones continuas en $[0,T]$ se tiene que u es continua en $[0,T]$ (Ver Rudin [17] Teorema 7.12), o sea $u \in C([0,T];X)$. Por otro lado de (3.3) se tiene que

$$\forall n \geq N_0 \Rightarrow \|u_n - u\|_{C([0,T];X)} = \max_{t \in [0,T]} \|u_n(t) - u(t)\|_X \leq \epsilon,$$

esto es

$$u_n \to u \ \text{ en } \ C([0,T];X) \ \text{ si } \ n \to \infty.$$

Caso 2: $m = 1$.
Sea $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $C^1([0,T],X)$, esto es para todo $\epsilon > 0$ existe $N_0 > 0$ tal que

$$\forall n, k \geq N_0 \Rightarrow \|u_n - u_k\|_{C^1([0,T],X)} < \frac{\epsilon}{2},$$

de aquí

$$\forall n, k \geq N_0 \Rightarrow \left\| u_n^{(i)} - u_k^{(i)} \right\|_{C([0,T];X)} < \frac{\epsilon}{2}, \ \text{ para } \ i = 0, 1, \tag{3.4}$$

por lo cual $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{u_n'\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones de Cauchy en $C([0,T];X)$. Por tanto del caso 1 se tiene que existen u y v en $C([0,T];X)$ tales que

$$u_n \to u \ \text{ en } \ C([0,T];X) \ \text{ si } \ n \to \infty$$

y

$$u_n' \to v \ \text{ en } \ C([0,T];X) \ \text{ si } \ n \to \infty.$$

Lo cual implica que u_n converge uniformemente a u en $[0,T]$ y que u_n' converge uniformemente a v en $[0,T]$, por tanto u' existe (es decir u es diferenciable) y $v = u'$ (Ver Apostol [16] Teorema 9.13.). En conclusión si consideramos la función u se tiene que

$u \in C^1([0,T],X)$, pues $u \in C([0,T];X)$ y $u' = v \in C([0,T];X)$ y además haciendo tender $k \to \infty$ en (3.4) se tiene que

$$u_n \to u \;\text{ en }\; C^1([0,T],X) \;\text{ si }\; n \to \infty.$$

Caso General:
Sea $m \in \mathbb{Z}^+$, $m \geq 2$. Probemos que $C^m([0,T];X)$ es un espacio de Banach. En efecto, sea $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $C^m([0,T],X)$, luego para todo $\epsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$\forall n, k \geq N_0 \Rightarrow \|u_n - u_k\|_{C^m([0,T],X)} < \frac{\epsilon}{2(m+1)}$$

y así se tiene que

$$n, k \geq N_0 \Rightarrow \left\|u_n^{(i)} - u_k^{(i)}\right\|_{C([0,T];X)} < \frac{\epsilon}{2(m+1)} \;\text{ para }\; i = 0, 1, ..., m. \tag{3.5}$$

Por tanto para $i = 0, 1, ..., m$ la sucesión $\left\{u_n^{(i)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $C([0,T];X)$; así utilizando el caso 1 y el caso 2 se tiene que existe $u \in C([0,T];X)$ tal que $u^{(i)} \in C([0,T];X)$ para $i = 1, 2, ..., m$ y

$$u_n^{(i)} \to u^{(i)} \;\text{ en }\; C([0,T];X) \;\text{ si }\; n \to \infty, \;\text{ para }\; i = 0, 1, ..., m.$$

De lo anterior $u \in C^m([0,T];X)$ y además haciendo $k \to \infty$ en (3.5)

$$\forall n \geq N_0 \Rightarrow \left\|u_n^{(i)} - u^{(i)}\right\|_{C([0,T];X)} \leq \frac{\epsilon}{2(m+1)} \;\text{ para }\; i = 0, 1, ..., m,$$

por lo cual

$$\forall n \geq N_0 \Rightarrow \|u_n - u\|_{C^m([0,T],X)} := \sum_{i=0}^{m} \max_{t \in [0,T]} \left\|u_n^{(i)}(t) - u^{(i)}(t)\right\|_X < \epsilon,$$

es decir $u_n \to u$ en $C^m([0,T],X)$ si $n \to \infty$. Por tanto $C^m([0,T],X)$ es un espacio de Banach. □

El siguiente teorema se presenta sin demostración pues es un resultado clásico del análisis, este resultado es indispensable para mostrar que el espacio de funciones $L_p(0,T;X)$ es separable siempre y cuando X también lo sea.

Teorema 3.3. ***(Weierstrass)*** *El conjunto de todos los polinomios de $[0,T]$ en X es denso en $C([0,T];X)$. Es decir, el conjunto*

$$P([0,T];X) = \{w : [0,T] \to X \mid w(t) = a_0 + ta_1 + \cdots + t^n a_n, \; a_i \in X \;\; y \;\; n = 0, 1, ...\}$$

es denso en $C([0,T];X)$.

Demostración. Para la demostración de este hecho se procede de forma similar a la prueba clásica (en el caso $X = \mathbb{R}$) la cual podemos encontrarla por ejemplo en Kreyszig[3] Teorema 4.11. □

3.2. El espacio de Lebesgue $L_p(0,T;X)$

Definición 3.4. Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$ y $0 < T < \infty$.

a) Para $1 \leq p < \infty$. Definimos $L_p(0,T;X)$ como el conjunto de todas las funciones $u : (0,T) \to X$ Bochner medibles tales que la función $\|u\|_X^p : (0,T) \to \mathbb{R}$ es Lebesgue integrable, es decir

$$L_p(0,T;X) := \left\{ u : (0,T) \to X : u \text{ es Bochner medible y } \int_0^T \|u(t)\|_X^p dt < \infty \right\}.$$

El conjunto $L_p(0,T;X)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y si se define la función $\|\cdot\|_{L_P(0,T;X)} : L_p(0,T;X) \to \mathbb{R}$ mediante

$$\|u\|_{L_P(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} \qquad \forall u \in L_p(0,T;X) \tag{3.6}$$

entonces $\|\cdot\|_{L_P(0,T;X)}$ es una norma en $L_p(0,T;X)$.

b) Para $p = \infty$. El conjunto $L_\infty(0,T;X)$ consta de todas las funciones $u : (0,T) \to X$ Bochner medibles que son esencialmente acotadas, es decir el conjunto de todas las funciones Bochner medibles para las cuales existe $M > 0$ tal que

$$\|u(t)\|_X \leq M \qquad \text{p.c.t.} \quad t \in (0,T).$$

A todos los números M que cumplen la propiedad anterior se les conoce como cotas esenciales de u. Además la norma en $L_\infty(0,T;X)$ esta dada por:

$$\|u\|_{L_\infty(0,T;X)} := \inf\{M \ : \ \|u(t)\|_X \leq M \qquad \text{p.c.t.} \quad t \in (0,T)\} \qquad \forall u \in L_\infty(0,T;X).$$

En la definición anterior se tiene en cuenta la relación

$$u(t) = v(t) \qquad \text{p.c.t.} \quad t \in (0,T).$$

Además de ahora en adelante sólo se considerará el caso $1 \leq p < \infty$, debido a que el caso $p = \infty$ no es utilizado en el tratamiento de ecuaciones diferenciales parabólicas.

Observación 3.5. I) *Notemos que si $u \in L_p(0,T;X)$ entonces la función real*

$$\begin{aligned} \varphi_u : (0,T) &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \varphi_u(t) := \|u(t)\|_X \end{aligned}$$

está en $L_p(0,T)$ y además $\|u\|_{L_P(0,T;X)} = \|\varphi_u\|_p$.

II) *Si $u \in L_1(0,T;X)$ entonces u es Bochner medible y además $\|u\|_X$ es Lebesgue integrable; en consecuencia del Teorema de Bochner (Ver Teorema 2.16) se tiene que u es Bochner integrable.*

A continuación mostraremos que (3.6) es una norma en $L_p(0,T;X)$. Para ello solamente verificaremos que se cumple la desigualdad triangular ya que las demás propiedades de seminorma se deducen fácilmente.

En efecto, sean $u, v \in L_p(0,T;X)$. Por la observación 3.5, si definimos las funciones $\varphi_u : (0,T) \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \varphi_u(t) := \|u(t)\|_X$ y $\varphi_v : (0,T) \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \varphi_v(t) := \|v(t)\|_X$ entonces $\varphi_u, \varphi_v \in L_p(0,T)$ y además

$$\|u\|_{L_P(0,T;X)} = \|\varphi_u\|_p\,, \quad \|v\|_{L_P(0,T;X)} = \|\varphi_v\|_p\,.$$

Ahora

$$\begin{aligned}\|u+v\|^p_{L_P(0,T;X)} &= \int_0^T \|u(t)+v(t)\|^p_X dt \leq \int_0^T (\|u(t)\|_X + \|v(t)\|_X)^p dt \\ &= \int_0^T |\varphi_u(t)+\varphi_v(t)|^p dt = \|\varphi_u + \varphi_v\|^p_p\,,\end{aligned}$$

en consecuencia utilizando la desigualdad de Minkowsky (ver Teorema 1.66) se tiene que

$$\|u+v\|_{L_P(0,T;X)} \leq \|\varphi_u+\varphi_v\|_p \leq \|\varphi_u\|_p + \|\varphi_v\|_p = \|u\|_{L_P(0,T;X)} + \|v\|_{L_P(0,T;X)}\,.$$

3.2.1. Completitud de $L_p(0,T;X)$

En esta subsección se mostrará que $L_p(0,T;X)$ es un espacio de Banach siempre y cuando X sea también un espacio de Banach.

Lema 3.6. *Toda sucesión rápida de Cauchy en $L_p(0,T;X)$ con $1 \leq p < \infty$ es convergente en $L_p(0,T;X)$.*

Demostración. Sea $\{u_k\}_{k=1}^\infty \subseteq L_p(0,T;X)$ una sucesión rápida de Cauchy; luego existe $\{\epsilon_k\}_{k=1}^\infty \subseteq \mathbb{R}^+$ tal que

$$\sum_{k=1}^\infty \epsilon_k < \infty \;\text{ y }\; \|u_{k+1}-u_k\|_{L_P(0,T;X)} \leq \epsilon_k^2 \qquad \forall k \in \mathbb{Z}^+.$$

De aquí,

$$\begin{aligned}\|u_{n+k}-u_n\|_{L_P(0,T;X)} &\leq \|u_{n+k}-u_{n+k-1}\|_{L_P(0,T;X)} + \|u_{n+k-1}-u_{n+k-2}\|_{L_P(0,T;X)} \\ &\quad + \cdots + \|u_{n+1}-u_n\|_{L_P(0,T;X)} \\ &\leq \epsilon^2_{n+k-1} + \epsilon^2_{n+k-2} + \cdots + \epsilon^2_n \\ &\leq \sum_{j=n}^\infty \epsilon_j^2 \qquad \forall n \in \mathbb{Z}^+, \;\; \forall k \in \mathbb{Z}^+;\end{aligned} \tag{3.7}$$

es decir

$$\int_0^T \|u_{n+k}(t)-u_n(t)\|^p_X dt \leq \left(\sum_{j=n}^\infty \epsilon_j^2\right)^p \qquad \forall n \in \mathbb{Z}^+, \;\; \forall k \in \mathbb{Z}^+. \tag{3.8}$$

Por otro lado, sea

$$E_k = \{t \in (0,T) : \|u_{k+1}(t) - u_k(t)\|_X^p \geq \epsilon_k^p\}.$$

Puesto que la función $t \mapsto \|u_{k+1}(t) - u_k(t)\|_X^p$ es Lebesgue medible y no negativa entonces usando (3.7) y la desigualdad de Chebychev (ver Lema 1.60) se tiene que

$$m(E_k) \leq \frac{1}{\epsilon_k^p} \int_0^T \|u_{k+1}(t) - u_k(t)\|_X^p dt = \frac{1}{\epsilon_k^p} \|u_{k+1} - u_k\|_{L^p(0,T;X)}^p \leq \frac{1}{\epsilon_k^p} \cdot \epsilon_k^{2p} = \epsilon_k^p$$

y en consecuencia

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k^p.$$

Además debido a que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \epsilon_k < \infty$ entonces $\epsilon_k \to +0$, $k \to \infty$ y así existe k_0 tal que $\epsilon_k^p \leq \epsilon_k$ para todo $k \geq k_0$, de donde $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \epsilon_k^p < \infty$. Por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < \infty.$$

Luego por el Lema de Borel-Cantelli (ver Lema 1.54) se tiene que

$$m(F) = 0 \quad \text{donde} \quad F = \{t \in (0,T) : t \text{ pertenece a un número infinito de } E_k\}.$$

Ahora, para $t \in (0,T) \backslash F$ existe $M_t \in \mathbb{Z}^+$ tal que $t \notin E_k$ $\forall k \geq M_t$, por lo cual

$$\|u_{k+1}(t) - u_k(t)\|_X < \epsilon_k \qquad \forall k \geq M_t.$$

Luego razonando como en (3.7), dado que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \epsilon_k < \infty$ se tiene que $\{u_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ es de Cauchy en X y como X es un espacio de Banach entonces existe $x_t \in X$ tal que $u_k(t) \to x_t$ en X si $k \to \infty$. Definamos $u : (0,T) \to X$ por

$$u(t) = \begin{cases} x_t, & t \in (0,T) \backslash F \\ 0, & t \in F \end{cases},$$

de esta manera u es Bochner medible (limite de funciones medibles) y además

$$u_k(t) \to u(t), \ k \to \infty \qquad \text{p.c.t.} \quad t \in (0,T). \tag{3.9}$$

Así,

$$\|u_{n+k}(t) - u_n(t)\|_X^p \to \|u(t) - u_n(t)\|_X^p, \ k \to \infty \qquad \text{p.c.t.} \quad t \in (0,T) \ \ \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Luego por el Lema de Fatou (ver Lema 1.59)

$$\begin{aligned}\int_0^T \|u(t)-u_n(t)\|_X^p dt &\leq \liminf_{k\to\infty}\int_0^T \|u_{n+k}(t)-u_n(t)\|_X dt\\ &\leq \liminf_{k\to\infty}\left(\sum_{j=n}^{\infty}\epsilon_j^2\right)^p\\ &= \left(\sum_{j=n}^{\infty}\epsilon_j^2\right)^p,\end{aligned}$$

de donde

$$\|u-u_n\|_{L_P(0,T;X)} \leq \sum_{j=n}^{\infty}\epsilon_j^2 < \infty. \tag{3.10}$$

En consecuencia $u-u_n \in L_p(0,T;X)$ $\forall n\in\mathbb{Z}^+$, por lo cual $u = u_n-(u-u_n)\in L_p(0,T;X)$. Además haciendo $n\to\infty$ en (3.10) se tiene $\lim\limits_{n\to\infty}\|u-u_n\|_{L_P(0,T;X)} = 0$, es decir $u_n\to u$ en $L_p(0,T;X)$ si $n\to\infty$. $\square$

Observación 3.7. *En la demostración anterior se puede observar en la ecuación* (3.9) *que* $u_n(t)\to u(t)$ *cuando* $n\to\infty$ *para casi todo* $t\in(0,T)$. *Por lo tanto podemos deducir que toda sucesión rápida de Cauchy en* $L_p(0,T;X)$ *converge a una función* $u\in L_p(0,T;X)$, *con respecto a la norma* $\|\cdot\|_{L_P(0,T;X)}$ *y puntualmente* p.c.t. $t\in(0,T)$.

Teorema 3.8. *El espacio* $L_p(0,T;X)$ *con la norma (3.6) es un espacio de Banach sobre* $\mathbb{R}$. *Si* $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión de Cauchy tal que* $u_n\to u$ *en* $L_p(0,T;X)$ *entonces existe una subsucesión* $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *de* $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ *tal que*

$$u_{n_k}(t)\to u(t) \quad en \quad X \quad \text{p.c.t.} \quad t\in(0,T). \tag{3.11}$$

Demostración. Sea $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $L_p(0,T;X)$; luego por el Lema 1.4 existe una subsucesión $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ que es rápida de Cauchy en $L_p(0,T;X)$. Por tanto del Lema 3.6 existe $u\in L_p(0,T;X)$ tal que

$$u_{n_k}\to u \quad \text{en} \quad L_p(0,T;X) \quad \text{si} \quad k\to\infty.$$

En conclusión, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy que posee una subsucesión que converge a u, así por el Teorema 1.2 se tiene que la sucesión $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $u\in L_p(0,T;X)$. Por otro lado la afirmación (3.11) se sigue de la observación 3.7. $\square$

Corolario 3.9. *Si* X *es un espacio de Hilbert sobre* $\mathbb{R}$ *con producto interno* $(\cdot|\cdot)_X$ *entonces*

$$(u|v) = \int_0^T (u(t)|v(t))_X dt. \tag{3.12}$$

es un producto interior en $L_2(0,T;X)$ *con el cual* $L_2(0,T;X)$ *es un espacio de Hilbert sobre* $\mathbb{R}$.

3.2.2. Aproximación y separabilidad en $L_p(0,T;X)$

En esta subsección se exhibirá que cierto tipo de funciones son densas en $L_p(0,T;X)$ y que además $L_p(0,T;X)$ es separable siempre y cuando X también lo sea. Algunos de los siguientes resultados se presentan sin demostración, la demostración de estos resultados simplemente es una adaptación de las pruebas clásicas en los espacios de Lebesgue usuales que pueden encontrarse en textos como .

Teorema 3.10. *Sea $1 \leq p < \infty$. El conjunto de todas las funciones simples es denso en $L_p(0,T;X)$.*

Demostración. Sea $u \in L_p(0,T;X)$. Así que u es Bochner medible esto es, existe una sucesión de funciones simples $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n(t) - u(t)\|_X = 0 \qquad \text{p.c.t.} \quad t \in [0,T].$$

Luego existe un conjunto $F \subseteq [0,T]$ de medida cero tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n(t) - u(t)\|_X = 0 \qquad \forall t \in [0,T]\backslash F. \tag{3.13}$$

De aquí para todo $t \in [0,T]\backslash F$ y para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$\forall n \geq N \Rightarrow \|u_n(t) - u(t)\|_X < \epsilon. \tag{3.14}$$

Ahora consideremos la sucesión de funciones simples $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por

$$v_n(t) = \begin{cases} u_n(t), & \|u_n(t)\|_X < 2\|u(t)\|_X \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostremos que $v_n \to u$, $n \to \infty$ en $L_p(0,T;X)$. En efecto, primero notemos que para todo $t \in [0,T]$ la sucesión $\{\|v_n(t) - u(t)\|_X^p\}_{n=1}^{\infty}$, es una sucesión de funciones Lebesgue medibles y no negativas. Ahora, sea $t \in [0,T]\backslash F$ fijo.

- **Caso 1:** $\|u(t)\|_X = 0$. Así, $v_n(t) = 0$, por lo cual

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n(t) - u(t)\|_X = 0.$$

- **Caso 2:** $\|u(t)\|_X \neq 0$. Tomemos $\epsilon = \|u(t)\|_X > 0$ en (3.14) para obtener

$$\forall n \geq N \Rightarrow \|u_n(t)\|_X < 2\|u(t)\|_X$$

  y así,

$$v_n(t) = u_n(t) \qquad \forall n \geq N.$$

  Entonces teniendo en cuenta (3.13) se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n(t) - u(t)\|_X = \lim_{n\to\infty} \|u_n(t) - u(t)\|_X = 0.$$

Es decir, para todo $t \in [0,T] \backslash F$ la sucesión $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a u. Por lo tanto debido a que F es un conjunto de medida cero se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n(t) - u(t)\|_X = 0 \qquad \text{p.c.t.} \quad t \in [0,T]$$

y de aquí

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n(t) - u(t)\|_X^p = 0 \qquad \text{p.c.t.} \quad t \in [0,T].$$

Por otro lado,

$$\|v_n(t) - u(t)\|_X \leq \|v_n(t)\|_X + \|u(t)\|_X < 2\|u(t)\|_X + \|u(t)\|_X \quad \forall t \in [0,T].$$

Así que

$$\|v_n(t) - u(t)\|_X^p \leq 3^p \|u(t)\|_X^p \qquad \forall t \in [0,T].$$

Pero como $u \in L_p(0,T;X)$ entonces

$$\int_0^T 3^p \|u(t)\|_X^p dt = 3^p \int_0^T \|u(t)\|_X dt < \infty.$$

Por lo tanto del teorema de convergencia dominada de Lebesgue (ver teorema 1.61) se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \|v_n(t) - u(t)\|_X^p dt = \int_0^T \lim_{n\to\infty} \|v_n(t) - u(t)\|_X^p dt = 0,$$

en consecuencia

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - u\|_{L_P(0,T;X)} = 0,$$

es decir $v_n \to u$ en $L_p(0,T;X)$ si $n \to \infty$. $\square$

Lema 3.11. *Sean $1 \leq p < \infty$ y $a \in X$ con $a \neq 0$. Si $E \subseteq [0,T]$ es Lebesgue medible, para todo $\epsilon > 0$ existe una función escalonada $h : [0,T] \to X$ tal que si definimos $g : [0,T] \to X$ por $g(t) := \chi_E(t)a$ entonces se tiene que*

$$\|g - h\|_{L_P(0,T;X)} < \epsilon.$$

Demostración. Se obtiene al adaptar la demostración para el caso $X = \mathbb{R}$ dada en Royden[8] proposición 10. $\square$

Teorema 3.12. *Sea $1 \leq p < \infty$. El conjunto de funciones escalonadas de $[0,T]$ en X es denso en $L_p(0,T;X)$.*

Demostración. Sean $u \in L_p(0,T;X)$ y $\epsilon > 0$. Por el Teorema 3.10 se tiene que existe una función $v : [0,T] \to X$ simple

$$v(t) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}(t)a_i, \qquad \forall t \in [0,T],$$

tal que

$$\|u - v\|_{L_P(0,T;X)} < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.15}$$

Ahora por el Lema 3.11 para $i = 1, ..., n$ existe $h_i : [0, T] \to X$ escalonada tal que

$$\|g_i - h_i\|_{L_P(0,T;X)} < \frac{\epsilon}{2n}, \tag{3.16}$$

donde $g_i(t) := \chi_{E_i}(t) a_i$. Notemos que si consideramos $h : [0, T] \to X$ dada por

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i(t), \qquad \forall t \in [0, T]$$

entonces h es una función escalonada y además teniendo en cuenta (3.16) se tiene que

$$\begin{aligned} \|v - h\|_{L_P(0,T;X)} &= \left\| \sum_{i=1}^{n} (g_i - h_i) \right\|_{L_P(0,T;X)} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \|g_i - h_i\|_{L_P(0,T;X)} < \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon}{2n} = \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Así, de (3.15) y (3.17) se tiene que

$$\|u - h\|_{L_P(0,T;X)} \leq \|u - v\|_{L_P(0,T;X)} + \|v - h\|_{L_P(0,T;X)} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

Teorema 3.13. *El conjunto $C([0, T]; X)$ es denso en el conjunto de las funciones escalonadas de $[0, T]$ en X con respecto a la norma $\|\cdot\|_{L_P(0,T;X)}$.*

Demostración. Sea $s : [0, T] \to X$ una función escalonada de la forma

$$s(t) = \begin{cases} a, & t \in [0, t_0), \\ b, & t \in [t_0, T], \end{cases}$$

para algún $t_0 \in (0, T)$. Consideremos la sucesión $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por

$$u_n(t) = \begin{cases} a, & t \in [0, t_0 - \frac{1}{2n}] \\ \ell(t), & t \in (t_0 - \frac{1}{2n}, t_0 + \frac{1}{2n}) \\ b, & t \in [t_0 + \frac{1}{2n}, T] \end{cases},$$

donde $\ell(t) := a + n(b - a)\left(t - t_0 + \frac{1}{2n}\right)$. Notemos que para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ la función u_n es continua en $[0,T]$, es decir $u_n \in C([0,T];X)$. Ahora observemos que

$$
\begin{aligned}
\|s-u_n\|^p_{L_P(0,T;X)} &:= \int_0^T \|s(t)-u_n(t)\|^p_X dt \\
&= \int_0^{t_0-\frac{1}{2n}} \|s(t)-a\|^p_X dt + \int_{t_0-\frac{1}{2n}}^{t_0} \|s(t)-\ell(t)\|^p_X dt \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_0+\frac{1}{2n}} \|s(t)-\ell(t)\|^p_X dt + \int_{t_0+\frac{1}{2n}}^{T} \|s(t)-b\|^p_X dt \\
&= \int_{t_0-\frac{1}{2n}}^{t_0} \left\| n(b-a)\left(t-t_0+\frac{1}{2n}\right)\right\|^p_X dt + \int_{t_0}^{t_0+\frac{1}{2n}} \left\|(b-a)\left[1-n\left(t-t_0+\frac{1}{2n}\right)\right]\right\|^p_X dt \\
&= \int_{t_0-\frac{1}{2n}}^{t_0} \left\| n(b-a)\left(t-t_0+\frac{1}{2n}\right)\right\|^p_X dt + \int_{t_0}^{t_0+\frac{1}{2n}} \left\| n(b-a)\left(t-t_0-\frac{1}{2n}\right)\right\|^p_X dt \\
&= n^p\,\|b-a\|^p_X \left.\frac{\left(t-t_0+\frac{1}{2n}\right)^{p+1}}{p+1}\right|_{t_0-\frac{1}{2n}}^{t_0} + n^p\,\|b-a\|^p_X \left.\frac{(-1)\left(t_0+\frac{1}{2n}-t\right)^{p+1}}{p+1}\right|_{t_0}^{t_0+\frac{1}{2n}} \\
&= \frac{n^p\,\|b-a\|^p_X}{(p+1)2^{p+1}n^{p+1}} + \frac{n^p\,\|b-a\|^p_X}{(p+1)2^{p+1}n^{p+1}} \quad = \frac{\|b-a\|^p_X}{(p+1)2^p n}
\end{aligned}
$$

y en consecuencia $\|s-u_n\|_{L_P(0,T;X)} \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Para el caso de una función escalonada general se puede proceder de la misma forma. Por ejemplo, si

$$
s(t) = \begin{cases} a_1, & t \in [0,t_1) \\ a_2, & t \in [t_1,t_2) \\ \vdots & \vdots \\ a_k, & t \in [t_{k-1},t_k) \\ \vdots & \vdots \\ a_n, & t \in [t_{n-1},T] \end{cases},
$$

entonces se define

$$
u_n(t) = \begin{cases} a_1, & t \in [0,t_1) \\ \ell_1(t), & t \in [t_1-\frac{1}{2n}, t_2+\frac{1}{2n}) \\ \vdots & \vdots \\ \ell_k(t), & t \in [t_{k-1}-\frac{1}{2n}, t_k+\frac{1}{2n}) \\ \vdots & \vdots \\ a_n, & t \in [t_{n-1},T] \end{cases}
$$

con $\ell_k(t) = a_k + n(a_{k+1}-a_k)\left(t-t_k+\frac{1}{2n}\right)$, $k = 1,2,...,n-1$. □

Definición 3.14. Sean X, Y espacios vectoriales normados tales que $X \subseteq Y$. Se define el operador de inclusión de X en Y, como el operador lineal $i : X \to Y$ dado por

$$i(x) = x \qquad \forall x \in X.$$

Decimos que la inclusión $X \subseteq Y$ es continua si el operador i es continuo, es decir si existe $C > 0$ tal que

$$\|x\|_Y \le C\,\|x\|_X \qquad \forall x \in X.$$

Además diremos que la inclusión $X \subseteq Y$ es densa si X es denso en Y con respecto a la norma $\|\cdot\|_Y$. Es decir, si para todo $y \in Y$ y $\epsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que

$$\|x - y\|_Y < \epsilon.$$

Lema 3.15. *Sean X, Y espacios de Banach y sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$. Si la inclusión $X \subseteq Y$ es continua entonces cuando $n \to \infty$*

$$x_n \rightharpoonup \hat{x} \quad \text{en} \quad X \quad \text{implica} \quad x_n \rightharpoonup \hat{x} \quad \text{en} \quad Y.$$

Lema 3.16. *Sean X, Y, Z espacios vectoriales normados. Si la inclusión $X \subseteq Y$ es densa y la inclusión $Y \subseteq Z$ es densa y continua entonces la inclusión $X \subseteq Z$ es densa.*

Demostración. Puesto que la inclusión $Y \subseteq Z$ es continua entonces existe $C > 0$ tal que

$$\|y\|_Z \leq C \|y\|_Y \qquad \forall y \in Y.$$

De aquí

$$\|x - y\|_Z \leq C \|x - y\|_Y \qquad \forall x \in X \ \ \forall y \in Y. \tag{3.18}$$

Sean $\epsilon > 0$ y $z \in Z$. Como la inclusión $Y \subseteq Z$ es densa entonces existe $y \in Y$ tal que

$$\|y - z\|_Z < \frac{\epsilon}{2};$$

además dado que la inclusión $X \subseteq Y$ es densa entonces existe $x \in X$ tal que

$$\|x - y\|_Y < \frac{\epsilon}{2C}.$$

Luego de (3.18) se tiene que

$$\|x - y\|_Z < \frac{\epsilon}{2}.$$

En conclusión para cada $z \in Z$ existe $x \in X$ tal que

$$\|x - z\|_Z \leq \|x - y\|_Z + \|y - z\|_Z < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

Corolario 3.17. *Sea $1 \leq p < \infty$. La inclusión*

$$C([0, T]; X) \subseteq L_p(0, T; X)$$

es densa y continua.

Demostración. La densidad del espacio $C([0, T]; X)$ en el espacio $L_p(0, T; X)$ se sigue del Lema 3.16, teniendo en cuenta el Teorema 3.12 y el Teorema 3.13. Para mostrar que la inclusión es continua tomemos $u \in C([0, T]; X)$, luego

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_P(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} &\leq \left(\max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X^p \int_0^T dt \right)^{1/p} \\ &= \left(\max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X \right) T^{1/p} \\ &= T^{1/p} \|u\|_{C([0,T];X)} . \end{aligned} \tag{3.19}$$

□

Corolario 3.18. *El conjunto de polinomios $P([0,T];X)$ es denso en $L_p(0,T;X)$ con $1 \leq p < \infty$.*

Teorema 3.19. *Sea $1 \leq p < \infty$. Si X es separable entonces $L_p(0,T;X)$ es separable .*

Demostración. Puesto que X es separable existe un conjunto $M \subseteq X$ numerable y denso en X. Consideremos el conjunto de todos los polinomios $r : [0,T] \to X$ con coeficientes en M, es decir el conjunto

$$B := \{r : [0,T] \to X \mid (\exists n \in \mathbb{Z}^+)(r(t) = a_0 + ta_1 + \cdots + t^n a_n;\ \ a_i \in M,\ \ i = 1, ..., n;\ \ a_n \neq 0)\}.$$

La numerabilidad de B es evidente, demostraremos que este conjunto es denso en $L_p(0,T;X)$. En efecto, primero verifiquemos que B es denso en el conjunto $P([0,T];X)$ de todos los polinomios con coeficientes en X. En efecto, sea $q \in P([0,T];X)$ entonces

$$q(t) = a_0 + ta_1 + \cdots + t^m a_m, \qquad a_i \in X, \quad i = 0, 1, ...m,$$

para todo $t \in [0,T]$. Debido a que M es denso en X entonces para cada $i = 0, 1, ..., m$ existe una sucesión $\left\{a_n^{(i)}\right\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ tal que $a_n^{(i)} \to a_i$ en X cuando $n \to \infty$, es decir dado $i = 0, 1, ..., m$ se tiene que para todo $\epsilon > 0$ existe $N_i \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$\left\|a_n^{(i)} - a_i\right\|_X < \frac{\epsilon}{(m+1)T^i} \quad \text{siempre que} \quad n \geq N_i. \tag{3.20}$$

Consideremos la sucesión $\{q_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq B$ donde $q_n(t) = a_n^{(0)} + ta_n^{(1)} + \cdots + t^m a_n^{(m)}$, entonces teniendo en cuenta (3.20) se verifica para $n \geq N := \text{máx}\{N_0, N_1, ..., N_m\}$ que:

$$\begin{aligned}
\|q_n - q\|_{C([0,T];X)} &= \max_{0 \leq t \leq T} \|q_n(t) - q(t)\|_X \\
&= \max_{0 \leq t \leq T} \left\| \sum_{i=0}^{m} t^i (a_n^{(i)} - a_i) \right\|_X \\
&\leq \sum_{i=0}^{m} \left(\max_{0 \leq t \leq T} t^i \right) \left\|(a_n^{(i)} - a_i)\right\|_X \\
&< \sum_{i=0}^{m} T^i \frac{\epsilon}{(m+1)T^i} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Por tanto el conjunto B es denso en $P([0,T];X)$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_{C([0,T];X)}$.

Ahora sea $u \in L_p(0,T;X)$. Por el Corolario 3.18 existe $v \in P([0,T];X)$ tal que

$$\|u - v\|_{L_P(0,T;X)} < \frac{\epsilon}{2},$$

y para dicho $v \in P([0,T];X)$ existe $w \in B$ que satisface

$$\|v - w\|_{C([0,T];X)} < \frac{\epsilon}{2T^{1/p}},$$

pero de (3.19) se tiene que

$$\|v-w\|_{L_P(0,T;X)} \leq T^{1/p}\|v-w\|_{C([0,T];X)} < \frac{\epsilon}{2};$$

luego utilizando la desigualdad triangular se obtiene

$$\|v-w\|_{L_P(0,T;X)} \leq \|u-v\|_{L_P(0,T;X)} + \|v-w\|_{L_P(0,T;X)} < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

y en consecuencia B es denso en $L_p(0,T;X)$. En conclusión B es un conjunto numerable y denso en $L_p(0,T;X)$, que es lo que se pedía. $\square$

Lema 3.20. *Sean $(X,\|.\|_X)$ y $(Y,\|.\|_Y)$ espacios de Banach sobre $\mathbb{R}$. Si la inclusión $X \subseteq Y$ es continua entonces la inclusión*

$$L_r(0,T;X) \subseteq L_q(0,T;Y), \qquad 1 \leq q \leq r < +\infty$$

es continua.

Demostración. Sea $u \in L_r(0,T;X)$, como la inclusión $X \subseteq Y$ es continua entonces

$$\|u(t)\|_Y \leq C\|u(t)\|_X \qquad \forall t \in (0,T).$$

Ahora, observemos que $\frac{q}{r}+\frac{r-q}{r}=1$ y notemos que $\|u\|_X^q \in L_{\frac{r}{q}}(0,T)$ pues $u \in L_r(0,T;X)$ y además $v \in L_{\frac{r}{r-q}}(0,T)$ donde $v:(0,T)\to\mathbb{R}$ está dada por $v(t)=1$. Haciendo uso de la desigualdad de Hölder (Ver Teorema 1.65) se tiene que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L_q(0,T;Y)} &= \left(\int_0^T \|u(t)\|_Y^q dt\right)^{1/q} \\
&\leq C\left(\int_0^T \|u(t)\|_X^q \cdot 1 dt\right)^{1/q} \\
&\leq C\left[\left(\int_0^T \|u(t)\|_X^{q\cdot\frac{r}{q}} dt\right)^{q/r}\left(\int_0^T 1^{\frac{r}{r-q}} dt\right)^{(r-q)/r}\right]^{1/q} \\
&= C\cdot T^{\frac{r-q}{rq}}\left(\int_0^T \|u(t)\|_X^r dt\right)^{1/r} \\
&:= C_1\|u\|_{L_r(0,T;X)}.
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 3.21. *Sean V un espacio de Banach, $1<p<\infty$ y $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Entonces para todo $u \in L_p(0,T;V)$ y $v \in L_q(0,T,V^*)$ se tiene que*

$$\int_0^T |\langle v(t),u(t)\rangle_V| dt \leq \left(\int_0^T \|v(t)\|_{V^*}^q dt\right)^{1/q}\left(\int_0^T \|u(t)\|_V^p dt\right)^{1/p}. \tag{3.21}$$

Demostración. Puesto que $u \in L_p(0,T;V)$ y $v \in L_q(0,T,V^*)$ entonces en particular u y v son funciones Bochner medibles, por lo cual existen dos sucesiones $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones simples tales que $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a u para casi todo $t \in (0,T)$ y $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a v para casi todo $t \in (0,T)$. Luego existen conjuntos F_1, F_2 de medida cero tales que

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t) \qquad \forall t \in (0,T)\backslash F_1,$$

y

$$\lim_{n\to\infty} v_n(t) = v(t) \qquad \forall t \in (0,T)\backslash F_2.$$

Ahora puesto que

$$|\langle v_n(t), u_n(t)\rangle_V - \langle v(t), u(t)\rangle_V| \leq |\langle v_n(t) - v(t), u_n(t)\rangle_V| + |\langle v(t), u_n(t) - u(t)\rangle_V|$$

entonces haciendo $n \to \infty$ en la expresión anterior se tiene que

$$\langle v_n(t), u_n(t)\rangle_V \to \langle v(t), u(t)\rangle_V \qquad \forall t \in (0,T)\backslash(F_1 \cup F_2).$$

Además, dado que $m(F_1 \cup F_2) \leq m(F_1) + m(F_2) = 0$ entonces la función real $t \mapsto \langle v(t), u(t)\rangle_V$ es Lebesgue medible pues es el límite (en casi toda parte) de funciones Lebesgue medibles. Por otro lado,

$$|\langle v(t), u(t)\rangle_V| \leq \|v(t)\|_{V^*} \|u(t)\|_V \qquad \forall t \in (0,T). \tag{3.22}$$

Pero dado que $v \in L_q(0,T,V^*)$ y $u \in L_p(0,T;V)$ entonces de la observación 3.5 tenemos que las funciones $t \mapsto \|v\|_{V^*}$ y $t \mapsto \|u\|_V$ pertenecen a $L_q(0,T)$ y $L_p(0,T)$ respectivamente. En consecuencia de la Desigualdad de Hölder (Ver Teorema 1.65) se tiene que $\|v\|_{V^*} \|u\|_V \in L_1(0,T)$ y además

$$\int_0^T \|v(t)\|_{V^*} \|u(t)\|_V dt \leq \left(\int_0^T \|v(t)\|_{V^*}^q dt\right)^{1/q} \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^p dt\right)^{1/p}. \tag{3.23}$$

Por lo tanto integrando sobre $(0,T)$ en (3.22) y teniendo en cuenta (3.23) obtenemos el resultado deseado. $\square$

Teorema 3.22. *Sea V un espacio de Banach reflexivo y separable y sea $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces:*

a) Para cada $v \in L_q(0,T;V^*)$ existe un único $\bar{v} \in (L_p(0,T;V))^*$ que verifica

$$\langle \bar{v}, u\rangle_{L_p(0,T;V)} := \int_0^T \langle v(t), u(t)\rangle_V dt \qquad \forall u \in L_p(0,T;V). \tag{3.24}$$

b) Recíprocamente, para cada $\bar{v} \in (L_p(0,T;V))^*$ existe un único $v \in L_q(0,T;V^*)$ que satisface (3.24) y además cumple que

$$\|\bar{v}\|_{(L_p(0,T;V))^*} = \|v\|_{L_q(0,T;V^*)}. \tag{3.25}$$

Demostración.

a) Sea $v \in L_q(0,T;V^*)$ y consideremos el funcional $\bar{v} : L_p(0,T;V) \to \mathbb{R}$ dado en (3.24). Mostremos que $\bar{v}$ es un funcional lineal y acotado. En efecto, la linealidad se sigue fácilmente de (3.24). Para verificar que $\bar{v}$ es acotado simplemente se debe tener en cuenta (3.21) pues de esta manera para todo $u \in L_p(0,T;V)$ se tiene

$$\left|\langle \bar{v}, u\rangle_{L_p(0,T;V)}\right| = \left|\int_0^T \langle v(t), u(t)\rangle_V dt\right| \leq \left(\int_0^T \|v(t)\|_{V^*}^q dt\right)^{1/q} \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^p dt\right)^{1/p}$$
$$:= M \|u\|_{L_p(0,T;V)} .$$

b) Sea $\bar{v} \in (L_p(0,T;V))^*$. La existencia de $v \in L_p(0,T;V^*)$ que verifica (3.24) es un resultado clásico del Análisis funcional. Su demostración puede ser consultada por ejemplo en Edwards [14], sección 8.20.

Para la unicidad supongamos que para $\bar{v} \in (L_p(0,T;V))^*$ existen $v_1, v_2 \in L_q(0,T;V^*)$ con (3.24). Luego,

$$\int_0^T \langle v_1(t), u(t)\rangle_V dt = \int_0^T \langle v_2(t), u(t)\rangle_V dt \qquad \forall u \in L_p(0,T;V)$$

y de aquí

$$\int_0^T \langle v_1(t) - v_2(t), u(t)\rangle_V dt = 0 \qquad \forall u \in L_p(0,T;V). \tag{3.26}$$

Deseamos mostrar que

$$v_1(t) = v_2(t) \ \text{ en } \ V^* \ \text{ p.c.t. } \ t \in (0,T)$$

o equivalentemente que para todo $w \in V$

$$\langle v_1(t) - v_2(t), w\rangle = 0 \qquad \text{p.c.t.} \quad t \in (0,T).$$

En efecto, sea $w \in V$. Definimos $\psi : (0,T) \to \mathbb{R}$ por

$$\psi(t) = \langle v_1(t) - v_2(t), w\rangle .$$

Dado que

$$\int_0^T |\psi(t)| dt \leq \int_0^T C \|w\|_V dt = C \|w\|_V m[(0,T)] < \infty$$

entonces $\psi \in L_1(0,T)$. Ahora, sea $\phi \in C_0^\infty(0,T)$, notemos que la función $t \mapsto \phi(t)w$ esta en $u \in L_p(0,T;V)$, por lo cual de (3.26) se tiene que

$$\int_0^T \psi(t)\phi(t) dt = \int_0^T \langle v_1(t) - v_2(t), w\rangle \phi(t) dt = \int_0^T \langle v_1(t) - v_2(t), \phi(t)w\rangle dt = 0 \ \forall \phi \in C_0^\infty(0,T).$$

y en consecuencia del Lema variacional (Ver Lema 1.70) se sigue que $\psi(t) = 0$ para casi todo $t \in (0,T)$, es decir se obtiene el resultado deseado.

$\square$

Observación 3.23. *Sea V un espacio de Banach separable y reflexivo. Por el Teorema 3.22 existe*

$$\varphi : (L_p(0,T;V))^* \to L_q(0,T;V^*), \quad v \mapsto \varphi(v) = \bar{v}.$$

Es fácil verificar que φ es lineal, biyectiva y además, de (3.25) *resulta ser una isometría. En consecuencia $(L_p(0,T;V))^*$ y $L_q(0,T;V^*)$ son isométricos, así podemos identificar $(L_p(0,T;V))^*$ con $L_q(0,T;V^*)$ y escribir*

$$(L_p(0,T;V))^* = L_q(0,T;V^*).$$

De la misma manera podemos identificar $\bar{v}$ con v y así las ecuaciones (3.24) *y* (3.25) *se escribirán como sigue:*

$$\langle v,u\rangle_{L_p(0,T;V)} := \int_0^T \langle v(t),u(t)\rangle_V dt, \tag{3.27}$$

$$\|v\|_{(L_p(0,T;V))^*} = \|v\|_{L_q(0,T;V^*)} \tag{3.28}$$

para todo $u \in L_p(0,T;X)$ y $v \in (L_p(0,T;X))^*$.

Teorema 3.24. *Sean V un espacio de Banach, $1 \le p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 y$ $0 \le t \le T < \infty$.*

a) Si $u \in L_p(0,T;V)$ entonces

$$\left\langle v^*, \int_0^t u(s)ds \right\rangle_V = \int_0^t \langle v^*, u(s)\rangle_V ds \qquad \forall v^* \in V^*.$$

b) Si $u \in L_q(0,T;V^*)$ entonces

$$\left\langle \int_0^t u(s)ds, v \right\rangle_V = \int_0^t \langle u(s), v\rangle_V ds \qquad \forall v \in V.$$

c) Si $u_n \to u$ en $L_p(0,T;V)$ cuando $n \to \infty$ entonces

$$\int_0^t u_n(s)ds \to \int_0^t u(s)ds \quad \text{en} \quad V \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Demostración.

a) Sea $v^* \in V^*$, luego $v^* : V \to \mathbb{R}$ es un operador lineal y acotado entre dos espacios de Banach. Si $u \in L_p(0,T;V)$ entonces de acuerdo con el Lema 3.20 $u \in L_1(0,T;V)$, por lo cual $u : (0,T) \to V$ es Bochner integrable (Ver observación 3.5). En consecuencia del Teorema 2.21 se obtiene el resultado deseado, es decir

$$\left\langle v^*, \int_0^t u(s)ds \right\rangle_V = \int_0^t \langle v^*, u(s)\rangle_V ds \qquad \forall v^* \in V^*.$$

b) Se procede como en *a*) usando el Corolario 2.23.

c) Definamos el operador lineal $A : L_p(0,T;V) \to V$ como

$$A(u) = \int_0^t u(s)ds \qquad \forall u \in L_p(0,T;V).$$

Puesto que de la desigualdad de Hölder (Ver Teorema 1.65) se tiene que

$$\begin{aligned}\|A(u)\|_V = \left\|\int_0^t u(s)ds\right\|_V \leq \int_0^t (\|u(s)\|_V \cdot 1)ds &\leq \left(\int_0^t \|u(s)\|_V^p ds\right)^{1/p} \left(\int_0^t 1^q ds\right)^{1/q} \\ &= T^{1/q} \|u\|_{L_p(0,T;V)},\end{aligned}$$

entonces A es acotado. Por lo tanto, el operador A es continuo y así

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t u_n(s)ds = \lim_{n\to\infty} A(u_n(s)) = A\left(\lim_{n\to\infty} u_n(s)\right) = A(u(s)) = \int_0^t u(s)ds.$$

□

Teorema 3.25. *Sea V un espacio de Banach reflexivo y separable, sea $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y $0 \leq t \leq T < \infty$. Entonces se tiene lo siguiente:*

a) Si $u_n \rightharpoonup u$ en $L_p(0,T;V)$ y $v_n \to v$ en $L_q(0,T;V^*)$ cuando $n \to \infty$, entonces

$$\int_0^t \langle v_n(s), u_n(s)\rangle_V ds \to \int_0^t \langle v(s), u(s)\rangle_V ds \quad \textit{cuando} \quad n \to \infty.$$

b) Si $u_n \to u$ en $L_p(0,T;V)$ y $v_n \rightharpoonup v$ en $L_q(0,T;V^*)$ cuando $n \to \infty$, entonces

$$\int_0^t \langle v_n(s), u_n(s)\rangle_V ds \to \int_0^t \langle v(s), u(s)\rangle_V ds \quad \textit{cuando} \quad n \to \infty.$$

Demostración.

a) **Caso 1:** Sea $t = T$. Primero observemos que

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^T \langle v_n(s), u_n(s)\rangle_V ds - \int_0^T \langle v(s), u(s)\rangle_V ds\right| \\ &\leq \left|\int_0^T \langle (v_n - v)(s), u_n(s)\rangle_V ds\right| + \left|\int_0^T \langle v(s), (u_n - u)(s)\rangle_V ds\right| \\ &= \left|\langle v_n - v, u_n\rangle_{L_p(0,T;V)}\right| + \left|\langle v, u_n - u\rangle_{L_p(0,T;V)}\right|;\end{aligned}$$

la última igualdad se tiene puesto que V es separable y reflexivo (Ver (3.27)). Haciendo $n \to \infty$ en la expresión anterior y teniendo en cuenta la hipótesis se obtiene el resultado deseado.

Caso 2: Sea $0 \leq t < T$. Consideremos la función $s \mapsto \chi_{[0,t]}(s)$. Primero mostremos que
$$[u_n \rightharpoonup u \text{ en } L_p(0,T;V)] \Rightarrow [\chi u_n \rightharpoonup \chi u \text{ en } L_p(0,T;V)], \quad n \to \infty$$
En efecto, si $u_n \rightharpoonup u$ en $L_p(0,T;V)$ cuando $n \to \infty$ entonces
$$\langle v, u_n \rangle_{L_p(0,T;V)} = \int_0^T \langle v(s), u_n(s) \rangle_V dt \to \langle v, u \rangle_{L_p(0,T;V)} \quad \text{cuando } n \to \infty$$
para todo $v \in L_q(0,T;V^*)$ y en particular para $\chi v \in L_q(0,T;V^*)$. Luego si $n \to \infty$ entonces
$$\langle \chi v, u_n \rangle_{L_p(0,T;V)} \to \langle \chi v, u \rangle_{L_p(0,T;V)}.$$
Ahora, como
$$\langle \chi v, u_n \rangle_{L_p(0,T;V)} = \langle v, \chi u_n \rangle_{L_p(0,T;V)} \quad \text{y} \quad \langle \chi v, u \rangle_{L_p(0,T;V)} = \langle v, \chi u \rangle_{L_p(0,T;V)}$$
entonces
$$\langle v, \chi u_n \rangle_{L_p(0,T;V)} \to \langle v, \chi u \rangle_{L_p(0,T;V)} \qquad \forall v \in L_q(0,T;V^*).$$
En consecuencia $\chi u_n \rightharpoonup \chi u$ en $L_p(0,T;V)$ cuando $n \to \infty$. Por lo tanto del **Caso 1** se tiene que
$$\int_0^t \langle v_n(s), u_n(s) \rangle ds = \int_0^T \langle v_n(s), \chi(s) u_n(s) \rangle ds \to \int_0^T \langle v(s), \chi(s) u(s) \rangle ds = \int_0^t \langle v(s), u(s) \rangle ds.$$

b) Se obtiene de forma similar al literal a).

□

Lema 3.26. *Sea V un espacio de Banach. Si $u \in L_1(0,T;V)$ y además*
$$\int_0^T \phi(s) u(s) ds = 0 \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(0,T),$$
entonces $u = 0$ en $L_1(0,T;V)$.

Demostración. La demostración de este resultado sigue un procedimiento análogo a la demostración dada en Brezis[7] Corolario 4.24. □

3.3. Ternas de evolución y derivada generalizada.

En esta sección se presentan los conceptos de terna de evolución y de derivada generalizada, los cuales juegan un papel importante en el estudio de las ecuaciones evolutivas y en particular de las ecuaciones parabólicas. El siguiente teorema motiva la definición de terna de evolución.

Teorema 3.27. *Sean V, H espacios normados sobre $\mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:*

1. *V es un espacio de Banach separable y reflexivo.*

2. H es un espacio de Hilbert separable.

3. La inclusión $V \subseteq H$ es densa y continua.

Entonces:

a) Para cada $h \in H$ existe un correspondiente funcional lineal y acotado $\bar{h} \in V^*$ dado por

$$\left\langle \bar{h}, v \right\rangle_V = (h|v)_H \qquad \forall v \in V. \tag{3.29}$$

b) La función $h \mapsto \bar{h}$ de H en V^* es lineal, inyectiva y continua.

Demostración.

a) Sea $h \in H$. Si definimos $\bar{h} : V \to \mathbb{R}$ dada en (3.29), entonces $\bar{h}$ es lineal debido a la linealidad del producto interno Ahora como la inclusión $V \subseteq H$ es continua entonces existe $C > 0$ tal que

$$\|v\|_H \leq C \|v\|_V \qquad \forall v \in V$$

y así se sigue que

$$\left|\left\langle \bar{h}, v \right\rangle_V\right| = |(h|v)_H| \leq \|h\|_H \|v\|_H \leq C \|h\|_H \|v\|_V \,, \qquad \forall v \in V. \tag{3.30}$$

Por lo anterior $\bar{h}$ es un funcional lineal y acotado.

b) Llamemos $g : H \to V^*$ la función tal que $g(h) = \bar{h}$ y verifiquemos que g es lineal, continua e inyectiva. En efecto sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $h_1, h_2 \in H$, deseamos mostrar que $\overline{\alpha h_1 + h_2} = \alpha \overline{h_1} + \overline{h_2}$, para ello notemos que para $v \in V$ se cumple

$$\left\langle \overline{\alpha h_1 + h_2}, v \right\rangle_V := (\alpha h_1 + h_2 | v)_H = \alpha \,(h_1|v)_H + (h_2|v)_H = \alpha \left\langle \overline{h_1} | u \right\rangle_V + \left\langle \overline{h_2} | u \right\rangle_V$$

y en consecuencia

$$g(\alpha h_1 + h_2) = \overline{\alpha h_1 + h_2} = \alpha \overline{h_1} + \overline{h_2} = \alpha g(h_1) + g(h_2).$$

Por otro lado, de (3.30)

$$\frac{\left|\left\langle \bar{h}, v \right\rangle_V\right|}{\|v\|_V} \leq C \|h\|_H \qquad \forall v \in V \backslash \{0_V\},$$

y así

$$\|g(h)\|_{V^*} := \left\|\bar{h}\right\|_{V^*} \leq C \|h\|_H \,;$$

por lo cual g es acotado y en consecuencia junto con la linealidad de g se tiene que g es continuo (Ver Teorema 1.8).
Por último para mostrar que g es inyectiva supongamos que $g(h) := \bar{h} = 0$, de esta manera

$$\left\langle \bar{h}, v \right\rangle_V := (h|v)_H = 0 \qquad \forall v \in V, \tag{3.31}$$

luego como V es denso en H entonces existe una sucesión $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq V$ tal que $v_n \to h$ en H cuando $n \to \infty$. Ahora de (3.31) se tiene

$$(h|v_n)_H = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{Z}^+,$$

por lo cual

$$\lim_{n\to\infty} (h|v_n)_H = \left(h| \lim_{n\to\infty} v_n\right)_H = (h|h)_H = 0$$

y en consecuencia $h = 0$.

□

Observación 3.28. *Del Teorema anterior podemos identificar $\bar{h}$ con h. En este sentido $H \subseteq V^*$ y por lo tanto se tienen las inclusiones $V \subseteq H \subseteq V^*$. Si los espacios V y H cumplen las hipótesis del Teorema anterior, se dice que «$V \subseteq H \subseteq V^*$» es una terna de evolución, como se precisa en la siguiente definición.*

Definición 3.29. (Terna de evolución) Decimos que «$V \subseteq H \subseteq V^*$» es una terna de evolución, si:

1. V es un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$ separable y reflexivo.

2. H es un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ separable.

3. La inclusión $V \subseteq H$ es densa y continua.

Ejemplo 3.30. Sea G un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$ con $N \geq 1$. El espacio de Sovolev

$$H^1(G) := \{f \in L_2(G) : \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L_2(G), \quad i = 1, 2, ..., N\}$$

con la norma inducida por el producto interior

$$(f|g)_{H^1(G)} := \int_G fg + \sum_{i=1}^{N} \int_G \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \tag{3.32}$$

es un espacio de Hilbert. Luego, si se toma $V = H^1(G)$ y $H = L_2(G)$ se sigue que

$$«H^1(G) \subseteq L_2(G) \subseteq (H^1(G))^*»$$

es una terna de evolución.

Observación 3.31. *Si «$V \subseteq H \subseteq V^*$» es una terna de evolución, se escribirá h en lugar de $\bar{h}$ (Ver Teorema 3.27) y así las siguientes expresiones serán válidas:*

$$\langle h, v\rangle_V = (h|v)_H \qquad \forall h \in H \;\; \forall v \in V, \tag{3.33}$$

$$\|h\|_{V^*} \leq C \|h\|_H \qquad \forall h \in H. \tag{3.34}$$

De la anterior expresión y teniendo en cuenta que la inclusión $V \subseteq H$ es continua se sigue que

$$\|v\|_{V^*} \leq C \|v\|_V \qquad \forall v \in V, \tag{3.35}$$

es decir se puede considerar que la inclusión $V \subseteq V^*$ es continua.

Definición 3.32. (Derivada generalizada) Sean $Y,\ Z$ dos espacios de Banach, $u \in L_1(0,T;Y)$ y $w \in L_1(0,T;Z)$. Decimos que w es la n-ésima derivada generalizada de u en $(0,T)$ si w satisface

$$\int_0^T \phi^{(n)}(t)u(t)dt = (-1)^n \int_0^T \phi(t)w(t)dt \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(0,T). \tag{3.36}$$

En tal caso denotamos $w := u^{(n)}$.

Observación 3.33. *Notemos que las funciones u y w toman valores en los espacios Y y Z respectivamente, los cuales generalmente pueden ser diferentes. Es decir, dado que*

$$u : (0,T) \to Y \qquad y \qquad w : (0,T) \to Z,$$

entonces la igualdad en (3.36) *significa que tanto la integral a la izquierda y la integral a la derecha pertenecen a $Y \cap Z$. Además debido a que*

$$\left\|\phi^{(n)}(t)u(t)\right\|_Y \leq C\left\|u(t)\right\|_Y; \quad C = \max_{\operatorname{supp}\phi^{(n)}} \left|\phi^{(n)}(t)\right|$$

entonces la función $\left\|\phi^{(n)}(t)u\right\|_Y$ es Lebesgue integrable y del Teorema de Bochner (Ver Teorema 2.16) se tiene que $\phi^{(n)}(t)u$ es Bochner integrable, por lo cual la integral a la derecha de (3.36) *existe para todo $\phi \in C_0^\infty(0,T)$. De forma similar se justifica la existencia de la integral a la izquierda de* (3.36).

Ejemplo 3.34. Sean $Y = Z = \mathbb{R}$ y $u : (0,T) \to \mathbb{R}$ dada por

$$u(t) = \begin{cases} t, & 0 < t \leq \frac{T}{2} \\ \frac{T}{2}, & \frac{T}{2} < t < T. \end{cases}$$

Definimos

$$w(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq \frac{T}{2} \\ 0, & \frac{T}{2} < t < T. \end{cases}$$

Notemos que $u, w \in L_1(0,T;\mathbb{R})$. Verifiquemos que w es la derivada generalizada de u. En efecto, para $\phi \in C_0^\infty(0,T)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \phi'(t)u(t)dt &= \int_0^{\frac{T}{2}} \phi'(t)t dt + \int_{\frac{T}{2}}^T \phi'(t)\left(\frac{T}{2}\right)dt \\
&= \phi(t)t\Big|_0^{\frac{T}{2}} - \int_0^{\frac{T}{2}} (\phi(t)\cdot 1)dt + \frac{T}{2}\left(\phi(T) - \phi\left(\frac{T}{2}\right)\right) \\
&= \phi\left(\frac{T}{2}\right)\frac{T}{2} - \int_0^{\frac{T}{2}} (\phi(t)\cdot 1)dt - \frac{T}{2}\phi\left(\frac{T}{2}\right) \\
&= -\int_0^T \phi(t)w(t)dt.
\end{aligned}$$

El anterior ejemplo muestra que no todas las funciones que tienen derivada generaliza son diferenciables en el sentido clásico, puesto que la función u no es diferenciable en $t = \frac{T}{2}$ en el sentido usual, y por tanto $u \notin C^1(0,T)$.

En el siguiente teorema se demuestra la unicidad de la derivada generalizada, lo que da sentido a que se use una notación única ($w = u^{(n)}$) para la n-ésima derivada generalizada de u. Posteriormente mostraremos que en el caso particular $Y = Z$, para funciones suaves, la derivada clásica de u es la derivada generalizada de u.

Teorema 3.35. *Sean Y y Z espacios de Banach. Si $u \in L_1(0, T; Y)$ entonces la derivada generalizada de u es única (salvo conjuntos de medida cero), es decir si se tiene que $w_1, w_2 \in L_1(0, T; Z)$ satisfacen la definición 3.32 entonces*

$$w_1(t) = w_2(t) \qquad \text{p.c.t.} \quad t \in (0, T).$$

Demostración. Puesto que $w_1, w_2 \in L_1(0, T; Z)$ satisfacen la definición 3.32 entonces

$$\int_0^T \phi(t) w_1(t) dt = \int_0^T \phi(t) w_2(t) dt \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(0, T),$$

de aquí

$$\int_0^T \phi(t) \left(w_1(t) - w_2(t) \right) dt = 0 \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(0, T)$$

y en consecuencia del Lema 3.26 se sigue el resultado. $\square$

Teorema 3.36. *Supongamos que $Y = Z$ en la definición de derivada generalizada. Si $u \in C^n([0, T]; Y)$ con $n \geq 1$ entonces la derivada clásica $u^{(n)}$ es al mismo tiempo la derivada generalizada de u.*

Demostración. Sean $u \in C^1([0, T]; Y)$, $\phi \in C_0^\infty(0, T)$ y u' la derivada clásica de u. Sabemos que

$$(\phi(t) u(t))' = \phi'(t) u(t) + \phi(t) u'(t);$$

por lo cual integrando la anterior expresión sobre $(0, T)$ tenemos que

$$\int_0^T (\phi'(t) u(t) + \phi(t) u'(t)) dt = \int_0^T (\phi(t) u(t))' dt = 0$$

y así

$$\int_0^T \phi'(t) u(t) dt = -\int_0^T \phi(t) u'(t) dt. \tag{3.37}$$

Ahora por inducción supongamos que para $u \in C^{(k)}([0, T]; Y)$ $k > 1$ se tiene que

$$\int_0^T \phi^{(k)}(t) u(t) dt = (-1)^k \int_0^T \phi(t) u^{(k)}(t) dt.$$

Mostremos que para $u \in C^{(k+1)}([0, T]; Y)$ se verifica que

$$\int_0^T \phi^{(k+1)}(t) u(t) dt = (-1)^{k+1} \int_0^T \phi(t) u^{(k+1)}(t) dt.$$

Sea $u \in C^{(k+1)}([0, T]; Y)$ entonces $u \in C^1([0, T]; Y)$ y $u' \in C^{(k)}([0, T]; Y)$, luego teniendo en cuenta (3.37) y nuestra hipótesis inductiva obtenemos:

$$\int_0^T \phi^{(k+1)}(t) u(t) dt = -\int_0^T \phi^{(k)}(t) u'(t) dt = (-1)^{k+1} \int_0^T \phi(t) u^{(k+1)}(t) dt.$$

Por lo tanto por el principio de inducción matemática se tiene el resultado deseado. $\square$

Ejemplo 3.37. Sean $u, v \in L_1(0,T;Y)$. Supongamos que $u', v' \in L_1(0,T;Z)$ entonces $u' + v' \in L_1(0,T;Z)$ es la derivada generalizada de $u+v$, es decir $(u+v)' = u' + v'$. En efecto, basta notar que para $\phi \in C_0^\infty(0,T)$ se tiene que

$$\begin{aligned}\int_0^T \phi'(t)\,(u(t)+v(t))dt &= \int_0^T \phi'(t)u(t)dt + \int_0^T \phi'(t)v(t)dt \\ &= (-1)\int_0^T \phi(t)\,(u'(t)+v'(t))dt.\end{aligned}$$

El siguiente resultado muestra que los conceptos de derivada generalizada y convergencia débil cumplen una relación significativa. Esto será importante para garantizar la prueba del teorema de existencia y unicidad de ecuaciones del tipo parabólico.

Lema 3.38. *Sean Y y Z espacios de Banach tales que la inclusión $Y \subseteq Z$ es continua y sea $1 \leq p, q < \infty$. Supongamos que para $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple*

$$u_k \rightharpoonup u \quad en \quad L_p(0,T;Y) \quad y \quad u_k^{(n)} \rightharpoonup v \quad en \quad L_q(0,T;Z) \quad cuando \quad k \to \infty.$$

Entonces

$$u^{(n)} = v \quad en \quad (0,T).$$

Demostración. Primero observemos que del Lema 3.20 se tiene que

$$L_p(0,T;Y) \subseteq L_1(0,T;Z) \quad \text{y} \quad L_q(0,T;Z) \subseteq L_1(0,T;Z),$$

por lo cual del Lema 3.15 se sigue que cuando $k \to \infty$

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{y} \quad u_k^{(n)} \rightharpoonup v \ \text{ en } \ L_1(0,T;Z); \quad n \in Z^+.$$

Ahora, de la definición de derivada generalizada se tiene para todo $\phi \in C_0^\infty(0,T)$ que:

$$\int_0^T \phi^{(n)}(t)u_k(t)dt = (-1)^n \int_0^T \phi(t)u_k^n(t)dt,$$

de donde haciendo $k \to \infty$ se obtiene

$$\int_0^T \phi^{(n)}(t)u(t)dt = (-1)^n \int_0^T \phi(t)v(t)dt.$$

$\square$

Observación 3.39. *Sean «$V \subseteq H \subseteq V^*$» una terna de evolución y $u \in L_p(0,T;V)$. Supongamos que $u^{(n)} \in L_q(0,T;V^*)$ es la n-ésima derivada generalizada de u. Debido a que $u(t) \in V \subseteq H$ para todo $t \in (0,T)$ y a la identificación de los elementos de H con elementos en V^* (Ver observación 3.28) se tiene que la igualdad*

$$\int_0^T \phi^{(n)}(t)u(t)dt = (-1)^n \int_0^T \phi(t)u^{(n)}(t)dt$$

puede ser considerada en V^*.

Teorema 3.40. *Sea «$V \subseteq H \subseteq V^*$» una terna de evolución y sea $1 < p, q < \infty$. Las siguientes afirmaciones son válidas:*

a) ***Unicidad.*** *Para $u \in L_p(0,T;V)$ la derivada generalizada $u^{(n)}$ es única como elemento de $L_q(0,T;V^*)$.*

b) ***Existencia.*** *Sea $u \in L_p(0,T;V)$. Entonces la derivada generalizada de u,*

$$u^{(n)} \in L_q(0,T;V^*)$$

existe si y sólo si existe una función $w \in L_q(0,T;V^*)$ tal que

$$\int_0^T (u(t)|v)_H \, \phi^{(n)}(t)dt = (-1)^n \int_0^T \langle w(t), v\rangle_V \phi(t)dt \tag{3.38}$$

para todo $v \in V$ y todo $\phi \in C_0^\infty(0,T)$.

Demostración.

a) Se sigue del Teorema 3.35 (Tomando $Y = V,\ Z = V^*$), teniendo en cuenta que por el Lema 3.20

$$L_p(0,T;V) \subseteq L_1(0,T;V) \ \text{ y } \ L_q(0,T;V^*) \subseteq L_1(0,T;V^*)$$

para $1 < p, q < \infty$.

b) $\Rightarrow$) Supongamos que existe la derivada generalizada $u^{(n)} \in L_q(0,T;V^*)$, es decir que

$$\int_0^T \phi^{(n)}(t)u(t)dt = (-1)^n \int_0^T \phi(t)u^{(n)}(t)dt \ \text{ en } \ V^*;$$

así

$$\left\langle \int_0^T \phi^{(n)}(t)u(t)dt, v \right\rangle_V = (-1)^n \left\langle \int_0^T \phi(t)u^{(n)}(t)dt, v \right\rangle_V \qquad \forall v \in V,$$

por lo cual del Teorema 3.24 se tiene que

$$\int_0^T \left\langle \phi^{(n)}(t)u(t), v\right\rangle_V dt = (-1)^n \int_0^T \left\langle \phi(t)u^{(n)}(t), v\right\rangle_V dt$$

y en consecuencia de (3.33)

$$\int_0^T (u(t)|v)_H \, \phi^{(n)}(t)dt = (-1)^n \int_0^T \left\langle u^{(n)}(t), v\right\rangle_V \phi(t)dt.$$

Por lo tanto el resultado se tiene tomando $w := u^{(n)}$.

$\Leftarrow$) Supongamos que existe una función $w \in L_q(0,T;V^*)$ con (3.38); entonces nuevamente de (3.33) se sigue que

$$\int_0^T \left\langle \phi^{(n)}(t)u(t), v\right\rangle_V dt = (-1)^n \int_0^T \langle \phi(t)w(t), v\rangle_V dt \qquad \forall v \in V,$$

de donde

$$\left\langle \int_0^T \phi^{(n)}(t)u(t)dt, v \right\rangle_V = (-1)^n \left\langle \int_0^T \phi(t)w(t)dt, v \right\rangle_V \qquad \forall v \in V$$

y así

$$\int_0^T \phi^{(n)}(t)u(t)dt = (-1)^n \int_0^T \phi(t)w(t)dt. \tag{3.39}$$

Por lo tanto w es la derivada generalizada de u.

□

Observación 3.41. *De* (3.39) *se sigue que* $u^{(n)} = w$ *y además, por* (3.38) *se tiene que*

$$\frac{d^n}{dt^n}(u(t)|v)_H = \left\langle u^{(n)}(t), v \right\rangle_V \tag{3.40}$$

para todo $v \in V$ *y para casi todo* $t \in (0,T)$ *donde* d^n/dt^n *significa la* n*-ésima derivada generalizada de la función real* $t \mapsto (u(t)|v)_H$ *sobre* $(0,T)$*.*

El siguiente lema permitirá demostrar un resultado muy especial, el cual nos muestra que la derivada generalizada y la integral de Bochner cumplen una relación similar a la dada en el Teorema fundamental del cálculo.

Lema 3.42. *Sea* $(V, \|\cdot\|_V)$ *un espacio de Banach. Sea* $F \in C([0,T];V)$*, definimos*

$$f(t) = \int_0^t F(s)ds \qquad \forall t \in [0,T].$$

Entonces $f \in C^1([0,T];V)$ *y* $f'(t) = F(t)$ *para todo* $t \in [0,T]$*.*

Demostración. Sean $h > 0$ y $t \in [0,T]$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} - F(t) \right\|_V &= \left\| \frac{1}{h}\left(\int_0^{t+h} F(s)ds - \int_0^t F(s)ds \right) - F(t) \right\|_V \\
&= \left\| \frac{1}{h}\left(\int_t^{t+h} F(s)ds - hF(t) \right) \right\|_V \\
&= \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (F(s) - F(t))ds \right\|_V \\
&\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|F(s) - F(t)\|_V ds \\
&\leq \sup_{s \in [t,t+h]} \|F(s) - F(t)\|_V \to 0 \quad \text{si} \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

Lo anterior demuestra que $f'(t) = F(t)$ para todo $t \in [0,T]$ y así $f \in C^1([0,T];V)$, ya que por hipótesis $F \in C([0,T];V)$. Si $h < 0$ se procede similarmente. □

Teorema 3.43. *Sea $u \in L_1(0,T;V)$. Consideremos $v : [0,T] \to V$ dada por*

$$v(t) := \int_0^t u(s)ds \qquad \forall t \in [0,T]$$

entonces $v \in C([0,T];V)$ y u es la derivada generalizada de v.

Demostración. Primero mostremos que $v \in C([0,T];V)$. En efecto sean $\epsilon > 0$ y $t_1, t_2 \in [0,T]$ con $t_1 < t_2$. Por la continuidad absoluta de la integral de Bochner (Ver Corolario 2.19) se sigue que existe $\delta > 0$ tal que si $|t_2 - t_1| < \delta$, se tiene que

$$\|v(t_2) - v(t_1)\|_V = \left\| \int_0^{t_2} u(s)ds - \int_0^{t_1} u(s)ds \right\|_V = \left\| \int_{t_1}^{t_2} u(s)ds \right\|_V < \epsilon,$$

lo que muestra que v es continua. Ahora para mostrar que $v' = u$ en $(0,T)$, notemos que como $u \in L_1(0,T;V)$ entonces por la densidad del conjunto de polinomios $P([0,T];X)$ en $L_1(0,T;V)$ (Ver Corolario 3.18) existe una sucesión $\{q_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq P([0,T];V)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|u - q_n\|_{L_1(0,T;V)} = 0. \tag{3.41}$$

Por otro lado para $n \in \mathbb{Z}^+$ consideremos

$$p_n(t) = \int_0^t q_n(s)ds.$$

Así,

$$\begin{aligned} \|v(t) - p_n(t)\|_V = \left\| \int_0^t u(s)ds - \int_0^t q_n(s)ds \right\|_V &\leq \int_0^t \|u(s) - q_n(s)\|_V ds \\ &\leq \int_0^T \|u(s) - q_n(s)\|_V ds. \end{aligned}$$

De aquí, teniendo en cuenta (3.41) se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \|v - p_n\|_{C([0,T];V)} \leq \lim_{n\to\infty} \int_0^T \|u(s) - q_n(s)\|_V ds = 0,$$

pero sabemos que la inclusión $C([0,T];V) \subseteq L_1(0,T;V)$ es continua (Ver Teorema 3.17) y así existe $C > 0$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|v - p_n\|_{L_1(0,T;V)} \leq C \lim_{n\to\infty} \|v - p_n\|_{C(0,T;V)} = 0, \tag{3.42}$$

es decir $p_n \to v$ en $L_1(0,T;V)$ cuando $n \to \infty$. Ahora por el lema anterior $p_n' = q_n$ en $[0,T]$, luego del Teorema 3.36 para $\phi \in C_0^\infty(0,T)$ se tiene que

$$\int_0^T \phi(s)q_n(s)ds = (-1)\int_0^T \phi'(s)p_n(s)ds.$$

Haciendo $n \to \infty$ del Teorema 3.24 se sigue que

$$\int_0^T \phi(s)u(s)ds = (-1)\int_0^T \phi'(s)v(s)ds$$

y en consecuencia $v' = u$ en $(0,T)$. $\square$

3.4. El espacio de Sobolev $W_p^1(0,T;V,H)$.

Debido a que se estudiarán ecuaciones evolutivas (interviene la derivada temporal), es necesario definir un espacio de funciones en donde se vincula el concepto de derivada generalizada dado en la sección anterior. Por esto consideramos el espacio de funciones $W_p^1(0,T;V,H)$, el cual acopla los conceptos de terna de evolución y derivada generalizada. Este espacio es fundamental para trabajar ecuaciones de tipo parabólico.

Definición 3.44. Sean $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y $0 < T < \infty$. Definimos $W_p^1(0,T;V,H)$ como el conjunto de funciones $u \in L_p(0,T;V)$ tal que su derivada generalizada esta en $L_q(0,T;V^*)$, esto es

$$W_p^1(0,T;V,H) := \{u \in L_p(0,T;V) : u' \in L_q(0,T;V^*)\}.$$

Teorema 3.45. *Si «$V \subseteq H \subseteq V^*$» es una terna de evolución entonces $W_p^1(0,T;V,H)$ es un espacio de Banach con la norma*

$$\|u\|_{W_p^1(0,T;V,H)} := \|u\|_{L_p(0,T;V)} + \|u'\|_{L_q(0,T;V^*)} \qquad \forall u \in W_p^1(0,T;V,H). \tag{3.43}$$

Observación 3.46. *La demostración de que $\|\cdot\|_{W_p^1(0,T;V,H)}$ es una norma se sigue fácilmente del hecho de que $\|\cdot\|_{L_p(0,T;V)}$ y $\|\cdot\|_{L_q(0,T;V^*)}$ son normas en $L_p(0,T;V)$ y $L_q(0,T;V^*)$ respectivamente. Por otro lado denotaremos la norma en $W_p^1(0,T;V,H)$ como*

$$\|\cdot\|_{W_p^1(0,T;V,H)} \overset{not}{=} \|\cdot\|_{W_p^1}.$$

Demostración. Sea $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $W_p^1(0,T;V,H)$, es decir para todo $\epsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$\|u_n - u_m\|_{W_p^1} := \|u_n - u_m\|_{L_p(0,T;V)} + \|(u_n - u_m)'\|_{L_q(0,T;V^*)} < \epsilon \tag{3.44}$$

siempre que $n, m \geq M$. Entonces

$$\|u_n - u_m\|_{L_p(0,T;V)} < \epsilon \quad \text{y} \quad \|u_n' - u_m'\|_{L_q(0,T;V^*)} < \epsilon \quad \text{siempre que } \; n, m \geq M$$

y así, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{u_n'\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones de Cauchy en $L_p(0,T;V)$ y $L_q(0,T;V^*)$ respectivamente. Puesto que estos espacios son completos (Ver Teorema 3.8) entonces existen $u \in L_p(0,T;V)$ y $v \in L_q(0,T;V^*)$ tales que

$$u_n \to u \;\text{ en }\; L_p(0,T;V) \;\text{ cuando }\; n \to \infty$$

y

$$u_n' \to v \;\text{ en }\; L_q(0,T;V^*) \;\text{ cuando }\; n \to \infty.$$

De (3.35) se sigue que la inclusión $V \subseteq V^*$ es continua y del Teorema 3.38 se tiene que $v = u'$. Por lo tanto $u \in W_p^1(0,T;V,H)$ y además haciendo $m \to \infty$ en (3.44) se obtiene

$$\|u_n - u\|_{W_p^1} \leq \epsilon \;\text{ siempre que }\; n, m \geq M,$$

es decir $u_n \to u$ en $W_p^1(0,T;V,H)$ cuando $n \to \infty$. □

Observación 3.47. *Sean «$V \subseteq H \subseteq V^*$» una terna de evolución, $1 < p < \infty$ y $0 < T < \infty$. El conjunto de todos los polinomios $w : [0,T] \to V$,*

$$w(t) = \sum_i t^i a_i$$

con $a_i \in V$ para todo $i \in \mathbb{Z}^+$ es denso en $W_p^1(0,T;V,H)$, $L_p(0,T;V)$ y $L_p(0,T;H)$.

Lema 3.48. *Sea «$V \subseteq H \subseteq V^*$» una terna de evolución. Sean $u, v \in C^1([0,T];V)$ y $0 \le s \le t \le T$. Entonces se verifica la siguiente fórmula:*

$$(u(t)|v(t))_H - (u(s)|v(s))_H = \int_s^t \langle u'(z), v(z)\rangle_V + \langle v'(z), u(z)\rangle_V dz. \tag{3.45}$$

Demostración. Sean $u, v \in C^1([0,T];V)$. Entonces $u(t), v(t) \in V \subseteq H$ para todo $t \in [0,T]$. Sabemos que

$$(u(t)|v(t))'_H = (u'(t)|v(t))_H + (u(t)|v'(t))_H$$

y así integrando la anterior expresión se tiene que

$$(u(t)|v(t))_H - (u(s)|v(s))_H = \int_s^t (u'(z), v(z))_H + (v'(z), u(z))_H dz.$$

En consecuencia de (3.33) se sigue que

$$(u(t)|v(t))_H - (u(s)|v(s))_H = \int_s^t \langle u'(z), v(z)\rangle_V + \langle v'(z), u(z)\rangle_V dz.$$

$\square$

Observación 3.49. *Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $0 < a < b < c$. Entonces existe $\tilde{g} \in C^1(\mathbb{R})$ tal que*

$$\tilde{g}(a) = 0, \quad \tilde{g}(b) = 1 \quad y \quad |\tilde{g}(x)| + |\tilde{g}'(x)| \le 1.$$

En efecto, basta notar que las funciones

$$h_1(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ e^{\frac{1}{a-x}}, & x > a \end{cases} \qquad y \qquad h_2(x) = \begin{cases} 0, & x \ge c \\ e^{\frac{1}{x-c}}, & x < c \end{cases}$$

están en $C^1(\mathbb{R})$. Así $h = h_1 h_2 \in C^1(\mathbb{R})$ y en consecuencia, si definimos

$$\tilde{g}(x) := C\ h(x); \quad C = e^{-\frac{a-c}{(a-b)(b-c)}}$$

se obtiene el resultado deseado.

Lema 3.50. *Sea «$V \subseteq H \subseteq V^*$» una terna de evolución. Entonces la inclusión*

$$W_p^1(0,T;V,H) \subseteq C([0,T],H)$$

es continua.

Demostración. Sean $0 \leq s \leq t \leq T$ y $u \in C^1([0,T];V)$. Consideremos $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ con $\varphi(s) = 0$, $\varphi(t) = 1$ y $|\varphi| + |\varphi'| \leq 1$ en $\mathbb{R}$. Reemplazando v por φu en (3.45) teniendo en cuenta la desigualdad de Hölder y que $(\varphi u)' = \varphi' u + \varphi u'$ se obtiene

$$\begin{aligned}
(u(t)|u(t))_H &= \int_s^t \varphi'(z) \langle u(z), u(z)\rangle_V + 2\varphi(z) \langle u'(z), u(z)\rangle_V dz \\
&\leq \int_s^t |\varphi'(z)| \, |\langle u(z), u(z)\rangle_V| dz + 2 \int_s^t |\varphi(z)| \, |\langle u'(z), u(z)\rangle_V| dz \\
&\leq \int_0^T |\langle u(z), u(z)\rangle_V| dz + 2 \int_0^T |\langle u'(z), u(z)\rangle_V| dz \\
&\leq \|u\|_{L_q(0,T;V^*)} \|u\|_{L_p(0,T;V)} + 2 \|u'\|_{L_q(0,T;V^*)} \|u\|_{L_p(0,T;V)} \\
&\leq C \|u\|_{W_p^1}^2 ;
\end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\|u\|_{C([0,T];H)} := \max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_H \leq \sqrt{C} \, \|u\|_{W_p^1}, \qquad \forall u \in C^1([0,T];V). \tag{3.46}$$

De lo anterior se tiene que la inclusión

$$i : C^1([0,T];V) \to C([0,T];H)$$

es continua, considerando $C^1([0,T];V)$ como espacio normado con la norma $\|\cdot\|_{W_p^1}$ y $C([0,T];H)$ con la norma usual $\|\cdot\|_{C([0,T];H)}$. Dada la densidad del espacio $C^1([0,T];V)$ en $W_p^1(0,T;V,H)$ del Teorema 1.9 se tiene que el operador inclusión i admite una única extensión lineal y continua

$$j : W_p^1(0,T;V,H) \to C([0,T];H)$$

tal que

$$\|j(u)\|_{C([0,T];H)} \leq \sqrt{C} \, \|u\|_{W_p^1} \qquad \forall u \in W_p^1(0,T;V,H).$$

Resta demostrar que

$$j(u) = u \qquad \forall u \in W_p^1(0,T;V,H).$$

En efecto, sea $u \in W_p^1(0,T;V,H)$ y $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subseteq C^1([0,T];V)$ tal que $u_n \to u$ en $W_p^1(0,T;V,H)$. Luego,

$$j(u) = j(\lim_{n\to\infty} u_n) = \lim_{n\to\infty} j(u_n) = \lim_{n\to\infty} i(u_n) = \lim_{n\to\infty} u_n = u.$$

□

Observación 3.51. *La inclusión de $W_p^1(0,T;V,H)$ en $C([0,T];H)$ debe entenderse de la siguiente manera. Para todo $u \in W_p^1(0,T;V,H)$ existe $v = j(u) \in C([0,T];H)$ tal que $u = v$ en $W_p^1(0,T;V,H)$, es decir*

$$u(t) = v(t) \quad \text{en} \quad V \qquad \text{p.c.t.} \quad t \in [0,T].$$

Definición 3.52. Una sucesión de molificadores $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es cualquier sucesión de funciones sobre $\mathbb{R}$ tales que

$$\varphi_n \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}), \quad \operatorname{supp} \varphi_n \subseteq B\left(0; \frac{1}{n}\right), \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(t)dt = 1 \;\; \text{y} \;\; \varphi_n \geq 0 \text{ en } \mathbb{R}.$$

Ejemplo 3.53. Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t^2-1}}, & |t| < 1 \\ 0, & |t| \geq 1. \end{cases}$$

Luego, $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} \varphi \subseteq B(0;1)$, y $\varphi \geq 0$ en $\mathbb{R}$. Así podemos obtener una sucesión de molificadores tomando

$$\varphi_n(t) = C\; n\; \varphi(nx); \quad C = \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt\right)^{-1}.$$

Definición 3.54. Sean $1 \leq p < \infty$, $v \in L_1(\mathbb{R})$ y $u \in L_p(0,T;V)$. Definimos la convolución entre v y u como una función $v * u : (0,T) \to V$ dada por:

$$(v * u)(t) = \int_0^T v(t-s)u(s)ds.$$

Nota. En la demostración del siguiente teorema se tendrá en cuenta lo siguiente: Para $t \in (0,T)$ existe $r > 0$ tal que $B(t;r) \subseteq (0,T)$. Así existe $n \in \mathbb{Z}^+$ con $\frac{1}{n} < r$, de donde

$$\varphi_n(t-s) > 0 \Rightarrow t - s \in B\left(0; \frac{1}{n}\right) \Rightarrow s \in B\left(t; \frac{1}{n}\right) \Rightarrow s \in [0,T]$$

y en consecuencia

$$\int_0^T \varphi_n(t-s)ds = \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(t-s)ds = \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(w)dw = 1.$$

Observación 3.55. *Si* $v \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ *entonces*

$$v * u \in C([0,T];V) \qquad \forall u \in W_p^1(0,T;V,H).$$

En efecto, sean $h \in \mathbb{R}$, $v \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ *y* $u \in W_p^1(0,T;V,H)$. *Entonces para* $t \in [0,T]$ *fijo,*

$$\begin{aligned} \|(v*u)(t+h) - (v*u)(t)\|_V &= \left\| \int_0^T [v(t+h-s) - v(t-s)]\, \|u(s)\|_V ds \right\|_V \\ &\leq \int_0^T |v(t+h-s) - v(t-s)|\, \|u(s)\|_V ds. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Tomemos

$$F(h) = \int_0^T |v(t+h-s) - v(t-s)|\, \|u(s)\|_V ds.$$

Notemos que para cada $s \in [0,T]$ *la función*

$$h \mapsto |v(t+h-s) - v(t-s)| \, \|u(s)\|_V$$

es continua (pues v *es continua). Además para todo* $h \in \mathbb{R}$ *la función*

$$s \mapsto |v(t+h-s) - v(t-s)| \, \|u(s)\|_V$$

es medible (producto de funciones medibles) y para todo $s \in [0,T]$,

$$|v(t+h-s) - v(t-s)| \, \|u(s)\|_V \leq [|v(t+h-s) + |v(t-s)||] \, \|u(s)\|_V \leq 2M \, \|u(s)\|_V := g(s)$$

donde $M = \max\limits_{r \in \operatorname{supp} v} v(r)$ *y* $\int_0^T g(s)ds = 2M \int_0^T \|u(s)\|_V ds < \infty$. *En consecuencia del Teorema sobre la continuidad de integrales dependientes de parametros (Ver Kufner[1] Teorema 2.1.6)se tiene que* F *es continua. Así, haciendo* $h \to \infty$ *en* (3.47) *teniendo en cuenta que* v *es continua se obtiene el resultado deseado.*

Teorema 3.56. *Sean* $1 < p < \infty$ *y «*$V \subseteq H \subseteq V^*$*» una terna de evolución. Entonces el espacio de funciones* $C^1([0,T];V)$ *es denso en* $W_p^1(0,T;V,H)$.

Demostración. Sea $u \in W_p^1(0,T;V,H)$.

PASO 1: Si $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$ entonces $(\varphi * u)' = \varphi * u'$. En efecto, resta notar que para $\phi \in C_0^\infty(0,T)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \phi(t)(\varphi * u')(t)dt &= \int_0^T \phi(t) \left[\int_0^T \varphi(s)u'(t-s)ds \right] dt \\
&= \int_0^T \varphi(s) \left[\int_0^T \phi(t)u'(t-s)dt \right] ds \\
&= -\int_0^T \varphi(s) \left[\int_0^T \phi'(t)u(t-s)dt \right] ds \\
&= -\int_0^T \phi'(t) \left[\int_0^T \varphi(s)u(t-s)ds \right] dt \\
&= -\int_0^T \phi'(t)(u * \varphi)(t)dt \\
&= -\int_0^T \phi'(t)(\varphi * u)(t)dt.
\end{aligned}$$

En la deducción anterior se usa el hecho de que ciertas integrales de Bochner iteradas son iguales, por ejemplo se usa la igualdad

$$\int_0^T \phi(t) \left[\int_0^T \varphi(s)u'(t-s)ds \right] dt = \int_0^T \varphi(s) \left[\int_0^T \phi(t)u'(t-s)dt \right] ds.$$

Dado que la igualdad anterior se da en V^*, dicha identidad se obtiene de observar que del Corolario 2.23 se tiene que para todo $v \in V$,

$$
\begin{aligned}
\left\langle \int_0^T \phi(t) \left[\int_0^T \varphi(s) u'(t-s) ds \right] dt, v \right\rangle_V &= \int_0^T \left\langle \phi(t) \int_0^T \varphi(s) u'(t-s) ds, v \right\rangle_V dt \\
&= \int_0^T \int_0^T \langle \phi(t)\varphi(s)u'(t-s), v \rangle_V ds dt \\
&= \int_0^T \int_0^T \langle \phi(t)\varphi(s)u'(t-s), v \rangle_V dt ds \\
&= \int_0^T \left\langle \int_0^T \phi(t)\varphi(s)u'(t-s) dt, v \right\rangle_V ds \\
&= \int_0^T \left\langle \varphi(s) \int_0^T \phi(t)u'(t-s) dt, v \right\rangle_V ds \\
&= \left\langle \int_0^T \varphi(s) \left[\int_0^T \phi(t)u'(t-s) dt \right] ds, v \right\rangle_V ,
\end{aligned}
$$

donde el cambio en el orden de integración en la tercera igualdad se tiene por el Teorema de Fubini (Ver Brezis[7] Teorema 4.5), debido a que la función $(s,t) \mapsto \langle \phi(t)\varphi(s)u'(t-s), v\rangle_V$ con valores en $\mathbb{R}$ es Lebesgue integrable en $[0,T] \times [0,T]$.

PASO 2: Para $t \in (0,T)$ consideremos la sucesión

$$v_n(t) = \int_0^T \varphi_n(t-s)u(s)ds$$

donde $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de molificadores. Verifiquemos que

I) $v_n \in C^1([0,T];V)$.

II) Si $u \in L_p(0,T;V)$ entonces $v_n \to u$ en $L_p(0,T;V)$.

En efecto,

I) Teniendo en cuenta que $\varphi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ y que $v_n = \varphi_n * u$ se sigue de la observación anterior que $v_n \in C([0,T];V)$. Ahora, observemos que para $t \in (0,T)$,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{h} \left\| v_n(t+h) - v_n(t) - (\varphi_n' * u)(t) \right\|_V \\
&= \frac{1}{h} \left\| \int_0^T \varphi_n(t-s+h)u(s)ds - \int_0^T \varphi_n(t-s)u(s)ds - \int_0^T \varphi_n'(t-s)u(s)ds \right\|_V \qquad (3.48) \\
&\leq \frac{1}{h} \int_0^T \left| \varphi_n(t-s+h) - \varphi_n(t-s) - \varphi_n'(t-s) \right| \|u(s)\|_V ds.
\end{aligned}
$$

Luego, si definimos

$$F(h) = \int_0^T \frac{1}{h} \left| \varphi_n(t-s+h) - \varphi_n(t-s) - \varphi_n'(t-s) \right| \|u(s)\|_V ds$$

y seguimos un procedimiento similar al de la observación 3.55 se sigue que F es continua. En consecuencia, si hacemos $h \to \infty$ en (3.48) teniendo en cuenta que φ es diferenciable se obtiene que

$$\frac{1}{h}\left\|v_n(t+h)-v_n(t)-(\varphi_n'*u)(t)\right\|_V \to 0.$$

De aquí que $v_n' = \varphi_n' * u$. Así, dado que $\varphi_n' \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ entonces nuevamente de la observación anterior $v_n' \in C([0,T];V)$. Por lo tanto $v_n \in C^1([0,T];V)$.

II) Sea $\epsilon > 0$. Supongamos inicialmente que $u \in C([0,T];V)$, entonces

$$\begin{aligned}
\|v_n-u\|^p_{L_p(0,T;V)} &= \int_0^T \|v_n(t)-u(t)\|_V^p dt \\
&= \int_0^T \left\|\int_0^T \varphi_n(t-s)u(s)ds - u(t)\right\|_V^p dt \\
&= \int_0^T \left\|\int_0^T \varphi_n(t-s)u(s)ds - \int_0^T \varphi_n(t-s)u(t)ds\right\|_V^p dt \\
&= \int_0^T \left\|\int_0^T \varphi_n(t-s)\left(u(s)-u(t)\right)ds\right\|_V^p dt \\
&\leq \int_0^T \left[\int_0^T |\varphi_n(t-s)|\,\|u(s)-u(t)\|_V ds\right]^p dt.
\end{aligned}$$

Ahora, puesto que $u \in C([0,T];V)$ entonces u es uniformemente continua sobre $[0,T]$ y en consecuencia existe $\delta > 0$ tal que

$$|s-t| < \delta \Rightarrow \|u(s)-u(t)\|_V < \left(\frac{\epsilon}{2CT^{p+1}}\right)^{1/p},$$

donde $C = \left(\max\limits_{t\in \operatorname{supp}\varphi_n} |\varphi_n(t)|\right)^{1/p}$. De lo anterior,

$$\begin{aligned}
\|v_n-u\|^p_{L_p(0,T;V)} &\leq \frac{\epsilon}{2CT^{p+1}}\int_0^T \left[\int_0^T |\varphi_n(t-s)|ds\right]^p dt \\
&\leq \frac{\epsilon}{2CT^{p+1}} CT^{p+1} \\
&= \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

En general, sean $\epsilon > 0$ y $u \in L_p(0,T;V)$. Como el espacio de funciones $C([0,T];V)$ es denso en $L_p(0,T;V)$ entonces existe $u_0 \in C([0,T];V)$ tal que

$$\|u_0-u\|_{L_p(0,T;V)} < \frac{\epsilon}{2}.$$

De aquí que

$$\|v_n-u\|_{L_p(0,T;V)} \leq \|v_n-u_0\|_{L_p(0,T;V)} + \|u_0-u\|_{L_p(0,T;V)} < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

PASO 3: (FINAL) Verifiquemos que $v_n \to u$ en $W_p^1(0,T;V,H)$ cuando $n \to \infty$. En efecto, por el **paso 2** se tiene que

$$\|v_n - u\|_{L_p(0,T;V)} \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Ahora, del **paso 1**,

$$v_n' = (\varphi_n * u)' = \varphi_n * u'$$

por lo cual siguiendo un procedimiento análogo al paso 2 parte II) se sigue que

$$\|v_n' - u'\|_{L_q(0,T;V^*)} \to 0, \qquad n \to \infty$$

y en consecuencia,

$$\|u_n - u\|_{W_p^1} = \|u_n - u\|_{L_p(0,T;V)} + \|u_n' - u'\|_{L_q(0,T;V^*)} \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

□

Teorema 3.57. ***(Integración por partes)*** *Sean $u, v \in W_p^1(0,T;V,H)$ y $0 \le s \le t \le T$. Entonces se verifica la siguiente fórmula:*

$$(u(t)|v(t))_H - (u(s)|v(s))_H = \int_s^t \langle u'(\tau), v(\tau)\rangle_V + \langle v'(\tau), u(\tau)\rangle_V d\tau. \tag{3.49}$$

Demostración. Sean $u, v \in W_p^1(0,T;V,H)$. Debido a que $C^1(0,T;V)$ es denso en $W_p^1(0,T;V,H)$ entonces existen $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ sucesiones en $C^1(0,T;V)$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{W_1^p} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \|v_n - v\|_{W_1^p} = 0. \tag{3.50}$$

De aquí

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L_p(0,T;V)} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|u_n' - u'\|_{L_q(0,T;V^*)} = 0, \\ &\lim_{n\to\infty} \|v_n - v\|_{L_p(0,T;V)} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \|v_n' - v'\|_{L_q(0,T;V^*)} = 0. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Ahora, por el Lema 3.48

$$(u_n(t)|v_n(t))_H - (u_n(s)|v_n(s))_H = \int_s^t \langle u_n'(\tau), v_n(\tau)\rangle_V + \langle v_n'(\tau), u_n(\tau)\rangle_V d\tau.$$

Probemos que

a) $(u_n(t)|v_n(t))_H \to (u(t)|v(t))_H$,

b) $(u_n(s)|v_n(s))_H \to (u(s)|v(s))_H$,

c) $\int_s^t \langle u_n'(\tau), v_n(\tau)\rangle_V d\tau \to \int_s^t \langle u'(\tau), v(\tau)\rangle_V d\tau$,

d) $\int_s^t \langle v_n'(\tau), u_n(\tau)\rangle_V d\tau \to \int_s^t \langle v'(\tau), u(\tau)\rangle_V d\tau$.

En efecto, verificaremos a) y c) ya que las demostraciones de b) y d) son análogas.

a) Puesto que la inclusión $W_p^1(0,T;V,H) \subseteq C([0,T];H)$ es continua entonces existe $C > 0$ tal que

$$\|u(z)\|_H \leq \|u\|_{C([0,T];H)} \leq C \|u\|_{W_p^1} \qquad \forall u \in W_p^1(0,T;V,H), \quad \forall z \in [0,T];$$

en particular $u_n - u, v_n - v \in W_p^1(0,T;V,H)$ y así de (3.50) se sigue que

$$\|u_n(t) - u(t)\|_H \to 0, \quad n \to \infty \quad \text{y} \quad \|v_n(t) - v(t)\|_H \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.52}$$

Debido a que

$$\begin{aligned}|(u_n(t)|v_n(t))_H - (u(t)|v(t))_H| &\leq |(u_n(t) - u(t)|v_n(t))_H| + |(u(t)|v_n(t) - v(t))_H| \\ &\leq \|u_n(t) - u(t)\|_H \|v_n(t)\|_H + \|u(t)\|_H \|v_n(t) - v(t)\|_H ,\end{aligned}$$

entonces de (3.52) se tiene que

$$|(u_n(t)|v_n(t))_H - (u(t)|v(t))_H| \to 0, \quad n \to \infty.$$

c) Notemos que:

$$\begin{aligned}&\left|\int_s^t \langle u_n'(\tau), v_n(\tau)\rangle_V d\tau - \int_s^t \langle u'(\tau), v(\tau)\rangle_V d\tau\right| \\ &= \left|\int_s^t \langle u_n'(\tau), v_n(\tau)\rangle_V - \langle u'(\tau), v(\tau)\rangle_V d\tau\right| \\ &= \left|\int_s^t \langle u_n'(\tau), v_n(\tau) - v(\tau)\rangle_V + \langle u_n'(\tau) - u'(\tau), v(\tau)\rangle_V d\tau\right| \\ &\leq \int_0^T |\langle u_n'(\tau), v_n(\tau) - v(\tau)\rangle_V| d\tau + \int_0^T |\langle u_n'(\tau) - u'(\tau), v(\tau)\rangle_V| d\tau \\ &\leq \|u_n'\|_{L_q(0,T;V^*)} \|v_n - v\|_{L_p(0,T;V)} + \|u_n' - u'\|_{L_q(0,T;V^*)} \|v\|_{L_p(0,T;V)} ;\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se tiene por la desigualdad de Hölder (en el espacio $Lp(0,T;V)$, Ver Teorema 3.21). Luego de (3.51) se obtiene que

$$\left|\int_s^t \langle u_n'(\tau), v_n(\tau)\rangle_V d\tau - \int_s^t \langle u'(\tau), v(\tau)\rangle_V d\tau\right| \to 0, \quad n \to \infty,$$

que es lo que se quería mostrar.

$\square$

Capítulo 4

Soluciones para problemas de tipo parabólico

En este capítulo desarrollaremos uno de los objetivos primordiales del trabajo de grado, el cual consiste en la solución del problema de existencia y unicidad para ecuaciones de tipo parabólico. Además se exhibirá una aplicación de este resultado para la solución de la ecuación del calor.

4.1. Existencia y unicidad de la solución de ecuaciones diferenciales parabólicas

En esta sección mostraremos la prueba del teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales parabólicas. Sea «$V \subseteq H \subseteq V^*$» una terna de evolución, $a : V \times V \to \mathbb{R}$ y $b : (0,T) \to V^*$ funciones. Consideremos el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(u(t)|v\right)_H + a(u(t),v) &= \langle b(t),v\rangle_V\,, \\ u(0) &= u_0 \in H, \\ u &\in W_2^1(0,T;V,H); \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde la primera ecuación de (4.1) se tiene para todo $v \in V$ y para casi todo $t \in (0,T)$ y además d/dt significa la derivada generalizada de la función real $t \mapsto (u(t)|v)_H$.

Observación 4.1. *1) Si multiplicamos la primera ecuación de* (4.1) *por* $\phi \in C_0^\infty(0,T)$ *y posteriormente integramos sobre* $(0,T)$ *se obtiene que*

$$-\int_0^T (u(t)|v)_H\,\phi'(t)dt+\int_0^T a(u(t),v)\phi(t)dt = \int_0^T \langle b(t),v\rangle_V\,\phi(t)dt \qquad \forall\phi \in C_0^\infty(0,T).$$

2) Si $u \in W_2^1(0,T;V,H)$*, por la observación 3.51 existe* $v \in C([0,T];H)$ *tal que* $u(t) = v(t)$ *para casi todo* $t \in [0,T]$*. La segunda ecuación de* (4.1) *debe entenderse como* $u(0) = u_0$ *en* H*.*

3) Sea $a : V \times V \to \mathbb{R}$ dada por

$$a(u, v) = \langle A(u), v \rangle_V \qquad \forall u, v \in V \tag{4.2}$$

donde $A : V \to V^*$ es un operador. Entonces a es una forma bilineal, acotada y estrictamente positiva si y sólo si A es un operador lineal, continuo y estrictamente monótono. (Ver definiciones 1.23 y 1.21).

4) Del numeral 3) *y del hecho de que*

$$\frac{d}{dt} (u(t)|v)_H = \langle u'(t), v \rangle_V \qquad \text{p.c.t.} \quad t \in (0, T), \quad \forall v \in V$$

se sigue que el problema (4.1) *es equivalente al siguiente problema*

$$\begin{aligned} u'(t) + A(u(t)) - b(t) = 0 \quad en \quad V^* \qquad &\text{p.c.t.} \quad t \in (0, T), \\ u(0) = u_0 \in H,& \\ u \in W_2^1(0, T; V, H);& \end{aligned} \tag{4.3}$$

donde $A : V \to V^*$ es el operador lineal, continuo y estrictamente monótono que satisface (4.2).

La siguiente definición presenta un concepto importante para plantear el teorema de existencia y unicidad de solución del problema (4.1).

Definición 4.2. (Base) Sea V un espacio con producto interior. Diremos que el conjunto **numerable** $\{w_1, w_2, ...\} \subseteq V$ es una base de V si $\{w_1, w_2, ...\}$ es un conjunto total ortonormal en V.

Estamos en condiciones de enunciar y demostrar el teorema de existencia y unicidad antes mencionado. Para la demostración de este hecho utilizaremos el método de Galerkin, el cual consiste en construir una sucesión de funciones que resulta de resolver el problema original (en nuestro caso el problema (4.1)) en subespacios finito dimensionales de V. Más precisamente, en construir una sucesión $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq W_2^1(0, T; V, H)$ tal que u_n resuelve (4.1) en V_n, donde V_n es una sucesión de subespacios de V de dimensión finita. Este método exige que la sucesión $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ sea convergente en un cierto sentido y su límite debe ser precisamente la solución del problema (4.1). El teorema aquí expuesto verificará la convergencia de dicha sucesión. Supondremos que V posee una base $\{w_1, w_2, ...\}$. Inicialmente para $n \in \mathbb{Z}^+$ consideremos el problema

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (u_n(t)|v)_H + a(u_n(t), v) = \langle b(t), v \rangle_V \qquad &\forall v \in V_n, \\ u_n(0) = u_{n0} \in V_n := \text{gen}\, \{w_1, w_2, ..., w_n\},& \\ u_n \in C^1([0, T]; V).& \end{aligned} \tag{4.4}$$

Puesto que la primera ecuación de (4.4) se debe cumplir para todo $v \in V_n$, es suficiente que esta se cumpla para todo w_j con $j = 1, 2, ...n$, es decir (4.4) es equivalente a:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (u_n(t)|w_j)_H + a(u_n(t), w_j) = \langle b(t), w_j \rangle_V \qquad &\forall j = 1, 2, ...n, \\ u_n(0) = u_{n0} \in V_n,& \\ u_n \in C^1([0, T]; V).& \end{aligned} \tag{4.5}$$

Ahora notemos que si $u_n \in C^1([0,T];V)$, de (3.40) y (3.33) se tiene que

$$\frac{d}{dt}\left(u_n(t)|w_j\right)_H = \langle u_n'(t), w_j\rangle_V = \left(u_n'(t)|w_j\right)_H \qquad \text{p.c.t.} \quad t \in (0,T).$$

Además dado que $u_{n0} \in V_n$, existen escalares $\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, ...\alpha_{nn}$ tales que

$$u_{n0} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kn} w_k.$$

Adicionalmente, para $n \in \mathbb{Z}^+$ y $t \in (0,T)$ tomemos

$$u_n(t) = \sum_{k=1}^{n} C_{kn}(t) w_k, \quad \text{donde} \quad C_{1n}(t), C_{2n}(t), ..., C_{nn}(t) \in \mathbb{R},$$

y así

$$u_n'(t) = \sum_{k=1}^{n} C_{kn}'(t) w_k.$$

Reemplazando las expresiones anteriores en (4.5) se obtiene

$$\begin{gathered} \sum_{k=1}^{n} C_{kn}'(t)\left(w_k|w_j\right)_H + \sum_{k=1}^{n} C_{kn}(t) a(w_k, w_j) = \langle b(t), w_j\rangle_V, \\ C_{jn}(0) = \alpha_{jn}, \qquad j = 1, 2, ...n. \end{gathered} \tag{4.6}$$

Observemos que el anterior sistema de ecuaciones puede ser escrito matricialmente de la siguiente forma

$$\begin{gathered} AD'(t) + BD(t) = \hat{b}(t), \\ D(0) = \alpha; \end{gathered} \tag{4.7}$$

donde

$$D(t) = \begin{bmatrix} C_{1n}(t) \\ C_{2n}(t) \\ \vdots \\ C_{nn}(t) \end{bmatrix}, \qquad \hat{b}(t) = \begin{bmatrix} \langle b(t), w_1\rangle_V \\ \langle b(t), w_2\rangle_V \\ \vdots \\ \langle b(t), w_n\rangle_V \end{bmatrix}, \qquad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

y las componentes de las matrices A y B son

$$a_{kj} := \left(w_k|w_j\right)_H \quad \text{y} \quad b_{kj} := a(w_k, w_j) \qquad k, j = 1, 2, ..., n,$$

respectivamente. Notemos que siendo H un espacio de Hilbert real, la matriz A es simétrica. Además, A es definida positiva, pues para cualquier $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)^T \in \mathbb{R}^N$

se tiene que

$$\beta^T A\beta = \begin{pmatrix}\beta_1, & \beta_2, & \cdots, & \beta_n\end{pmatrix} \begin{bmatrix} (w_1|w_1)_H & \cdots & (w_1|w_n)_H \\ (w_2|w_1)_H & \cdots & (w_2|w_n)_H \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (w_n|w_1)_H & \cdots & (w_n|w_n)_H \end{bmatrix} \begin{pmatrix}\beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\beta_1, & \beta_2, & \cdots, & \beta_n\end{pmatrix} \begin{bmatrix} \left(w_1|\sum_{j=1}^n \beta_j w_j\right)_H \\ \left(w_2|\sum_{j=1}^n \beta_j w_j\right)_H \\ \vdots \\ \left(w_n|\sum_{j=1}^n \beta_j w_j\right)_H \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\beta_i w_i | \sum_{j=1^n} \beta_j w_j\right)$$

$$= \left(\sum_{j=1}^n \beta_j w_j | \sum_{j=1}^n \beta_j w_j\right) > 0.$$

En consecuencia, al ser A simétrica y definida positiva A es invertible. Por tanto si multiplicamos (4.7) por la matriz inversa de A tenemos que

$$\begin{aligned} D'(t) &= -A^{-1}\left[BD(t) + \hat{b}(t)\right] := F(D,t), \\ D(0) &= \alpha. \end{aligned} \tag{4.8}$$

En conclusión, resolver (4.5) es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (4.8), el cual posee solución única, es decir existe una única

$$D : [0,T] \to \mathbb{R}^N, \quad D(t) = (C_{1n}(t), C_{2n}(t), ..., C_{nn}(t))^T \quad \text{con} \quad D \in C^1([0,T];\mathbb{R}^N).$$

(Ver sección 5.5 de Hirsch-Smale [9]).

Teorema 4.3. ***(Existencia y unicidad)*** *Supongamos que*

(H1) «$V \subseteq H \subseteq V^*$» es una terna de evolución. V, H espacios de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ y V de dimensión infinita.

(H2) $a : V \times V \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal, acotada y estrictamente positiva. Sean $b \in L_2(0,T;V^*)$ y $u_0 \in H$.

(H3) $\{w_1, w_2, ...\}$ una base de V y $\{u_{n0}\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en H tal que

$$u_{n0} \to u_0 \quad \text{en} \quad H \quad \text{cuando} \quad n \to \infty,$$

donde $u_{n0} \in \text{gen}\ \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ para todo n.

Entonces:

a) ***Existencia y unicidad.*** *El problema* (4.1) *tiene exactamente una solución* $u \in W_2^1(0;T;V,H)$.

b) ***Dependencia continua de los datos.*** *La función de* $H \times L_2(0,T;V^*)$ *en* $W_2^1(0,T;V,H)$ *dada por*

$$(u_0, b) \mapsto u$$

es lineal y continua, esto es existe $D > 0$ *tal que*

$$\|u\|_{W_2^1} \leq D\left(\|u_0\|_H + \|b\|_{L_2(0,T;V^*)}\right) \qquad \forall u_0 \in H \quad \forall b \in L_2(0,T;V^*).$$

c) ***Convergencia del método de Galerkin.*** *Para todo* $n = 1, 2, ...$ *las ecuaciones* (4.6) *tienen exactamente una solución* $u_n \in W_2^1(0,T;V,H)$. *La sucesión* $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge cuando* $n \to \infty$ *a la solución* u *de* (4.1) *de la siguiente forma*

$$u_n \to u \quad en \quad L_2(0,T;V^*) \quad cuando \quad n \to \infty, \tag{4.9}$$

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u_n(t) - u(t)\|_H \to 0 \quad cuando \quad n \to \infty. \tag{4.10}$$

Demostración. Dado que los problemas (4.1) y (4.3) son equivalentes entonces en la prueba se trabajará con el segundo problema.

a) **Unicidad.** Supongamos que $u_1, u_2 \in W_2^1(0,T;V,H)$ satisfacen (4.3), es decir para $j = 1, 2$ se sigue que

$$\begin{aligned} u_j'(t) + A\left(u_j(t)\right) - b(t) = 0 \ \text{ en } \ V^* \qquad &\text{p.c.t.} \quad t \in (0,T), \\ u_j(0) = u_0 \in H. \end{aligned}$$

Restando estas ecuaciones y haciendo $u := u_1 - u_2$ se tiene que

$$\begin{aligned} u'(t) + A\left(u(t)\right) = 0 \ \text{ en } \ V^* \qquad &\text{p.c.t.} \quad t \in (0,T), \\ u(0) = 0, \quad u \in W_2^1(0,T;V,H). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Deseamos mostrar que $u(t) = 0$ para casi todo $t \in (0,T)$. En efecto, en primer lugar notemos que de la primera ecuación de (4.11), se sigue que

$$\langle u'(t) + A\left(u(t)\right), u(t)\rangle_V = 0 \qquad \text{p.c.t.} \quad t \in (0,T)$$

o equivalentemente

$$\langle u'(t), u(t)\rangle_V = -\left\langle A\left(u(t)\right), u(t)\right\rangle_V \qquad \text{p.c.t.} \quad t \in (0,T).$$

Además, por la fórmula de integración por partes (3.49), teniendo en cuenta que $u(0) = 0$ y que a es estrictamente positiva ($\exists C > 0 : a(u,u) \geq C\|u\|_V^2, \quad \forall u \in V$) se obtiene que

$$\begin{aligned} \|u(T)\|_H^2 &= 2\int_0^T \langle u'(t), u(t)\rangle dt = -2\int_0^T \langle A\left(u(t)\right), u(t)\rangle dt \\ &= -2\int_0^T a(u(t), u(t))dt \leq -2C\int_0^T \|u(t)\|_V^2 dt \end{aligned}$$

y así
$$\frac{1}{2}\left\|u(T)\right\|_H^2 + C\int_0^T \left\|u(t)\right\|_V^2 dt \leq 0.$$
En consecuencia $\|u\|_{L_2(0,T;V)} = 0$, por lo cual se sigue que $u(t) = 0$ p.c.t. $t \in (0,T)$. Por lo tanto se garantiza la unicidad de solución del problema (4.1).

Existencia. Aplicamos el método de Galerkin.

(I) Recordemos que el problema: hallar $u_n \in C^1([0,T];V)$ tal que
$$\begin{aligned} (u_n'(t)|w_j)_H + a(u_n(t), w_j) &= \langle b(t), w_j\rangle_V \quad j = 1, ..., n, \\ u_n(0) &= u_{n0}, \end{aligned} \tag{4.12}$$
donde
$$u_n(t) = \sum_{j=1}^{n} C_{jn}(t) w_j$$
representa un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias y que para cada $n = 1, 2, ...$ tiene una única solución. (Ver (4.5)).

(II) Mostremos que para $n \in \mathbb{Z}^+$ se sigue que
$$\int_0^T \left\|u_n(t)\right\|_V^2 dt \leq K\left(\left\|u_n(0)\right\|_H^2 + \int_0^T \left\|b(t)\right\|_{V^*}^2 dt\right) \tag{4.13}$$
para alguna constante $K > 0$ que no depende de n. En efecto, si multiplicamos la primera ecuación de (4.12) por las funciones C_{jn} y sumamos con respecto a j obtenemos que
$$(u_n'(t)|u_n(t))_H + a(u_n(t), u_n(t)) = \langle b(t), u_n(t)\rangle_V .$$
Sabemos que
$$\frac{d}{dt}\left(u_n(t)|u_n(t)\right)_H = 2\left(u_n'(t)|u_n(t)\right)_H$$
y así
$$\frac{d}{dt}\left\|u_n(t)\right\|_H^2 + 2a(u_n(t), u_n(t)) = 2\left\langle b(t), u_n(t)\right\rangle_V .$$
Integrando la anterior expresión sobre $[0,T]$ se tiene que
$$\left\|u_n(T)\right\|_H^2 - \left\|u_n(0)\right\|_H^2 + 2\int_0^T a(u_n(t), u_n(t))dt = 2\int_0^T \left\langle b(t), u_n(t)\right\rangle_V dt,$$
de donde
$$\left\|u_n(T)\right\|_H^2 + 2\int_0^T a(u_n(t), u_n(t))dt \leq \left\|u_n(0)\right\|_H^2 + 2\int_0^T \left\|b(t)\right\|_{V^*}\left\|u_n(t)\right\|_V dt. \tag{4.14}$$

Por hipótesis a es estrictamente positiva, esto es existe $M > 0$ tal que

$$a(u_n(t), u_n(t)) \geq M \|u_n(t)\|_V^2 \qquad \forall t \in (0,T) \;\; \forall n \in \mathbb{Z}^+,$$

de aquí

$$2\int_0^T a(u_n(t), u_n(t))dt \geq 2M \int_0^T \|u_n(t)\|_V^2 dt. \tag{4.15}$$

Adicionalmente, para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple que (por la desigualdad entre media geométrica y media aritmética)

$$2|xy| \leq M^{-1}x^2 + My^2,$$

en particular para $x = \|b(t)\|_{V^*}$, $y = \|u_n(t)\|_V$ se tiene que

$$2\|b(t)\|_{V^*} \|u_n(t)\|_V \leq M^{-1} \|b(t)\|_{V^*}^2 + M \|u_n(t)\|_V^2$$

y así

$$2\int_0^T \|b(t)\|_{V^*} \|u_n(t)\|_V dt \leq M^{-1} \int_0^T \|b(t)\|_{V^*}^2 dt + M \int_0^T \|u_n(t)\|_V^2 dt. \tag{4.16}$$

Teniendo en cuenta (4.15) y (4.16) en (4.14) se sigue que

$$\|u_n(T)\|_H^2 + 2M\int_0^T \|u_n(t)\|_V^2 dt \leq \|u_n(0)\|_H^2 + M^{-1}\int_0^T \|b(t)\|_{V^*}^2 dt + M\int_0^T \|u_n(t)\|_V^2 dt,$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned}\int_0^T \|u_n(t)\|_V^2 dt &\leq \frac{\|u_n(0)\|_H^2}{M} + \frac{1}{M^2}\int_0^T \|b(t)\|_{V^*}^2 dt - \frac{\|u_n(T)\|_H^2}{M} \\ &\leq K\left(\|u_n(0)\|_H^2 + \int_0^T \|b(t)\|_{V^*}^2 dt\right),\end{aligned}$$

donde $K = \frac{1}{M} \text{máx}\left\{1, \frac{1}{M}\right\}$.

(III) Debido a que $u_n(0) \to u_0$ en H cuando $n \to \infty$, de (4.13) se tiene que la sucesión $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ es acotada en $L_2(0,T;V)$ y en consecuencia existe una subsucesión $\{u_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ de $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ que converge débilmente en $L_2(0,T;V)$ (Ver proposición 21.23 (i) de Zeidler[4]). Sea $u \in L_2(0,T;V)$ tal que

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \;\; \text{en} \;\; L_2(0,T;V), \;\; \text{si} \;\; k \to \infty.$$

Nuestro objetivo es mostrar que u satisface:

$$\begin{aligned} u'(t) + A(u(t)) = b(t) \;\; \text{en} \;\; V^* \qquad \text{p.c.t.} \;\; t \in (0,T),& \\ u \in W_2^1(0,T;V,H),& \\ u(0) = u_0.& \end{aligned} \tag{4.17}$$

Para demostrar la anterior afirmación, inicialmente verifiquemos que para todo $v \in V$ y toda $\phi \in C^1([0,T])$ con $\phi(T) = 0$ se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned} -\left(u_0|v\right)_H \phi(0) - \int_0^T \langle u(t), v\rangle_V \phi'(t)dt + \int_0^T \langle A(u(t)), v\rangle_V \phi(t)dt \\ = \int_0^T \langle b(t), v\rangle_V \phi(t)dt \end{aligned} \tag{4.18}$$

En primer lugar verificaremos (4.18) para el caso particular $v = w_j$, $j = 1, 2, ...$ En efecto, dado que

$$\left(u'_{n_k}(t)|w_j\right)_H \phi(t) = \left(u'_{n_k}(t)|\phi(t)w_j\right)_H = \left\langle u'_{n_k}(t)|\phi(t)w_j\right\rangle_V = \phi(t)\left\langle u'_{n_k}(t)|w_j\right\rangle_V,$$

entonces de la fórmula de integración por partes (3.49) se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^T \phi(t)\left\langle u'_{n_k}(t), w_j\right\rangle_V dt &= \int_0^T \left\langle u'_{n_k}(t), \phi(t)w_j\right\rangle_V dt \\ &= \left(u_{n_k}(T)|\phi(T)w_j\right)_H - \left(u_{n_k}(0)|\phi(0)w_j\right)_H - \int_0^T \left\langle u_{n_k}(t), \phi'(t)w_j\right\rangle_V dt. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Luego, si multiplicamos la primera ecuación de (4.12) por ϕ, integramos sobre $[0,T]$ y posteriormente reemplazamos (4.19) se obtiene que

$$\begin{aligned} -\left(u_{n_k}(0)|w_j\right)_H \phi(0) - \int_0^T \langle u_{n_k}(t), w_j\rangle_V \phi'(t)dt + \int_0^T a(u_{n_k}(t), w_j)\phi(t)dt \\ = \int_0^T \langle b(t), w_j\rangle_V \phi(t)dt. \end{aligned} \tag{4.20}$$

En consecuencia, para deducir (4.18) en el caso $v = w_j$, es suficiente mostrar que

$$\left(u_{n_k}(0)|w_j\right)_H \phi(0) \to \left(u_0|w_j\right)_H \phi(0) \quad \text{cuando} \quad k \to \infty, \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle u_{n_k}(t), w_j\rangle_V \phi'(t)dt &\to \int_0^T \langle u(t), w_j\rangle_V \phi'(t)dt, \quad k \to \infty, \\ \int_0^T a(u_{n_k}(t), w_j)\phi(t)dt &\to \int_0^T a(u(t), w_j)\phi(t)dt, \quad k \to \infty. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Notemos que (4.21) se obtiene debido a que $u_{n0} \to u_0$ en H cuando $n \to \infty$. Para deducir (4.22), dado que $u_{n_k} \rightharpoonup u$ en $L_2(0,T;V)$, es suficiente mostrar que los funcionales en $L_2(0,T;V)$

$$\textbf{(i)}\ \hat{u} \mapsto \int_0^T \langle \hat{u}(t), w_j\rangle_V \phi'(t)dt, \quad \textbf{(ii)}\ \hat{u} \mapsto \int_0^T a(\hat{u}(t), w_j)\phi(t)dt \tag{4.23}$$

están en $(L_2(0,T;V))^*$. En efecto, la linealidad de estos funcionales se puede verificar fácilmente. Mostremos que estos funcionales son acotados. Sea $\hat{u} \in L_2(0,T;V)$.

(i) Teniendo en cuenta que la inclusión $V \subseteq V^*$ es continua $(\exists C_1 > 0 : \|v\|_{V^*} \leq C_1 \|v\|_V \;\; \forall v \in V^*)$ y la desigualdad de Hölder, se obtiene:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \langle \hat{u}(t), w_j \rangle_V \, \phi'(t) dt \right| &\leq \int_0^T \|\hat{u}(t)\|_{V^*} \|w_j\|_V \, |\phi'(t)| dt \\ &\leq C_2 \|w_j\|_V \int_0^T \|\hat{u}(t)\|_V dt \\ &\leq C_2 \|w_j\|_V \left(\int_0^T dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \|\hat{u}(t)\|_V^2 dt \right)^{1/2} \\ &= C_2 T^{1/2} \|w_j\|_V \|\hat{u}\|_{L_2(0,T;V)} , \end{aligned} \tag{4.24}$$

con $C_2 = C_1 \operatorname{máx}_{t \in [0,T]} |\phi'(t)|$.

(ii) Por ser $a : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma acotada existe $C_3 > 0$ tal que $|a(v_1, v_2)| \leq C_3 \|v_1\|_V \|v_2\|_V$ para todo $v_1, v_2 \in V$; por lo cual teniendo en cuenta nuevamente la desigualdad de Hölder se obtiene

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T a(\hat{u}(t), w_j) \phi(t) dt \right| &\leq C_4 \int_0^T \|\hat{u}(t)\|_V \|w_j\|_V dt \\ &\leq C_4 \|w_j\|_V \left(\int_0^T dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \|\hat{u}(t)\|_V^2 dt \right)^{1/2} \\ &= C_4 T^{1/2} \|w_j\|_V \|\hat{u}\|_{L_2(0,T;V)} , \end{aligned} \tag{4.25}$$

con $C_4 = C_3 \operatorname{máx}_{t \in [0,T]} |\phi(t)|$. En consecuencia, los funcionales en (4.23) están en $(L_2(0,T;V))^*$ y así se obtiene (4.22). Para finalizar la prueba de (4.18), resta mostrar que (4.18) también se cumple para todo $v \in V$. En efecto, sea $v \in V$; por la hipótesis $(H3)$ existe una sucesión $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq V$ tal que cada v_n es una combinación lineal de ciertos elementos de la base $\{w_1, w_2, ...\}$ y además $v_n \to v$ en V cuando $n \to \infty$. Teniendo en cuenta que (4.18) es válida para $v = w_j$ $(j = 1, 2, ...)$, se sigue:

$$\begin{aligned} - (u_0 | v_n)_H \, \phi(0) - \int_0^T \langle u(t), v_n \rangle_V \, \phi'(t) dt + \int_0^T a(u(t), v_n) \phi(t) dt \\ = \int_0^T \langle b(t), v_n \rangle_V \, \phi(t) dt. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Por lo tanto, para concluir (4.18) es suficiente verificar que los funcionales lineales en V

$$\begin{aligned} &\textbf{(i)}\ \hat{v} \mapsto \int_0^T \langle u(t), \hat{v} \rangle_V \, \phi'(t) dt, \quad \textbf{(ii)}\ \hat{v} \mapsto \int_0^T a(u(t), \hat{v}) \phi(t) dt, \\ &\textbf{(iii)}\ \hat{v} \mapsto \int_0^T \langle b(t), \hat{v} \rangle_V \, \phi(t) dt. \end{aligned} \tag{4.27}$$

son continuos. En efecto, sea $\hat{v} \in V$.

(i) Siguiendo un procedimiento análogo a (4.24) obtenemos

$$\left|\int_0^T \langle u(t),\hat{v}\rangle_V \phi'(t)dt\right| \leq C_2 T^{1/2} \|u\|_{L_2(0,T;V)} \|\hat{v}\|_V .$$

(ii) Se sigue similarmente a (4.25) que

$$\left|\int_0^T a(u(t),\hat{v})\phi(t)dt\right| \leq C_4 T^{1/2} \|u\|_{L_2(0,T;V)} \|\hat{v}\|_V .$$

(iii) De la desigualdad de Hölder se tiene que

$$\left|\int_0^T \langle b(t),\hat{v}\rangle_V \phi(t)dt\right| \leq C\int_0^T \|b(t)\|_{V^*} \|\hat{v}\|_V dt \leq CT^{1/2}\left(\int_0^T \|b(t)\|_{V^*}^2 dt\right)^{1/2} \|\hat{v}\|_V ,$$

donde $C = \max\limits_{t\in[0,T]} |\phi(t)|$.

En consecuencia, los funcionales (4.27) son continuos, por lo cual si hacemos $n \to \infty$ en (4.26) y tenemos en cuenta que para todo $t \in (0,T)$ y todo $v \in V$, $a(u(t),v) = \langle A(u(t)),v\rangle_V$ obtenemos (4.18).

No es dificil ahora demostrar que $u \in L_2(0,T;V)$ satisface (4.17). Como el operador $A : V \to V^*$ es acotado entonces existe $C > 0$ tal que $\|A(v)\|_{V^*} \leq C\|v\|_V$ para todo $v \in V$. Así, dado que $u \in L_2(0,T;V)$ se tiene que

$$\int_0^T \|A(u(t))\|_{V^*}^2 dt \leq C^2 \int_0^T \|u(t)\|_V^2 dt < \infty. \tag{4.28}$$

Luego, $A \circ u \in L_2(0,T;V^*)$. Por hipótesis $b \in L_2(0,T;V^*)$, de donde

$$b - (A\circ u) \in L_2(0,T;V^*). \tag{4.29}$$

Adicionalmente, notemos que de (4.18) se sigue que

$$\left\langle -\int_0^T \phi'(t)u(t)dt + \int_0^T \phi(t)\left(A(u(t)) - b(t)\right)dt, v\right\rangle_V = 0 \quad \forall\phi \in C_0^\infty(0,T)\ \forall v \in V$$

y en consecuencia

$$-\int_0^T \phi'(t)u(t)dt + \int_0^T \phi(t)\left(A(u(t)) - b(t)\right)dt = 0, \qquad \forall\phi \in C_0^\infty(0,T).$$

Por lo tanto, $b - (A\circ u) \in L_2(0,T;V^*)$ es la derivada generalizada de u, es decir

$$u'(t) = b(t) - A(u(t)) \qquad \text{p.c.t.} \quad t \in (0,T),$$

lo que demuestra la primera ecuación de (4.17). Además de (4.29) se sigue que $u \in W_2^1(0,T;V,H)$. Resta mostrar que $u(0) = u_0$. En efecto, como

$u \in W_2^1(0,T;V,H)$ entonces de la fórmula de integración por partes (3.49) se tiene que

$$(u(T)|\phi(T)v)_H - (u(0)|\phi(0)v)_H = \int_0^T \langle u'(t), \phi(t)v\rangle_V + \langle u(t), \phi'(t)v\rangle_V dt$$

para toda $\phi \in C^1([0,T])$ y todo $v \in V$. En particular, si tomamos $\varphi \in C^1([0,T])$ con $\varphi(0) = 1$ y $\varphi(T) = 0$ entonces

$$-(u(0)|v)_H = \int_0^T \langle u'(t), \varphi(t)v\rangle_V dt + \int_0^T \langle u(t), \varphi'(t)v\rangle_V dt, \qquad v \in V.$$

Por otro lado, si reemplazamos $b(t) = u'(t) + A(u(t))$ en (4.18) obtenemos que

$$-(u_0|v)_H = \int_0^T \langle u'(t), \varphi(t)v\rangle_V dt + \int_0^T \langle u(t), \varphi'(t)v\rangle_V dt, \qquad v \in V.$$

En consecuencia, si restamos las dos anteriores identidades se sigue que

$$(u(0) - u_0|v)_H = 0 \qquad \forall v \in V.$$

Luego, como V es denso en H entonces la anterior expresión se verifica para todo elemento de H y así $u(0) = u_0$.

En conclusión, se ha demostrado que el límite u al cual converge débilmente la subsucesión $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, verifica (4.17). Dado que (4.17) es equivalente a (4.1), (Ver observación 4.1). Esto muestra la existencia de solución del problema (4.1).

b) **Dependencia continua de los datos.**

En primer lugar, notemos que si existe otra subsucesión de $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge débilmente en $L_2(0,T;V)$, razonando de la misma forma que en (III) de la demostración de existencia, se demuestra que el límite al cual converge esta subsucesión debe satisfacer (4.17). Luego, de la unicidad de solución de este problema se tiene que dicha subsucesión debe converger a u. Es decir, toda subsucesión de $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge débilmente, necesariamente lo hace a u. Por lo tanto $u_n \rightharpoonup u$ en $L_2(0,T;V)$ cuando $n \to \infty$.

Ahora, Puesto que $u_n \rightharpoonup u$ en $L_2(0,T;V)$ cuando $n \to \infty$ entonces (Proposición 21.23(c) de Zeidler[4])

$$\|u\|_{L_2(0,T;V)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_{L_2(0,T;V)}.$$

Así, de (4.13) se sigue que

$$\begin{aligned}\|u\|_{L_2(0,T;V)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_{L_2(0,T;V)} &\leq K^{1/2} \liminf_{n\to\infty} \left(\|u_n(0)\|_H^2 + \int_0^T \|b(t)\|_{V^*}^2 dt \right)^{1/2} \\ &= K^{1/2} \left(\|u_0\|_H^2 + \int_0^T \|b(t)\|_{V^*}^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq K^{1/2} \|u_0\|_H + K^{1/2} \|b\|_{L_2(0,T;V^*)} ,\end{aligned} \tag{4.30}$$

puesto que $u_n(0) \to u_0$ cuando $n \to \infty$. Por otro lado de (4.28),

$$\|A \circ u\|_{L_2(0,T;V^*)} \leq C \|u\|_{L_2(0,T;V)} \tag{4.31}$$

y como $u' + (A \circ u) = b$ en V^*, entonces

$$\begin{aligned}\|u'\|_{L_2(0,T;V^*)} - \|b\|_{L_2(0,T;V^*)} \leq \|b - u'\|_{L_2(0,T;V^*)} = \|A \circ u\|_{L_2(0,T;V^*)} &\leq C \|u\|_{L_2(0,T;V)} \\ &\leq CK^{1/2} \|u_0\|_H + CK^{1/2} \|b\|_{L_2(0,T;V^*)} .\end{aligned} \tag{4.32}$$

Por lo tanto de (4.30) junto con (4.32) se sigue que

$$\begin{aligned}\|u\|_{W_2^1} := \|u\|_{L_2(0,T;V)} + \|u'\|_{L_2(0,T;V^*)} &\leq (1 + C)K^{1/2} \|u_0\|_H + (1 + (1 + C)K^{1/2}) \|b\|_{L_2(0,T;V^*)} \\ &\leq D \left(\|u_0\|_H + \|b\|_{L_2(0,T;V^*)} \right),\end{aligned}$$

donde $D = 1 + (1 + C)K^{1/2}$. Por lo tanto la función $(u_0, b) \mapsto u$ es continua.

c) **Convergencia del método de Galerkin en $C([0,T];H)$.**

Nuestro siguiente objetivo es mostrar que

$$\|u_n - u\|_{C([0,T];H)} := \max_{t\in[0,T]} |u_n(t) - u(t)| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{4.33}$$

Recordemos que $u, u_n \in W_2^1(0,T;V,H)$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$; así dada la inclusión $W_2^1(0,T;V,H) \subseteq C([0,T];H)$ entonces $u, u_n \in C([0,T];H)$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.
Puesto que el conjunto de polinomios de cualquier orden es denso en $W_2^1(0,T;V,H)$ (Ver observación 3.47) entonces para $u \in W_2^1(0,T;V,H)$ y $\epsilon > 0$ existe un polinomio $p : [0,T] \to V$ dado por

$$p(t) = \sum_{i\in\mathbb{Z}^+} t^i a_i, \quad a_i \in V$$

tal que

$$\|u - p\|_{W_2^1} = \|u - p\|_{L_2(0,T;V)} + \|u' - p'\|_{L_2(0,T;V^*)} < \epsilon. \tag{4.34}$$

Por hipótesis $(H3)$, para todo $i \in \mathbb{Z}^+$ existe una sucesión $\left\{ v_n^{(i)} \right\}_{n=1}^{\infty}$ tal que cada $v_n^{(i)}$ es una combinación lineal finita de elementos de la base $\{w_1, w_2, ...\}$ y además

$$v_n^{(i)} \to a_i \;\text{ en }\; V \;\text{ cuando }\; n \to \infty.$$

Definamos $p_n : [0,T] \to V_n \subseteq V \subseteq H$ por:

$$p_n(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^+} t^i v_n^{(i)}.$$

Así, $\|p_n - p\|_{W_2^1} \to 0$ cuando $n \to \infty$ y en consecuencia de (4.34),

$$\|p_n - u\|_{W_2^1} \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty. \tag{4.35}$$

Ahora, como la inclusión $W_2^1(0,T;V,H) \subseteq C([0,T];H)$ es continua (Ver Lema 3.50) entonces existe $C > 0$ tal que $\|u - p_n\|_{C([0,T];H)} \leq C \|u - p_n\|_{W_2^1}$. Por lo tanto,

$$\|u - p_n\|_{C([0,T];H)} \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty. \tag{4.36}$$

Observamos que para terminar la demostración de (4.33), resta verificar que

$$\|u_n - p_n\|_{C([0,T];H)} \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty. \tag{4.37}$$

En efecto, inicialmente notemos lo siguiente:

- Como $u_n(0) \to u(0)$ en H cuando $n \to \infty$ entonces de (4.36),

$$\|u_n(0) - p_n(0)\|_H \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty. \tag{4.38}$$

- Dado que tanto u_n como u satisfacen la primera ecuación de (4.17) entonces

$$\begin{aligned} \left\langle u_n'(t) - p_n'(t), u_n(t) - p_n(t) \right\rangle_V &= \left\langle b(t) - A(u_n(t)) - p_n'(t), u_n(t) - p_n(t) \right\rangle_V \\ &= \left\langle u'(t) + A\left(u(t) - u_n(t)\right) - p_n'(t), u_n(t) - p_n(t) \right\rangle_V . \end{aligned} \tag{4.39}$$

- Como $A : V \to V^*$ es estrictamente monótono entonces

$$\left\langle A\left(u(t) - u_n(t)\right), u(t) - u_n(t) \right\rangle_V \geq 0. \tag{4.40}$$

- Sabemos que el operador $A : V \to V^*$ es acotado
($\exists D_1 > 0 : \|A(v)\|_{V^*} \leq D_1 \|v\|_V \ \ \forall v \in V$). Entonces para todo $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$\|A \circ u_n\|_{L_2(0,T;V^*)} := \left(\int_0^T \|A(u_n(t))\|_{V^*}^2 dt \right)^{1/2} \leq D_1 \left(\int_0^T \|u_n(t)\|_V^2 dt \right)^{1/2} = D_1 \|u_n\|_{L_2(0,T;V)} .$$

Sabemos que $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada en $L_2(0,T;V)$ (Ver III)). Además, de (4.35) se tiene que $p_n \to u$ en $L_2(0,T;V)$ y así $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada en $L_2(0,T;V)$, por lo cual de la ecuación anterior se tiene que $\{A \circ u_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada en $L_2(0,T;V^*)$. Por lo tanto, existen constantes $C_1, C_2, C_3 > 0$ tales que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$\|u_n\|_{L_2(0,T;V)} \leq C_1, \quad \|p_n\|_{L_2(0,T;V)} \leq C_2 \quad \text{y} \quad \|A \circ u_n\|_{L_2(0,T;V^*)} \leq C_3. \tag{4.41}$$

Finalmente de la fórmula de integración por partes (3.49), la desigualdad (3.21) y teniendo en cuenta (4.39), (4.40), (4.41) se sigue que para todo $t \in [0, T]$,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\|u_n(t) - p_n(t)\|_H^2 - \|u_n(0) - p_n(0)\|_H^2\right) \\
&= \int_0^t \left\langle u_n'(s) - p_n'(s), u_n(s) - p_n(s)\right\rangle_V ds \\
&= \int_0^t \left\langle u'(s) + A\left(u(s) - u_n(s)\right) - p_n'(s), u_n(s) - p_n(s)\right\rangle_V ds \\
&= \int_0^t \left\langle u'(s) - p_n'(s), u_n(s) - p_n(s)\right\rangle_V ds + \int_0^t \left\langle A\left(u(s) - u_n(s)\right), u_n(s) - p_n(s)\right\rangle_V ds \\
&= \int_0^t \left\langle u'(s) - p_n'(s), u_n(s) - p_n(s)\right\rangle_V ds + \int_0^t \left\langle A\left(u(s) - u_n(s)\right), u_n(s) - u(s)\right\rangle_V \\
&\quad + \int_0^t \left\langle A\left(u(s) - u_n(s)\right), u(s) - p_n(s)\right\rangle_V ds \\
&\leq \int_0^t \left\langle u'(s) - p_n'(s), u_n(s) - p_n(s)\right\rangle_V ds + \int_0^t \left\langle A\left(u(s) - u_n(s)\right), u(s) - p_n(s)\right\rangle_V ds \\
&\leq \left\|u' - p_n'\right\|_{L_2(0,T;V^*)} \|u_n - p_n\|_{L_2(0,T;V)} + \|(A \circ u) - (A \circ u_n)\|_{L_2(0,T;V^*)} \|u - p_n\|_{L_2(0,T;V)} \\
&\leq \left(\|u_n\|_{L_2(0,T;V)} + \|p_n\|_{L_2(0,T;V)}\right) \left\|u' - p_n'\right\|_{L_2(0,T;V^*)} \\
&\quad + \left(\|A \circ u\|_{L_2(0,T;V^*)} + \|A \circ u_n\|_{L_2(0,T;V^*)}\right) \|u - p_n\|_{L_2(0,T;V)} \\
&\leq (C_1 + C_2) \left\|u' - p_n'\right\|_{L_2(0,T;V^*)} + \left(\|A \circ u\|_{L_2(0,T;V^*)} + C_3\right) \|u - p_n\|_{L_2(0,T;V)} \\
&\leq K_1 \|u - p_n\|_{W_2^1};
\end{aligned}
$$

donde $K_1 = \text{máx}\left\{C_1 + C_2, \|A \circ u\|_{L_2(0,T;V^*)} + C_3\right\}$. De aquí,

$$
\|u_n(t) - p_n(t)\|_H \leq \left(2K_1 \|u - p_n\|_{W_2^1} + \|u_n(0) - p_n(0)\|_H^2\right)^{1/2}.
$$

En consecuencia, si tomamos el máximo sobre $[0, T]$ y posteriormente hacemos $n \to \infty$ teniendo en cuenta (4.35) y (4.38), obtenemos (4.37) y de esta manera el resultado deseado.

Convergencia fuerte del método de Galerkin en $L_2(0, T; V)$.

Recordemos que tanto u_n como u satisfacen la primera ecuación de (4.17), es decir

$$
u_n'(t) = b(t) - A(u_n(t)), \quad u'(t) = b(t) - A(u(t)) \text{ en } V^*. \tag{4.42}
$$

Este hecho será utilizado frecuentemente en la demostración.
Sea $\hat{A} : L_2(0, T; V) \to L_2(0, T; V^*)$ un operador lineal dado por $\hat{A}(u) = A \circ u$, para toda $u \in L_2(0, T; V)$. Por (4.31), $\hat{A}$ es continuo. En consecuencia, debido a que $u_n \rightharpoonup u$ en $L_2(0, T; V)$, $n \to \infty$ entonces $A \circ u_n \rightharpoonup A \circ u$ en $L_2(0, T; V^*)$, $n \to \infty$. Así del Teorema 3.25 obtenemos que

$$
\int_0^T \langle A(u_n(t)), u(t)\rangle_V dt \to \int_0^T \langle A(u(t)), u(t)\rangle_V dt \text{ cuando } n \to \infty \tag{4.43}
$$

y

$$\int_0^T \langle b(t), u_n(t)\rangle_V dt \to \int_0^T \langle b(t), u(t)\rangle_V dt \quad \text{cuando} \quad n \to \infty. \tag{4.44}$$

Ahora, según la fórmula de integración por partes (3.49) se sigue que

$$\begin{aligned}(u_n(T)|u(T))_H - (u_n(0)|u(0))_H &= \int_0^T \left\langle u_n'(t), u(t)\right\rangle_V + \left\langle u'(t), u_n(t)\right\rangle_V dt \\ &= \int_0^T \langle b(t) - A(u_n(t)), u(t)\rangle_V + \langle b(t) - A(u(t)), u_n(t)\rangle_V dt\end{aligned} \tag{4.45}$$

y así de (4.43) y (4.44) cuando $n \to \infty$,

$$\begin{aligned}&\int_0^T \langle b(t) - A(u_n(t)), u(t)\rangle_V + \langle b(t) - A(u(t)), u_n(t)\rangle_V dt - (u_n(T)|u(T))_H + (u_n(0)|u(0))_H \\ &\quad \to 2\int_0^T \langle b(t) - A(u(t)), u(t)\rangle dt - \|u(T)\|_H^2 + \|u(0)\|_H^2 \\ &\quad = 2\int_0^T \left\langle u'(t), u(t)\right\rangle_V dt - \|u(T)\|_H^2 + \|u(0)\|_H^2 = 0.\end{aligned} \tag{4.46}$$

Nuevamente de la fórmula de integración por partes (3.49) se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|u(T) - u_n(T)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|u(0) - u_n(0)\|_H^2 &= \int_0^T \left\langle u'(t) - u_n'(t), u(t) - u_n(t)\right\rangle_V dt \\ &= \int_0^T \left\langle b(t) - A(u(t)) - u_n'(t), u(t) - u_n(t)\right\rangle_V dt.\end{aligned} \tag{4.47}$$

En particular de (4.42),

$$\begin{aligned}\langle A(u(t)), u(t) - u_n(t)\rangle_V &= \langle b(t), u(t) - u_n(t)\rangle_V - \left\langle u'(t), u(t) - u_n(t)\right\rangle \quad \text{y} \\ \langle A(u_n(t)), u(t) - u_n(t)\rangle_V &= \langle b(t), u(t) - u_n(t)\rangle_V - \left\langle u_n'(t), u(t) - u_n(t)\right\rangle.\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}\langle A\left(u(t) - u_n(t)\right), u(t) - u_n(t)\rangle_V &= \left\langle u_n'(t) - u'(t), u(t) - u_n(t)\right\rangle_V \\ &= \left\langle b(t) - A(u_n(t)) - u'(t), u(t) - u_n(t)\right\rangle_V.\end{aligned} \tag{4.48}$$

Como A es estrictamente monótona entonces existe $C > 0$ tal que

$$\langle A\left(u(t) - u_n(t)\right), u(t) - u_n(t)\rangle_V \geq C\|u(t) - u_n(t)\|_V^2.$$

Mostremos que $u_n \to u$ en $L_2(0, T; V)$ cuando $n \to \infty$. En efecto, de (4.48), (4.45) y

(4.47) se tiene que

$$
\begin{aligned}
C\left\|u-u_n\right\|_{L_2(0,T;V)}^2 &= C\int_0^T \|u(t)-u_n(t)\|_V^2 dt \\
&\leq \int_0^T \langle A\left(u(t)-u_n(t)\right), u(t)-u_n(t)\rangle_V dt \\
&= \int_0^T \left\langle b(t)-A(u_n(t))-u'(t), u(t)-u_n(t)\right\rangle_V dt \\
&\leq \int_0^T \left\langle b(t)-A(u_n(t))-u'(t), u(t)-u_n(t)\right\rangle_V dt + \frac{1}{2}\|u(T)-u_n(T)\|_H^2 \\
&= \frac{1}{2}\|u(0)-u_n(0)\|_H^2 + \int_0^T \left\langle b(t)-A(u_n(t))-u'(t), u(t)-u_n(t)\right\rangle_V dt \\
&\quad + \int_0^T \left\langle b(t)-A(u(t))-u_n'(t), u(t)-u_n(t)\right\rangle_V dt \\
&= \frac{1}{2}\|u(0)-u_n(0)\|_H^2 + \int_0^T \left\langle b(t)-A(u_n(t))-u_n'(t), u(t)-u_n(t)\right\rangle_V dt \\
&\quad + \int_0^T \langle b(t), u(t)-u_n(t)\rangle_V - \left\langle u'(t)+A(u(t)), u(t)-u_n(t)\right\rangle_V dt \\
&= \frac{1}{2}\|u(0)-u_n(0)\|_H^2 + \int_0^T \left\langle b(t)-A(u_n(t))-u_n'(t), u(t)-u_n(t)\right\rangle_V dt \\
&= \frac{1}{2}\|u(0)-u_n(0)\|_H^2 + \int_0^T \left\langle b(t)-A(u_n(t))-u_n'(t), u(t)\right\rangle_V dt \\
&= \frac{1}{2}\|u(0)-u_n(0)\|_H^2 + \int_0^T \langle b(t)-A(u_n(t)), u(t)\rangle_V dt - \int_0^T \left\langle u_n'(t), u(t)\right\rangle_V dt \\
&= \frac{1}{2}\|u(0)-u_n(0)\|_H^2 + \int_0^T \langle b(t)-A(u_n(t)), u(t)\rangle_V dt \\
&\quad + \int_0^T \langle b(t)-A(u(t)), u_n(t)\rangle_V dt - (u_n(T)|u(T))_H + (u_n(0)|u(0))_H .
\end{aligned}
$$

En consecuencia, si hacemos $n \to \infty$ teniendo en cuenta que $u_n(0) \to u(0)$ en H cuando $n \to \infty$ y (4.46) se obtiene el resultado deseado, esto es $u_n \to u$ en $L_2(0,T;V)$.

□

4.2. Aplicación a la ecuación del calor

A continuación se mostrará de qué manera se puede aplicar el teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales parabólicas. Inicialmente se planteará el problema a resolver (ecuación del calor), posteriormente se mostrará que este problema puede ser llevado a la estructura del problema (4.1). Finalmente se verificará que bajo ciertas condiciones se cumplen las hipótesis del teorema de existencia y unicidad.

Sea $G \neq \emptyset$ un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$ con $N \geq 1$. Consideremos los conjuntos

$$V = H^1(G), \qquad H = L_2(G).$$

Recordemos que «$V \subseteq H \subseteq V^*$» es una terna de evolución (Ver ejemplo 3.30). Sea $Q_t = G \times (0,T)$. El problema para la ecuación del calor consiste en:

Dadas $f \in L_2(Q_t)$ y $u_0 \in H$, hallar $u : Q_t \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t), &\quad (x,t) \in Q_t, \\ u(x,t) = 0, &\quad (x,t) \in \partial G \times [0,T], \\ u(x,0) = u_0(x), &\quad x \in G. \end{aligned} \tag{4.49}$$

Para llevar esta ecuación a un problema equivalente a (4.1), se multiplica (4.49) por una función $v \in H^1(G)$, posteriormente se integra sobre G y se utiliza la fórmula de integración por partes, para obtener

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\int_G u(x,t)v(x)dx + \int_G \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx = \int_G f(x,t)v(x)dx \quad \forall t \in (0,T), \\ &u(x,0) = u_0(x), \qquad x = (x_1, x_2, ..., x_N) \in G. \end{aligned} \tag{4.50}$$

Observación 4.4. *Para todo $t \in [0,T]$ existe un funcional $b(t) \in V^*$ dado por*

$$\langle b(t), v\rangle_V = \int_G f(x,t)v(x)dx \qquad \text{p.c.t.} \quad t \in [0,T]$$

tal que la función $t \mapsto b(t)$ está en $L_q(0,T;V^*)$. En efecto, Dada la linealidad de la integral, $b(t)$ es lineal y por la desigualdad de Hölder se tiene que para casi todo $t \in [0,T]$ y para todo $v \in V$

$$\left|\int_G f(x,t)v(x)dx\right| \leq \left(\int_G |f(x,t)|^q dx\right)^{1/q}\left(\int_G |v(x)|^p dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_G |f(x,t)|^q dx\right)^{1/q} \|v\|_V\,;$$

es decir $b(t)$ es acotado, lo que implica que $b(t) \in V^*$. Más aun de la expresión anterior se sigue que

$$\|b(t)\|_{V^*}^q \leq \int_G |f(x,t)|^q dx$$

y en consecuencia $b(t) \in L_q(0,T;V^*)$, ya que

$$\int_0^T \|b(t)\|_{V^*}^q dt \leq \int_0^T \left(\int_G |f(x,t)|^q dx\right)dt < \infty.$$

Notemos que la función $x \mapsto u(x,t)$ para $t \in (0,T)$ fijo, que denotaremos por $u(t)$ esta en $L_2(G)$, es decir $u(t) \in L_2(G)$. Si variamos t en el intervalo $[0,T]$ obtenemos la función $t \mapsto u(t)$. Luego si definimos $a : V \times V \to \mathbb{R}$ por

$$a(v,w) := \int_G \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_i}dx \qquad \forall v, w \in V$$

y $b : (0,T) \to V^*$ tal que

$$\langle b(t), v \rangle_V = \int_G f(x,t)v(x)dx \qquad \forall v \in V,$$

entonces el problema (4.50) se transforma en

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u(t)|v)_H + a(u(t),v) = \langle b(t), v\rangle_V\,; \qquad \text{p.c.t.} \quad t \in (0,T) \ \ \forall v \in V, \\ u(0) = u_0 \in H. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Por lo tanto dados $f \in L_2(Q_t)$ y $u_0 \in H$ buscamos $u \in W_2^1(0,T;V,H)$ que satisfaga (4.51). Para ello verificaremos que se cumplen las hipótesis del teorema de existencia y unicidad (Ver Teorema 4.3). En efecto,

(H1) Recordemos que los espacios $V = H^1(G)$ y $H = L_2(G)$ son espacios de Hilbert de dimensión infinita y conforman una terna de evolución (Ver ejemplo 3.30).

(H2) Por el supuesto inicial $u_0 \in H$ y de la observación 4.4 se obtiene que $b \in L_q(0,T;V^*)$. Resta mostrar que $a : V \times V \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal, acotada y estrictamente positiva. La linealidad se deduce fácilmente de la linealidad de la integral. Ahora sean $v, w \in V$. De la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned} |a(v,w)| = \left| \int_G \sum_{i=1}^N \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_i} dx \right| \leq \sum_{i=1}^N \int_G \left| \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_i} \right| dx \leq \sum_{i=1}^N \left(\int_G \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_G \left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|^2 dx \right)^{1/2} \\ \leq N \|v\|_V \|w\|_V . \end{aligned}$$

Luego a es acotada. Para la demostración de que a es una forma positiva mencionemos el siguiente resultado. Las normas $\|\cdot\|_{H^1(G)} : H^1(G) \to \mathbb{R}$ y $\|\cdot\|'_{H^1(G)} : H^1(G) \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\|u\|_{H^1(G)} := \left(\int_G u^2 dx + \sum_{i=1}^N \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx \right)^{1/2}, \quad \|u\|'_{H^1(G)} := \left(\sum_{i=1}^N \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx \right)^{1/2}$$

son equivalentes (Ver Zeidler[4] Proposición 21.14). Luego existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_V = \|u\|_{H^1(G)} \leq C \|u\|'_{H^1(G)} = C \left(\sum_{i=1}^N \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx \right)^{1/2} = C\ a(u,u) \qquad \forall u \in V,$$

y en consecuencia $a(u,u) \geq \frac{1}{C}\|u\|_V$.

(H3) Dado que $V = H^1(G)$ es un espacio de Hilbert con el producto interior (3.32), entonces por el Teorema 1.19, $H^1(G)$ posee un conjunto total ortonormal que llamaremos $B \subseteq H^1(G)$. Adicionalmente $V = H^1(G)$ es separable (Ver Brezis[7] proposición 9.1) y en consecuencia del Teorema 1.20 el conjunto B es numerable. Es decir, B es un conjunto total ortonormal numerable. Por lo tanto B es una base para $H^1(G)$.

En conclusión, el problema (4.51) satisface todas las hipótesis del teorema de existencia y unicidad (4.3). Por lo tanto se cumplen las consecuencias de este teorema. En particular, existe un único $u \in W_2^1(0, T; V, H)$ con $u(0) = u_0$ que verifica (4.51), como se quería probar.

Conclusiones

- La integral de Bochner busca generalizar la integral de Lebesgue en el caso de funciones cuyo codominio es un espacio de Banach. En este sentido algunas de las propiedades de la integral de Lebesgue son heredadas por la integral de Bochner. Cabe resaltar que la construcción de la integral de Bochner es similar a la de la integral de Lebesgue, pues al igual que en la integral de Lebesgue primero se considera la integral de Bochner para una familia de funciones denominadas funciones simples y a partir de estas funciones se desarrolla el concepto de integrabilidad (en el sentido de Bochner) para funciones en general.

- Del Teorema de Bochner se deduce que la Bochner integrabilidad de una función se puede caracterizar por medio de la definición de la integral de Lebesgue.

- El concepto de integral de Bochner juega un papel importante para la definición del espacio de Lebesgue $L_p(0, T; V)$. Dicho espacio posee ciertas propiedades que son semejantes a propiedades del espacio clásico $L_p(E)$.

- La derivada generalizada de una función diferenciable en el sentido clásico es precisamente la derivada clásica de la función, pero no siempre una función con derivada generalizada es diferenciable en el sentido clásico. Esto nos dice que la noción de derivada generalizada es introducida con el fin de exigir menos requerimientos de suavidad a una función. De esta manera se facilita el trabajo con problemas evolutivos, pues la solución de cierto problema evolutivo se puede buscar en una familia de funciones más grande que la familia de funciones suaves.

- La introducción de los conceptos de derivada generalizada y ternas de evolución permite definir el espacio de Sobolev $W_p^1(0, T; V, H)$, en particular la noción de terna de evolución garantiza que el espacio funcional $W_p^1(0, T; V, H)$ es un espacio de Banach.

- El problema de ecuaciones diferenciales parabólicas se plantea en forma general con el objetivo de llevar problemas clásicos a esta forma y así garantizar su solución.

- El método de Galerkin es un método muy conocido para la solución de ecuaciones diferenciales. En particular para ecuaciones de tipo parabólico se garantiza la convergencia del método de Galerkin.

- La solución del problema general (4.1) es utilizada habitualmente en problemas de dispersión como se mostró en la solución de la ecuación del calor.

Notaciones

- $\mathbb{Z}^+$ Conjunto de enteros positivos.
- $\mathbb{R}$ Campo ordenado de los números reales.
- $\overline{\mathbb{R}}$ $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
- $\emptyset$ Conjunto vacio.
- Ran f Rango de la función f.
- $D(A)$ Dominio del operador A.
- p.c.t. Para casi todo.
- $(\cdot|\cdot)$ Producto interior.
- X^* Dual topológico del espacio lineal X.
- $f * g$ Convolución de f con g.
- $\langle f, x\rangle$ Producto de dualidad, $\langle f, x\rangle = f(x)$ con $f \in X^*$, $x \in X$.
- $\|\cdot\|_{X^*} = \|\cdot\|_*$ Norma en X^*.
- $\operatorname{supp} f$ Soporte de f.
- $P([0,T];X)$ Conjunto de polinomios.
- $\rightharpoonup$ Convergencia débil $(u_n \rightharpoonup u \Leftrightarrow \langle f, u_n\rangle_X \to \langle f, u\rangle_X \ \forall f \in X^*)$.
- gen $\{E\}$ Conjunto generado de E.
- $B(x;\epsilon)$ Bola de centro en x y radio $\epsilon > 0$.
- Δu Laplaciano de u, $\left(\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right)$.

Bibliografía

[1] A. Kufner, *Function Spaces*, Noordhoff International Publishing, Czechoslovakia, 1920.

[2] A. Zenisek, *Nonlinear Elliptic and Evolution Problems and Their Finite Element Approximations*, Academic Press, Boston, 1990.

[3] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, New york, 1978.

[4] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, II/A*, Springer, New York, 1990.

[5] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, II/B*, Springer, New York, 1990.

[6] F. Jones, *Lebesgue Integration on Euclidean Space*, Jones and Bartlett Publishers, Boston, 2001.

[7] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Alianza Editorial, Madrid, 1984.

[8] H. Royden, *Real Analysis*, Pearson Education, New York, 2010.

[9] Hirsch, Morris W. and Smale, Stephen, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linéar Algebra*, Academic Press, London, 1995.

[10] L. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998.

[11] R. Bartle, *The Elements of Integration*, John Wiley Sons, New York, 1966.

[12] R. and J.-L. Lions, Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Volume 5: Evolutions Problems I, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[13] R. and J.-L. Lions, Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Volume 6: Evolutions Problems II, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[14] R. E. Edwards, *Functional Analysis Theoria and Applications*, Holt, New York, 1965.

[15] S. Schwabik, *Topics in Banach Space Integration, Vol. 10*, World Scientific Publishing, London, 2005.

[16] T. Apostol, *Mathematical Analysis*, Addison Wesley, USA, 1974.

[17] W. Rudin, *Principios de análisis matemático*, McGraw-Hill, USA, 1976.