CÁLCULO DE ESPECTROS EN LAS ÁLGEBRAS DE BANACH $L_1(\mathbb{R})$ y $l_1(\mathbb{R})$

CESAR HERNAN OLIVAR MUÑOZ

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Matemáticas
Popayán, Cauca

2013

CÁLCULO DE ESPECTROS EN LAS ÁLGEBRAS DE BANACH $L_1(\mathbb{R})$ y $l_1(\mathbb{R})$

TRABAJO DE GRADO
En la modalidad seminario, presentado como requisito parcial
para optar al título de Matemático.

CESAR HERNAN OLIVAR MUÑOZ

DIRECTOR:
Dr. JAIRO ROA FAJARDO

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Matemáticas
Popayán, Cauca

2013

Nota de aceptación

Director:

Dr. Jairo Roa Fajardo

Jurados:

Profesor. Willy Will Sierra.

Profesor. Freddy William Bustos.

Fecha de sustentación: Popayán, 8 de agosto de 2013

Este trabajo está dedicado a mi madre Graciela, mi padre Cesar, mi novia Andrea y demás familiares.

Agradecimientos

Doy gracias a Dios por su infinita bondad para conmigo ya que a lo largo de todo este tiempo ha sido la luz de todo lo que me ha ayudado a salir adelante, pese a los tropiezos siempre he sabido encontrar personas en quien confiar y creer para aspirar a realizar este nuevo sueño matemático.

Especialmente destacar el apoyo incesante y la motivación por parte del Dr. Jairo Roa Fajardo, director de este trabajo quien compartió sus conocimientos académicos para la realización del mismo.

A los profesores Willy Will Sierra y Freddy William Bustos miembros del comité de seguimiento por su colaboración y sugerencias.

A la universidad del Cauca por su nivel académico y sus enseñanzas a cargo de la planta docente.

A mis padres Graciela Muñoz, Cesar Augusto Olivar por sus preocupaciones hacia la rectitud, la superación y las ganas de salir adelante y por su constante apoyo sin el cual nada de esto fuese posible. A mi novia Andrea por su amor y comprensión sin la que no existiese en algún momento una razón más para continuar con este proyecto.

A mi familia, amigos y compañeros que durante este proceso de formación han sido participes de las experiencias para compartir el conocimiento y las distintas actividades de socialización.

Introducción

El estudio de álgebras de Banach empezó en el siglo XX y se originó de la observación de que algunos espacios de Banach mostraban propiedades interesantes cuando ellos podían dotarse de una multiplicación extra. Un ejemplo normal era el espacio de operadores lineales acotados en un espacio de Banach, pero otro importante era los espacios de las funciones (continuas o acotadas o que se anulan en infinito).
Las álgebras de Banach fueron estudiadas por primera vez por el matemático soviético I. M. Gelfand alrededor del año 1904. Su teoría reviste una gran importancia y tiene aplicación en teoría de aproximación, análisis armónico, K-teoría, física teórica, etc. El estudio de una clase importante de álgebras de Banach, llamadas C^*-álgebras, es un tema de investigación muy activo en el universo matemático de hoy.
Este trabajo de grado tiene como finalidad realizar el cálculo de espectros en álgebras de Banach y revisar la teoría espectral de $Gelfand$, la relación que hay entre los funcionales lineales multiplicativos sobre un álgebra de Banach conmutativa y los ideales maximales de la misma, para bien tener una caracterización del espectro de los elementos del álgebra.
Las álgebras de Banach son un espacio natural para el estudio de la teoría espectral. Dada un álgebra de Banach $\mathscr{A}$, el espectro de un elemento x es en general un subconjunto de $\mathbb{C}$ y se define como

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda e \text{ es no invertible}\}.$$

En el caso que el álgebra sea de dimension finita entonces la teoría espectral coincide con la teoría de los valores propios de una matriz. En efecto, para un operador $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ consideramos su representación matricial entre las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$, esto es,
$A = [\ [T(e_1)]\ [T(e_2)] \cdots [T(e_n)]\ ]$; y para cada valor propio λ de A asociamos un vector propio v, lo cual representamos en parejas (λ, v) donde

$$Av = \lambda v, v \in \mathbb{C}^n,\ (v \neq 0, \lambda \in \mathbb{C}).$$

Consideremos el espacio propio asociado al valor propio λ

$$V_\lambda = \{v \in \mathbb{C}^n \mid Av = \lambda v\} \subseteq \mathbb{C}^n.$$

Dado que V_λ es un subespacio de $\mathbb{C}^n, 0 \in V_\lambda$, sin embargo 0 no es un vector propio por definición. Además como $V_\lambda = N(A - \lambda I)$ tenemos que V_λ es no trivial si y sólo si $A - \lambda I$ tiene núcleo no trivial. Equivalentemente, si y sólo si $A - \lambda I$ es no invertible.
En este sentido, el espectro de A es

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda I \text{ es no invertible}\},$$

lo cual muestra que el cálculo del espectro de un operador T en espacios de dimension finita se reduce al cálculo de los valores propios del operador en cuestion. Por ello no se considerarán espacios de dimension finita ya que esta teoría ha sido estudiada en los cursos de álgebra lineal.

Índice general

Notaciones

$\mathbb{N}$	Conjunto de enteros positivos
$\mathbb{R}$	Campo ordenado de los números reales
$\mathbb{C}$	campo de los números complejos
$\mathbb{R}^2$	$\{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$
$\mathbb{C}^{n\times n}$	Espacio de matrices de orden n sobre $\mathbb{C}$
$\emptyset$	Conjunto vacio
sign	Función signo
$\overline{\Omega}$	Adherencia del conjunto Ω
$B\,(x_0, r)$	Bola abierta, centrada en x_0 y de radio $r > 0$
$c.t.p$	En casi todo punto
$\partial\Omega$	Frontera de Ω
μ	Medida (de Lebesgue) del conjunto Ω
$C^k(\Omega)$	Espacio de funciones k veces continuamente diferenciables en Ω
$C_0(\Omega)$	Espacio de funciones continuas de soporte compacto en Ω
$C_0^\infty(\Omega)$	Espacio de funciones infinitamente diferenciables de soporte compacto en Ω
$\iint_\Omega f\,dxdy$	Integral de Lebesgue de la función f sobre Ω
X, Y	Espacios vectoriales
$L(X, Y)$	Espacio vectorial de todas las aplicaciones lineales de X en Y
$B(X, Y)$	Espacio vectorial de todas las aplicaciones lineales acotadas de X en Y
$X^{'}$	Espacio dual de X
$l_1(-\infty, \infty)$	Espacio de Banach de las sucesiones absolutamente sumables
$L^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \mu)$	Espacio de Banach de las funciones absolutamente integrables
$f * g$	Convolución de f y g
$\mathscr{A}$	Álgebra con o sin unidad
$\mathscr{A}[e]$	Álgebra unitizada
$Inv(\mathscr{A})$	Conjunto de elementos invertibles de $\mathscr{A}$
$\sigma(x)$	Espectro de x
$r(x)$	Resolvente de x
$\rho(x)$	Radio espectral de x
$\mathscr{A}/I$	Espacio cociente de $\mathscr{A}$, I ideal de $\mathscr{A}$
$\mathfrak{M}(\mathscr{A})$	Conjunto de funcionales lineales multiplicativos sobre $\mathscr{A}$
$\mathcal{M}(\mathscr{A})$	Conjunto de funcionales lineales multiplicativos continuos sobre $\mathscr{A}$
$x \circ y$	Quasi-producto de x, y
$x\hat{\ }$	Transformada de Gelfand de x
$F(\omega)$	Transformada de Fourier de f
$\square$	Culminación de una demostración.

Capítulo 1

Álgebras de Banach

En este capítulo presentamos la terminología empleada en las álgebras de Banach y recordaremos varias nociones y teoremas necesarios para la comprensión de los resultados.

Definición 1.0.1. *Un álgebra compleja es un espacio vectorial $\mathscr{A}$ sobre el campo complejo $\mathbb{C}$ en el cual la multiplicación está definida y satisface para todo x, y, z en $\mathscr{A}$, $\alpha \in \mathbb{C}$:*

$$x(yz) = (xy)z, \tag{1.0.1}$$

$$(x+y)z = xz + yz, \qquad x(y+z) = xy + yz, \tag{1.0.2}$$

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y). \tag{1.0.3}$$

Si además $\mathscr{A}$ es un espacio de Banach con respecto a una norma que satisfaga la desigualdad multiplicativa

$$\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\| \qquad (x \in \mathscr{A}, y \in \mathscr{A}), \tag{1.0.4}$$

entonces $\mathscr{A}$ es llamado un álgebra de Banach. Un álgebra $\mathscr{A}$ es llamada un álgebra con unidad si existe $e \in \mathscr{A}$ (elemento neutro) tales que $xe = ex = x$ para todo $x \in \mathscr{A}$.

Si $\mathscr{A}$ no es un espacio completo pero tiene una norma $\|\cdot\|$ que satisfaga la desigualdad multiplicativa la denominaremos álgebra normada. Como es usual para espacios vectoriales, un álgebra normada $\mathscr{A}$ puede ser vista como un espacio métrico con la función distancia

$$d(x, y) = \|x - y\| \,; \quad (x, y \in \mathscr{A}).$$

Un álgebra normada puede también considerarse como un espacio topológico con la topología métrica inducida por la función distancia.

Observación 1.0.1. *La desigualdad* (1.0.4) *garantiza que la multiplicación es una operación continua en $\mathscr{A}$. Esto quiere decir que para $\{x_n\}, \{y_n\}$ en $\mathscr{A}$ con $x_n \to x$, $y_n \to y$ se cumple $x_n y_n \to xy$, lo cual se sigue de*

$$x_n y_n - xy = (x_n - x)y_n + x(y_n - y).$$

En particular, la multiplicación es continua a izquierda y a derecha:

$$\text{si} \quad x_n \to x, \; y_n \to y \quad \text{entonces} \quad x_n y \to xy, \; xy_n \to xy. \tag{1.0.5}$$

Definición 1.0.2. *Sea $\mathscr{A}$ un álgebra sobre $\mathbb{C}$. Una subálgebra de $\mathscr{A}$ es un subespacio vectorial $\mathscr{B}$ de $\mathscr{A}$ tal que*

$$a, b \in \mathscr{B} \Longrightarrow ab \in \mathscr{B}.$$

Para espacios vectoriales normados X, Y sobre el mismo campo $\mathbb{K}$, denotaremos por $L(X, Y)$ el espacio vectorial de todas las aplicaciones lineales de X en Y con la adición y producto por escalar puntuales y la norma

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}. \tag{1.0.6}$$

Bajo la misma suposición denotaremos por $B(X, Y)$ el subespacio vectorial de $L(X, Y)$ conformado por todas las aplicaciones lineales y acotadas (es decir que existe una constante c tal que para todo $x \in X$, $\|T(x)\| \leq c\,\|x\|$) de X en Y con la norma de $L(X, Y)$ restringida a $B(X, Y)$. El espacio dual $B(X, \mathbb{K})$ de X es denotado por X', sus elementos son llamados funcionales lineales continuos. Nosotros escribiremos $B(X)$ para denotar $B(X, X)$.

Se puede probar que dada $\mathscr{A}$ un álgebra normada, entonces existe un isomorfismo isométrico de $\mathscr{A}$ en una subálgebra densa de un álgebra de Banach $\mathscr{B}$, esta $\mathscr{B}$ es única salvo isomorfismos isométricos. (Ver[9], pg5, prop12)

1.1. Adjuntando una unidad

Supongamos que $\mathscr{A}$ satisface las condiciones (1.0.1) a (1.0.4), pero $\mathscr{A}$ no tiene elemento unidad. En este caso existe un proceso "natural" para unitizar el álgebra, esto es adjuntar una unidad. La nueva álgebra la denotaremos por $\mathscr{A}[e]$ y la definimos como

$$\mathscr{A}[e] = \{(x, \alpha) \mid x \in \mathscr{A},\ \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

El álgebra $\mathscr{A}[e]$ es un espacio vectorial con las operaciones suma y producto por escalar definidas de manera natural componente a componente. Un cálculo directo muestra que la multiplicación definida por

$$(x, \alpha)(y, \beta) = (xy + \alpha y + \beta x, \alpha\beta),$$

satisface $(1.0.1) - (1.0.3)$ y la expresión dada por

$$\|(x, \alpha)\| = \|x\| + |\alpha|$$

es una norma que satisface la desigualdad submultiplicativa y hace que $\mathscr{A}[e]$ sea un álgebra de Banach con unidad $e = (0, 1)$, logrando con ello adjuntar la unidad al álgebra original $\mathscr{A}$ al incrustarla en un álgebra más grande. De este modo se define una isometría entre $\mathscr{A}$ y $\mathscr{A}[e]$ dada por $x \to (x, 0)$.

1.2. Ejemplos de álgebras de Banach

1.2.1. Álgebras conmutativas con unidad

(a) El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con las operaciones de suma y producto usuales, y la norma dada por el valor absoluto. De igual forma el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ con las operaciones de suma y producto usuales, y la norma dada por el módulo.

(b) Consideremos Ω un espacio compacto Hausdorff y sea $C(\Omega)$ el espacio de todas las funciones continuas de valor complejo definidas en Ω, este es un espacio de Banach bajo la norma $\|f\| = \max\limits_{x\in\Omega} |f(x)|$ y con las operaciones puntuales(incluyendo el producto) de funciones, $C(\Omega)$ es un álgebra de Banach ya que la norma es submultiplicativa. Como álgebra conmutativa su unidad es la función $e(x) = 1$ para todo $x \in \Omega$.

(c) Sea $l_1(-\infty, \infty)$, el espacio de Banach de las sucesiones de números complejos $\alpha = \{\alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ con la norma

$$\|\alpha\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n| \, .$$

Este espacio es un álgebra de Banach conmutativa si la multiplicación es definida como la convolución

$$(\alpha * \beta)_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_{n-k}\beta_k.$$

Es decir $\alpha * \beta$ es la sucesión cuya n-ésima entrada es $(\alpha * \beta)_n$.
El álgebra $l_1(-\infty, \infty)$ posee como elemento unidad la sucesión $\{\delta_{0n}\}$,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ 1 & \text{si} \quad i = j \end{cases}$$

(d) El álgebra del disco. Sea $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\} \subset \mathbb{C}$ y consideremos la subálgebra de $C(D)$ con unidad $e(z) = 1$, $\mathscr{A} = \{f : D \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \in \mathbb{H}(int(D))\} \subset C(D)$. Para concluir que $\mathscr{A}$ es un álgebra de Banach, es suficiente probar que es cerrada. En efecto, sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ tal que $f_n \longrightarrow f$ en la norma de $C(D)$, esto nos lleva al concepto de convergencia uniforme para funciones y al ser estas analíticas en $int(D)$ tenemos que f es también analítica en $int(D)$.

1.2.2. Álgebras conmutativas sin unidad

(a) Consideremos un espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \mu)$ y sea $f : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$, $\mathcal{M}$-medible (de lo cual se sigue que $|f|$ es también medible, así su integral sobre $\mathbb{R}$ existe). Entonces decimos que $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \mu)$ si

$$\int_{\mathbb{R}} |f| \, d\mu < \infty.$$

Además $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \mu)$ es un espacio de Banach con respecto a la norma:

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f| \, d\mu.$$

La multiplicación en $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \mu)$ está definida como la convolución de funciones

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

La convolución es conmutativa y asociativa. Además por el Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(t-\tau)g(\tau) \right| d\tau d\mu \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(t-\tau)| \, |g(\tau)| \, d\tau d\mu \\
&= \int_{\mathbb{R}} |g(\tau)| \int_{\mathbb{R}} |f(t-\tau)| \, d\mu d\tau = \|f\|_1 \, \|g\|_1
\end{aligned}$$

obteniendo la desigualdad submultiplicativa (1.0.4), así que $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \mu)$ es un álgebra de Banach. Aunque esta álgebra no posee unidad sí tiene una unidad aproximada normalizada en el sentido que existe una sucesión de funciones $e_n \in L_1(\mathbb{R})$ que satisface $\|e_n\| = 1$ para todo n con la propiedad

$$\lim_{n\to\infty} \|e_n * f - f\| = \|f * e_n - f\| = 0, \qquad f \in L_1(\mathbb{R}).$$

Tal sucesión se obtiene tomando e_n como cualquier función no negativa soportada en el intervalo $[-1/n, 1/n]$ cuya integral sea 1.

(b) Dado cualquier espacio de Banach A, este se convierte en un álgebra de Banach usando el producto trivial $xy = 0, x, y \in A$.

1.2.3. Álgebras no conmutativas con unidad

(a) Dado X un espacio vectorial normado se define

$$B(X) = \{T\colon X \to X \mid T \text{ es lineal y acotado}\}$$

Este es un espacio vectorial normado con respecto a la norma operador

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

En el caso que X sea un espacio de Banach, $B(X)$ es un espacio de Banach con respecto a la norma operador; además $B(X)$ es un álgebra de Banach con la multiplicación definida como la composición. Si $dim(X) > 1$, esta álgebra no es conmutativa y su unidad es el operador idéntico $I(x) = x$ para todo $x \in X$. Cuando $dim(X) = n < \infty$ entonces $B(X)$ es isomorfo al álgebra de las matrices $\mathbb{C}^{n\times n}$.

(b) El espacio de matrices de orden n sobre $\mathbb{C}$, ($\mathbb{C}^{n\times n}$)

$$\left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} : a_{i,j} \in \mathbb{C} \text{ para } 1 \leq i, j \leq n \right\}$$

es un álgebra asociativa con unidad I_n con respecto al producto de matrices. Además, dado que cualquier matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ puede verse como un vector de n^2 componentes podemos usar cualquier norma vectorial para ver dicho espacio como un espacio normado. En particular cuando se usa la norma vectorial **dos** se tiene la llamada norma de Frobenius de A

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2},$$

la cual es una norma matricial y al ser $\mathbb{C}^n$ un espacio de Banach con respecto a la norma dos y dada la relación que existe entre las matrices y vectores, tenemos que $\mathbb{C}^{n\times n}$ es un espacio de Banach. Por lo anterior, $\mathbb{C}^{n\times n}$ es un álgebra de Banach visto con la norma de Frobenius.

Teorema 1.2.1. *Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach. Entonces existe un espacio de Banach X y un isomorfismo de $\mathscr{A}$ en una subálgebra cerrada del álgebra $B(X)$.*

Demostración. Ver [2], pg9, Teorema 2.4.

Corolario 1.2.1. *En cada álgebra de Banach $\mathscr{A}$ existe una norma equivalente a la norma original en $\mathscr{A}$ que satisface:*

(a) $\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\|$.

(b) $\|e\| = 1$, *siempre que $\mathscr{A}$ tenga unidad e.*

Demostración.

(a) En general para operadores en $B(X)$ se cumple $\|TS\| \leq \|T\| \, \|S\|$. Así, por Teorema 1.2.1 cuando consideramos la identificación de los elementos del álgebra $\mathscr{A}$ con una subálgebra cerrada de $B(X)$ se cumple que $\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\|$.

(b) $\|e\| = \|T_e\| = \sup_{\|y\|\leq 1} \|T_e(y)\| = \sup_{\|y\|\leq 1} \|ey\| = \sup_{\|y\|\leq 1} \|y\| = 1.$

□

1.3. Inversos

En esta sección revisaremos el concepto de invertiblidad en un álgebra $\mathscr{A}$ y algunas de las propiedades que se derivan.

Definición 1.3.1. *Sea $\mathscr{A}$ un álgebra con unidad e y $a \in \mathscr{A}$. Un inverso izquierdo de a es un elemento $b \in \mathscr{A}$ tal que $ba = e$. Un inverso derecho de a es un elemento $c \in \mathscr{A}$ tal que $ac = e$. Un inverso de a es un elemento de $\mathscr{A}$ que es un inverso bilateral de a. Un elemento de $\mathscr{A}$ se dice invertible si tiene un inverso, mientras uno que no lo sea se llamará singular. El conjunto de elementos invertibles de $\mathscr{A}$ lo denotaremos por $Inv(\mathscr{A})$ y el conjunto de elementos singulares de $\mathscr{A}$ lo denotaremos por $Sing(\mathscr{A})$.*

Puede ser probado que el inverso de a si existe es único. Lo denotaremos por a^{-1}. Notemos que $Inv(\mathscr{A})$ es un grupo bajo la multiplicación definida en $\mathscr{A}$ ya que para $a, b \in Inv(\mathscr{A})$, $b^{-1}a^{-1}$ es el inverso de ab. $Inv(\mathscr{A})$ es llamado el grupo de elementos invertibles de $\mathscr{A}$.

A continuación presentaremos sin demostración algunas de las propiedades de los elementos invertibles del álgebra.

Lema 1.3.1. *Sea $\mathscr{A}$ un álgebra normada con unidad. Si $a, b \in Inv(\mathscr{A})$ y $\|b - a\| \leq \frac{1}{2} \|a^{-1}\|^{-1}$ entonces*

$$\left\|b^{-1} - a^{-1}\right\| \leq 2 \left\|a^{-1}\right\|^2 \|a - b\| .$$

Demostración. Ver [9], pg 11, Lema 5.

Proposición 1.3.1. *Sea $\mathscr{A}$ un álgebra normada con unidad. Entonces la aplicación $a \longmapsto a^{-1}$ es un homeomorfismo de $Inv(\mathscr{A})$ en sí mismo y $Inv(\mathscr{A})$ es un grupo topológico.*

Demostración. Consideremos la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \varphi\colon Inv(\mathscr{A}) & \to & Inv(\mathscr{A}) \\ a & \mapsto & \varphi(a) = a^{-1}. \end{array}$$

Observemos que $(\varphi \circ \varphi)(a) = \varphi(\varphi(a)) = \varphi(a^{-1}) = (a^{-1})^{-1} = a$. Luego, $\varphi = \varphi^{-1}$. Así para probar que φ es un homeomorfismo debemos probar que φ es continua. En efecto sea $x_0 \in Inv(\mathscr{A})$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Inv(\mathscr{A})$ tal que $x_n \to x_0$. Existe N tal que para $n \geq N$, $\|x_n - x_0\| \leq \frac{1}{2} \left\|x_0^{-1}\right\|^{-1}$. Por Lema 1.3.1 tenemos,

$$\|\varphi(x_n) - \varphi(x_0)\| = \left\|x_n^{-1} - x_0^{-1}\right\| \leq 2 \left\|x_0^{-1}\right\|^2 \|x_n - x_0\| .$$

Además $Inv(\mathscr{A})$ es un espacio topológico visto como subespacio topológico de $\mathscr{A}$. □

Lema 1.3.2. *Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach con unidad e, $x \in \mathscr{A}$ y supongamos $\|x - e\| < 1$. Entonces x es invertible y*

$$x^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (e - x)^k. \tag{1.3.1}$$

Demostración. Ver [4], pg398, Teorema 7.7-1.

Proposición 1.3.2. *Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach con unidad e y $x \in \mathscr{A}$ con $\|x\| < 1$, entonces $(e - x)$ y $(e + x)$ son invertibles en $\mathscr{A}$ y sus inversos son respectivamente*

$$(e - x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad y \quad (e + x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k.$$

Demostración. Aplicamos Lema 1.3.2 a $(e - x)$ y $(e + x)$. □

Teorema 1.3.1. *Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach con unidad e, entonces $Inv(\mathscr{A})$ es abierto en $\mathscr{A}$.*

Demostración. Sea $a \in Inv(\mathscr{A})$, veamos que existe $r > 0$ tal que $B_r(a) \subset Inv(\mathscr{A})$. En efecto, notemos que $\|a^{-1}(a-x)\| \leq \|a^{-1}\| \, \|a-x\|$, luego si $r = \|a^{-1}\|^{-1}$ y $\|a-x\| < r$ entonces $\|a^{-1}(a-x)\| < 1$. Así por Proposición 1.3.2, $[e - a^{-1}(a-x)] \in Inv(\mathscr{A})$. Por tanto, si $x \in B_r(a)$ y $r = \|a^{-1}\|^{-1}$, deducimos que $x \in Inv(\mathscr{A})$ ya que la identidad

$$x = a - (a-x) = a[e - a^{-1}(a-x)]$$

implica que x es producto de elementos de $Inv(\mathscr{A})$ el cual es grupo multiplicativo. □

1.4. Espectro y Radio espectral

Definición 1.4.1. *Sea $\mathscr{A}$ un álgebra normada compleja con unidad e y sea $x \in \mathscr{A}$. El espectro de x es el subconjunto $\sigma(x)$ de $\mathbb{C}$ dado por*

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda e \notin Inv(\mathscr{A})\}. \tag{1.4.1}$$

El conjunto resolvente $r(x)$ es el complemento del espectro de x;

$$r(x) = \mathbb{C} \backslash \sigma(x). \tag{1.4.2}$$

El radio espectral $\rho(x)$ de un elemento $x \in \mathscr{A}$ es

$$\rho(x) = \sup \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}. \tag{1.4.3}$$

De hecho el radio espectral es el radio del disco cerrado más pequeño contenido en $\mathbb{C}$, con centro 0 y el cual contiene a $\sigma(x)$.

Observaciones 1.4.1. *De la definición anterior podemos ver que:*

- $0 \in \sigma(a)$ *si y sólo si* $a \notin Inv(\mathscr{A})$.
- *Si* $\|a\| < 1$ *entonces por Proposición 1.3.2* $(e-a) \in Inv(\mathscr{A})$, *así* $1 \in r(a)$.
- $\sigma(0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : -\lambda e \notin Inv(\mathscr{A})\} = \{0\}$. *De donde* $\rho(0) = 0$.
- $\sigma(e) = \{\lambda \in \mathbb{C} : e - \lambda e \notin Inv(\mathscr{A})\} = \{1_{\mathbb{R}}\}$. *De acuerdo con* (1.4.2) *debemos probar* $r(e) = \mathbb{C} \backslash \{1\}$, *lo cual se sigue de*

$$\begin{aligned} (e - \lambda e)w &= e \\ (w - \lambda w) &= e \\ (1-\lambda)w &= e. \end{aligned}$$

Así $w = (1-\lambda)^{-1}e$, $\lambda \neq 1$. *Además se tiene que* $\rho(e) = 1$.

Veamos algunas propiedades del espectro para elementos de un álgebra con unidad e; como por ejemplo que para álgebras no conmutativas el espectro del producto de elementos no se altera sin importar el orden.

Proposición 1.4.1. *Sea $\mathscr{A}$ un álgebra con unidad e y $a, b \in \mathscr{A}$. Entonces* $\sigma(ab) \setminus \{0\} = \sigma(ba) \setminus \{0\}$.

Demostración. Ver [9], pg20, Proposición 3.

La siguiente proposición nos muestra el comportamiento del espectro para las subálgebras de un álgebra dada.

Proposición 1.4.2. *Sea $\mathscr{B}$ una subálgebra de $\mathscr{A}$ y $\sigma_{\mathscr{B}}(a)$ el espectro de a en $\mathscr{B}$. Entonces* $\sigma_{\mathscr{A}}(a) \subset \sigma_{\mathscr{B}}(a)$.

Demostración. Por la relación dada por (1.4.2) debemos probar que $r_{\mathscr{B}}(a) \subset r_{\mathscr{A}}(a)$. Sea $\lambda \in r_{\mathscr{B}}(a)$, esto es $a - \lambda e \in Inv(\mathscr{B})$ y por tanto $a - \lambda e \in Inv(\mathscr{A})$, así $\lambda \in r_{\mathscr{A}}(a)$. $\square$

Teorema 1.4.1. *Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach. Entonces para cada $a \in \mathscr{A}$, el espectro $\sigma(a)$ es compacto y el radio espectral satisface*

$$\rho(a) \leq \|a\|. \tag{1.4.4}$$

Demostración. Si $|\lambda| > \|a\|$ entonces $\|\lambda^{-1}a\| < 1$, luego por Proposición 1.3.2 $e - \lambda^{-1}a$ es invertible. Por lo tanto $(-\lambda e)(e - \lambda^{-1}a) = a - \lambda e$ es invertible, de este modo tenemos que $\lambda \in r(a)$. Así, si $\lambda \notin r(a)$ entonces $|\lambda| \leq \|a\|$. Esto prueba (1.4.4) y el hecho que $\sigma(a)$ es acotado.

Veamos que $\sigma(a)$ es cerrado. Sea

$$\begin{aligned} g : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathscr{A} \\ \lambda &\longmapsto g(\lambda) = a - \lambda e. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \|g(\lambda) - g(\lambda_0)\| &= \|(a - \lambda e) - (a - \lambda_0 e)\| \\ &= \|\lambda_0 e - \lambda e\| \\ &= \|(\lambda_0 - \lambda)e\| \\ &= |\lambda_0 - \lambda| \, \|e\|. \end{aligned}$$

Así g es continua. Además el complemento de $\sigma(a)$ es $g^{-1}(Inv(\mathscr{A}))$. En efecto,

$$\begin{aligned} g^{-1}(Inv(\mathscr{A})) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : g(\lambda) \in Inv(\mathscr{A})\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda e \in Inv(\mathscr{A})\} \\ &= r(a). \end{aligned}$$

Luego, por Teorema 1.3.1 y la continuidad de g tenemos que $g^{-1}(Inv(\mathscr{A})) = r(a)$ es abierto en $\mathbb{C}$ y por tanto $\sigma(a)$ es cerrado. $\square$

Notemos que este teorema nos dice que $r(a) \neq \emptyset$ y en la búsqueda de probar este mismo resultado pero para el espectro trabajaremos con las funciones analíticas de variable compleja con valor en el álgebra de Banach $\mathscr{A}$. Así como también probaremos algunos resultados concernientes al caso.

Definición 1.4.2. *Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach y D un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$. Una función $f\colon D \to \mathscr{A}$ se dice que es analítica si es diferenciable en cada punto $z_0 \in D$, en el sentido que el límite*

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

existe con la norma de $\mathscr{A}$. En este caso denotamos el límite por $f'(z_0)$.

Lema 1.4.1. *Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach y $a \in \mathscr{A}$. Entonces la función $\gamma\colon \mathbb{C}\backslash\sigma(a) \to \mathscr{A}$ definida por*

$$\gamma(\lambda) = R_\lambda = (a-\lambda e)^{-1}$$

es analítica.

Demostración. Si $\lambda_0 \in r(a)$ entonces $a-\lambda e$ es invertible para todo λ en un disco pequeño con centro en λ_0, ya que $r(a)$ es abierto en $\mathscr{A}$. De la ecuación resolvente obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\gamma(\lambda)-\gamma(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0} &= \frac{R_\lambda - R_{\lambda_0}}{\lambda-\lambda_0}\\ &= \frac{(\lambda-\lambda_0)R_\lambda R_{\lambda_0}}{\lambda-\lambda_0}\\ &= R_\lambda R_{\lambda_0}.\end{aligned}$$

Esta última expresión converge a $R_{\lambda_0}^2$ cuando $\lambda \to \lambda_0$ por Proposición 1.3.1, de donde γ es analítica y $\gamma'(\lambda_0) = R_{\lambda_0}^2$. □

Teorema 1.4.2. (***Gelfand***).*Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach. Entonces para cada $a \in \mathscr{A}$, el espectro $\sigma(a) \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que $\sigma(a) = \emptyset$. Luego para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, $R_\lambda = (a-\lambda e)^{-1}$ está bien definido, además para un funcional lineal acotado arbitrario sobre $\mathscr{A}$, la función

$$h(\lambda) = (f \circ \gamma)(\lambda) = f(R_\lambda)$$

está definida sobre $\mathbb{C}$ y más aún tenemos que h es una función entera. Notemos que

$$R_\lambda = (a-\lambda e)^{-1} = -\lambda^{-1}(e-\lambda^{-1}a)^{-1},$$

de donde $(e-a\lambda^{-1})^{-1} \to e$ cuando $|\lambda| \to \infty$. Así,

$$|h(\lambda)| = |f(R_\lambda)| \leq \|f\|\,\|R_\lambda\| = \|f\|\,\frac{1}{|\lambda|}\left\|\left(e-\frac{1}{\lambda}a\right)^{-1}\right\| \longrightarrow 0$$

cuando $|\lambda| \to \infty$. Entonces h es una función entera acotada, la cual por el teorema de *Liouville* debe ser constante. La constante es cero por que h se anula en infinito. Concluimos que

$$f(R_\lambda) = 0 \;\text{ para cada } f \in \mathscr{A}'.$$

Del Corolario A.1.2 se sigue que $R_\lambda = 0$, pero esto no puede ser pues R_λ es invertible, contradiciendo la suposición inicial $\sigma(a) = \emptyset$. □

Teorema 1.4.3. (***Gelfand-Mazur***) *Si $\mathscr{A}$ es un álgebra de Banach en la cual cada elemento distinto de cero es invertible entonces $\mathscr{A}$ es isomorfo al campo de los números complejos.*

Demostración. Probaremos que cada elemento $x \in \mathscr{A}$ tiene la forma $x = \lambda e$. Supongamos que existe un $a \in \mathscr{A}$ tal que $a \neq \lambda e$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$; es decir, $a - \lambda e \neq 0$. Luego $(a - \lambda e)^{-1}$ existe para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ y en consecuencia $r(a) = \mathbb{C}$. Esto implica que $\sigma(a) = \emptyset$ contradiciendo el teorema de Gelfand. $\square$

En cuanto al radio espectral tenemos las siguientes propiedades.

Teorema 1.4.4. *Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach y $a \in \mathscr{A}$. Entonces el radio espectral $\rho(a)$ está dado por la fórmula*

$$\rho(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} = \inf_{n\geq 1} \|a^n\|^{1/n} . \tag{1.4.5}$$

Demostración. Ver [10], pg19, Teorema 1.7.3.

1.5. Álgebras de Banach conmutativas

En esta sección vamos a trabajar con algunas definiciones y teoremas especiales que requieren la conmutatividad del álgebra, tanto para efectos del cálculo del espectro con los elementos del álgebra como el posterior desarrollo de la teoría de Gelfand.

Recordemos que un álgebra $\mathscr{A}$ tiene la estructura de anillo, así es natural pensar en los conceptos relacionados con la teoría de anillos tales como la conmutatividad, ideales, anillo cociente, homomorfismo de anillos, etc, para llevarlos al contexto de las álgebras.

Definición 1.5.1. *Un álgebra $\mathscr{A}$ se dice conmutativa (o abeliana) si $xy = yx$ para todo $x, y \in \mathscr{A}$.*

Definición 1.5.2. *Una subálgebra I de un álgebra $\mathscr{A}$ es llamada un ideal derecho si $I\mathscr{A} \subset I$ y un ideal izquierdo si $\mathscr{A}I \subset I$. Si I es un ideal bilateral de $\mathscr{A}$ diremos simplemente que es un ideal de $\mathscr{A}$. Un ideal I se dice propio si $\{0\} \neq I \neq \mathscr{A}$ y a su vez un ideal se dice maximal si no existen ideales propios que lo contengan.*

Proposición 1.5.1. *Si $\mathscr{A}$ es un álgebra de Banach entonces:*

(a) *Ningún ideal propio de $\mathscr{A}$ contiene elementos invertibles de $\mathscr{A}$.*

(b) *Si $\mathscr{A}$ es conmutativa y J es un ideal de $\mathscr{A}$ entonces su clausura $\overline{J}$ es también un ideal.*

Demostración.

(a) Sea I un ideal propio de $\mathscr{A}$ y supongamos que existe $x \in I$ con x invertible, es decir que existe $x^{-1} \in \mathscr{A}$ tal que $xx^{-1} = e$. Dado que $I\mathscr{A} \subset I$ tenemos que $e \in I$, luego $e\mathscr{A} \subset I$, esto es $\mathscr{A} \subset I$ y por tanto $I = \mathscr{A}$, lo cual no puede ser.

(b) Sea J un ideal de $\mathscr{A}$, veamos que $\overline{J}$ es también un ideal de $\mathscr{A}$, para lo cual debemos probar que $\overline{J}\mathscr{A} \subset \overline{J}$. En efecto, para $x \in \overline{J}$ y $a \in \mathscr{A}$ existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset J$ tal que $x_n \to x$ y por la continuidad del producto tenemos que $x_n a \to xa$ y dado que J es un ideal de $\mathscr{A}$, $x_n a \in J$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por tanto hemos probado que existe una sucesión en J que converge a xa y con ello que $\overline{J}$ es un ideal.

□

Teorema 1.5.1. *Sea $\mathscr{A}$ un álgebra con unidad e. Entonces:*

(a) *Cada ideal maximal de $\mathscr{A}$ es cerrado.*

(b) *Cada ideal propio de $\mathscr{A}$ está contenido en un ideal maximal de $\mathscr{A}$.*

Demostración. Ver [1], pg264, Teorema11.3.

Presentaremos un resultado concerniente a la estructura del espacio cociente ver (B.0.1), no obstante el subespacio a considerar debe satisfacer la condición de ser cerrado.

Proposición 1.5.2. *Sea I un ideal cerrado en un álgebra de Banach $\mathscr{A}$. Entonces $\mathscr{A}/I$ es un álgebra de Banach con la norma definida por:*

$$\|a+I\| = \inf_{z\in I} \|a+z\|. \tag{1.5.1}$$

Demostración. Ver [11].

Definición 1.5.3. *Sea X un espacio vectorial y Y un subespacio vectorial de X. Entonces se dice que la codimensión de Y es $dim(X/Y)$, donde X/Y es el espacio cociente de X con Y.*

Proposición 1.5.3. *Cada ideal maximal M de un álgebra de Banach $\mathscr{A}$ es de codimensión uno.*

Demostración. Sea M un ideal maximal de $\mathscr{A}$, luego por Teorema 1.5.1 M es cerrado y por Proposición 1.5.2 tenemos que $\mathscr{A}/M$ es un álgebra de Banach. Además $\mathscr{A}/M$ es un anillo de división(ver Teorema B.0.3) y por Teorema de Gelfand-Mazur, $\mathscr{A}/M \cong \mathbb{C}$. □

Definición 1.5.4. *Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach conmutativa con unidad. Un funcional lineal f sobre $\mathscr{A}$ es llamado un funcional lineal multiplicativo si*

(a) *$f(xy) = f(x)f(y)$ para todo $x, y \in \mathscr{A}$.*

(b) *$f(x) \neq 0$ para algún $x \in \mathscr{A}$.*

El conjunto de todos los funcionales lineales multiplicativos lo denotaremos por $\mathfrak{M}(\mathscr{A})$ o simplemente $\mathfrak{M}$ cuando no haya lugar a confusión.

Observación 1.5.1. *Para un funcional lineal que satisfaga la condición (a), la condición (b) es equivalente a que $f(e) = 1$.*

Proposición 1.5.4. *Si $f \in \mathfrak{M}(\mathscr{A})$ y x es un elemento invertible en $\mathscr{A}$ entonces $f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$.*

Demostración.
$$1 = f(e) = f(xx^{-1}) = f(x^{-1}x) = f(x)f(x^{-1}).$$
$\square$

El siguiente teorema establece una correspondencia uno a uno entre los funcionales lineales multiplicativos no nulos del álgebra de Banach $\mathscr{A}$ y los ideales maximales cerrados de $\mathscr{A}$ $(f \leftrightarrow M_f)$ $(M \leftrightarrow f_M)$.

Teorema 1.5.2. *Si $\mathscr{A}$ es un álgebra de Banach conmutativa entonces*

(a) *Si $f \in \mathfrak{M}$ se tiene que $M_f = Ker(f) = \{x \in \mathscr{A} : f(x) = 0\}$ es un ideal maximal de $\mathscr{A}$.*

(b) *Cada ideal maximal de $\mathscr{A}$ es el núcleo de algún $f \in \mathfrak{M}$.*

Demostración.

(a) Claramente M_f es un subespacio vectorial de $\mathscr{A}$ y $M_f \neq \mathscr{A}$, puesto que $f(e) = 1$. Además, este subespacio es un ideal de $\mathscr{A}$ ya que para $a \in \mathscr{A}$ y $x \in M_f$,
$$f(ax) = f(xa) = f(a)f(x) = 0.$$
La codimensión de M_f es uno puesto que $f : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ establece un homomorfismo de anillos y en virtud del teorema fundamental de homomorfismos, $\mathscr{A}/M_f \cong \mathbb{C}$.

(b) Sea $M \subset A$ un ideal maximal. Entonces $\mathscr{A}/M \cong \mathbb{C}$ y así el homomorfismo
$$f_M : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}/M$$
define un funcional lineal multiplicativo en $\mathscr{A}$ y $Ker(f_M) = M$.

$\square$

Observación 1.5.2. *Habida cuenta de la correspondencia anterior podemos llamar los elementos de $\mathfrak{M}(\mathscr{A})$ como ideales maximales y de esta manera identificar cualquier ideal maximal M con el correspondiente funcional f_M. Por tanto el conjunto $\mathfrak{M}$ también lo podemos llamar el conjunto de ideales maximales de $\mathscr{A}$.*

Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach. Denotaremos por $\mathcal{M}(\mathscr{A})$ el conjunto de los funcionales lineales multiplicativos continuos sobre $\mathscr{A}$.

Como los ideales maximales de un álgebra de Banach $\mathscr{A}$ son cerrados y ellos son los núcleos de los funcionales lineales multiplicativos en $\mathscr{A}$ tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.5.3. *Cada funcional lineal multiplicativo en un álgebra de Banach conmutativa $\mathscr{A}$ con unidad es continuo; es decir, $\mathcal{M}(\mathscr{A}) = \mathfrak{M}(\mathscr{A})$.*

Corolario 1.5.1. *Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach conmutativa con unidad. Entonces existe al menos un funcional lineal multiplicativo y continuo.*

Demostración. Si $\mathscr{A}$ es el campo de los números complejos entonces la identidad es tal funcional. Si $\mathscr{A}$ no es un campo entonces existe un elemento $x \in \mathscr{A} \setminus \{0\}$ que no es invertible y el conjunto $x\mathscr{A}$ es un ideal el cual por el lema de Zorn está contenido en un ideal maximal, o equivalentemente, $\mathscr{A}$ tiene un funcional lineal multiplicativo y continuo.
$\square$

Observaciones 1.5.1.

- *Es importante notar que si el álgebra de Banach no es conmutativa entonces $\mathfrak{M}(\mathscr{A})$ puede ser vacio aún si $\mathscr{A}$ tiene unidad o es de dimension finita; por ejemplo el álgebra de las matrices $A_{m\times m}$ sobre $\mathbb{R}$.*
- *Se puede probar además que si $\mathscr{A}$ es un álgebra de Banach y $f \in \mathfrak{M}(\mathscr{A})$ entonces $\|f\| = 1$.*

El siguiente es uno de los teoremas más importantes para el desarrollo de este trabajo, dado que nos permite calcular el espectro de un elemento para un álgebra de Banach conmutativa vía los funcionales lineales multiplicativos continuos, por lo cual lo denominaremos **espectro funcional**.

Teorema 1.5.4. *Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach conmutativa con unidad. Entonces*

$$\sigma(a) = \{f(a) : f \in \mathcal{M}(\mathscr{A})\}. \tag{1.5.2}$$

Esto implica de acuerdo con (1.4.3) *que el radio espectral está dado por*

$$\rho(a) = \sup\{|f(a)| : f \in \mathcal{M}(\mathscr{A})\}.$$

Demostración.($\subseteq$) Sea $\lambda \in \sigma(a)$ entonces $a-\lambda e$ es no invertible y el conjunto $(a-\lambda e)\mathscr{A}$ es un ideal el cual por el lema de Zorn está contenido en un ideal maximal M de codimensión uno tal que $a - \lambda e \in M$. Así, por Teorema 1.5.2 existe un funcional lineal multiplicativo f_M para el cual $f_M(a - \lambda e) = 0$. Luego, $f_M(a) = \lambda$ y por lo tanto, $\lambda \in \{f(a) : f \in \mathcal{M}(\mathscr{A})\}$.

($\supseteq$) Si $f(a) = \lambda$ entonces $a - \lambda e$ es no invertible, ya que en caso contrario existe $y \in \mathscr{A}$ tal que $(a - \lambda e)y = e$, de donde $f(a - \lambda e)f(y) = f(e)$. Luego, $f(a) - \lambda \neq 0$, lo cual es una contradicción. □

1.6. Invertibilidad en álgebras de Banach sin unidad

Definición 1.6.1. *Dados los elementos x,y de un álgebra $\mathscr{A}$, el quasi-producto de x,y es el elemento $x \circ y$ de $\mathscr{A}$ definido por*

$$x \circ y = x + y - xy.$$

Definición 1.6.2. *Sea x un elemento de un álgebra $\mathscr{A}$. Los elementos y, z de $\mathscr{A}$ son respectivamente quasi-inversos izquierdo y derecho de x si*

$$y \circ x = 0, \qquad x \circ z = 0.$$

Un quasi-inverso de x es un elemento de $\mathscr{A}$ que es un quasi-inverso izquierdo y derecho de x. Un elemento que tiene un quasi-inverso se dice quasi-invertible y los elementos que no lo son se denominan quasi-singulares.

Es fácil mostrar que el quasi-inverso si existe es único. El conjunto de elementos quasi-invertibles de $\mathscr{A}$ lo denotaremos por $q{-}inv(\mathscr{A})$ y el conjunto de elementos quasi-singulares por $q - sing(\mathscr{A})$.

Proposición 1.6.1. *Sea $\mathscr{A}$ un álgebra, entonces:*

(a) Si $\mathscr{A}$ tiene elemento unidad, un elemento $x \in \mathscr{A}$ tiene el quasi-inverso y si y sólo si $e - x$ tiene el inverso $e - y$.

(b) Un elemento $x \in \mathscr{A}$ tiene el quasi-inverso y si y sólo si $(0,1) - (x,0)$ tiene el inverso $(0,1) - (y,0)$ en $\mathscr{A}[e]$.

Demostración.

(a) Se obtiene por la identidad $(e - x)(e - y) = e - (x \circ y)$.

(b) Notemos que

$$\begin{aligned}[(0,1) - (x,0)][(0,1) - (y,0)] &= (-x,1)(-y,1) \\ &= (xy - x - y, 1) \\ &= (-(x \circ y), 1).\end{aligned}$$

□

Definición 1.6.3. *Si $\mathscr{A}$ es un álgebra sin unidad, para $x \in \mathscr{A}$ se define su espectro*

$$\sigma(x) = \{0\} \cup \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \frac{1}{\lambda} x \in q - sing(\mathscr{A}) \right\}. \tag{1.6.1}$$

Teorema 1.6.1. *Sea $\mathscr{A}$ un álgebra sin unidad y consideremos su unitización $\mathscr{A}[e]$. Entonces $\sigma_{\mathscr{A}}(a) = \sigma_{\mathscr{A}[e]}(a,0)$ $(a \in \mathscr{A})$.*

Demostración. Observemos que $(x,0) \circ (y,\beta) = ((x \circ y) - \beta x, \beta)$. Por lo tanto $\beta = 0$ y $x \circ y = 0$ si y sólo si $(x,0) \circ (y,\beta) = 0$. Se sigue que $x \in q - sing(\mathscr{A})$ si y sólo si $(x,0) \in q - sing(\mathscr{A}[e])$ y por Proposición 1.6.1 si y sólo si $(0,1) - (x,0) \in sing(\mathscr{A}[e])$. Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, tenemos

$$\lambda \in \sigma_{\mathscr{A}}(a) \iff 1 \in \sigma_{\mathscr{A}}\left(\frac{1}{\lambda} a\right) \iff 1 \in \sigma_{\mathscr{A}[e]}\left(\frac{1}{\lambda} a, 0\right) \iff \lambda \in \sigma_{\mathscr{A}[e]}(a,0).$$

Finalmente $0 \in \sigma_{\mathscr{A}[e]}(a,0)$ ya que $(a,0) \in sing(\mathscr{A}[e])$. □

1.7. Transformada de Gelfand

Definición 1.7.1. *Sea $\mathscr{A}$ un álgebra de Banach conmutativa y $x \in \mathscr{A}$. La función $x\hat{}: \mathfrak{M} \longrightarrow \mathbb{C}$ sobre $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathscr{A})$ dada por*

$$x\hat{}(M) = f_M(x), \tag{1.7.1}$$

se denomina la transformada de Gelfand del elemento $x \in \mathscr{A}$.

Observación 1.7.1. *Dado que para $f \in \mathfrak{M}(\mathscr{A})$, $\|f\| = 1$,*

$$\sup_{M \in \mathfrak{M}} |x\hat{}(M)| \leq \|x\|. \tag{1.7.2}$$

Denotaremos por $C_B(\mathfrak{M})$ el álgebra de Banach de todas las funciones definidas sobre $\mathfrak{M}$ de valor complejo acotadas con la norma $\|\varphi\| = \sup_{M\in\mathfrak{M}} |\varphi(M)|$.

Teorema 1.7.1. *La aplicación $h : x \longrightarrow x\hat{}$ es un homomorfismo continuo del álgebra de Banach $\mathscr{A}$ en el álgebra de Banach $C_B(\mathfrak{M})$. La imagen de la unidad e de $\mathscr{A}$ bajo este homomorfismo es la función constante $e\hat{}(M) \equiv 1$.*

Demostración. Veamos que h satisface las propiedades de homomorfismo de álgebras. En efecto sean $x, y \in \mathscr{A}$ y α un escalar

$$
\begin{aligned}
(a) \qquad\qquad h(\alpha x + y) &= (\alpha x + y)\hat{}(M) = f_M(\alpha x + y) = \alpha f_M(x) + f_M(y) \\
&= \alpha x\hat{}(M) + y\hat{}(M) = \alpha h(x) + h(y). \\
(b) \qquad\qquad h(xy) &= (xy)\hat{}(M) = f_M(xy) = f_M(x) f_M(y) = x\hat{}(M) y\hat{}(M) \\
&= h(x)h(y).
\end{aligned}
$$

La acotación de h se deduce de la expresión (1.7.2) y junto con la linealidad de h obtenemos la continuidad. Además $e\hat{}(M) = f_M(e) = 1$. $\square$

Teorema 1.7.2. *Un elemento $x \in \mathscr{A}$ es invertible si y sólo si $x\hat{}(M) \neq 0$ para todo $M \in \mathfrak{M}$. En este caso*

$$(x^{-1})\hat{}(M) = [x\hat{}(M)]^{-1}. \tag{1.7.3}$$

Demostración. $\Longrightarrow$) Supongamos que $x\hat{}(M_0) = 0$ para algún $M_0 \in \mathfrak{M}$. Luego $f_{M_0}(x) = 0$, de donde $x \in Ker(f_{M_0})$, $x \in M_0$ y así x no puede ser invertible puesto que M_0 es un ideal propio.
$\Longleftarrow$) Supongamos que x es no invertible en $\mathscr{A}$. Entonces $x\mathscr{A}$ es un ideal propio en $\mathscr{A}$, el cual por el lema de Zorn está contenido en un ideal maximal M_0. Claramente $x \in M_0$, así $x\hat{}(M_0) = 0$. La expresión dada por (1.7.3) se sigue por Proposición 1.5.4.

$\square$

Capítulo 2

Cálculo de espectros en algunas álgebras

En este capítulo exhibimos algunos ejemplos de álgebras normadas complejas y álgebras de Banach en donde es posible identificar el espectro de algunos elementos en las mismas. Además cabe resaltar que con ello deseamos mostrar la imposibilidad de realizar dichos calculos en álgebras más generales donde se hace menos evidente la condición de invertibilidad.

(a) En el álgebra de Banach $\mathbb{R}^{2\times 2}$ consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, con a o b no nulos. Recordemos que el espectro de A está formado por los valores propios de dicha matriz, así un cálculo directo nos muestra que $\sigma(A) = \{a+ib, a-ib\}$, de donde $\rho(A) = \sqrt{a^2+b^2}$. Por otra parte tomando las normas matriciales $\|A\|_1, \|A\|_2, \|A\|_\infty$, las cuales estan dadas por:

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max_{j=1,2} \sum_{i=1}^{2} |a_{ij}|, \\ \|A\|_2 &= \sqrt{\rho(A^H A)}, \\ \|A\|_\infty &= \max_{i=1,2} \sum_{j=1}^{2} |a_{ij}|, \end{aligned}$$

obtenemos que $\|A\|_1 = \|A\|_\infty = |a| + |b|$ y $\|A\|_2 = \sqrt{\rho([detA]I_2)} = \sqrt{a^2+b^2}$. No obstante, por Teorema 1.4.1, sabiamos que $\rho(A) \leq \|A\|$. Sin embargo, lo que se trata de observar en este caso es como incide la forma de "medir" dependiendo de la norma a seleccionar, brindando con ello la mejor cota para el espectro y en este caso la igualdad, aunque es notorio que la norma dos o norma espectral es más difícil de calcular porque requiere de más trabajo. El siguiente gráfico apoya la situación descrita:

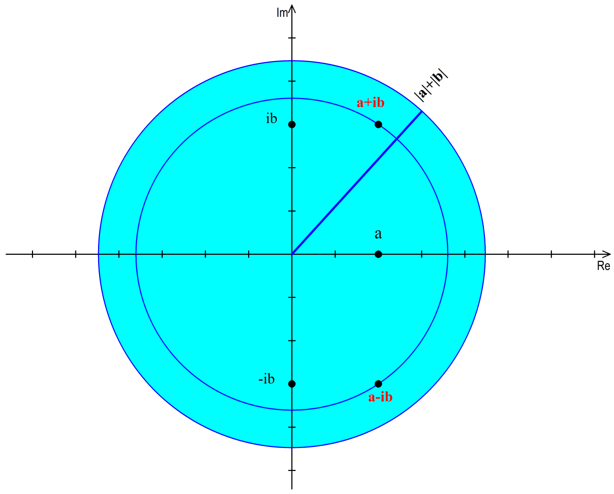

Figura 2.1: Ilustración del teorema (1.4.1)

La siguiente proposición nos servirá de sustento para nuestro siguiente ejemplo.

Proposición 2.0.1. *Si* $f \in C(\Omega)$ *entonces* $\sigma(f) = f(\Omega)$.

Demostración. $(\subseteq)$Si $\lambda \in f(\Omega)$, existe $x_0 \in \Omega$ tal que $f(x_0) = \lambda$. Observemos que una función f es invertible (en el sentido de la estructura algebraica) si y sólo si $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \Omega$. Dado que $f(x_0) - \lambda = 0$ tenemos que f es no invertible. En consecuencia $f(\Omega) \subset \sigma(f)$.
$(\supseteq)$Supongamos que $\lambda \notin f(\Omega)$. Notemos que al ser f continua $f(\Omega) \subset \mathbb{C}$ es un conjunto compacto, luego existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - \lambda| \geq \delta$. Consecuentemente $f - \lambda$ es invertible y por lo tanto $\sigma(f) \subseteq f(\Omega)$. $\square$

(b) Encontrar $\sigma(f)$ para $f \in C[0, 2\pi]$ dada por $f(t) = sent$. Recordemos que el criterio de invertibilidad en el álgebra $C(\Omega)$ en general es que no se anule en Ω. Ahora bien, por Proposición 2.0.1

$$\sigma(sent) = \{\lambda \in \mathbb{C} : sent - \lambda \notin Inv(C[0, 2\pi])\} = [-1, 1].$$

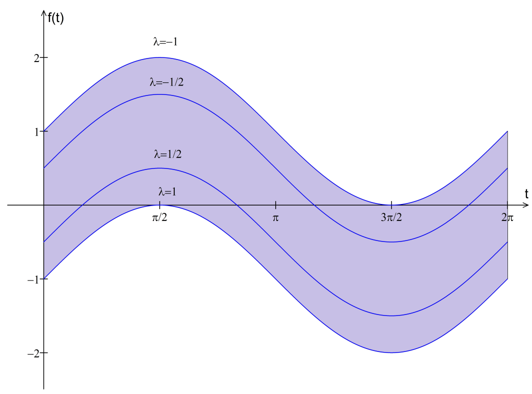

Figura 2.2: Espectro de la función $f(t) = sent$

(c) Para n fijo, sea $X = \{p(t) : p(t) = a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0\}$ y $T : X \to X$ el operador diferencial. Encontrar el espectro de T y las multiplicidades algebraica y geometrica. Se debe satisfacer para $x \in X$, $Tx = x' = \lambda x$, para lo cual si $\lambda = 0$, x debe ser constante y en el caso $\lambda \neq 0$, $x(t) = ce^{\lambda t}$ con c constante no define un polinomio. Por tanto $\sigma(T) = \{0\}$ y la multiplicidad algebraica de $\lambda = 0$ es n y su multiplicidad geometrica es 1.

La siguiente definición está motivada para clasificar el espectro y el resolvente de los operadores lineales que en general están definidos sobre espacios normados de dimensión infinita.

Definición 2.0.2. *Sea $X \neq \{0\}$ un espacio normado complejo y $T : D(T) \to X$ un operador lineal con dominio $D(T) \subset X$. Un valor regular λ de T es un número complejo tal que*

(1) $R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}$ *existe,*

(2) $R_\lambda(T)$ *es acotado,*

(3) $R_\lambda(T)$ *está definido en un conjunto el cual es denso en X.*

*El conjunto resolvente $r(T)$ de T es el conjunto de todos los valores regulares de T. Su complemento, el espectro de T ($\sigma(T)$) es particionado en tres conjuntos disjuntos, a saber el **espectro puntual** $\sigma_p(T)$ cuyos elementos son llamados valores propios de T, el **espectro continuo** $\sigma_c(T)$ y el **espectro residual** $\sigma_r(T)$, cuya clasificación se define en la siguiente tabla.*

Satisfface	No satisface	λ pertenece a:
(1) (2) (3)		$r(T)$
	(1)	$\sigma_p(T)$
(1)(3)	(2)	$\sigma_c(T)$
(1)	(3)	$\sigma_r(T)$

(d) Sea $X = C[0,1]$ y $T : X \to X$ dado por $Tx = vx$, donde $v \in X$ es fijo. Claramente T es lineal acotado, encontremos $\sigma(T)$. Por definición $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \notin Inv(B(X))\}$, para ello la condición de invertibilidad en el caso del espectro puntual se da trabajando con el núcleo del operador en cuestión, veamos

$$\begin{aligned} K(T - \lambda I) &= \{x \in C[0,1] : vx = \lambda x\} \\ &= \{x \in C[0,1] : \lambda = v\} \\ &= R(V) \cup \{0\} . \end{aligned}$$

Al ser v continua en el compacto $[0,1]$, esta alcanza su valor máximo y mínimo, así $R(v)$ será $\left[\min_{t\in[0,1]} v(t), \max_{t\in[0,1]} v(t)\right]$. Por lo tanto $\sigma_p(T) = R(v)$.

(*e*) Encontremos un operador lineal acotado $T : C[0,1] \to C[0,1]$ cuyo espectro sea un intervalo dado $[a,b]$. Consideremos $v(x) = (b-a)x + a$ y $T : C[0,1] \to C[0,1]$ como en el ejemplo anterior. Así $\sigma_p(T) = R(v) = [a,b]$.

(*f*) Sea

$$\begin{aligned} T\colon l^\infty &\longrightarrow l^\infty \\ x &\longmapsto T(x) = (\xi_2, \xi_3, \cdots) \end{aligned}$$

Si $|\lambda| > 1$ probemos que $\lambda \in r(T)$ y si $|\lambda| \leq 1$, mostremos que λ es un valor propio y encontremos el espacio propio V_λ. En primer lugar notemos que $\|T\| = 1$, así por Teorema 1.4.1 para $|\lambda| > 1$, $\lambda \in r(T)$. Por la misma razón para $\lambda \in \sigma(T)$, $|\lambda| \leq \|T\| = 1$, es decir que el espectro de T esta contenido en el círculo unitario, además en este caso $T_\lambda(x) = T(x) - \lambda x = (\xi_2 - \lambda\xi_1, \xi_3 - \lambda\xi_2, \cdots) = 0$, para algún $x \neq 0$, a saber cuando consideramos $V_\lambda = \{x \in l^2 : T(x) = \lambda x\} = \{x \in l^2 : x = (\alpha, \alpha\lambda, \alpha\lambda^2, \cdots), \alpha \in \mathbb{C}\}$, donde $x \in V_\lambda$ satisface $\|x\| = \max\limits_{j\in\mathbb{N}} |\xi_j| = |\alpha| < \infty$.

(*g*) Esta familia de ejemplos se debe a Vito Volterra. Dada una función continua de valor complejo $k(t,\tau)$ sobre $\Delta = \{(t,\tau) : a \leq \tau \leq t \leq b\}$ y dada $g \in C[a,b]$, encontrar una función f tal que

$$\int_a^t k(t,\tau)f(\tau)d\tau = g(t), \quad a \leq t \leq b. \tag{2.0.1}$$

Esta es llamada una ecuación de Volterra de primera clase. Una ecuación de Volterra de segunda clase incluye un nuevo componente λ complejo y como en el caso anterior para $g \in C[a,b]$, la pregunta es cuando

$$\int_a^t k(t,\tau)f(\tau)d\tau - \lambda f(t) = g(t), \quad a \leq t \leq b \tag{2.0.2}$$

tiene como solución una función f.

La ecuación integral (2.0.1) induce el operador

$$\begin{aligned} T\colon C[a,b] &\longrightarrow C[a,b] \\ f &\longmapsto T(f) = \textstyle\int_a^t k(t,\tau)f(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

y el objetivo es calcular el espectro de dicho operador. En primer lugar notemos que T es lineal por la linealidad de la integral, veamos la continuidad de dicho operador, donde k es una función continua sobre el compacto Δ, k es una función acotada sobre Δ, esto es

$$|k(t,\tau)| \leq c, \qquad \textit{para todo } (t,\tau) \in \Delta.$$

Para $f, h \in C[a,b]$

$$\begin{aligned} |T(f)(t) - T(h)(t)| &= \left| \int_a^t k(t,\tau)(f(\tau) - h(\tau))d\tau \right| \\ &\leq c \max_{u\in[a,b]} |f(u) - h(u)| \int_a^t d\tau \\ &= c\,\|f - g\|\,(t-a). \end{aligned}$$

Lo cual nos da la continuidad de T, así que $T \in B(C[a,b])$.

Por otra parte notemos que,

$$|T(f)| \leq \int_a^t |k(t,\tau)|\,|f(\tau)|\,d\tau \leq c\,\|f\|\,(t-a). \tag{2.0.3}$$

Probaremos por inducción que

$$|T^n(f)| \leq \frac{c^n(t-a)^n}{n!}\,\|f\|\,. \tag{2.0.4}$$

El caso $n=1$ se cumple por (2.0.3). Supongamos que (2.0.4) se satisface para cualquier n, de donde

$$\begin{aligned}
\left|T^{n+1}(f)\right| &= \left|\int_a^t k(t,\tau)T^n(f)(\tau)d\tau\right| \\
&\leq c\int_a^t \frac{c^n(\tau-a)^n}{n!}\,\|f\|\,d\tau \\
&= c^{n+1}\frac{(t-a)^{n+1}}{(n+1)!}\,\|f\|\,.
\end{aligned}$$

De acuerdo con (2.0.4) concluimos que $\|T^n\|^{1/n} \leq \dfrac{c(b-a)}{(n!)^{1/n}}$ y en virtud del Teorema 1.4.4 concluimos que $\sigma(T)=\{0\}$, lo cual nos dice que el operador de Volterra definido anteriormente es no invertible y de paso hemos caracterizado el espectro de dichos operadores.

Capítulo 3

Cálculo de espectros en las álgebras $L_1(\mathbb{R})$ y $l_1(\mathbb{R})$

En este capítulo nos ocuparemos de las álgebras $L_1(\mathbb{R})$ y $l_1(\mathbb{R})$, las cuales son el objetivo principal de este trabajo. Estos calculos espectrales los haremos mediante el Teorema 1.5.4 y por la adjunción de la unidad.

3.1. Forma general de los funcionales lineales multiplicativos en las álgebras de Banach $L_1(\mathbb{R})$ y $l_1(\mathbb{R})$

El siguiente Teorema establece una correspondencia uno a uno entre el eje real y $\mathfrak{M}$ (caso $L_1(\mathbb{R})$), así como también una identificación del intervalo $[0, 2\pi)$ con $\mathfrak{M}$(caso $l_1(\mathbb{R})$).

Teorema 3.1.1. *En $L_1(\mathbb{R})$ cada elemento de $\mathfrak{M}$ está dado por la expresión*

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{ip\tau}d\tau, \tag{3.1.1}$$

para algún $p \in \mathbb{R}$.
En $l_1(\mathbb{R})$ cada elemento de $\mathfrak{M}$ tiene la forma

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{int}, \tag{3.1.2}$$

para algún real t, $0 \leq t < 2\pi$.

Demostración. Ver [2], pg40.

Observaciones 3.1.1.

- *Por* (3.1.1) *la transformada de Gelfand en el álgebra $L_1(\mathbb{R})$ corresponde a:*

$$f\hat{}(M) = f\hat{}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{itp}dt, \quad p \in \mathbb{R}, \tag{3.1.3}$$

la cual coincide con la transformada de Fourier de la función f.

- *Por* (3.1.2) *en* $l_1(\mathbb{R})$ *la transformada de Gelfand del elemento es:*

$$x\hat{}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{int}, \quad t \in [0, 2\pi), \tag{3.1.4}$$

la cual es una serie de Fourier absolutamente convergente.

Ahora deseamos encontrar condiciones de invertibilidad que nos permitan relacionar la transformada de Gelfand en el álgebra $\mathscr{A}[e]$ donde $\mathscr{A}$ es $L_1(\mathbb{R})$. Recordemos que el elemento unidad en $\mathscr{A}[e]$ es $e = (0, 1)$. Sean $(f, \alpha_1), (g, \alpha_2)$ elementos de $L_1(\mathbb{R})[e]$ tales que:

$$\begin{aligned}(f, \alpha_1)(g, \alpha_2) &= (0, 1)\\ (f * g + \alpha_1 g + \alpha_2 f, \alpha_1\alpha_2) &= (0, 1),\end{aligned}$$

de donde

$$f * g + \alpha_1 g + \alpha_2 f = 0 \tag{3.1.5}$$

$$\alpha_1\alpha_2 = 1. \tag{3.1.6}$$

De la ecuación (3.1.6) observamos que α_1, α_2 deben ser no nulos. Por otra parte si denotamos por $\hat{f}$ la transformada de Gelfand del elemento f se sigue de la ecuación (3.1.5) y por las propiedades de la transformada de Fourier (ver C.1)

$$\hat{g} = \frac{-\alpha_1^{-1}\hat{f}}{\hat{f} + \alpha_1}. \tag{3.1.7}$$

Con lo anterior establecemos una condición necesaria para la invertibilidad del elemento $f \in L_1(\mathbb{R})[e]$ y es que $\hat{f} + \alpha_1 \neq 0$(más adelante veremos que esta condición es también suficiente).

Por otra parte, cuando consideramos $\alpha_1 = \alpha_2 = -1$ en la ecuación (3.1.6) obtenemos un resultado concerniente a los quasi-inversos, ya que la ecuación (3.1.5) se convierte en $f \circ g = 0$; es decir, g haría las veces de inverso y de quasi-inverso de f.

Al tener la adjunción de la unidad $\mathscr{A}[e] = \mathscr{A} \oplus \{\lambda e\}$, parecería natural que en esta álgebra el conjunto de funcionales lineales multiplicativos tendría la forma

$$\mathfrak{M}(\mathscr{A}[e]) = \{F : \mathscr{A}[e] \longrightarrow \mathbb{C} | F = f + \lambda, f \in \mathfrak{M}(\mathscr{A})\}.$$

Así, por los Teoremas 1.7.2 y 3.1.1, $f \in L_1(\mathbb{R})[e]$ es invertible si y sólo si $\hat{f} - \lambda \neq 0$. Observemos que hemos llegado a esta misma conclusión vía la adjunción de la unidad y utilizando Teoremas que involucran la transformada de Gelfand, lo cual unifica dos perspectivas que en principio parten de puntos diferentes.

3.2. Espectros en $L_1(\mathbb{R})$.

(a) Sea $f(t) = \dfrac{1}{t^2 + a^2}$, $a \neq 0$, $f \in L_1(\mathbb{R})$. Deseamos calcular $\hat{f}(\omega) = F[f(t)]$, donde por Teorema C.4.1 sabemos que $\hat{f}(\omega)$ es real y más aún par. Por definición de $\hat{f}(\omega)$,

$$\hat{f}(\omega) = F[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2 + a^2} e^{-i\omega t} dt.$$

consideremos nuestra función $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + a^2} = \dfrac{1}{(z - ai)(z + ai)}$, la cual tiene polos en $ai, -ai$ y notemos que

$$\left|z^2 + a^2\right| \geq \left|\left|z^2\right| - a^2\right| \implies \frac{1}{|z^2 + a^2|} \leq \frac{1}{|z^2| - a^2}.$$

Se tiene que con $|z| = R$,

$$\frac{1}{|z^2 + a^2|} \leq \frac{1}{R^2 - a^2}.$$

Por tanto,

$$\lim_{R \longrightarrow \infty} \max_{\substack{|z|=R \\ Imz \geq 0}} \left| \frac{1}{z^2 + a^2} \right| = 0.$$

Por otra parte,

$$R_z[\frac{1}{z^2 + a^2} e^{-i\omega z}] = \frac{e^{-i\omega z}}{2z}.$$

Sin pérdida de generalidad supongamos que $a > 0$, así tomando el polo $z_1 = ai$ donde $Imz_1 > 0$ tenemos,

$$\hat{f}(\omega) = (2\pi i) R_{z_1}[f(z) e^{-i\omega z}] = (2\pi i) \frac{e^{-i\omega(ai)}}{2ai} = \frac{\pi}{a} e^{\omega a}, \ \omega < 0.$$

Análogamente con el polo $z_2 = -ai$ con $Imz_2 < 0$ llegamos a

$$\hat{f}(\omega) = (-2\pi i) R_{z_1}[f(z) e^{-i\omega z}] = \frac{\pi}{a} e^{-\omega a}, \ \omega > 0.$$

Es decir que $\hat{f}(\omega) = \dfrac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}$, $\omega \in \mathcal{W}$. Ahora bien, analicemos esta transformada para distintos valores de a en la siguiente gráfica.

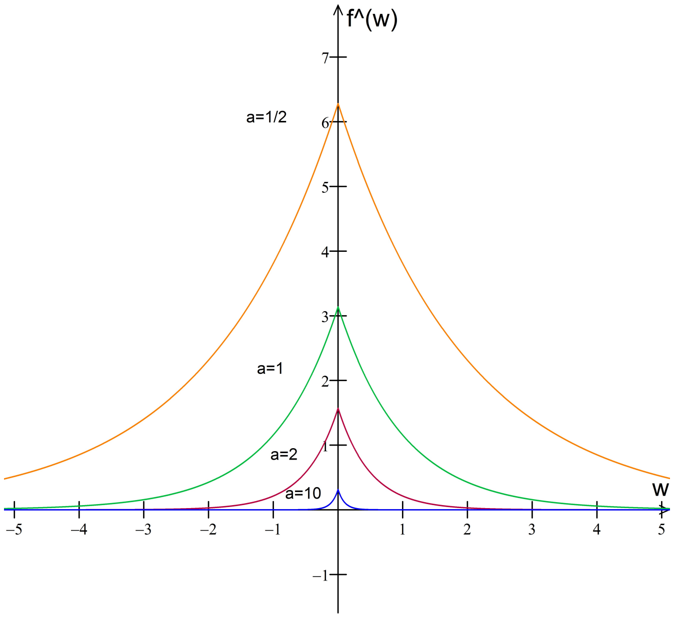

Figura 3.1: Transformada de Fourier de la función f.

Al considerar la identificación de $\mathbb{R}$ con $\mathfrak{M}$ dada por el Teorema 3.1.1, podemos extenderla en el sentido de que a los puntos $\{\infty, -\infty\}$ les podemos hacer corresponder el funcional lineal multiplicativo nulo y en este caso identificaremos a $\mathbb{R}^*$ con $\mathfrak{M}$. Así para nuestro ejemplo $\sigma(f) = [0, \frac{\pi}{a}]$ ya que para estos valores se cumple $\hat{f} - \lambda = 0$ para algún $\omega \in \mathcal{W}$. En particular para $a = 1$.

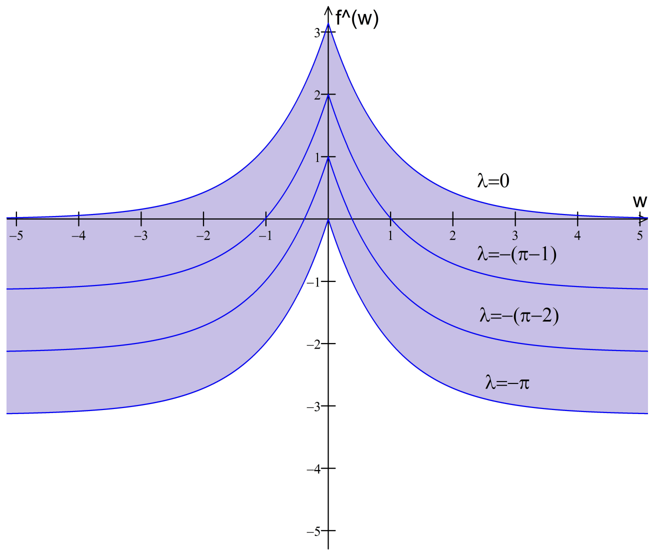

Figura 3.2: Espectro de la función f.

Observación 3.2.1. *Este método por el que hallamos el espectro de nuestra función* $f(t) = \dfrac{1}{t^2 + a^2}$ *se puede generalizar para funciones racionales* $R(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m}$ *donde* $m \geq n + 1$ *(ver [12],pg331).*

(b) Sea X una variable aleatoria la cual sigue una distribución normal ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$) con función de distribución asociada:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},\ x \in \mathbb{R}.$$

Sabemos que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, luego f es una función de densidad de probabilidad y así $f \in L_1(\mathbb{R})$. Por otra parte existe una relación entre la función característica $\psi_X(\omega)$ (conocida como la esperanza de la variable aleatoria $e^{i\omega X}$) de nuestra variable aleatoria X con la transformada de Fourier de su función de densidad asociada $F(w) = F[f_X(x)]$, esto es

$$\psi_X(\omega) = E[e^{i\omega X}] = F(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x)dx.$$

Dado que $\psi_X(\omega) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2 + i\mu\omega}$, por lo anterior $\hat{f}(\omega) = F(w) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2 - i\mu\omega}$.

Tomando el caso particular en el que la variable aleatoria X sigue una distribución normal estandar $X \sim N(0,1)$, la transformada de Fourier de su función de densidad estará dada por $F(w) = e^{-\frac{1}{2}\omega^2}$, es decir, esta función corresponde a un factor de sí misma cuando se calcula su transformada, en cuyo caso haciendo la misma correspondencia de $\mathbb{R}^*$ con $\mathfrak{M}$ obtenemos que $\sigma(f_X) = [0,1]$ ya que para estos valores $\hat{f} - \lambda = 0$ para algún $\omega \in \mathcal{W}$. Ilustramos lo anterior en la siguiente gráfica.

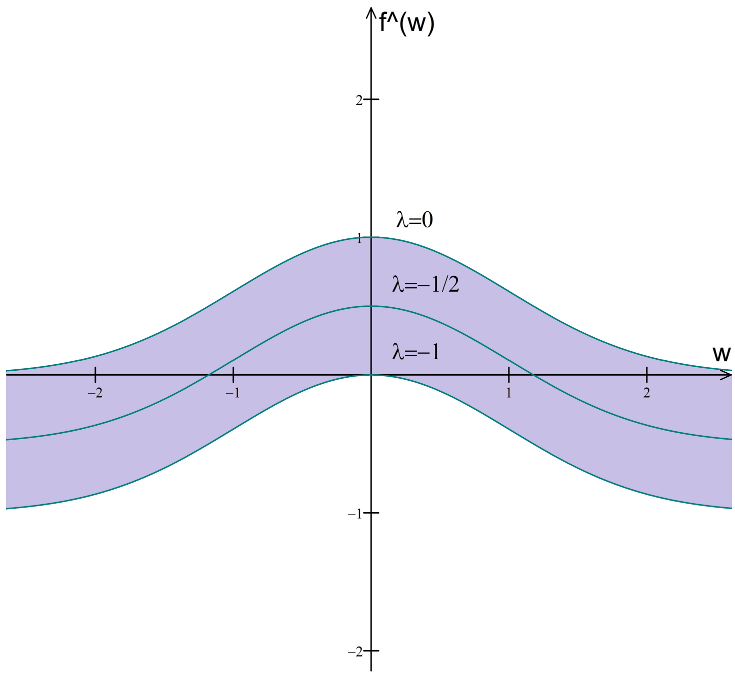

Figura 3.3: Espectro de la campana de Gauss normalizada f_X.

3.3. Espectros en $l_1(\mathbb{R})$.

(a) Sea $x = \{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, dado por

$$x_n = \begin{cases} 0, & n \text{ } par \\ \\ \dfrac{4}{n^2\pi^2}, & n \text{ } impar. \end{cases}$$

De la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, se sigue que $x \in l_1(\mathbb{R})$. Así,

$$x\hat{}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{int}, \quad t \in [0, 2\pi). \tag{3.3.1}$$

Esta corresponde a una serie compleja de Fourier que está representando una función periódica cuyo período es 2π (ver C.2). Un cálculo directo nos muestra que la función periódica dada por

$$g(t) = \begin{cases} 1 + \frac{2t}{\pi} & -\pi < t \leq 0, \\ \\ 1 - \frac{2t}{\pi} & 0 \leq t < \pi \end{cases}$$

tiene como serie compleja de Fourier

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)^2\pi^2} e^{i(2n+1)t} \tag{3.3.2}$$

la cual coincide con la expresión dada por (3.3.1), es decir, sus coeficientes de Fourier son precisamente las componentes de nuestro elemento $x \in l_1(\mathbb{R})$. Por tanto, $\sigma(x) = [-1, 1]$ ya que para estos valores se satisface $g(t) - \lambda = x\hat{}(t) - \lambda = 0$, para algún $t \in [0, 2\pi)$. Apoyamos la situación descrita en la siguiente gráfica.

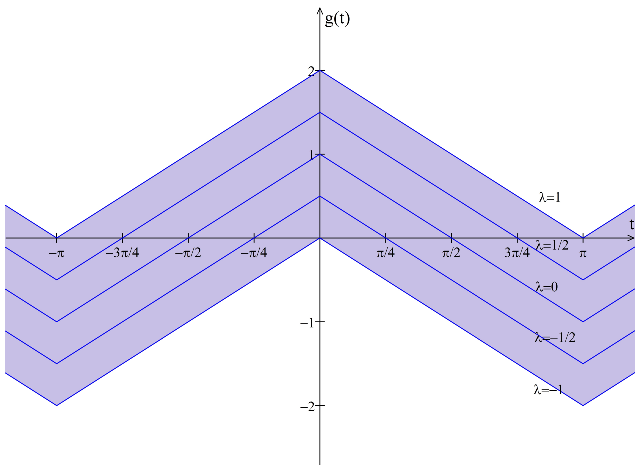

Figura 3.4: Espectro de x.

(b) Sea $y = \{y_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, dado por

$$y_n = \begin{cases} \dfrac{2A}{\pi}\dfrac{1}{1-n^2}, & n \ par \\ \\ 0, & n \ impar, \end{cases}$$

donde A es una constante positiva y puesto que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-4n^2} = -\frac{1}{2}$, $y \in l_1(\mathbb{R})$. Además,

$$y\hat{}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{int}, \quad t \in [0, 2\pi). \tag{3.3.3}$$

Un cálculo directo nos muestra que la función periódica de período 2π dada por $h(t) = \left|Asen(\frac{1}{2}t)\right|$ tiene como serie compleja de Fourier

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2A}{\pi}\frac{1}{1-4n^2} e^{i(2n)t}, \tag{3.3.4}$$

esta coincide con la expresión dada por (3.3.3), es decir, sus coeficientes de Fourier son precisamente las componentes de nuestro elemento $y \in l_1(\mathbb{R})$. Por tanto $\sigma(y) = [0, A]$ ya que para estos valores se satisface $h(t) - \lambda = y\hat{}(t) - \lambda = 0$, para algún $t \in [0, 2\pi)$. En particular para $A = 3$ apoyamos la situación descrita en la siguiente gráfica.

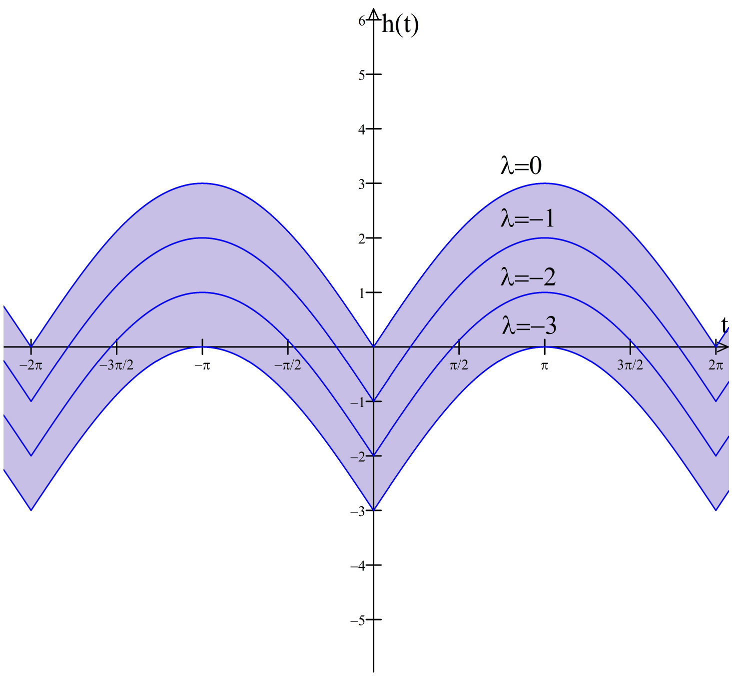

Figura 3.5: Espectro de y.

Apéndice **A**

Análisis Funcional

En este apéndice presentamos algunas definiciones y resultados importantes de la teoría del análisis funcional, aunque para algunos de estos no realizaremos su respectiva demostración debido a su importancia y a que requieren herramientas que son propias de un curso formal, por ello haremos referencia en la bibliografía (*ver*[4]).

A.1. Algunos teoremas fundamentales del análisis funcional.

Teorema A.1.1. (***de Hahn-Banach***). *Sean X un espacio normado sobre un campo $\mathbb{K}$ y Z un subespacio vectorial de X. Entonces dado cualquier funcional lineal acotado f en Z existe un funcional lineal acotado f^* en X tal que:*

(a) $f(x) = f^*(x)$ *para cada* $x \in Z$,

(b) $\|f\| = \|f^*\|$.

Corolario A.1.1. *Sea X un espacio normado y sea $x_0 \in X \setminus \{0\}$. Entonces existe un funcional lineal acotado f^* en X tal que*

$$\|f\| = 1, \quad f^*(x_0) = \|x_0\|.$$

Demostración. Sea $Z = \{z = \alpha x_0 : \alpha \text{ es un escalar}\}$, subespacio de X. En Z definimos un funcional lineal por

$$f(z) = f(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|.$$

Observemos que $\|f\| = 1$ dado que

$$|f(z)| = |f(\alpha x_0)| = |\alpha| \|x_0\| = \|\alpha x_0\| = \|z\|.$$

Por el teorema de Hahn-Banach concluimos que f tiene una extensión lineal f^* en X de norma uno. Además $f^*(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|$. □

Corolario A.1.2. *Para cada x en un espacio normado X tenemos*

$$\|x\| = \sup_{f \in X' \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Si x_0 es tal que $f(x_0) = 0$ para todo $f \in X'$, entonces $x_0 = 0$.

Demostración. Del Corolario A.1.1 para $x \in X\setminus\{0\}$ existe $f^* \in X^{'}$ tal que $\|f^*\| = 1$ y $f^*(x) = \|x\|$. Luego,

$$\sup_{f\in X'\setminus\{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geq \frac{|f^*(x)|}{\|f^*\|} = \frac{\|x\|}{\|f^*\|} = \|x\| \, .$$

Además como $|f(x)| \leq \|f\| \, \|x\|$ se sigue

$$\sup_{f\in X'\setminus\{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|x\| \, .$$

□

Teorema A.1.2. (***de Banach-Steinhaus***, 1927). *Sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de operadores lineales acotados $T_n : X \to Y$ de un espacio de Banach X en un espacio normado Y, tal que $(\|T_n(x)\|)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada para cada $x \in X$, esto es,*

$$\|T_n(x)\| \leq c_x, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \tag{A.1.1}$$

donde c_x es un número real. Entonces la sucesión de normas $(\|T_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, esto es, existe un c tal que

$$\|T_n\| \leq c. \tag{A.1.2}$$

Corolario A.1.3. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en un espacio de Banach X tal que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada para cada $f \in X'$, entonces $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.*

Demostración. Consideremos la sucesión de funcionales $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X'' dada por:

$$\begin{array}{rcl} g_n \colon X' & \to & \mathbb{K} \\ f & \mapsto & g_n(f) = f(x_n) \end{array}$$

Notemos que al ser $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ acotada para cada $f \in X'$, se cumple

$$|g_n(f)| = |f(x_n)| \leq \|f\| \, \|x_n\| := M_f.$$

Por lo tanto, la sucesión $(|g_n(f)|)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y por el teorema de Banach-steinhaus garantizamos que $(\|g_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.
Por otra parte para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|g_n\|_{X''} &= \sup_{f\in X'\setminus\{0\}} \frac{|g_n(f)|}{\|f\|_{X'}} \\ &= \sup_{f\in X'\setminus\{0\}} \frac{|f(x_n)|}{\|f\|_{X'}} \\ &= \|x_n\| \, . \end{aligned}$$

La última igualdad se justifica por Corolario A.1.2. Por lo cual obtenemos que $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. □

Apéndice B

Teoría de Anillos

En este apéndice presentamos algunos resultados importantes de la teoría de anillos.

Lema B.0.1. *Sea A un anillo conmutativo con unidad. Los únicos ideales de A son $\{0\}$ y A si y sólo si A es un campo.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Sea $a \in A, a \neq 0$. $(a) = \{ra \mid r \in A\}$ es un ideal de A, luego por hipótesis $(a) = \{0\}$ ó $(a) = A$. Siendo $a \neq 0, (a) \neq \{0\}$ por lo cual $(a) = A$. De este modo $1 \in A$, esto es existe $b \in A$ tal que $ba = ab = 1$. Así, $b = a^{-1}$.
$\Longleftarrow$) Claramente $\{0\}$ y A son ideales de A. Además si existiera un ideal J de A tal que $\{0\} \subset J \subset A$. Para $a \in J$, $a \in A$, luego existe $a^{-1} \in A$ tal que $aa^{-1} = 1$, por ser J ideal de A, $1 \in J$ y de este modo $J = A$. $\square$

B.0.1. Anillo cociente

Definición B.0.1. *Sean A un anillo e I un ideal de A, en A definimos la congruencia módulo I, esto es, dados $a, b \in \mathscr{A}$, decimos que $a \cong b(\text{mód } I)$ si y sólo si $a - b \in I$.*

Notemos que la relación de congruencia módulo I ($\cong$), define en A una relación de equivalencia, la cual particiona A en clases de equivalencia, así

$$si\ a \in A,\ [a] = \overline{a} = a + I = \{b \in A : a \cong b(\text{mód } I)\}$$

y $A = \bigcup_{a\in A}[a]$, $[a] \cap [b] = \emptyset$ siempre que $a \ncong b(\text{mód } I)$.
LLamaremos al conjunto de clases de equivalencia, conjunto cociente y lo denotaremos por $A/I = \{[a] : a \in A\}$.
En A/I definimos suma y producto de clases de equivalencia así:

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I, \tag{B.0.1}$$
$$(a + I)(b + I) = (ab + I). \tag{B.0.2}$$

Se puede probar que la suma y producto en A/I son operaciones bien definidas.

Teorema B.0.3. *Sea A un anillo conmutativo con unidad, I un ideal de A. I es un ideal maximal de A si y sólo si A/I es un campo.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Notemos que A/I es un anillo conmutativo con unidad siempre que A lo sea; lo cual se tiene por nuestras hipótesis sobre A. Sea I un ideal maximal en A, dado que A/I es un anillo conmutativo con unidad en base al Lema B.0.1 debemos probar que los únicos ideales en A/I son $\{0\}$ y A/I.
Sea

$$\begin{aligned} \pi\colon A &\longrightarrow A/I \\ x &\longrightarrow \pi(x) = x + I. \end{aligned}$$

La proyección canónica sobre A. Esta proyección define un homomorfismo de anillos entre A y A/I dado naturalmente por las operaciones de anillo definidas en A/I, así hay una correspondencia biyectiva entre los ideales de A que contienen a I y los ideales de A/I. Ahora bien, como I es maximal en A, los únicos ideales de A que contienen a I son I y A. A estos ideales corresponden el ideal $\{0\} = \{0 + I\}$ y el anillo A/I, dado que $\pi(I) = 0 + I$ y $\pi(A) = A/I$.

$\Longleftarrow$) Supóngamos que A/I es un campo, luego por Lema B.0.1, los únicos ideales de A/I son los triviales. Recurriendo nuevamente a la proyección canónica y al tener la correspondencia biyectiva entre los ideales que contienen a I y los ideales de A/I, como los únicos ideales de A/I son $\{0\}$ y A/I, a estos corresponden respectivamente los ideales I y A en A, estos son por tanto los únicos ideales de A que contienen a I, lo que significa que I es máximal en A. $\square$

Apéndice C

Análisis de Fourier

En este apéndice se presentan algunas definiciones y resultados básicos de la teoría del análisis de Fourier necesaria para el desarrollo de este trabajo. Es necesario tener presente que para hablar de la transformada de Fourier se debe conocer la representación en series de Fourier para funciones o señales periódicas pues según Fourier una señal aperiódica puede considerarse como una señal períodica con un periodo infinito. Algunos de los resultados que se presentan no tienen su respectiva demostración, pero sus pruebas pueden ser consultadas en [7].

C.1. Series de Fourier

Sea la función $f(t)$ una función periódica de período T, la cual se puede representar por la serie trigonométrica

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosn\omega_0 t + b_n senn\omega_0 t), \tag{C.1.1}$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T$. A esta serie se le llama serie de Fourier de f y sus componentes a_n y b_n se llaman coeficientes de Fourier de f.

Dado que $\{1, cosnt, sennt\}_{n=1}^{\infty}$ constituye un conjunto ortogonal en el espacio de funciones continuas $C[0,T]$ con producto interno dado por $\int_{-T/2}^{T/2} f(t)g(t)dt$, de la representación para f dada por (C.1.1) podemos evaluar los coeficientes a_n y b_n de la serie de Fourier multiplicando esta por $cosm\omega_0 t$ y $senm\omega_0 t$ respectivamente e integrando en $[-T/2, T/2]$ y obtenemos

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)cos(n\omega_0 t)dt, \; n = 0, 1, 2, ... \tag{C.1.2}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)sen(n\omega_0 t)dt, \; n = 1, 2, ... \tag{C.1.3}$$

C.2. Forma compleja de la serie de Fourier

En muchas aplicaciones de las series de Fourier, es conveniente expresar estas series en términos de los exponenciales complejos $e^{\pm in\omega_0 t}$.
Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} cosn\omega_0 t &= \frac{1}{2}(e^{in\omega_o t} + e^{-i\omega_0 t}), \\ senn\omega_0 t &= \frac{1}{2i}(e^{in\omega_o t} - e^{-i\omega_0 t}). \end{aligned}$$

Tenemos de la representación dada por (C.1.1) que

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{in\omega_0 t} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{in\omega_0 t}\right].$$

Si se hace

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \qquad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \qquad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n),$$

entonces

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}. \tag{C.2.1}$$

La anterior ecuación se denomina forma compleja de la serie de Fourier de $f(t)$, o serie compleja de Fourier de $f(t)$. Además los coeficientes c_n están dados en términos de a_n y b_n los cuales ya conocemos y por ello,

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-in\omega_0 t}dt, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}. \tag{C.2.2}$$

C.3. Condiciones de Dirichlet

Uno de los problemas fundamentales para la representación de funciones períodicas en serie de Fourier para la posterior aplicación a la transformada de Fourier se basa en la convergencia de dicha serie. A continuación se enunciaran las condiciones, conocidas como condiciones de Dirichlet, bajo las cuales es posible la representación en serie de Fourier de una función dada $f(t)$.

(a) La función $f(t)$ tiene un número finito de discontinuidades en un período.

(b) La función $f(t)$ tiene un número finito de máximos y mínimos en un período.

(c) $f(t)$ es absolutamente integrable en un período, esto es,

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|\, dt < \infty. \tag{C.3.1}$$

Observaciones C.3.1.

- *Para el caso de la buena definición de la transformada de Fourier $F(\omega)$ las anteriores condiciones se trasladan del intervalo $(-T/2, T/2)$ a $(-\infty, \infty)$ ya que en general no se requiere que la función sea periódica.*
- *Se debe analizar que las anteriores condiciones son suficientes más no necesarias para la existencia de $F(\omega)$.*

C.4. Transformada de Fourier

Definición C.4.1. *Sea $f(t)$ una función periódica con período T, cuando T se aproxima a infinito, $f(t)$ se convierte en una función no periódica para la cual:*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x}dx\right]e^{j\omega t}d\omega, \tag{C.4.1}$$

si se define,

$$F(\omega) = \mathscr{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt. \tag{C.4.2}$$

La función $F(\omega)$ definida por (C.4.2) *se conoce como la integral de Fourier o transformada de Fourier de $f(t)$, y la operación de integración se simboliza frecuentemente por $\mathscr{F}$. Análogamente $\mathscr{F}^{-1}$ es el símbolo que se utiliza para indicar la operación inversa o sea, obtener $f(t)$ cuando $\mathscr{F}(\omega)$ está dado; en virtud de* (C.4.1),

$$f(t) = \mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega, \tag{C.4.3}$$

y $f(t)$ se denomina transformada inversa de Fourier de $F(\omega)$.

Teorema C.4.1. *Sea $f(t)$ una función real y su transformada de Fourier $F(\omega)$. Entonces $F(\omega)$ es real si y sólo si $f(t)$ es una función par. De igual forma se establece que $F(\omega)$ es imaginaria pura si y sólo si $f(t)$ es una función impar.*

Demostración. Consideraremos el caso $f(t)$ una función par.
$\Longrightarrow)$
Sea

$$\mathscr{F}[f(t)] = F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\ dt - j\int_{-\infty}^{\infty} f(t) sen\omega t\ dt \\
&= R(\omega) + jX(\omega).
\end{aligned}$$

Donde,

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\; dt \tag{C.4.4}$$

$$X(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t) sen\omega t\; dt. \tag{C.4.5}$$

Si $F(\omega) = R(\omega)$ y $X(\omega) = 0$ entonces el integrando de (C.4.5) debe ser impar con respecto a t. Puesto que $sen\omega t$ es una función impar de t, $f(t)$ debe ser una función par de t.
$\Longleftarrow$)

$$\begin{aligned} F(\omega) &= R(\omega) + jX(\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\; dt - j\int_{-\infty}^{\infty} f(t) sen\omega t\; dt \end{aligned}$$

Al ser $f(t)$ una función par y de acuerdo con (C.4.5) se tiene que $X(\omega) = 0$ ya que el integrando de $X(\omega)$ es una función impar de t.
De manera análoga se procede en el caso de que $f(t)$ sea una función impar, utilizando (C.4.4). □

Corolario C.4.1. *Si $f(t)$ es una función real y $\mathscr{F}[f(t)] = F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$ entonces*

$$\mathscr{F}[f_e(t)] = R(\omega)$$
$$\mathscr{F}[f_o(t)] = jX(\omega)$$

donde $f(t) = f_e(t) + f_o(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)] + \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)]$, siendo $f_e(t)$ y $f_o(t)$ las componentes par e impar de $f(t)$, respectivamente.

A continuación se dispone a presentarse una tabla con las principales propiedades de la Transformada de Fourier

Propiedad	**Señal aperiódica**	**Transformada**
	$f(t)$ $g(t)$	$F(\omega)$ $G(\omega)$
Linealidad	$af(t) + bg(t)$	$aF(\omega) + bG(\omega)$
Escalamiento de tiempo y de frecuencia	$f(at), a \neq 0$	$\frac{1}{\|a\|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Desplazamiento de tiempo	$f(t - t_0)$	$F(w)e^{-iwt_0}$
Desplazamiento de frecuencia	$f(t)e^{i\omega_0 t}$	$F(\omega - \omega_0)$
Multiplicación	$f(t)g(t)$	$\frac{1}{2\pi}F(\omega) * G(\omega)$
Simetría	$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
Diferenciación en tiempo	$\frac{d}{dt}f(t)$	$i\omega F(\omega)$
Convolución	$f(t) * g(t)$	$F(w)G(w)$

Cuadro C.1: Tabla1

CONCLUSIONES

- Con el presente trabajo hemos logrado afrontar un problema en la aplicación de la teoría espectral que involucra el interrogante ¿como calcular espectros en álgebras sin unidad?.
- En las álgebras de Banach $L_1(\mathbb{R})$ y $l_1(\mathbb{R})$ nos permitimos realizar cálculos espectrales mediante el denominado espectro funcional (Ver Teorema 1.5.4).
- En el álgebra de Banach sin unidad $L_1(\mathbb{R})$ calculamos espectros mediante la adjunción de la unidad $L_1(\mathbb{R})[e]$ y verificamos la relación que se tiene con el espectro funcional.
- Abarcamos un buen número de ejemplos para el cálculo de espectros que involucran distintas álgebras de Banach($\mathbb{R}^{2\times 2}, C[0, 2\pi], B(X)$).

BIBLIOGRAFÍA

[1] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill publishing company LTD, New Delhi, 1973.

[2] W. Żelazko, *Banach Algebras*, Elsevier Publishing Company,1973.

[3] W. Żelazko, *Selected topics in topological algebras*, Lect.notes series 31, Matimatisk Institut Aarthus Universiet-Aarthus, 1971.

[4] Erwin Kreyszig *Introductory Functional Analiysis with Applications*, Wilay classics library, New York, 1978.

[5] Haim Brezis, *Functional analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer.

[6] H. I Royden, P. M Fitzpatrick, *Real Analysis*, fourth edition, Pearson, 2010.

[7] Hwei p.hsu, *Análisis de Fourier*, Prentice Hall, 1998.

[8] Carlos Julio Restrepo, *Introduccion al análisis de Fourier*, Popayán-Julio 1992.

[9] F.F Bonsall, J.Duncan, *Complete Normed Algebras*, Springer-Verlag, New york Heidelberg Berlin 1973.

[10] William Arveson, *A short course on spectral theory*, Springer-Verlag New York 2002, Inc.

[11] Michael Reed, Barry Simon, *Functional Analysis*, Academic Press 1980.

[12] Bruce P.Palka, *An introduction to complex function theory*, Cambridge.

[13] [Online]. Available: http://es.scribd.com/doc/53391078/11/#Ideales-Maximalespage=80.