Estudio de dos Formulaciones Débiles para un Problema Directo de Electroencefalografía

SERGIO ANDRÉS CÓRDOBA PAREJA

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Matemáticas
Popayán, Cauca

2013

Estudio de dos Formulaciones Débiles para un Problema Directo de Electroencefalografía

TRABAJO DE GRADO
En la modalidad investigación, presentado como requisito parcial
para optar al título de Matemático.

SERGIO ANDRÉS CÓRDOBA PAREJA

DIRECTOR:
Dr. RAMIRO ACEVEDO MARTÍNEZ

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Matemáticas
Popayán, Cauca

2013

Nota de aceptación

____
____
____
____

Director ____________________________

Dr. Ramiro Acevedo Martínez

Jurado____________________________

Dra. Aida Patricia González

Jurado____________________________

Mg. Gerardo Arturo Loaiza

Fecha de sustentación: 9 de Agosto de 2013, Popayán.

Este trabajo está dedicado a mi madre Yoslany Pareja, mi padre Jesús Orlando Córdoba, a mi hermano Jhon Mario. A mis abuelos Emigdia, Nery, Guillermo y Constantino (QDEP), a mi tía Elsa, a mis primos Vanessa, Cristian, Diana, Lina, Daniel, Davizon, Yeison, Esteban, Esneider, Eiver, Richard y demás familiares. A Liceth Daniela quien desde poco conocí, pero es la niña a quien en mis sueños yo ví.

Agradecimientos

Doy gracias a Dios, quien permite y hace posible con sus dones de sabiduría y entendimiento se llenen nuestras mentes y corazones para poder ser hoy en día quienes somos.

Especialmente destacar el apoyo incesante y la motivación por parte del Dr. Ramiro Acevedo Martínez, director de este trabajo quien compartió sus conocimientos académicos para la realización del mismo.

A los jurados Aida Patricia González y Gerardo Arturo Loaiza por sus aportes y sugerencias para la evaluación del trabajo.

A la universidad del Cauca por su nivel académico y sus enseñanzas a cargo de la planta docente.

A mis padres Yoslany Pareja, Jesús Orlando Córdoba, quienes con su apoyo incondicional estuvieron siempre dándome fuerzas para salir adelante en los momentos difíciles y compartiendo mis alegrías en los momentos buenos de la vida.

Introducción

En diversos campos de la investigación, se presentan situaciones en las cuales es necesario conocer las causas que producen cierto fenómeno a través de la información parcial que se obtiene del mismo. Estos tipos de problemas son llamados de identificación y son ampliamente estudiados en muchos campos de la investigación, entre otros la medicina, donde hay un gran interés en el problema de identificación de fuentes bioeléctricas cerebrales, a partir de datos obtenidos por medio de un electroencefalograma, ya que permite detectar posibles anomalías (daños, mal funcionamiento, etc.).

Para los problemas de identificación se usan modelos matemáticos, con los cuales se desarrollan técnicas no invasivas. Entre estas se encuentran la tomografía por emisión de positrones, la resonancia magnética nuclear y la electroencefalografía (EEG), siendo esta última de particular interés para nosotros. Entre las ventajas de la técnica del EEG podemos mencionar que la información que proporciona se captura en tiempo real, de manera simple, económica y no invasiva. En algunos casos podemos considerar que los generadores están concentrados en una región del cerebro y que pueden representarse por funciones de cuadrado integrable definidas sobre esta región. En el caso particular en que se tiene una fuente, un dipolo de corriente (con la cual se representan a los focos epilépticos), es necesario enfocar el análisis de este problema a través de distribuciones o de funciones generalizadas. Para el estudio de este problema se consideran el problema directo e inverso electroencefalográfico. El primero de ellos consiste en simular los campos eléctrico y magnético generados por ciertos modelos de fuentes de densidad de corriente del cerebro. En el segundo se conocen las mediciones del campo eléctrico en la superficie de la cabeza y se requiere determinar la fuente de densidad de corriente.

En este documento únicamente nos restringiremos al estudio del problema directo de EEG por medio de dos métodos, el método de sustracción y el método de dualidad, los cuales son una buena alternativa que permiten usar la teoría de elementos finitos para obtener la solución numérica de este problema.

El trabajo se divide en tres partes. En el primer capítulo se estudian temas como teoría de distribuciones, espacios L^p, espacios de Sobolev. En el segundo capítulo se presenta la formulación del problema directo de EEG y la teoría para mostrar existencia y unicidad del problema directo por el método de sustracción. Finalmente, en el tercer capítulo se muestra existencia y unicidad del problema directo EEG por el método de dualidad.

Notaciones

$\mathbb{R}$	Campo ordenado de los números reales
$\mathbb{N}$	Conjunto de enteros positivos
$\mathbb{Z}$	Conjunto de números enteros
$\mathbb{Z}_+$	Conjunto de enteros no negativos
$\emptyset$	Conjunto vacío
$\boldsymbol{x}$	Vector en tres dimensiones, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$
$\mathbb{Z}_+^n$	Conjunto de vectores de dimensión n de enteros no negativos
$\overline{\Omega}$	Adherencia del conjunto Ω
$B_r(\boldsymbol{x}_0)$	Bola abierta, centrada en $\boldsymbol{x}_0$ y de radio $r > 0$
$c.t.p$	En casi todo punto
Ω	Conjunto abierto, acotado
$\partial\Omega$	Frontera del conjunto Ω
$\mathbb{R}^{3\times 3}$	Conjunto de matrices de orden 3
X	Espacio Vectorial sobre $\mathbb{R}$
X^*	Espacio dual de X
$I_Y\|_X$	El operador identidad $I : Y \to Y$, restringido al espacio $X \subset Y$
$X \subset\subset Y$	X esta compactamente contenido en Y
$\\|\cdot\\|_X$	Norma en el Espacio X
$(\cdot,\cdot)_X$	Producto interior en el espacio vectorial X
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	Producto de Dualidad
$\|\boldsymbol{\alpha}\|$	Notación de multi-índice para $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$
$\boldsymbol{n}$	Vector normal exterior unitario a $\partial\Omega$
grad	Gradiente
div	Operador Divergencia
curl	Operador Rotacional
Δ	Operador de Laplace
$\mathcal{E}$ y $\mathcal{H}$	Campos eléctrico y magnético
$\mathcal{J}_e$	Densidad de la corriente aplicada
$\boldsymbol{\sigma}$	Conductividad eléctrica
$\delta_{\boldsymbol{x}_0}$	La distribución delta de Dirac centrada en $\boldsymbol{x}_0$
$\boldsymbol{p}_0$	Momento dipolar
$\boldsymbol{\epsilon}$	Permitividad eléctrica
$\boldsymbol{\mu}$	Permeabilidad magnética

$\int_\Omega$	Integral de Lebesgue
$C^k(\Omega)$	Espacio de funciones k veces continuamente diferenciables en Ω
$C_0^\infty(\Omega)$	Espacio de funciones infinitamente diferenciables de soporte compacto en Ω
$L^p(\Omega)$	Espacio L^p
$L^{p^*}(\Omega)$	Espacio dual de $L^p(\Omega)$
$W^{s,p}(\Omega)$	Espacios de Sobolev
$H^{-1}(\Omega)$	Espacio dual de $H_0^1(\Omega)$
$\square$	Culminación de una demostración.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introductorio pretendemos motivar al lector con la teoría necesaria para solucionar el problema directo de electroencefalografía (EEG) mediante los métodos de sustracción y de dualidad. Se presentarán conceptos de análisis funcional, teoría de la medida y espacios de Sobolev.

1.1. Espacios normados y de Banach

Esta sección debe interpretarse como una breve introducción a bastas teorías matemáticas que tienen su origen en los espacios normados. En lo que sigue, haremos uso de conocimientos sobre espacios vectoriales y aplicaciones lineales, con los cuales el lector debe estar familiarizado, no obstante, la mayoría de las veces recordaremos brevemente los conceptos.

En un espacio normado están presentes dos estructuras de naturaleza diversa; una algebraica y una topológica; la estructura algebraica es la de espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales o complejos, y la topología se introduce por medio de una norma que generaliza el concepto de módulo de un vector. Esta confluencia da lugar al desarrollo de una hermosa teoría de extraordinaria riqueza. Cuando el espacio normado es completo se lo llama espacio de Banach. La teoría de estos espacios fue desarrollada en gran parte por el matemático polaco Stefan Banach en 1932.

En el presente trabajo únicamente consideraremos espacios vectoriales normados reales.

Definición 1.1. *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una norma en X es una función $N : X \to \mathbb{R}$, con las siguientes propiedades: para todo $x, y \in X$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$:*

1. $N(x) \geq 0$.
2. $N(x) = 0$ *si y sólo si* $x = 0$.
3. $N(\alpha x) = |\alpha|\, N(x)$.
4. $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Observación 1.2.

1. *Si X posee una norma, decimos que (X, N) es un espacio vectorial normado.*
2. *Con frecuencia se representa la norma de un elemento por $\|x\|_X$ en lugar de $N(x)$.*

Definición 1.3. *Sea* $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ *una sucesión en* X. *Diremos que* $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ *es convergente, si existe* $x \in X$ *tal que*

$$\lim_{m\to\infty} \|x_m - x\|_X = 0.$$

Definición 1.4. *Diremos que* $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ *es una sucesión de Cauchy, si para todo* $\epsilon > 0$, *existe* $N_0 \in \mathbb{N}$ *tal que para* $n, m \geq N_0$ *se tiene que*

$$\|x_n - x_m\|_X < \epsilon.$$

Definición 1.5. *Diremos que* X *es un espacio vectorial completo si toda sucesión de Cauchy en* X *es convergente en* X. *Los espacios normados completos los llamaremos espacios de Banach.*

1.2. Espacios de Hilbert, operadores lineales y Teorema de Lax-Milgram

1.2.1. Espacios con producto interior

Definición 1.6. *Sea* X *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$. *Un producto interior en* X *es una función* $(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$, *que cumple las siguientes condiciones para todo* $x, y, z \in X$ *y todo* $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. $(x + y, z)_X = (x, z)_X + (y, z)_X$.
2. $(x, y)_X = (y, x)_X$.
3. $(\alpha x, y)_X = \alpha (x, y)_X$.
4. $(x, x)_X \geq 0$ *y* $(x, x)_X = 0$ *si y sólo si* $x = 0$.

Observación 1.7. *Si* X *posee un producto interior, decimos que* $(X, (\cdot,\cdot))$ *es un espacio con producto interior.*

Teorema 1.8. *Sea* $(X, (\cdot,\cdot))$ *un espacio con producto interior. La función* $\|\cdot\|_X : X \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\|x\|_X := (x, x)_X^{\frac{1}{2}},$$

es una norma en X.

Definición 1.9. *La norma que se define en el teorema anterior es llamada norma inducida por el producto interior* $(\cdot,\cdot)$. *Un espacio con producto interior completo con respecto a la norma inducida por el producto interior es llamado espacio de Hilbert.*

Teorema 1.10 (Continuidad del producto interior)**.** *Sea* X *un espacio con producto interior. Sean* $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset X$, $\{y_m\}_{m=1}^{\infty} \subset X$, $x, y \in X$ *tales que*

$$x_m \to x \quad \text{en } X, \quad \text{cuando } m \to \infty,$$

$$y_m \to y \quad \text{en } X, \quad \text{cuando } m \to \infty,$$

entonces

$$(x_m, y_m)_X \to (x, y)_X \ \ \text{en } \mathbb{R}, \ \text{cuando } m \to \infty.$$

Demostración. Ver [10, Teorema 3.2-2, pág. 138] □

Observación 1.11. *De ahora en adelante* $\mathcal{H}$ *denotará un espacio de Hilbert.*

1.2.2. Operadores lineales y acotados

Un operador es una función $f : X \to Y$, donde X, Y son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$.

Definición 1.12. *Un operador $f : D(f) \to Y$ es lineal si:*

1. *$D(f)$ es un subespacio vectorial de X.*
2. *Para todo $v, u \in D(f)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene:*

$$f(v + \alpha u) = f(v) + \alpha f(u),$$

Observación 1.13. $f(0_X) = 0_Y$.

Ejemplo 1.14 (Operador identidad)**.** *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, el operador lineal $I_X : X \to X$ dado por*

$$I_X(v) = v \quad \forall v \in X,$$

es llamado operador identidad.

Ejemplo 1.15 (Operador nulo)**.** *Sean X, Y espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$, el operador lineal $f : X \to Y$ dado por*

$$f(v) = 0_Y \quad \forall v \in X,$$

es llamado operador nulo.

Definición 1.16. *Definimos el kernel de un operador $f : D(f) \to Y$, simbolizado por $Ker(f)$, como*

$$Ker(f) := \{v \in D(f) : f(v) = 0_Y\}.$$

Observación 1.17. *El kernel de un operador $f : D(f) \to Y$, es un subespacio de X.*

Definición 1.18. *Sea $f : D(f) \to Y$ un operador lineal, se dice que f es acotado si existe $c > 0$ tal que*

$$\|f(v)\|_Y \leq c \|v\|_X \quad \forall v \in D(f).$$

Definición 1.19. *Si $f : D(f) \to Y$ es un operador acotado, se define la norma de f, denotada por $\|f\|$, como:*

$$\|f\| := \sup_{\substack{v \in D(f) \\ v \neq 0}} \frac{\|f(v)\|_Y}{\|v\|_X}.$$

Teorema 1.20. *Sea $f : D(f) \to Y$ un operador lineal. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *f es continuo,*
2. *f es acotado.*

Demostración. Ver [10, Teorema 2.9-9, pág. 97] □

Corolario 1.21. *Sea $f : D(f) \to Y$ un operador lineal y acotado. Entonces:*

1. *Si $x_n \to x$ (donde $x_n, x \in D(f)$) implica que $f(x_n) \to f(x)$.*
2. *El kernel de f es un subespacio cerrado.*

Demostración. Ver [10, Corolario 2.7-10, pág. 98] □

1.2.3. Operadores compactos

Definición 1.22. *Sean X, Y espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ y $f : X \to Y$ un operador lineal acotado. Diremos que f es un operador compacto si la imagen de la bola unitaria bajo f tiene clausura compacta en Y, esto es*

$$\overline{f\left(B_1(0)\right)}$$

es compacta en Y.

Observación 1.23. *Si $f : X \to Y$ es un operador compacto, la clausura de la imagen de todo conjunto acotado en X es un conjunto compacto en Y. En particular, si $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada en X, entonces para todo $m \in \mathbb{Z}^+$ se tiene que:*

$$\|f(x_m)\|_Y \leq \|f\| \, \|x_m\|_X < c \, \|f\| ,$$

de donde

$$\{f(x_m)\}_{m=1}^{\infty} \quad \text{es acotada en } Y.$$

Luego

$$\overline{\{f(x_m)\}_{m=1}^{\infty}} \quad \text{es compacta en } Y,$$

y así, existen $y \in Y$ y una subsucesión

$$\left\{f(x_{m_j})\right\}_{j=1}^{\infty} \subset \{f(x_m)\}_{m=1}^{\infty} ,$$

tales que

$$f(x_{m_j}) \to y \quad \text{en } Y, \quad \text{si } j \to \infty.$$

En particular, si $X \subset Y$ y $f = I_Y|_X$, entonces

$$f(x_{m_j}) = x_{m_j} \to y.$$

O sea que existe una subsucesión $\left\{x_{m_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ de $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ tal que

$$x_{m_j} \to y \quad \text{en } Y, \quad \text{si } j \to \infty.$$

Observación 1.24. *Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios normados tales que $X \subset Y$. Decimos que la inclusión $X \subset Y$ es compacta, si el operador*

$$i : X \to Y$$

definido por

$$i(v) = v \quad \forall v \in X,$$

es compacto. El operador i definido anteriormente es llamado operador inclusión de X en Y.

1.2.4. Funcionales lineales

Un funcional es un operador $f : X \to \mathbb{R}$, donde X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Si f es un funcional y además es lineal, se dice que f es un funcional lineal. Si además, f es acotado se dice que es un funcional lineal acotado.

El conjunto de los funcionales lineales y acotados sobre X es un espacio vectorial real llamado espacio dual de X, el cual se denota X^*. Sobre X^*, se define la norma

$$\|f\|_{X^*} := \sup_{\substack{v \in X \\ v \neq 0}} \frac{|f(v)|}{\|v\|_X},$$

la cual es llamada norma dual. Puede demostrarse (ver [10, capítulo 2]) que X^* es un espacio de Banach con la norma dual, independiente de que X sea o no espacio de Banach .

Los funcionales lineales y acotados definidos sobre espacios de Hilbert pueden caracterizarse a través del siguiente teorema, llamado Teorema de representación de Riesz, en honor a Frigyes Riesz (1880-1956).

Teorema 1.25 (Teorema de representación de Riesz)**.** *Sea $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ un funcional lineal y acotado. Existe entonces un único $u \in \mathcal{H}$ tal que*

$$f(v) = (u, v)_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in \mathcal{H}$$

y además

$$\|f\|_{\mathcal{H}^*} = \|u\|_{\mathcal{H}}.$$

Demostración. Ver [14, Teorema 1.2.3, pág. 18] □

Observación 1.26. *El Teorema de representación de Riesz induce un operador $\mathcal{R} : \mathcal{H}^* \to \mathcal{H}$, definido por*

$$f(v) = (\mathcal{R}(f), v)_H \quad \forall v \in \mathcal{H} \text{ y } \forall f \in \mathcal{H}^*.$$

Note que el mismo Teorema de representación de Riesz garantiza

$$\|\mathcal{R}(f)\|_{\mathcal{H}} = \|f\|_{\mathcal{H}^*} \quad \forall f \in \mathcal{H}^*.$$

El operador R es llamado operador de Riesz.

Definición 1.27. *Sea $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$. Se dice que B es una forma bilineal sobre $\mathcal{H}$, si para todo $u, v, w \in \mathcal{H}$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene:*

1. $B(\alpha u + \beta v, w) = \alpha B(u, w) + \beta B(v, w)$.
2. $B(u, \alpha v + \beta w) = \alpha B(u, v) + \beta B(u, w)$.

Se dice además que una forma bilineal B es acotada si existe $c > 0$ tal que

$$|B(v, w)| \leq c \|v\|_{\mathcal{H}} \|w\|_{\mathcal{H}} \quad \forall v, w \in \mathcal{H}.$$

Observación 1.28. *La forma bilineal* $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}^*} : \mathcal{H}^* \times \mathcal{H}^* \to \mathbb{R}$, *definida por*

$$(f, g)_{\mathcal{H}^*} := (R(f), R(g))_{\mathcal{H}} \tag{1.2.1}$$

define un producto interior en $\mathcal{H}^*$. *Además, la norma inducida por este producto interior es precisamente la norma dual. Es consecuencia,* $\mathcal{H}^*$ *es un espacio de Hilbert con el producto interior (1.2.1).*

Definición 1.29. *Sea* $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ *una forma bilineal. Decimos que* B *es definida positiva si*

$$B(u, u) = 0 \Longrightarrow u = 0,$$

y además es $\mathcal{H}$*-elíptica o simplemente elíptica si el espacio* $\mathcal{H}$ *está claro, si existe* $\alpha > 0$ *tal que*

$$B(u, u) \geq \alpha \|u\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \forall u \in \mathcal{H}.$$

Un principio del análisis funcional lineal, que provee en ciertas circunstancias la existencia y unicidad de una solución para un problema varacional abstracto, es el Teorema de Lax-Milgram. Dicho teorema también puede usarse para problemas definidos en espacios de dimensión finita y, por consiguiente, es útil en la teoría de la aproximación.

Teorema 1.30 (Teorema de Lax-Milgram)**.** *Sea* $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ *una forma bilineal acotada y elíptica. Para todo* $f \in \mathcal{H}^*$, *existe un único* $u \in \mathcal{H}$ *tal que*

$$B(u, v) = f(v) \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

Además,

$$\|u\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{\mathcal{H}^*}$$

donde $\alpha > 0$ *es la constante de elipticidad de* B.

Demostración. Ver [14, Teorema 1.2.4, Pág. 25] □

Definición 1.31 (Convergencia Débil)**.** *Sea* X *un espacio lineal normado. Una sucesión* $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ *converge débilmente a un elemento* $x \in X$ *si*

$$f(x_m) \to f(x) \quad \forall f \in X^*.$$

Observación 1.32. *Por Teorema de representación de Riesz, una sucesión* $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ *en* $\mathcal{H}$ *converge débilmente a* $x \in \mathcal{H}$ *si*

$$(x_m, y)_{\mathcal{H}} \to (x, y)_{\mathcal{H}} \quad \forall y \in \mathcal{H}.$$

Observación 1.33. *El espacio dual de* X^*, *denotado por* X^{**}, *es llamado el segundo dual de* X *o bidual de* X. *La función* $J : X \to X^{**}$ *dada por* $J(x) = f_x$ *es llamada función canónica de* X *en* X^{**}, *donde* $f_x : X^* \to \mathbb{R}$ *está definida por* $f_x(g) = g(x)$. *Se puede probar que* J *es una función inyectiva, lineal y que preserva la norma de* X *en* X^{**}. *Además, si* $J(X) = X^{**}$, *entonces nosotros decimos que* X *es reflexivo.*

Teorema 1.34. *Toda sucesión acotada en un espacio de Hilbert posse una subsucesión que converge débilmente.*

Demostración. Ver [5, Teorema 5.12, pág. 85] □

El teorema anterior puede extenderse a espacios Banach reflexivos con espacios duales separables.

Teorema 1.35. *Toda sucesión acotada en un espacio de Banach reflexivo y separable tiene una subsucesión que converge débilmente.*

Demostración. Ver [5, Teorema 5.13, pág. 86] □

1.3. Teoría de distribuciones

En el análisis matemático, una distribución o función generalizada es un objeto matemático que generaliza la noción de función y la de medida. Además la noción de distribución sirve para extender el concepto de derivada a todas las funciones localmente integrables y a objetos aún más generales. Su uso es indispensable en muchos campos de las matemáticas, la física y la ingeniería. Así, por ejemplo, se utiliza en el análisis de Fourier para obtener soluciones generalizadas de algunas ecuaciones en derivadas parciales. También juegan un papel muy importante en electrodinámica cuántica y en procesamiento de señales.

Las ¨funciones generalizadas¨ fueron introducidas por Sergéi Sobolev en 1935, independientemente y a finales de la década de 1940 Laurent Schwartz formalizó la teoría de distribuciones, lo que le valió la medalla Fields en 1950.

Inicialmente daremos unas definiciones sobre el espacio de distribuciones con las cuales definiremos los espacios de Sobolev, presentaremos la distribución delta de Dirac que es utilizada como modelo de fuente en nuestro problema electrostático directo EEG, llamada dipolo de corriente (ver sección 2.1).

Antes de comenzar tendremos en cuenta que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Definición 1.36. *Una sucesión de funciones $\{\phi_m\}_{m=1}^{\infty} \subset C_0^{\infty}(\Omega)$, diremos que converge a 0 en $C_0^{\infty}(\Omega)$, si existe un conjunto compacto fijo $K \subset \Omega$, tal que $\mathbf{supp}(\phi_m) \subset K$ para todo m y además ϕ_m y sus derivadas convergen uniformemente a cero en K.*

Definición 1.37. *Un funcional lineal $T : C_0^{\infty}(\Omega) \to \mathbb{R}$ es llamado distribución en Ω, si $\phi_m \to 0$ en $C_0^{\infty}(\Omega)$, implica $T(\phi_m) \to 0$ cuando $m \to \infty$.*

Observación 1.38. *En la definición anterior cuando hablamos de que $\phi_m \to 0$ estamos haciendo referencia a la función nula 0.*

Observación 1.39. *El espacio de distribuciones, el cual es el dual del espacio $C_0^{\infty}(\Omega)$ es denotado por $(C_0^{\infty}(\Omega))^*$.*

Ejemplo 1.40 (La distribución de Dirac)**.** *Sea $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$. Definimos $\delta_{\boldsymbol{x}} : C_0^{\infty}(\Omega) \to \mathbb{R}$, por*

$$\langle \delta_{\boldsymbol{x}}, \phi \rangle := \phi(\boldsymbol{x}), \qquad \forall \phi \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Afirmación 1. $\delta_{\boldsymbol{x}}$ es un funcional lineal.

En efecto, dados $\phi_1, \phi_2 \in C_0^\infty(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \delta_{\boldsymbol{x}}, \alpha\phi_1 + \phi_2 \rangle &= (\alpha\phi_1 + \phi_2)(\boldsymbol{x}) \\ &= \alpha\phi_1(\boldsymbol{x}) + \phi_2(\boldsymbol{x}) \\ &= \alpha \langle \delta_{\boldsymbol{x}}, \phi_1 \rangle + \langle \delta_{\boldsymbol{x}}, \phi_2 \rangle . \end{aligned}$$

Con lo cual se tiene que $\delta_{\boldsymbol{x}}$ es un funcional lineal.

Afirmación 2. $\delta_{\boldsymbol{x}}$ es una distribución.

Para esto, supongamos que $\phi_m \to 0$ en $C_0^\infty(\Omega)$ cuando $m \to \infty$, entonces tenemos que $\phi_m(\boldsymbol{x}) \to 0$ cuando $m \to \infty$, así

$$\langle \delta_{\boldsymbol{x}}, \phi_m \rangle = \phi_m(\boldsymbol{x}) \longrightarrow 0 = \langle \delta_{\boldsymbol{x}}, 0 \rangle , \quad \text{si } m \to \infty.$$

Por lo tanto, tenemos que $\delta_{\boldsymbol{x}}$ define una distribución.

Observación 1.41. *En el caso de que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, nosotros escribimos δ y es conocido como el delta de Dirac.*

Una importante operación en el espacio de distribuciones es la diferenciación. Nosotros usaremos la notación de muti-índice para derivadas, esto es, si $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, denotaremos

$$|\boldsymbol{\alpha}| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i,$$

y para $\phi \in C^{|\boldsymbol{\alpha}|}(\Omega)$ definimos

$$\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\phi := \frac{\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\phi}{\partial \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}} = \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|_1}\phi}{\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Así, usando la anterior definición estándar de multi-índice, la derivada distribucional $\partial^{\boldsymbol{\alpha}} T \in (C_0^\infty(\Omega))^*$ de una función $T \in (C_0^\infty(\Omega))^*$, es la única distribución que satisface

$$\left\langle \frac{\partial^{\boldsymbol{\alpha}} T}{\partial \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}}, \phi \right\rangle = (-1)^{|\boldsymbol{\alpha}|} \left\langle T, \frac{\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\phi}{\partial \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}} \right\rangle \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

1.4. Espacios de Hölder

Antes de definir los espacios de Sobolev, es necesario introducir los espacios de Hölder y los espacios de Lebesgue.

Asumamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto y $0 < \lambda \leq 1$. Una función $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ es llamada continua Hölder con exponente λ, si

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq c \, \|x - y\|_{\mathbb{R}^n}^{\lambda} \quad \forall x, y \in \Omega,$$

para alguna constante c.

Observación 1.42. *En el caso* $\lambda = 1$*, la función* ϕ *es llamada Lipschitz continua.*

Definición 1.43.

1. *Si* $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ *es una función acotada y continua, escribimos*

$$\|\phi\|_{C(\overline{\Omega})} := \sup_{x\in\Omega} |\phi(x)| .$$

2. *La* $\lambda-$*ésima semi-norma de Hölder para* $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ *se define por*

$$[\phi]_{C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})} := \sup_{\substack{x,y\in X \\ x\neq y}} \left\{ \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{\|x-y\|_{\mathbb{R}^n}^{\lambda}} \right\},$$

y la $\lambda-$*ésima norma de Hölder es definida por*

$$\|\phi\|_{C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})} := \|\phi\|_{C(\overline{\Omega})} + [\phi]_{C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})} .$$

Definición 1.44. *El espacio de Hölder*

$$C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$$

consta de todas las funciones $\phi \in C^k(\overline{\Omega})$*, para las cuales la norma*

$$\|\phi\|_{C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})} := \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leq k} \|\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\phi\|_{C(\overline{\Omega})} + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=k} [\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\phi]_{C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})} ,$$

es finita.

Observación 1.45. *Para* $\phi \in C^1(\Omega)$ *tenemos que*

$$\|\phi\|_{C^1(\overline{\Omega})} \geq \|\mathbf{grad}\,\phi\|_{C^0(\overline{\Omega})} . \tag{1.4.1}$$

1.5. Espacios L^p

Los espacios L^p son los espacios vectoriales normados utilizados en el contexto de la teoría de la medida y de la integral de Lebesgue. Reciben también el nombre de espacio de Lebesgue por el matemático Henri Lebesgue. Fueron además los que dieron impulso al desarrollo de la teoría de espacios de Hilbert. En esta sección vamos a dar una pequeña introducción a los espacios L^p y algunos de los teoremas importantes que serán de gran utilidad para definir los espacios de Sobolev, y los cuales a su vez son fundamentales en el estudio de existencia y unicidad de la solución de las formulaciones débiles del problema directo EEG. Antes de iniciar, supondremos que $\phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función medible, con Ω un conjunto medible.

Definición 1.46. *Sea* $1 \leq p < \infty$*. Definimos el espacio funcional* $L^p(\Omega)$ *como*

$$L^p(\Omega) := \left\{ \phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \middle| \int_\Omega |\phi|^p < \infty \right\} .$$

Nota 1.47. *El caso cuando* $p = 2$*, será el conjunto de interés en nuestro estudio.*

Se puede probar (ver [16, capítulo 7]) que $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|\phi\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |\phi|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para el caso $p = \infty$, denotaremos por $L^\infty(\Omega)$ el espacio de todas las funciones que son esencialmente acotadas, esto es:

$$L^\infty(\Omega) := \{\phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : |\phi(x)| \leq M \text{ c.t.p. en } \Omega\},$$

el cual es un espacio de Banach con la norma

$$\|\phi\|_\infty = \text{ínf}\{M \geq 0 : |\phi(x)| \leq M \text{ c.t.p. en } \Omega\}.$$

Nota 1.48. *Para el caso $p = 2$, tenemos que $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto interior*

$$(\phi_1, \phi_2)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \phi_1\phi_2 \qquad \forall \phi_1, \phi_2 \in L^2(\Omega).$$

Proposición 1.49. *Si ϕ es una función continua e infinitamente diferenciable con soporte compacto ($\phi \in C_0^\infty(\Omega)$) entonces $\phi \in L^p(\Omega)$ para todo $1 \leq p < \infty$.*

Demostración. Ver [14, Proposición 1.42, pág. 35] □

Teorema 1.50 (Densidad)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto arbitrario. Entonces $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para todo $1 \leq p < \infty$.*

Demostración. Ver [14, Teorema 1.41, pág. 35] □

Teorema 1.51 (Desigualdad de Hölder)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $1 \leq p \leq \infty$ y q el conjugado de p, esto es, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $\phi_1 \in L^p(\Omega)$ y $\phi_2 \in L^q(\Omega)$, entonces $\phi_1\phi_2 \in L^1(\Omega)$ y además*

$$\left|\int_\Omega \phi_1\phi_2\right| \leq \|\phi_1\|_{L^p(\Omega)} \|\phi_2\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demostración. Ver [16, Teorema 1, pág. 140] □

Observación 1.52. *En $L^2(\Omega)$ la desigualdad de Hölder es llamada desigualdad de Cauchy-Schwarz.*

Teorema 1.53 (Desiguadad de Minkowsky)**.** *Sean $\phi_1, \phi_2 \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, entonces $\phi_1 + \phi_2 \in L^p(\Omega)$ y además*

$$\|\phi_1 + \phi_2\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\phi_1\|_{L^p(\Omega)} + \|\phi_2\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demostración. Ver [16, Minkowski's Inequality, pág. 141] □

Teorema 1.54. *Si $1 \leq p < q \leq \infty$ y Ω es de medida finita, entonces*

$$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega).$$

Además,

$$\|\phi\|_{L^p(\Omega)} \leq c\,\|\phi\|_{L^q(\Omega)} \quad \forall \phi \in L^q(\Omega),$$

donde $c = (\mu(\Omega))^{\frac{q-p}{qp}}$ si $q < \infty$ o $c = (\mu(\Omega))^{\frac{1}{p}}$ si $q = \infty$.

Demostración. Ver [16, Corolario 3, pág. 142] $\square$

Teorema 1.55. *Sea $\phi \in L^p(\Omega)$ tal que $\int_\Omega \phi v = 0$ para toda $v \in C_0^\infty(\Omega)$, entonces $\phi = 0$ c.t.p. en Ω.*

Demostración. Ver [14, Teorema 1.47, pág. 37] $\square$

1.6. Aproximación

En esta sección hablaremos un poco de la aproximación de funciones que pertenecen a los espacios $L^p(\Omega)$ mediante funciones de clase C^∞, para ello definiremos molificadores, convolución y presentaremos algunos teoremas necesarios en la prueba de existencia y unicidad de la solución del problema directo EEG por el método de dualidad.

Definición 1.56. *1. Definamos $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ por*

$$\eta(x) := \begin{cases} ce^{\frac{1}{\|x\|^2-1}} & si \ \|x\| < 1 \\ 0 & si \ \|x\| \geq 1, \end{cases}$$

donde la constante $c > 0$ se selecciona de tal manera que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta = 1.$$

2. Para cada $\epsilon > 0$, definimos la función $\eta_\epsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$\eta_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right),$$

la cual satisface que $\eta_\epsilon \in C^\infty(\Omega)$ y

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon = 1, \quad \mathbf{supp}\, \eta_\epsilon \subset B_\epsilon(0).$$

Definición 1.57. *Una sucesión de molificadores $\{\rho_k\}_{k=1}^\infty$ es una sucesión de funciones en $\mathbb{R}^n$ tal que*

$$\rho_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \ \mathbf{supp}\, \rho_k \subset \overline{B_{\frac{1}{k}}}(0), \ \int_{\mathbb{R}^n} \rho_k = 1, \ \rho_k \geq 0 \ en \ \mathbb{R}^n.$$

Teorema 1.58 (Teorema de Young)**.** *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, la función $y \to f(x-y)g(y)$ es integrable en $\mathbb{R}^n$. Si además definimos*

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy,$$

tendremos que $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Demostración. Ver [3, Teorema 4.15, pág. 104]. $\square$

Definición 1.59. *A la función $f * g$ se llama la convolución de f y g.*

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $\epsilon > 0$, consideramos el conjunto Ω_ϵ definido por

$$\Omega_\epsilon := \{x \in \Omega : \quad dist(x, \partial\Omega) > \epsilon\}.$$

Definición 1.60. *Si f es localmente integrable, se define su molificador como*

$$f^\epsilon := \eta_\epsilon * f \quad \text{en } \Omega_\epsilon,$$

es decir,

$$f^\epsilon(x) = \int_\Omega \eta_\epsilon(x-y) f(y) dy \quad \forall x \in \Omega_\epsilon.$$

Proposición 1.61. *Sea $f \in C(\mathbb{R}^n)$. Entonces $f^\epsilon \to f$ uniformemente en cada compacto de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Ver [3, Proposición 4.21, pág. 108]. □

Teorema 1.62. *Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$. Entonces $f^\epsilon \to f$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Ver [3, Teorema 4.2, pág. 109]. □

1.7. Espacios de Sobolev

Un espacio de Sobolev es un tipo de espacio vectorial, dotado de una norma de tipo L^p, tal que la función y sus derivadas hasta cierto orden tienen norma finita. Un espacio de Sobolev puede ser considerado como un subespacio de un espacio L^p, estos espacios reciben su nombre del matemático ruso Sergéi Sobolev, quien los presentó en los años treinta con el fin de estudiar los problemas de contornos en la teoría de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, resultaron sumamente exitosos, tanto en las aplicaciones como desde el punto de vista teórico.

En esta sección vamos a definir algunos espacios de Sobolev, los cuales son espacios funcionales usados en la formulación variacional de ecuaciones diferenciales. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto y conexo. Los espacios de Sobolev los denotaremos por $W^{s,p}(\Omega)$, donde $s \in \mathbb{Z}^+$ y $1 \leq p < \infty$.

Los espacios $W^{s,p}(\Omega)$ son definidos por

$$W^{s,p}(\Omega) := \{\phi \in L^p(\Omega) : \partial^{\boldsymbol{\alpha}} \phi \in L^p(\Omega) \text{ para todo } |\boldsymbol{\alpha}| \leq s\},$$

donde las derivadas son entendidas en el sentido distribucional. Asociamos a este espacio la norma

$$\|\phi\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq s} \int_\Omega |\partial^{\boldsymbol{\alpha}} \phi|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

y la correspondiente seminorma es

$$|\phi|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\boldsymbol{\alpha}| = s} \int_\Omega |\partial^{\boldsymbol{\alpha}} \phi|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Observación 1.63. *1. El conjunto de funciones $C^\infty(\Omega)$ es denso en los espacios de Sobolev $W^{s,p}(\Omega)$.*

2. El espacio $W_0^{s,p}(\Omega)$ se define como

$$W_0^{s,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)}}.$$

Para el caso $p = \infty$, tenemos que el espacio $W^{s,\infty}(\Omega)$ es definido como

$$W^{s,\infty}(\Omega) := \{\phi \in L^\infty(\Omega) : \partial^{\boldsymbol{\alpha}}\phi \in L^\infty(\Omega),\ |\boldsymbol{\alpha}| = 1, 2, \ldots, s\},$$

donde las derivadas son entendidas en el sentido distribucional. Asociamos a este espacio la norma

$$\|\phi\|_{W^{s,\infty}(\Omega)} := \max_{|\boldsymbol{\alpha}|\leq s} \|\partial^{\boldsymbol{\alpha}}\phi\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Teorema 1.64. *Para $s \in \mathbb{Z}^+$ y $1 \leq p \leq \infty$ el espacio de Sobolev $W^{s,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Ver [4, Teorema 2, pág. 249] □

Nota 1.65. *En el caso $p = 2$, introduciremos la notación*

$$H^s(\Omega) := W^{s,2}(\Omega); \quad H_0^s := W_0^{s,2}(\Omega).$$

Observación 1.66. *El conjunto $H^{-s}(\Omega)$ denotará el espacio dual de $H_0^s(\Omega)$, es decir,*

$$H^{-s}(\Omega) = (H_0^s(\Omega))^*,$$

provisto con la norma dual,

$$\|\phi_1\|_{H^{-s}(\Omega)} := \sup_{\substack{\phi_2 \in H_0^s(\Omega)\\ \phi_2\neq 0}} \frac{|\langle\phi_1, \phi_2\rangle|}{\|\phi_2\|_{H^s(\Omega)}}.$$

1.8. Teorema de la traza y desigualdades de Sobolev

En esta sección veremos algunas propiedades de los espacios de Sobolev, como lo son el teorema de trazas, las identidades de Green, las desigualdades de Sobolev y la desigualdad de Poincaré. Consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y definiremos un nuevo espacio funcional $L^p(\partial\Omega)$.

Definición 1.67. *Sea $1 \leq p < \infty$. Definimos el espacio $L^p(\partial\Omega)$ como*

$$L^p(\partial\Omega) := \left\{\phi : \partial\Omega \to \mathbb{R} \middle| \int_{\partial\Omega} |\phi|^p < \infty\right\}.$$

Observación 1.68. *El espacio $L^p(\partial\Omega)$ es un espacio de Banach con la norma*

$$\|\phi\|_{L^p(\partial\Omega)} := \left(\int_{\partial\Omega} |\phi|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Observación 1.69. *En el caso de $p = 2$ tenemos que el espacio funcional $L^2(\partial\Omega)$ es un espacio de Hilbert.*

En los siguientes resultados se exige la condición de que $\partial\Omega$ tenga una propiedad particular, más exactamente que $\partial\Omega$ sea de clase C^1. Este concepto se precisa en la siguiente definición.

Definición 1.70. *La frontera $\partial\Omega$ de un dominio acotado Ω es de clase C^1 o es Lipschitz continuo si para todo $x \in \partial\Omega$ existe un conjunto abierto $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^3$ con $x \in \mathcal{O}$ y un sistema de coordenadas ortogonales $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ que tiene las siguientes propiedades. Existe un vector $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^3$ con*

$$\mathcal{O} := \{\boldsymbol{\zeta} | -\alpha_j < \zeta_j < \alpha_j,\ 1 \leq j \leq 3\}$$

y una función Lipschitz continua ψ definida en

$$\mathcal{O}' := \left\{\boldsymbol{\zeta}' \in \mathbb{R}^2 | -\alpha_j < \zeta_j < \alpha_j,\ 1 \leq j \leq 2\right\},$$

con $|\psi(\boldsymbol{\zeta}')| \leq \alpha_N/2$ para todo $\boldsymbol{\zeta}' \in \mathcal{O}'$ tal que

$$\Omega \cap \mathcal{O} := \left\{\boldsymbol{\zeta} = (\boldsymbol{\zeta}', \zeta_3) \in \mathbb{R}^3 | \zeta_3 < \psi(\boldsymbol{\zeta}'),\ \boldsymbol{\zeta}' \in \mathcal{O}'\right\}$$

y

$$\partial\Omega \cap \mathcal{O} := \left\{\boldsymbol{\zeta} = (\boldsymbol{\zeta}', \zeta_3) \in \mathbb{R}^3 | \zeta_3 = \psi(\boldsymbol{\zeta}'),\ \boldsymbol{\zeta}' \in \mathcal{O}'\right\}.$$

diremos simplemente que el dominio Ω es Lipschitz cuando la frontera sea Lipschitz continua.

Teorema 1.71 (Teorema de la traza)**.** *Sea Ω acotado y con $\partial\Omega \in C^1$. Entonces existe un operador lineal acotado*

$$\gamma_0 : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega).$$

tal que

1. *$\gamma_0(\phi) = \phi|_{\partial\Omega}$, si $\phi \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.*
2. *$\|\gamma_0(\phi)\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq c\,\|\phi\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ para cada $\phi \in W^{1,p}(\Omega)$, donde la constante c sólo depende de p y Ω.*

Demostración. Ver [4, Teorema 1, pág. 258] □

Definición 1.72. *Nosotros llamaremos a $\gamma_0(\phi)$ la traza de ϕ en $\partial\Omega$.*

Observación 1.73. *En el caso de $p = 2$, el rango de la función traza es denso en $L^2(\partial\Omega)$, es decir, el espacio*

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) := \left\{\gamma_0(\phi) = \phi|_{\partial\Omega} : \phi \in W^{1,2}(\Omega)\right\}$$

es denso en $L^2(\partial\Omega)$ (ver [14, Observación 3.1.2.]).

Teorema 1.74 (Traza cero para funciones en $W^{1,p}$)**.** *Asumamos que Ω es acotado y que $\partial\Omega$ es C^1. Supongamos además que $\phi \in W^{1,p}(\Omega)$. Entonces*

$$\phi \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ si, y sólo si, } \gamma_0(\phi) = 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

Demostración. Ver [4, Teorema 2, pág. 259] □

Teorema 1.75 (Integración por partes)**.** *Sea Ω un conjunto abierto, acotado y tal que $\partial\Omega$ de clase C^1. Si $\phi_1, \phi_2 \in H^1(\Omega)$, se tiene,*

$$\int_\Omega \phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial x_i} = -\int_\Omega \phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_i} + \int_{\partial\Omega} \phi_1 \phi_2 \nu_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

donde $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu 3)$ es el vector normal exterior a $\partial\Omega$.

Demostración. Ver [14, Teorema 3.2.1, pág. 87] □

Teorema 1.76. *Sea Ω un conjunto abierto acotado con $\partial\Omega$ de clase C^1.*

1. *(Primera identidad de Green). Si $v \in H^1(\Omega)$ y $u \in H^2(\Omega)$ entonces*

$$\int_\Omega v\Delta u = -\int_\Omega \mathbf{grad}\, u \cdot \mathbf{grad}\, v + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu}.$$

2. *(Segunda identidad de Green). Si $u, v \in H^2(\Omega)$ entonces*

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v) = \int_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu} \right).$$

Demostración. Ver [14, Teorema 3.2.2, pág. 88] □

Teorema 1.77 (Desigualdades de Sobolev)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto acotado y abierto, con $\partial\Omega \in C^1$. Asumamos que $\phi \in W^{s,p}(\Omega)$:*

1. *Si $s < \frac{n}{p}$, entonces $\phi \in L^q(\Omega)$, donde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{s}{n}$, y además*

$$\|\phi\|_{L^q(\Omega)} \leq c \|\phi\|_{W^{s,p}(\Omega)}$$

   donde la constante c depende sólo de s, p, n y Ω.

2. *Si $s > \frac{n}{p}$, entonces $\phi \in C^{s-\left[\frac{n}{p}\right]-1}(\bar{\Omega})$. Además,*

$$\|\phi\|_{C^{s-\left[\frac{n}{p}\right]-1}(\overline{\Omega})} \leq c \|\phi\|_{W^{s,p}(\Omega)}$$

   donde la constante c depende sólo de s, p, n y Ω.

Demostración. Ver [4, Teorema 6, pág. 270] □

Definición 1.78. *Definimos el promedio de una función $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ como:*

$$\overline{\phi} := \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega \phi$$

Teorema 1.79 (Desigualdad de Poincaré)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, acotado y conexo, con frontera $\partial\Omega \in C^1$. Supongamos que $1 \leq p \leq \infty$. Entonces existe una constante c, que depende sólo de n, p y Ω tal que*

$$\left\|\phi - \overline{\phi}\right\|_{L^p(\Omega)} \leq c \|D\phi\|_{L^p(\Omega)},$$

para cada función $\phi \in W^{1,p}(\Omega)$.

Demostración. Ver [4, Teorema 1, pág. 275.] □

1.9. Espacio de Sobolev asociado al operador divergencia

En esta sección introduciremos un tipo especial de espacio de Sobolev que esta relacionado con el operador divergencia. Este espacio tiene la propiedad de ser un espacio de Hilbert. Esta y otras de sus propiedades se analizarán a continuación.

Definición 1.80 (Operador rotacional)**.** *El operador rotacional, denotado por* **curl**, *es el operador:*

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{curl}: & [(C_0^\infty(\Omega))^*]^3 & \longrightarrow & [(C_0^\infty(\Omega))^*]^3 \\ & \boldsymbol{\phi} & \longrightarrow & \mathbf{curl}\,\boldsymbol{\phi}, \end{array} \tag{1.9.1}$$

donde

$$\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\phi} := \left(\frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_3}, \frac{\partial \phi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}\right).$$

las derivadas son entendidas en el sentido de distribuciones.

Definición 1.81 (Operador divergencia)**.** *El operador divergencia, denotado por* div, *es el operador:*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{div}: & [(C_0^\infty(\Omega))^*]^3 & \longrightarrow & (C_0^\infty(\Omega))^* \\ & \boldsymbol{\phi} & \longrightarrow & \mathrm{div}\,\boldsymbol{\phi}, \end{array} \tag{1.9.2}$$

donde

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{\phi} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i},$$

las derivadas son entendidas en el sentido de distribuciones.

1.9.1. El espacio $H(\mathrm{div};\Omega)$

El espacio de funciones con divergencia de cuadrado integrable es denotado por $H(\mathrm{div};\Omega)$ y definido por

$$H(\mathrm{div};\Omega) := \left\{\boldsymbol{\phi} \in (L^2(\Omega))^3 |\, \mathrm{div}\,\boldsymbol{\phi} \in L^2(\Omega)\right\}.$$

Al cual le asociamos la norma

$$\|\boldsymbol{\phi}\|_{H(\mathrm{div};\Omega)} = \left(\|\boldsymbol{\phi}\|^2_{(L^2(\Omega))^3} + \|\mathrm{div}\,\boldsymbol{\phi}\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2},$$

donde

$$\|\boldsymbol{\phi}\|^2_{(L^2(\Omega))^3} = \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega |\phi_i|^2.$$

Al espacio $H(\mathrm{div};\Omega)$ le asociamos el producto interior

$$(\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2)_{H(\mathrm{div};\Omega)} = (\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2)_{(L^2(\Omega))^3} + (\mathrm{div}\,\boldsymbol{\phi}_1, \mathrm{div}\,\boldsymbol{\phi}_2)_{L^2(\Omega)}$$

y tenemos que $H(\mathrm{div};\Omega)$ es un espacio de Hilbert (ver [12, Capítulo 3]).

Observación 1.82. *Los operadores* **curl** *y* div *poseen las siguientes propiedades:*

1. $\mathrm{div}(\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\phi}) = 0$ *para todo* $\boldsymbol{\phi} \in [(C_0^\infty(\Omega))^*]^3$.

2. $\mathbf{curl}(\mathbf{grad}\, T) = \mathbf{0}$ *para todo* $T \in (C_0^\infty(\Omega))^*$.

Teorema 1.83. *Sea* Ω *un dominio Lipschitz en* $\mathbb{R}^3$ *y supongamos que* $\boldsymbol{\phi} \in (L^2(\Omega))^3$. *Entonces* $\mathbf{curl}\, \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$ *en* Ω *si, y sólo si, existe un campo escalar* $u \in H^1(\Omega)$ *tal que* $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{grad}\, u$ *y* u *es único salvo constantes aditivas.*

Demostración. Ver [12, Teorema 3.37, pág. 62] □

Teorema 1.84. *Sea* Ω *un dominio Lipschitz en* $\mathbb{R}^3$. *Entonces*

$$H(\mathrm{div};\Omega) = \overline{(C^\infty(\overline{\Omega}))^3}^{\|\cdot\|_{H(\mathrm{div};\Omega)}}.$$

Demostración. Ver [12, Teorema 3.32, pág. 52] □

El siguiente teorema muestra cómo funciones en $H(\mathrm{div};\Omega)$ pueden ser definidas en $\partial\Omega$. Para una función $\boldsymbol{\phi} \in (C^\infty(\overline{\Omega}))^3$, el operador traza es definido de la manera clásica $\gamma_{\boldsymbol{n}} : (C^\infty(\overline{\Omega}))^3 \longrightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)$ como

$$\gamma_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{\phi}) = \boldsymbol{\phi}|_{\partial\Omega} \cdot \boldsymbol{n}. \tag{1.9.3}$$

Teorema 1.85. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *un dominio Lipschitz, con vector normal exterior unitario* $\boldsymbol{n}$. *Entonces:*

1. *La función* $\gamma_{\boldsymbol{n}}$ *definida en (1.9.3) en* $(C^\infty(\overline{\Omega}))^3$ *puede ser extendida por continuidad a una función continua* $\gamma_{\boldsymbol{n}}$ *de* $H(\mathrm{div};\Omega)$ *en* $H^{-1/2}(\partial\Omega)$.

2. *El teorema de Green se tiene para funciones* $\boldsymbol{\phi} \in H(\mathrm{div};\Omega)$ *y* $u \in H^1(\Omega)$, *esto es*

$$\int_\Omega \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{grad}\, u + \int_\Omega \mathrm{div}\, \boldsymbol{\phi} u = \int_{\partial\Omega} u\gamma_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{\phi}).$$

Demostración. Ver [12, Teorema 3.24, pág. 53] □

Teorema 1.86. *Sea* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ *un dominio acotado Lipschitz. Supongamos que existen* $K_1, K_2 \subseteq \Omega$ *dominios Lipschitz, tales que*

$$\Omega = int\,(K_1 \cup K_2 \cup \Sigma)\,,$$

donde

$$\Sigma := \partial K_1 \cap \partial K_2.$$

Con Σ *una superficie. Sea* $\boldsymbol{\phi} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ *en* $(L^2(\Omega))^3$. *Entonces*

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{\phi} = 0 \quad en \quad \Omega$$

si, y sólo si,

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{\phi} = 0 \quad en \quad K_1,$$

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{\phi} = 0 \quad en \quad K_2,$$

$$\boldsymbol{\phi}\big|_{K_1} \cdot \nu = \boldsymbol{\phi}\big|_{K_2} \cdot \nu \quad en \quad \Omega,$$

donde ν *es el vector normal unitario a* $\partial\Omega$.

Demostración. Ver [12, Lema 5.3, pág. 107] □

Definición 1.87. *El espacio* $H_0(\mathrm{div};\Omega)$ *es definido como la clausura de las funciones* $(C_0^\infty(\Omega))^3$ *en la norma de* $H(\mathrm{div};\Omega)$*, es decir,*

$$H_0(\mathrm{div};\Omega) := \overline{(C_0^\infty(\Omega))^3}^{\|\cdot\|_{H(\mathrm{div};\Omega)}}.$$

Teorema 1.88. *Sea* Ω *un dominio acotado Lipschitz en* $\mathbb{R}^3$*. Entonces*

$$H_0(\mathrm{div};\Omega) = \{\boldsymbol{\phi} \in H(\mathrm{div};\Omega) | \boldsymbol{\phi} \cdot \nu|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Demostración. Ver [12, Teorema 3.25, pág. 54] □

Capítulo 2

Existencia y unicidad de la solución del problema directo EEG por el método de sustracción

En este capítulo se presentará la formulación del Problema directo electrostático EEG y se mostrará la solución del mismo problema por el método de sustracción.

2.1. Modelo estático de las ecuaciones de Maxwell: Problema directo EEG

La Electroencefalografía (EEG) es una técnica no invasiva[1] usada para localizar actividad eléctrica del cerebro humano, a partir de mediciones de las señales electromagnéticas externas producidas por dicha actividad eléctrica. El diseño de dispositivos capaces de llevar a la práctica estas técnicas, requiere del desarrollo de modelos matemáticos adecuados y de algoritmos eficientes que proporcionen con la mayor exactitud y con el menor costo computacional posible la actividad electromagnética del cerebro, y hace parte de la rama de la ingeniería, basada en biotecnología, conocida como ingeniería biomédica. En EEG se miden las diferencias de potencial eléctrico entre pares de electrodos colocados en la superficie de la cabeza: en la figura 1a) se muestra una capa elástica colocada en la cabeza de una persona, en la cual se han fijado 126 electrodos.

[1] Se considera las técnicas no invasivas como «técnicas no violentas, no traumatizantes», porque se hacen en seres humanos sanos. Estas técnicas no presentan peligro para el voluntario, no son violentas y además tienen una gran sensibilidad ya que durante el trabajo se puede tomar muchas muestras, y emplear dispositivos para facilitar la observación directa.

Figura 2.1: Distribución de sensores para EEG. Imagenes tomadas de [15].

El problema de localización de la actividad eléctrica del cerebro a través de las mediciones obtenidas por EEG es un problema inverso, es decir conocidas las mediciones del campo eléctrico en la superficie de la cabeza, se requiere determinar la fuente de densidad de corriente que produce dichos campos. Este problema inverso es conocido en la literatura como el problema inverso EEG (ver, por ejemplo [17]). Un asunto crucial para resolver eficientemente el problema inverso EEG es la selección del método numérico apropiado para resolver el problema directo EEG, que consiste en simular los campos eléctrico y magnético generados por ciertos modelos de fuentes de densidad de corriente del cerebro (ver, por ejemplo [13]). En el presente trabajo se estudiará el problema directo EEG tomando como punto de partida el modelo estático de las ecuaciones de Maxwell y como modelo de fuente del cerebro un dipolo de corriente, en el cual la distribución de corriente está representada por una fuente puntual localizada en $\boldsymbol{x}_0$ y con momento dipolar $\boldsymbol{p}_0$ llamada dipolo:

$$\mathcal{J}_e = \boldsymbol{p}_0 \delta_{\boldsymbol{x}_0} \tag{2.1.1}$$

donde $\delta_{\boldsymbol{x}_0}$ es la distribución delta de Dirac centrada en $\boldsymbol{x}_0$. El modelo de dipolo de corriente es frecuentemente usado como modelo de fuente de corriente eléctrica cerebral en presencia de focos epilépticos[2] (ver [19]).

Una vez determinado el modelo de fuente a utilizar, es necesario precisar el modelo estático de ecuaciones de Maxwell. El punto de partida para obtener este modelo es el

[2]La epilepsia es un trastorno cerebral crónico que se caracteriza por la repetición de crisis debidas a una descarga excesiva de las neuronas cerebrales (crisis epiléptica), y que suelen asociarse a otros síntomas. Las crisis epilépticas se deben a cambios físicos que se producen en las neuronas (células cerebrales). Estos cambios pueden afectar a funciones como el movimiento o el comportamiento. También pueden afectar al nivel de conciencia (la noción de lo que sucede alrededor de uno). Los cambios normalmente duran solo unos segundos o unos minutos, después la crisis finaliza y el cerebro vuelve a funcionar normalmente.

sistema completo de las ecuaciones de Maxwell, el cual está dado por

$$\begin{aligned}
\mathbf{curl}\,\mathcal{H} - \boldsymbol{\epsilon}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} &= \boldsymbol{\sigma}\mathcal{E} + \mathcal{J}_e,\\
\mathbf{curl}\,\mathcal{E} + \boldsymbol{\mu}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} &= \mathbf{0},\\
\mathrm{div}(\boldsymbol{\mu}\mathcal{H}) &= 0,\\
\mathrm{div}\,\mathcal{E} &= 0
\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

donde $\mathcal{E}$ y $\mathcal{H}$ son respectivamente los campos eléctrico y magnético, $\mathcal{J}_e$ es la densidad de la corriente aplicada. Además, $\boldsymbol{\epsilon}$, $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\sigma}$ son funciones conocidas (están dadas por las condiciones del medio) que representan los parámetros físicos llamados permitividad eléctrica, permeabilidad magnética y conductividad eléctrica. El modelo estático de las ecuaciones de Maxwell se obtiene asumiendo que los campos no varían en el tiempo, es decir, suponiendo que las derivadas temporales que aparecen en (2.1.2) son nulas:

$$\begin{aligned}
\mathbf{curl}\,\mathcal{H} &= \boldsymbol{\sigma}\mathcal{E} + \mathcal{J}_e,\\
\mathbf{curl}\,\mathcal{E} &= \mathbf{0},\\
\mathrm{div}(\boldsymbol{\mu}\mathcal{H}) &= 0\\
\mathrm{div}\,\mathcal{E} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Notemos que por observación 1.82, una consecuencia de la primera ecuación de (2.1.3) es que

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}\mathcal{E} + \mathcal{J}_e) = 0. \tag{2.1.4}$$

Las ecuaciones de Maxwell estáticas son usualmente consideradas en todo $\mathbb{R}^3$, sin embargo, en nuestro problema físico, pueden ser consideradas en un dominio acotado $\mathcal{D}$. Notamos además, que la condición $\mathbf{curl}\,\mathcal{E} = 0$ permite introducir un potencial (eléctrico) escalar u tal que $\mathcal{E} = -\,\mathbf{grad}\,u$ en $\mathcal{D}$ (teorema 1.83), así usando (2.1.4) se debe satisfacer:

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,u) = \mathrm{div}\,\mathcal{J}_e \quad \text{ en } \mathcal{D}. \tag{2.1.5}$$

En muchos problemas físicos, la conductividad $\boldsymbol{\sigma}$ se anula por fuera de una región Ω completamente contenida en $\mathcal{D}$ (en el caso de EEG se asume que Ω es la cabeza humana). Consideraremos además que $\mathcal{J}_e$ se anula por fuera de Ω. Así, teniendo en cuenta las propiedades del operador divergencia (teorema 1.86), la ecuación (2.1.5) es equivalente a

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\left[(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,u - \mathcal{J}_e)|_{\Omega}\right] &= 0 \quad \text{en } \Omega\\
\mathrm{div}\left[(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,u - \mathcal{J}_e)|_{\mathcal{D}\setminus\overline{\Omega}}\right] &= 0 \quad \text{en } \mathcal{D}\setminus\overline{\Omega}\\
(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,u - \mathcal{J}_e)|_{\Omega}\cdot\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,u - \mathcal{J}_e)|_{\mathcal{D}\setminus\overline{\Omega}}\cdot\boldsymbol{n} & \quad \text{en } \partial\Omega
\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

donde $\boldsymbol{n}$ es el vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$. Por eso, si asumimos que el soporte de $\boldsymbol{\sigma}$ y $\mathcal{J}_e$ está contenido en Ω, tenemos como consecuencia que (2.1.5) puede escribirse como

$$\begin{cases}
\mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,u) = \mathrm{div}\,\mathcal{J}_e & \text{en } \Omega\\
(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,u)\cdot\boldsymbol{n} = 0 & \text{en } \partial\Omega.
\end{cases}$$

El modelo que estudiaremos en este trabajo, tal como se dijo antes, corresponde al caso en el que la fuente es un dipolo de corriente, es decir $\mathcal{J}_e$ tiene la forma

$$\mathcal{J}_e = \boldsymbol{p}_0 \delta_{\boldsymbol{x}_0}$$

En consecuencia, el problema directo EEG consiste en: Hallar $u : \Omega \to \mathbb{R}$ que satisface

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,u) = \operatorname{div}(\boldsymbol{p}_0 \delta_{\boldsymbol{x}_0}) & \text{en } \Omega \\ (\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,u) \cdot \boldsymbol{n} = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1.7}$$

Observación 2.1. *La notación $(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,u) \cdot \boldsymbol{n}$, hace referencia al producto interior usual de vectores en $\mathbb{R}^3$.*

Tal como se mencionó antes, la selección de un método numérico adecuado para resolver (2.1.7) es esencial para el problema inverso EEG y teniendo en cuenta que (2.1.7) es un problema tipo Poisson (se obtiene un problema de la forma $\Delta u = g$ si $\boldsymbol{\sigma}$ es constante), el método de elementos finitos es una buena alternativa. Para la aplicación de este método es necesario obtener formulaciones débiles de (2.1.7), a continuación presentaremos las dos alternativas y sus respectivas soluciones, las cuales son el objeto de estudio del presente proyecto.

En el resto del capítulo nos ocuparemos de la solución del problema directo de EEG por el método de sustracción, donde el potencial eléctrico u que es la solución de (2.1.7), lo dividimos en un potencial de singularidad u_0 y en un potencial de corrección $\hat{u}$, de tal forma que

$$u = u_0 + \hat{u},$$

donde el potencial de singularidad se define como la solución para un dipolo con conductividad $\boldsymbol{\sigma}_0$ constante. Para mostrar la existencia y unicidad del potencial de corrección usaremos el potencial de singularidad, aplicaremos la teoría de elementos finitos y así quedará demostrada la existencia y unicidad del potencial total u.

De acuerdo con lo presentado en la sección 2.1, el problema directo EEG consiste en: Hallar $u : \Omega \to \mathbb{R}$ que satisface

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,u) = \operatorname{div}(\boldsymbol{p}_0 \delta_{\boldsymbol{x}_0}) & \text{en } \Omega \\ (\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,u) \cdot \boldsymbol{n} = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1.8}$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es la conductividad eléctrica, $\boldsymbol{p}_0$ es el momento dipolar, $\delta_{\boldsymbol{x}_0}$ es la distribución delta de Dirac centrada en $\boldsymbol{x}_0$ y $\boldsymbol{n}$ es el vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$.

2.2. Formulación débil del problema

Para plantear la formulación débil del problema directo EEG y poder resolverlo por el método de sustracción, tengamos en cuenta unas consideraciones que se platean en Wolters e.t. al ([20]). Más exactamente, supongamos que existe $r_0 > 0$ tal que la conductividad $\boldsymbol{\sigma}$ es constante en $B_{r_0}(\boldsymbol{x}_0) \subsetneq \Omega$. Es decir, existe una matriz constante $\boldsymbol{\sigma}_0$ tal que

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\sigma}_0 \quad \forall \boldsymbol{x} \in B_{r_0}(\boldsymbol{x}_0).$$

En primer lugar consideremos el problema de Poisson que se obtiene de reemplazar $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0$ en la primera ecuación de (2.1.8), esto es: hallar $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_0 \,\mathbf{grad}\, u_0) = \operatorname{div}(\boldsymbol{p}_0 \delta_{\boldsymbol{x}_0}) \quad \text{en } \Omega. \tag{2.2.1}$$

El caso que nos interesa estudiar es cuando la conductividad sea homogénea e isotrópica[3], o sea, de la forma

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \sigma_0 I_3, \quad \sigma_0 \in \mathbb{R},$$

donde I_3 es la matriz identidad de orden 3. Así, a partir de (2.2.1) tenemos el problema de Poisson: Hallar $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$\Delta u_0 = \operatorname{div}(\boldsymbol{p}_0 \delta_{\boldsymbol{x}_0})/\sigma_0. \tag{2.2.2}$$

El problema anterior posee una única solución, (ver Sarvas [17]), la cual es de la forma

$$u_0(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\sigma_0} \frac{\boldsymbol{p}_0 \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^3}, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{2.2.3}$$

El potencial de singularidad u_0 tiene una singularidad en $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$, pero es una función suave en cualquier otro punto (esto es, $u_0 \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \{\boldsymbol{x}_0\})$).

De ahora en adelante supondremos que $\boldsymbol{\sigma}$ es una matriz simétrica y definida positiva, cuyas entradas σ_{ij} pertenecen a $L^\infty(\Omega)$, tales que existen constante positivas $\sigma_{ij}^{\text{mín}}$ y $\sigma_{ij}^{\text{máx}}$ que satisfacen

$$0 < \sigma_{ij}^{\text{mín}} \leq \sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) \leq \sigma_{ij}^{\text{máx}} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega,$$

y que $\boldsymbol{\sigma} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^{3\times 3})$.

Ahora, supongamos que $\partial\Omega$ es de clase C^1. Además, consideramos la nueva variable $\hat{u} = u - u_0$. Reemplazando en la primera ecuación de (2.1.8) y utilizando (2.2.1) tenemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \,\mathbf{grad}\, \hat{u}) &= \operatorname{div}(\boldsymbol{p}_0 \delta_{\boldsymbol{x}_0}) - \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \,\mathbf{grad}\, u_0) \\
&= \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_0 \,\mathbf{grad}\, u_0) - \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \,\mathbf{grad}\, u_0) \\
&= \operatorname{div}((\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}) \,\mathbf{grad}\, u_0).
\end{aligned}$$

Así,

$$-\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \,\mathbf{grad}\, \hat{u}) = \operatorname{div}((\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0) \,\mathbf{grad}\, u_0) \quad \text{en } \Omega.$$

De la segunda ecuación de (2.1.8) se tiene que

$$(\boldsymbol{\sigma} \,\mathbf{grad}\, \hat{u}) \cdot \boldsymbol{n} = -(\boldsymbol{\sigma} \,\mathbf{grad}\, u_0) \cdot \boldsymbol{n} \quad \text{en } \partial\Omega.$$

Por lo tanto, tenemos el problema elíptico: Hallar $\hat{u} : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \,\mathbf{grad}\, \hat{u}) = f & \text{en } \Omega, \\ (\boldsymbol{\sigma} \,\mathbf{grad}\, \hat{u}) \cdot \boldsymbol{n} = g & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2.4}$$

[3] En física, la isotropía, es la característica de los cuerpos cuyas propiedades físicas no dependen de la dirección en que son examinadas.

donde

$$f := \operatorname{div}\left((\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0)\,\mathbf{grad}\,u_0\right), \quad g := -(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,u_0)\cdot \boldsymbol{n}. \tag{2.2.5}$$

En primer caso, notemos que $f \in L^2(\Omega)$. En efecto, si $\hat{\boldsymbol{\sigma}} := \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0$ entonces

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^{3\times 3}), \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} = 0 \quad \text{en } B_{r_0}(\boldsymbol{x}_0).$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f|^2 &= \int_\Omega |\operatorname{div}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\,\mathbf{grad}\,u_0)|^2 \\ &= \int_{\overline{\Omega}\setminus B_{r_0}(\boldsymbol{x}_0)} |\operatorname{div}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\,\mathbf{grad}\,u_0)|^2 \\ &< \infty,\end{aligned}$$

puesto que $u_0 \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus B_{r_0}(\boldsymbol{x}_0))$.

De otro lado, podemos observar que si $\boldsymbol{\phi} \in \left(C^\infty(\overline{\Omega})\right)^3$, entonces $\gamma_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{\phi}) := \boldsymbol{\phi}|_{\partial\Omega}\cdot\boldsymbol{n}$ (donde $\boldsymbol{n}$ es el vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$) se puede identificar como un elemento de $H^{-1/2}(\partial\Omega)$, definiendo

$$\langle \gamma_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{\phi}), u\rangle := \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{n})\,u \qquad \forall u \in H^{1/2}(\partial\Omega).$$

En consecuencia, siendo que $u_0 \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus B_{r_0}(\boldsymbol{x}_0))$, se tiene que

$$g = -(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,u_0)\cdot\boldsymbol{n} = \gamma_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,u_0) \in H^{-1/2}(\partial\Omega).$$

2.3. Existencia y unicidad

Las ecuaciones de (2.2.4) constituyen un problema elíptico y por tal razón, una alternativa para estudiar la existencia y unicidad de la solución es obtener su formulación débil (también llamada formulación o problema variacional) y posteriormente aplicar el Teorema de Lax-Milgram. La formulación débil (2.2.4) se obtendrá de manera usual. Multiplicando la primera ecuación de (2.2.4) por $v \in H^1(\Omega)$, integrando sobre Ω y aplicando integración por partes tenemos:

$$-\int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{u})v = \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{u}\cdot\mathbf{grad}\,v - \int_{\partial\Omega}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{u})\cdot nv = \int_\Omega fv,$$

así, usando la condición de frontera de (2.2.4) tenemos

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{u}\cdot\mathbf{grad}\,v = \int_\Omega fv + \int_{\partial\Omega} gv.$$

El problema variacional correspondiente es: Hallar $\hat{u} \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{u}\cdot\mathbf{grad}\,v = \int_\Omega fv + \int_{\partial\Omega} gv \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{2.3.1}$$

Antes de analizar la existencia y unicidad de la solución para este problema, es necesario verificar la condición de compatibilidad de los datos

$$\int_\Omega f + \int_{\partial\Omega} g = 0, \tag{2.3.2}$$

la cual garantiza la buena definición del problema (ver [9, sección 3.2.2.]). En efecto,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f + \int_{\partial\Omega} g &= \int_\Omega \operatorname{div}\left((\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0)\,\mathbf{grad}\, u_0\right) - \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\, u_0)\cdot \boldsymbol{n} \\
&= \int_{\partial\Omega} \left((\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0)\,\mathbf{grad}\, u_0\right)\cdot \boldsymbol{n} - \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\, u_0)\cdot n \\
&= -\int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma}_0\,\mathbf{grad}\, u_0)\cdot \boldsymbol{n} \\
&= -\sigma_0 \int_{\partial\Omega} \mathbf{grad}\, u_0 \cdot \boldsymbol{n} \\
&= -\sigma_0 \int_\Omega \Delta u_0 \\
&= -\int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{p}_0 \delta_{\boldsymbol{x}_0}) \quad \text{por (2.2.2)} \\
&= -\left\langle \operatorname{div}(\boldsymbol{p}_0 \delta_{\boldsymbol{x}_0}), 1\right\rangle \\
&= \left\langle \boldsymbol{p}_0 \delta_{\boldsymbol{x}_0}, \operatorname{div} 1\right\rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

donde se ha usado el hecho de que σ_0 es constante.

Para mostrar la existencia y unicidad del potencial eléctrico $\hat{u}$, introduciremos el siguiente subespacio de $H^1(\Omega)$, necesario para garantizar la unicidad de la solución,

$$H^1_*(\Omega) := \left\{ v \in H^1(\Omega) \middle| \int_\Omega v = 0 \right\},$$

con la norma de $H^1(\Omega)$.

Proposición 2.2. *Definimos el funcional $F : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ por*

$$F(u) = \int_\Omega u, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Entonces el funcional F es lineal y continuo.

Demostración. **Paso 1.** F es lineal.

Sean $u, v \in H^1(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
F(u + \alpha v) &= \int_\Omega (u + \alpha v) \\
&= \int_\Omega u + \alpha \int_\Omega v \\
&= F(u) + \alpha F(v).
\end{aligned}$$

Paso 2. F es continuo.

Para la continuidad del operador F, es suficiente verificar que F es acotado. Así, sea $u \in H^1(\Omega)$, entonces

$$\begin{aligned} |F(u)| &= \left| \int_\Omega u \right| \\ &\leq \int_\Omega |u| \\ &\leq \|u\|_{L^2(\Omega)} (\mu(\Omega))^{1/2} \\ &\leq \|u\|_{H^1(\Omega)} (\mu(\Omega))^{1/2} . \end{aligned}$$

Luego, F es acotado y por tanto continuo. $\square$

Observación 2.3. *Como*

$$H_*^1(\Omega) := \left\{ u \in H^1(\Omega) : F(u) = 0 \right\},$$

entonces

$$H_*^1(\Omega) = Ker(F).$$

Como F es lineal y continuo, tenemos que $Ker(F)$ es cerrado y por tanto $H_*^1(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$.

Antes de mostrar la existencia y unicidad de nuestro problema variacional, probaremos algunos teoremas necesarios para tal fin.

Teorema 2.4 (Variante de la desigualdad de Friedrichs)**.** *Sean Ω un dominio acotado y $f : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ un funcional lineal y continuo, con $f(1) = 1$. Entonces existe una constante $c = c(\Omega)$ tal que para todo $u \in H^1(\Omega)$*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c \left(|f(u)| + |u|_1 \right). \tag{2.3.3}$$

Demostración. El caso de que $u = 0$, la desigualdad se verifica. Razonaremos por contradicción, supongamos que para todo $c > 0$, existe $u = u(c) \neq 0 \in H^1(\Omega)$ tal que:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} > c(|f(u)| + |u|_1).$$

Como la anterior desigualdad se verifica para todo $c > 0$, en particular, se tendrá que para $n \in \mathbb{Z}^+$, existe $u_n \in H^1(\Omega)$:

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} > n(|f(u_n)| + |u_n|_1). \tag{2.3.4}$$

Para

$$w_n := \frac{u_n}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}},$$

tenemos que,

$$\begin{aligned} |f(w_n)| &= \left| f\left(\frac{1}{\|u_n\|_{L^2}} u_n \right) \right| \\ &= \frac{1}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} |f(u_n)| , \end{aligned}$$

entonces

$$|F(u_n)| = \|u_n\|_{L^2(\Omega)} |F(w_n)| .$$

Además,

$$\begin{aligned}
|w_n|_1 &= \|\mathbf{grad}\, w_n\|_{(L^2(\Omega))^3} \\
&= \left\| \mathbf{grad} \left(\frac{1}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} u_n \right) \right\|_{(L^2(\Omega))^3} \\
&= \left\| \frac{1}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} \mathbf{grad}\, u_n \right\|_{(L^2(\Omega))^3} \\
&= \frac{1}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} \|\mathbf{grad}\, u_n\|_{(L^2(\Omega))^3} \\
&= \frac{1}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} |u_n|_1 ,
\end{aligned}$$

de donde

$$|u_n|_1 = \|u_n\|_{L^2(\Omega)} |w_n|_1 .$$

Así, de (2.3.4) se sigue

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} > n \left(\|u_n\|_{L^2(\Omega)} |f(w_n)| + \|u_n\|_{L^2(\Omega)} |w_n|_1 \right),$$

entonces

$$1 > n \left(|f(w_n)| + |w_n|_1 \right),$$

donde

$$\|w_n\|_{L^2(\Omega)} = 1 \quad \text{y} \ \left(|f(w_n)| + |w_n|_1 \right) < \frac{1}{n}. \tag{2.3.5}$$

De otro lado,

$$\begin{aligned}
\|w_n\|_{H^1(\Omega)} &= \|w_n\|_{L^2(\Omega)} + |w_n|_1 \\
&= 1 + |w_n|_1 \\
&< 1 + \frac{1}{n} \\
&< 2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada en $H^1(\Omega)$. Como la inclusión de $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ es compacta, entonces existen una subsucesión

$$\left\{w_{n_j}\right\}_{j=1}^{\infty} \quad \text{de } \{w_n\}_{n=1}^{\infty}$$

y $w \in L^2(\Omega)$ tal que

$$w_{n_j} \to w \quad \text{en } L^2(\Omega), \quad \text{cuando } j \to \infty.$$

Así, de (2.3.5) tenemos que

$$\left\|w_{n_j}\right\|_{L^2(\Omega)} = 1, \quad \text{y} \ \left(\left|f(w_{n_j})\right| + \left|w_{n_j}\right|_1 \right) < \frac{1}{n_j}. \tag{2.3.6}$$

Luego,

$$\|w\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{j\to\infty} \left\|w_{n_j}\right\|_{L^2(\Omega)} = 1.$$

Además,

$$\begin{aligned} \left|\left|f(w_{n_j})\right| - |f(w)|\right| &\leq \left|f(w_{n_j}) - f(w)\right| \\ &\leq \left|f(w_{n_j} - w)\right| \\ &\leq k \left\|w_{n_j} - w\right\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Así, dado que $w_{n_j} \to w$ en $L^2(\Omega)$, se tiene

$$\lim_{j\to\infty} \left|f(w_{n_j})\right| = |f(w)|. \tag{2.3.7}$$

Por otro lado, de (2.3.6) se sigue

$$\lim_{j\to\infty} \left\|\mathbf{grad}\, w_{n_j}\right\|_{(L^2(\Omega))^3} = \lim_{j\to\infty} \left|w_{n_j}\right|_1 = 0. \tag{2.3.8}$$

Así, si $\phi \in (C_0^\infty(\Omega))^3$, se tiene

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\mathbf{grad}\, w) \cdot \phi &= -\int_\Omega w(\operatorname{div} \phi) \\ &= -\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (w_{n_j}) \operatorname{div} \phi \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega (\mathbf{grad}\, w_{n_j}) \cdot \phi = 0. \end{aligned}$$

En consecuencia, dado que $(C_0^\infty(\Omega))^3$ es denso en $(L^2(\Omega))^3$, se tiene que

$$\mathbf{grad}\, w = 0 \quad \text{en } \Omega. \tag{2.3.9}$$

De donde

$$|w|_1 = 0,$$

y así de (2.3.8) se sigue

$$\lim_{j\to\infty} \left|w_{n_j}\right|_1 = |w|_1 = 0. \tag{2.3.10}$$

Usando (2.3.7) y (2.3.10) y haciendo que $j \to \infty$ en (2.3.6), se sigue:

$$|f(w)| = 0.$$

Finalmente de (2.3.9) y por ser Ω conexo, se tiene que

$$w = c \quad \text{c.t.p. } x \in \Omega$$

con c constante y así,

$$\begin{aligned} 0 = |f(w)| &= |f(c)| \\ &= |c|\,|f(1)| \\ &= |c|, \end{aligned}$$

o sea $c = 0$ y por tanto,

$$w = 0 \quad \text{c.t.p. } x \in \Omega.$$

Pero esto contradice el hecho que

$$\|w\|_{L^2(\Omega)} = 1.$$

$\square$

Lema 2.5. *Para el operador $F : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por*

$$F(w) := \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega w, \tag{2.3.11}$$

tendremos que

$$\|w\|_{L^2(\Omega)} \leq c\left(|F(w)| + |w|_1\right). \tag{2.3.12}$$

Demostración. Verifiquemos que F es un operador lineal, continuo y que $F(1) = 1$.

Paso 1. F es lineal.

Sean $u, v \in H^1(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} F(u + \alpha v) &= \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega (u + \alpha v) \\ &= \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega u + \frac{1}{\mu(\Omega)} \alpha \int_\Omega v \\ &= F(u) + \alpha F(v). \end{aligned}$$

Paso 2. F es continuo.

Para la continuidad del operador F, es suficiente verificar que F es acotado. Sea $w \in H^1(\Omega)$, entonces

$$\begin{aligned} |F(w)| &= \left| \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega w \right| \\ &\leq \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega |w| \\ &\leq \frac{1}{\mu(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} \left(\mu(\Omega)\right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{\left(\mu(\Omega)\right)^{1/2}} \|w\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Luego, F es acotado y por tanto continuo.

Paso 3. $F(1) = 1$.

$$F(1) = \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega 1 = 1.$$

Así, por la variante de la desigualdad de Friedrichs (teorema 2.4), existe $c = c(\Omega)$ tal que para toda $w \in H^1(\Omega)$
$$\|w\|_{L^2(\Omega)} \leq c\left(|F(w)| + |w|_1\right).$$
$\square$

Sean $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ una forma y $l : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ un funcional definidos por:
$$a(u,v) := \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, u \cdot \mathbf{grad}\, v, \tag{2.3.13}$$
y
$$l(v) := \int_\Omega fv + \int_{\partial\Omega} gv, \tag{2.3.14}$$
donde f y g son las que se definieron en la ecuación (2.2.5).

Lema 2.6. *$a(\cdot,\cdot)$ definida en (2.3.13) es una forma bilineal.*

Demostración. Sean $u, v, w \in H^1(\Omega)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Linealidad respecto a la primera componente.
$$\begin{aligned}
a(\alpha u + \beta v, w) &= \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}(\alpha u + \beta v) \cdot \mathbf{grad}\, w \\
&= \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(\alpha\, \mathbf{grad}\, u + \beta\, \mathbf{grad}\, v) \cdot \mathbf{grad}\, w \\
&= \alpha \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, u \cdot \mathbf{grad}\, w + \beta \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, v \cdot \mathbf{grad}\, w \\
&= \alpha a(u,w) + \beta a(v,w).
\end{aligned}$$

2. Linealidad respecto a la segunda componente.
$$\begin{aligned}
a(u, \alpha v + \beta w) &= \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, u + \cdot\, \mathbf{grad}(\alpha v + \beta w) \\
&= \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, u \cdot (\alpha\, \mathbf{grad}\, v + \beta\, \mathbf{grad}\, w) \\
&= \alpha \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, u \cdot \mathbf{grad}\, w + \beta \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, u \cdot \mathbf{grad}\, v \\
&= \alpha a(u,v) + \beta a(u,w).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $a(\cdot,\cdot)$ es una forma bilineal. $\square$

Lema 2.7. *La forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ definida en (2.3.13) es acotada en $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$.*

Demostración. Sea
$$\sigma_{\text{máx}} := \sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\Omega \\ 1\leq i,j\leq 3}} |\sigma_{ij}(\boldsymbol{x})|.$$

Para $u, v \in H^1(\Omega)$, se tiene

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left| \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, u \cdot \mathbf{grad}\, v \right| \\
&\leq |\sigma_{\text{máx}}| \int_\Omega |\mathbf{grad}\, u \cdot \mathbf{grad}\, v| \\
&\leq \sigma_{\text{máx}} \left\| \mathbf{grad}\, u \right\|_{(L^2(\Omega))^3} \left\| \mathbf{grad}\, v \right\|_{(L^2(\Omega))^3} \\
&\leq \sigma_{\text{máx}} \left\| u \right\|_{H^1(\Omega)} \left\| v \right\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Con lo cual $a(\cdot,\cdot)$ es una forma bilineal acotada. □

Lema 2.8. *La forma $a(\cdot,\cdot)$ definida en (2.3.13) es $H^1_*(\Omega)-$elíptica.*

Demostración. Sean

$$\sigma_{\text{mín}} := \inf_{\substack{\boldsymbol{x}\in\Omega \\ 1\leq i,j\leq 3}} |\sigma_{ij}(\boldsymbol{x})|,$$

y c la constante de la desigualdad de Friedrichs (teorema 2.4). Para $u \in H^1_*(\Omega)$, se tiene por lema 2.5 que

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, u \cdot \mathbf{grad}\, u \\
&\geq \sigma_{\text{mín}} \int_\Omega |\mathbf{grad}\, u|^2 \\
&= \sigma_{\text{mín}} |u|_1^2 \\
&= \frac{\sigma_{\text{mín}}}{1+c^2} \left(|u|_1^2 + c^2 |u|_1^2 \right) \\
&= \frac{\sigma_{\text{mín}}}{1+c^2} \left(|u|_1^2 + c^2 \left(|F(u)| + |u|_1 \right)^2 \right) \\
&\geq \frac{\sigma_{\text{mín}}}{1+c^2} \left(|u|_1^2 + \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \right) \\
&= \frac{\sigma_{\text{mín}}}{1+c^2} \|u\|^2_{H^1_*(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $a(\cdot,\cdot)$ es una forma bilineal $H^1_*(\Omega)-$elíptica con constante de elipticidad $\frac{\sigma_{\text{mín}}}{1+c^2}$. □

Lema 2.9. *El funcional $l : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido en (2.3.14) es acotado. En particular $l \in (H^1_*(\Omega))^*$.*

Demostración. Verifiquemos que l es un funcional lineal. Sean $u, v \in H^1(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned}
l(u+\alpha v) &= \int_\Omega f(u+\alpha v) + \int_{\partial\Omega} g(u+\alpha v) \\
&= \int_\Omega fu + \alpha \int_\Omega fv + \alpha \int_{\partial\Omega} gu + \int_{\partial\Omega} gv \\
&= \left(\int_\Omega fu + \int_{\partial\Omega} gu \right) + \alpha \left(\int_\Omega fv + \int_{\partial\Omega} gv \right) \\
&= l(u) + \alpha l(v).
\end{aligned}$$

Ahora, probemos que l es acotado. En efecto, sea $v \in H^1(\Omega)$. Por teorema de la traza (teorema 1.71) se tiene

$$\begin{aligned}
|l(v)| &= \left| \int_\Omega fv + \int_{\partial\Omega} gv \right| \\
&\leq \int_\Omega |fv| + \int_{\partial\Omega} |gv| \\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + c_1 \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\
&= k \|v\|_{H^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

donde

$$k := \|f\|_{L^2(\Omega)} + c_1 \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}.$$

Por lo tanto l es un funcional lineal y acotado, con lo cual $l \in (H^1(\Omega))^*$. En particular tenemos que $l \in (H^1_*(\Omega))^*$. □

Teorema 2.10 (Existencia y unicidad)**.** *Sea Ω un conjunto abierto acotado y conexo, con frontera suave a trozos (por ejemplo un polígono). Entonces el problema variacional: hallar $u \in H^1_*(\Omega)$*

$$a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

tiene exactamente una solución $u \in H^1_*(\Omega)$

Demostración. Haremos uso de un teorema clásico para mostrar existencia y unicidad de problemas variacionales como lo es el Teorema de Lax-Milgram. Antes de esto, consideremos los problemas:

Hallar $u \in H^1_*(\Omega)$ tal que

$$a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega), \tag{2.3.15}$$

y hallar $u \in H^1_*(\Omega)$ tal que

$$a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in H^1_*(\Omega) \tag{2.3.16}$$

Mostremos que (2.3.15) y (2.3.16) son equivalentes. En efecto

1. (2.3.15)⇒(2.3.16): Se verifica ya que si (2.3.15) se cumple para todo $v \in H^1(\Omega)$, entonces en particular se cumple para toda $v \in H^1_*(\Omega)$ puesto que $H^1_*(\Omega) \subset H^1(\Omega)$.

2. (2.3.16)⇒(2.3.15): Para esto consideremos $v \in H^1(\Omega)$ y definamos

$$\hat{v} := v + \overline{v},$$

donde

$$\overline{v} := -\frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega v.$$

Notemos que $\overline{v}$ es una constante. Además,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \hat{v} &= \int_\Omega v + \int_\Omega \overline{v} \\ &= \int_\Omega v - \frac{1}{\mu(\Omega)}\left(\int_\Omega v\right)(\mu(\Omega)) \\ &= 0.\end{aligned}$$

En consecuencia $\hat{v} \in H^1_*(\Omega)$. Ahora, sean $u \in H^1_*(\Omega)$ solución de (2.3.16), $v \in H^1(\Omega)$ y $\hat{v} := v + \overline{v} \in H^1_*(\Omega)$. Así de (2.3.16) se sigue

$$\begin{aligned}a(u, \hat{v}) &= a(u, v + \overline{v}) \\ &= a(u, v) + \overline{v} a(u, 1) \\ &= a(u, v) + \overline{v} \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \, \mathbf{grad}\, u \cdot \mathbf{grad}\, 1 \\ &= a(u, v).\end{aligned}$$

De otro lado,

$$\begin{aligned}l(\hat{v}) = l(v + \overline{v}) & \\ &= \int_\Omega f(v + \overline{v}) + \int_{\partial\Omega} g(v + \overline{v}) \\ &= \int_\Omega fv + \overline{v}\int_\Omega f + \int_{\partial\Omega} gv + \overline{v}\int_{\partial\Omega} g \\ &= l(v) + \overline{v}\left(\int_\Omega f + \int_{\partial\Omega} g\right) \\ &= l(v).\end{aligned}$$

La igualdad anterior se garantiza por la condición de compatibilidad (2.3.2).

Así por los teoremas probados anteriormente tenemos que $a : H^1_*(\Omega) \times H^1_*(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por (2.3.13) es una forma bilineal, acotada, $H^1_*(\Omega)-$elíptica y $l : H^1_*(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida en (2.3.14) es un funcional lineal y acotado, así por Teorema de Lax-Milgram tenemos que exite un único $u \in H^1_*(\Omega)$ tal que

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H^1_*(\Omega).$$

Como tenemos que los problemas (2.3.15) y (2.3.16) son equivalentes, entonces tenemos que existe una única solución para nuestro problema (2.3.15).

□

Observación 2.11. *Finalizaremos este capítulo, notando que si la solución (2.3.15) satisface*

$$\hat{u} \in H^1_*(\Omega) \cap H^2(\Omega),$$

entonces $\hat{u}$ es solución del problema fuerte (2.2.4), es decir,

$$-\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, \hat{u}) = f \quad \textit{c.t.p. en } \Omega, \quad (\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, \hat{u}) \cdot \boldsymbol{n} = g \quad \textit{c.t.p. en } \partial\Omega.$$

En efecto, si $v \in H^1(\Omega)$, la identidad de Green (teorema 1.76) implica

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{u}\cdot\mathbf{grad}\,v = -\int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{u})v + \int_{\partial\Omega} ((\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{u})\cdot\boldsymbol{n})\,v.$$

De donde,

$$-\int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{u})v + \int_{\partial\Omega} ((\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{u})\cdot\boldsymbol{n})\,v = \int_\Omega fv + \int_{\partial\Omega} gv.$$

Luego,

$$\int_\Omega (\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{u}) + f)\,v = \int_{\partial\Omega} ((\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{u})\cdot\boldsymbol{n} - g)\,v. \tag{2.3.17}$$

Si tomamos $v \in C_0^\infty(\Omega)$, el término de la derecha se anula. Así,

$$\int_\Omega (\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{u}) + f)\,v = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Luego

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{u}) + f = 0 \quad \text{c.t.p. en } \Omega,$$

por lo tanto,

$$-\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{u}) = f \quad \text{c.t.p. en } \Omega.$$

En consecuencia de (2.3.17) se sigue

$$\int_{\partial\Omega} ((\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{u})\cdot\boldsymbol{n} - g)\,v = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

En particular

$$\int_{\partial\Omega} ((\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{u})\cdot\boldsymbol{n} - g)\,v = 0 \quad \forall v \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

así por la densidad del espacio

$$\left\{ v|_{\partial\Omega} : v \in C^\infty(\overline{\Omega}) \right\}$$

en $L^2(\partial\Omega)$, se tiene que

$$(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{u})\cdot\boldsymbol{n} - g = 0 \quad \text{c.t.p. en } \partial\Omega,$$

por lo tanto,

$$(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{u})\cdot\boldsymbol{n} = g \quad \text{c.t.p. en } \partial\Omega.$$

2.4. Comentarios finales

1. El método de sustración usa la propiedad de espacio de Hilbert del espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$, lo cual permite el uso del Teorema de Lax-Milgram para mostrar existencia y unicidad de la formulación débil del problema directo EEG.

2. El método de sustracción exige regularidad adicional a la conductividad eléctrica, más precisamente el método requiere que $\boldsymbol{\sigma} \in C^1(\Omega)$.

3. Debido a que el método de sustracción está basado en una formulación variacional clásica en la cual los espacios funcionales son espacios Sobolev hilbertianos, dicho método es adecuado para resolver numéricamente el problema directo de EEG a través del método de elementos finitos.

4. El método de sustracción requiere de un preprocesamiento (cálculo previo a la aplicación del método) que consiste en obtener un potencial de singularidad u_0 (ver 2.2.3), para mostrar la existencia del potencial de correción $\hat{u}$ (ver 2.2.4) y así obtener el potencial total u, el cual es la solución del problema directo de EEG.

Capítulo 3

Existencia y unicidad de la solución del problema directo EEG por el método de dualidad

En este capítulo se presentará la formulación débil del problema directo EEG, se demostrará la existencia y unicidad de la solución del mismo por el método de dualidad, el cual no usa la estructura de Hilbert de los espacios de Sobolev $H^s(\Omega)$ sino que se basa en los espacios duales de los espacios de Sobolev. Más exactamente, la solución se buscará en el espacio $H^{-1}(\Omega)$ (espacio dual de $H_0^1(\Omega)$), mientras que se considera como espacio de funciones test, un subespacio adecuado de $H^1(\Omega)$. Además, se presentará una formulación débil del problema directo de EEG para cuando el exponente de sumabilidad p cumple que $p \neq 2$. Con más exactitud, la solución para esta formulación se buscará en el espacio $L^{p^*}(\Omega)$ (espacio dual de $L^p(\Omega)$, para $p > 3$), mientras que se considera como espacio de funciones test, un subespacio adecuado de $W^{1,p}(\Omega)$.

De acuerdo con lo presentado en la sección 2.1, el problema directo EEG consiste en: Hallar $u : \Omega \to \mathbb{R}$ que satisface

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, u) = \operatorname{div}(\boldsymbol{p}_0 \delta_{\boldsymbol{x}_0}) & \text{en } \Omega \\ (\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, u) \cdot \boldsymbol{n} = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.0.1}$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es la conductividad eléctrica, $\boldsymbol{p}_0$ es el momento dipolar, $\delta_{\boldsymbol{x}_0}$ es la distribución delta de Dirac centrada en $\boldsymbol{x}_0$ y $\boldsymbol{n}$ es el vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$.

3.1. Formulación débil del problema

A continuación introduciremos la formulación débil para (3.0.1) propuesta en Valli [18]. Para ello, suponemos que $\boldsymbol{\sigma}$ es una matriz simétrica y definida positiva, cuyas entradas σ_{ij} pertenecen a $L^\infty(\Omega)$, tales que existen constantes positivas $\sigma_{ij}^{\text{mín}}$ y $\sigma_{ij}^{\text{máx}}$ que satisfacen

$$0 < \sigma_{ij}^{\text{mín}} \leq \sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) \leq \sigma_{ij}^{\text{máx}} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega,$$

y que además, existe $r_0 > 0$ tal que

$$\sigma_{ij} \in W^{3,\infty}(B_{r_0}(\boldsymbol{x}_0)),$$

donde $W^{3,\infty}(B_{r_0}(\boldsymbol{x}_0))$ es el espacio de Sobolev

$$W^{3,\infty}(B_{r_0}(\boldsymbol{x}_0)) := \{v \in L^\infty(B_{r_0}(\boldsymbol{x}_0)) : \partial^{\boldsymbol{\alpha}} v \in L^\infty(B_{r_0}(\boldsymbol{x}_0)),\ |\boldsymbol{\alpha}| = 1, 2, 3\}.$$

Claramente, la solución u de (3.0.1) es única salvo constante aditivas. Puesto que si $\hat{u} := u + c$ es también solución de (3.0.1), donde c es una constante, entonces:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{u}) &= \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}(u + c)) \\ &= \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{grad}\,u + \mathbf{grad}\,c)) \\ &= \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,u) \quad \text{en } \Omega.\end{aligned}$$

De manera análoga,

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{u}) \cdot \boldsymbol{n} &= (\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}(u + c)) \cdot \boldsymbol{n} \\ &= (\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,u) \cdot \boldsymbol{n} \quad \text{en } \partial\Omega.\end{aligned}$$

Deseamos dar una formulación débil de (3.0.1). Para ello, introducimos el espacio lineal

$$X := \left\{\varphi \in H^1(\Omega) | \varphi \in C^1\left(B_{r_*}(\boldsymbol{x}_0)\right), \operatorname{div}\left(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\varphi\right) \in H_0^1(\Omega), \left(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\varphi\right) \cdot \boldsymbol{n} = 0 \ en\ \partial\Omega\right\}$$

donde $\boldsymbol{n}$ denota un vector normal unitario externo a $\partial\Omega$ y $0 < r_* < r_0$ es un número fijo.

Proposición 3.1. *X es un subespacio lineal de $H^1(\Omega)$.*

Demostración. Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, probemos que $\alpha\varphi_1 + \varphi_2 \in X$. En primer lugar, como $\varphi_1, \varphi_2 \in X$ entonces existe $0 < r_* < r_0$ tal que

$$\varphi_1 \in C^1(B_{r_*}(\boldsymbol{x}_0))$$

y

$$\varphi_2 \in C^1(B_{r_*}(\boldsymbol{x}_0)).$$

Lo anterior implica que

$$\alpha\varphi_1 + \varphi_2 \in C^1(B_{r_*}(\boldsymbol{x}_0)).$$

Además, se verifica que $(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2)) \cdot \boldsymbol{n} = 0$ en $\partial\Omega$, puesto que

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2)) \cdot \boldsymbol{n} &= (\boldsymbol{\sigma}\,(\alpha\,\mathbf{grad}\,\varphi_1 + \beta\,\mathbf{grad}\,\varphi_2)) \cdot \boldsymbol{n} \\ &= (\alpha\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\varphi_1 + \beta\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\varphi_2) \cdot \boldsymbol{n} \\ &= \alpha\,(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\varphi_1) \cdot \boldsymbol{n} + \beta\,(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\varphi_2) \cdot \boldsymbol{n} \\ &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega.\end{aligned}$$

Finalmente, tenemos que $\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2)) \in H_0^1(\Omega)$, puesto que

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2)) &= \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\alpha\varphi_1) + \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\beta\varphi_2) \\ &= \alpha\operatorname{div}(\sigma\,\mathbf{grad}\,\varphi_1) + \beta\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\varphi_2) \in H_0^1(\Omega),\end{aligned}$$

esto se debe a que $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert. □

Ahora, para la formulación débil del problema directo EEG procedemos de manera formal multiplicando la primera ecuación de (3.0.1) por $\varphi \in X$, integrando sobre Ω y aplicando integración por partes (teorema 1.85) y recordando que $\boldsymbol{\sigma}$ es simétrica, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,u)\,\varphi &= -\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\,(\mathbf{grad}\,u)\cdot(\mathbf{grad}\,\varphi) + \int_{\partial\Omega}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,u)\cdot\boldsymbol{n}\varphi \\
&= -\int_\Omega (\mathbf{grad}\,u)\cdot(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\varphi) + \int_{\partial\Omega}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,u)\cdot\boldsymbol{n}\varphi \\
&= \int_\Omega u\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\varphi) - \int_{\partial\Omega} u\,(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\varphi)\cdot\boldsymbol{n} + \int_{\partial\Omega}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,u)\cdot\boldsymbol{n}\varphi \\
&= \int_\Omega u\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\varphi)\,.
\end{aligned}$$

Donde hemos tenido en cuenta las condiciones de frontera que satisfacen u y φ. Ahora, como tenemos que

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\varphi) \in H_0^1(\Omega),$$

entonces el término

$$\int_\Omega u\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\varphi)$$

tiene significado para $u \in H^{-1}(\Omega)$, el cual es el espacio dual de $H_0^1(\Omega)$, y lo podemos expresar como una dualidad, digamos por ejemplo

$$\langle u, \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\varphi)\rangle\,.$$

Así,

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,u)\varphi = \langle u, \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\varphi)\rangle\,,\quad \forall\varphi\in X. \tag{3.1.1}$$

Por otro lado, para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \subset X$, se tiene

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{p}_0\delta_{\boldsymbol{x}_0})\,\varphi &= \langle \operatorname{div}(\boldsymbol{p}_0\delta_{\boldsymbol{x}_0}), \varphi\rangle \\
&= -\langle \boldsymbol{p}_0\delta_{\boldsymbol{x}_0}, \mathbf{grad}\,\varphi\rangle \\
&= -\boldsymbol{p}_0\langle \delta_{\boldsymbol{x}_0}, \mathbf{grad}\,\varphi\rangle \\
&= -\boldsymbol{p}_0\cdot\mathbf{grad}\,\varphi\,(\boldsymbol{x}_0)\,.
\end{aligned}$$

En consecuencia, de (3.0.1) y (3.1.1), se deduce

$$\langle u, \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\varphi)\rangle = -\boldsymbol{p}_0\cdot\mathbf{grad}\,\varphi(\boldsymbol{x}_0)\quad \forall\varphi\in X. \tag{3.1.2}$$

Para garantizar unicidad de la solución es necesario agregar una condición adicional. Para ello, sea $\hat{\eta}$ una función suave, la cual se anula en $\partial\Omega$ y es estrictamente positiva en Ω y tal que $\int_\Omega \hat{\eta} = 1$, en particular, tenemos que $\hat{\eta} \in H_0^1(\Omega)$. Una condición que filtra las constantes aditivas, y por los tanto es adecuado para garantizar la unicidad de la solución

u, es por ejemplo $\langle u, \hat{\eta} \rangle = 0$. En efecto, si u es solución y tenemos que $\hat{u} := u + c$ también es solución, donde c es una constante, entonces

$$\begin{aligned} 0 = \langle \hat{u}, \hat{\eta} \rangle &= \langle u, \hat{\eta} \rangle + \langle c, \hat{\eta} \rangle \\ &= \langle c, \hat{\eta} \rangle \\ &= \int_\Omega c\hat{\eta}, \end{aligned}$$

de donde tenemos que $c = 0$, y por lo tanto $\hat{u} = u$.

Así, considerando la condición adicional $\langle u, \hat{\eta} \rangle = 0$ que nos garantiza la unicidad de la solución u y (3.1.2), tendremos la formulación variacional de (3.0.1):
Hallar $u \in H^{-1}(\Omega)$:

$$\begin{cases} \langle u, \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, \varphi) \rangle = -\boldsymbol{p}_0 \cdot \mathbf{grad}\, \varphi(\boldsymbol{x}_0) \qquad \forall \varphi \in X, \\ \langle u, \hat{\eta} \rangle = 0. \end{cases} \tag{3.1.3}$$

3.2. Existencia y unicidad

En esta sección mostraremos la existencia y unicidad de la solución u del problema (3.1.3). De ahora en adelante $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ será un conjunto abierto conexo acotado con $\partial\Omega$ de clase C^1.

Antes de probar la existencia de la solución del problema (3.1.3) mostraremos la equivalencia de ciertos problemas elípticos, lo cual nos facilitará la demostración.

Sea $\xi \in C_0^\infty(B_{r_*}(\boldsymbol{x}_0))$ tal que $\xi \geq 0$ y $\int_\Omega \xi = 1$. Consideremos el problema:
Hallar $w \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, w) = \operatorname{div}(\boldsymbol{p}_0 \xi) & \text{en } \Omega \\ (\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, w) \cdot \boldsymbol{n} = 0 & \text{en } \partial\Omega \\ \int_\Omega w\hat{\eta} = 0. \end{cases} \tag{3.2.1}$$

Este problema es un problema de Neumann homogéneo, por lo tanto es necesario verificar la condición de compatibilidad de los datos (ver [9, sección 3.2.2.]), esto es

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{p}_0 \xi) 1 = -\int_\Omega \boldsymbol{p}_0 \cdot \mathbf{grad}\, 1 \xi + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{p}_0 \cdot \boldsymbol{n} \xi = 0.$$

A continuación, procedemos a encontrar una formulación débil de (3.2.1). Multiplicando la primera ecuación de (3.2.1) por $v \in H^1(\Omega)$, integrando sobre Ω y aplicando integración por partes tenemos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, w)\, v &= -\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, w \cdot \mathbf{grad}\, v + \int_{\partial\Omega} ((\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, w) \cdot \boldsymbol{n})\, v \\ &= -\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, w \cdot \mathbf{grad}\, v \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{p}_0\xi)\, v &= -\int_{\Omega} \boldsymbol{p}_0\xi \cdot \mathbf{grad}\, v + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{p}_0 \cdot \boldsymbol{n}\xi v \\ &= -\int_{\Omega} \boldsymbol{p}_0\xi \cdot \mathbf{grad}\, v.\end{aligned}$$

Luego, si definimos

$$\widetilde{H}^1(\Omega) := \left\{ \hat{w} \in H^1(\Omega) \middle| \int_{\Omega} \hat{w}\hat{\eta} = 0, \text{ con } \hat{\eta} \in H_0^1(\Omega) \text{ fijo y } \int_{\Omega} \hat{\eta} = 1 \right\},$$

la formulación débil del problema (3.2.1) consiste en:
Hallar $w \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, w \cdot \mathbf{grad}\, v = \int_{\Omega} \boldsymbol{p}_0\xi \cdot \mathbf{grad}\, v \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Proposición 3.2. *Sea $\hat{\eta} \in H_0^1(\Omega)$, con $\int_{\Omega} \hat{\eta} = 1$. Definimos el funcional $F : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ por*

$$F(\hat{w}) = \int_{\Omega} \hat{w}\hat{\eta}, \quad \forall \hat{w} \in H^1(\Omega). \tag{3.2.2}$$

Entonces el funcional F es lineal y continuo.

Demostración. **Paso 1.** F es lineal.

Sean $\hat{w}, \hat{v} \in H^1(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}F(\hat{w} + \alpha\hat{v}) &= \int_{\Omega} (\hat{w} + \alpha\hat{v})\hat{\eta} \\ &= \int_{\Omega} \hat{w}\hat{\eta} + \alpha \int_{\Omega} \hat{v}\hat{\eta} \\ &= F(\hat{w}) + \alpha F(\hat{v}).\end{aligned}$$

Paso 2. F es continuo.

Para la continuidad del operador F, es suficiente verificar que F es acotado. Así, sea $\hat{w} \in H^1(\Omega)$, entonces

$$\begin{aligned}|F(\hat{w})| &= \left| \int_{\Omega} \hat{w}\hat{\eta} \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |\hat{w}\hat{\eta}| \\ &\leq \|\hat{w}\|_{L^2(\Omega)} \|\hat{\eta}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|\hat{w}\|_{H^1(\Omega)} \|\hat{\eta}\|_{H^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Luego, F es acotado y por tanto continuo. □

Observación 3.3. *Como*

$$\widetilde{H}^1(\Omega) := \left\{\hat{w} \in H^1(\Omega) : F(\hat{w}) = 0\right\},$$

entonces

$$\widetilde{H}^1(\Omega) = Ker(F).$$

Como F es lineal y continuo, tenemos que $Ker(F)$ es cerrado y por tanto $\widetilde{H}^1(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$.

A continuación mostraremos un teorema que permite concluir que la seminorma $\|\mathbf{grad}(\cdot)\|_{(L^2(\Omega))^3}$ es una norma en $\widetilde{H}^1(\Omega)$, equivalente a la norma usual de $H^1(\Omega)$.

Teorema 3.4. *La seminorma*

$$\|w\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)} := \|\mathbf{grad}\, w\|_{(L^2(\Omega))^3} = |w|_1 \,. \tag{3.2.3}$$

es una norma en $\widetilde{H}^1(\Omega)$, equivalente a la norma usual de $H^1(\Omega)$. Además, $\left(\widetilde{H}^1(\Omega), \|\cdot\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)}\right)$ es un espacio de Banach.

Demostración. Consideremos el operador lineal y continuo $F : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido en (3.2.2). Además,

$$F(1) = \int_\Omega \hat{\eta} = 1.$$

Entonces por la variante de la desigualdad de Friedrichs (teorema 2.4), tenemos que existe $c = c(\Omega)$ tal que

$$\|w\|_{L^2(\Omega)} \leq c\,(|F(w)| + |w|_1)\,, \quad \forall w \in H^1(\Omega).$$

En particular, para $w \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ tenemos que

$$\|w\|_{L^2(\Omega)} \leq c\,|w|_1\,.$$

Si $|w|_1 = 0$, entonces lo anterior implica que $\|w\|_{L^2(\Omega)} = 0$ y por tanto $w = 0$. Luego, la seminorma $\|\cdot\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)}$ define una norma en $\widetilde{H}^1(\Omega)$.

Además,

$$\begin{aligned}\|w\|_{H^1(\Omega)} &= \|w\|_{L^2(\Omega)} + |w|_1 \\ &\leq c\,|w|_1 + |w|_1 \\ &= (c+1)\,|w|_1 = (c+1)\,\|w\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)}\,,\end{aligned}$$

y

$$\|w\|_{H^1(\Omega)} \geq |w|_1 = \|w\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)}\,.$$

De lo anterior,

$$\|w\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)} = |w|_1 \leq (c+1)\,\|w\|_{H^1(\Omega)} \leq |w|_1 = (c+1)\,\|w\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)}\,.$$

Por lo tanto, la norma $\|\cdot\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)}$ es equivalente a la norma usual de $H^1(\Omega)$. Finalmente, como $\widetilde{H}^1(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$, entonces $\widetilde{H}^1(\Omega)$ es un espacio de Banach con la norma de $H^1(\Omega)$; además, como las normas $\|\cdot\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)}$ y $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ son equivalentes entonces $\widetilde{H}^1(\Omega)$ también debe ser un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)}$. $\square$

Proposición 3.5. *Definamos la función* $(\cdot,\cdot)_{\widetilde{H}^1(\Omega)} : \widetilde{H}^1(\Omega) \times \widetilde{H}^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *por*

$$(u,v)_{\widetilde{H}^1(\Omega)} := \int_\Omega \mathbf{grad}\, u \cdot \mathbf{grad}\, v, \quad \forall u,v \in \widetilde{H}^1(\Omega).$$

Entonces $(\cdot,\cdot)_{\widetilde{H}^1(\Omega)}$ *define un producto interior en* $\widetilde{H}^1(\Omega)$.

Demostración.

1. Sean $u, v, w \in \widetilde{H}^1(\Omega)$, entonces:

$$\begin{aligned}(u+v,w)_{\widetilde{H}^1(\Omega)} &= \int_\Omega \mathbf{grad}(u+v) \cdot \mathbf{grad}\, w \\ &= \int_\Omega (\mathbf{grad}\, u + \mathbf{grad}\, v) \cdot \mathbf{grad}\, w \\ &= \int_\Omega \mathbf{grad}\, u \cdot \mathbf{grad}\, w + \int_\Omega \mathbf{grad}\, v \cdot \mathbf{grad}\, w \\ &= (u,w)_{\widetilde{H}^1(\Omega)} + (v,w)_{\widetilde{H}^1(\Omega)}\,.\end{aligned}$$

2. Sean $u, v \in \widetilde{H}^1(\Omega)$, entonces:

$$\begin{aligned}(u,v)_{\widetilde{H}^1(\Omega)} &= \int_\Omega \mathbf{grad}\, u \cdot \mathbf{grad}\, v \\ &= \int_\Omega \mathbf{grad}\, v \cdot \mathbf{grad}\, u \\ &= (v,u)_{\widetilde{H}^1(\Omega)}\,.\end{aligned}$$

3. Sean $u, v \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\begin{aligned}(\alpha u,v)_{\widetilde{H}^1(\Omega)} &= \int_\Omega \mathbf{grad}(\alpha u) \cdot \mathbf{grad}\, v \\ &= \alpha \int_\Omega \mathbf{grad}\, u \cdot \mathbf{grad}\, v \\ &= \alpha\, (u,v)_{\widetilde{H}^1(\Omega)}\,.\end{aligned}$$

4. Sea $u \in \widetilde{H}^1(\Omega)$, entonces

$$\begin{aligned}(u,u)_{\widetilde{H}^1(\Omega)} &= \int_\Omega \mathbf{grad}\, u \cdot \mathbf{grad}\, u \\ &= \int_\Omega |\mathbf{grad}\, u|^2 \\ &= |u|_1^2 \geq 0.\end{aligned}$$

   y

$$\begin{aligned}(u,u)_{\widetilde{H}^1(\Omega)} = 0 &\Longleftrightarrow \int_\Omega \mathbf{grad}\, u \cdot \mathbf{grad}\, u = 0 \\ &\Longleftrightarrow \int_\Omega |\mathbf{grad}\, u|^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow |u|_1^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow u = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(\cdot,\cdot)_{\widetilde{H}^1(\Omega)}$ define un producto interior en $\widetilde{H}^1(\Omega)$. $\square$

Observación 3.6. *Como*

$$(u,u)_{\widetilde{H}^1(\Omega)} = |u|_1^2 = \|\mathbf{grad}\, u\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)},$$

entonces la norma $\|\cdot\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)}$ *es inducida por el producto interior* $(\cdot,\cdot)_{\widetilde{H}^1(\Omega)}$. *Además, como* $\left(\widetilde{H}^1(\Omega), \|\cdot\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)}\right)$ *es un espacio de Banach, entonces* $\widetilde{H}^1(\Omega)$ *es un espacio de Hilbert.*

Ahora, consideremos los problemas variacionales: Hallar $w \in \widetilde{H}^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, w \cdot \mathbf{grad}\, v = \int_\Omega \xi(\boldsymbol{p}_0 \cdot \mathbf{grad}\, v) \quad \forall v \in H^1(\Omega), \tag{3.2.4}$$

y hallar $w \in \widetilde{H}^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, w \cdot \mathbf{grad}\, v = \int_\Omega \xi(\boldsymbol{p}_0 \cdot \mathbf{grad}\, v) \quad \forall v \in \widetilde{H}^1(\Omega), \tag{3.2.5}$$

los cuales son equivalentes y tienen única solución, tal como se demostrará en el siguiente teorema.

Teorema 3.7. *Sea* $\xi \in C_0^\infty(B_{r_*}(\boldsymbol{x}_0))$ *tal que* $\xi \geq 0$ *y* $\int_\Omega \xi = 1$. *Entonces los problemas (3.2.4) y (3.2.5) son equivalentes y además tienen única solución.*

Demostración.

1. (3.2.4)$\Rightarrow$(3.2.5). Se tiene puesto que si (3.2.4) se cumple para toda $v \in H^1(\Omega)$, entonces en particular se cumple para toda $v \in \widetilde{H}^1(\Omega)$, pues $\widetilde{H}^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$.

2. (3.2.5)$\Rightarrow$(3.2.4). Sea $v \in H^1(\Omega)$. Definamos $\tilde{v}$ como,

$$\tilde{v} := v - \int_\Omega v\hat{\eta} \in H^1(\Omega).$$

Así,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \tilde{v}\hat{\eta} &= \int_\Omega v\hat{\eta} - \left(\int_\Omega \left(\int_\Omega v\hat{\eta}\right)\hat{\eta}\right)\\ &= \int_\Omega v\hat{\eta} - \left(\int_\Omega v\hat{\eta}\right)\left(\int_\Omega \hat{\eta}\right)\\ &= 0,\end{aligned}$$

En consecuencia $\tilde{v} \in \widetilde{H}^1(\Omega)$. Ahora, sean $w \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ solución de (3.2.5), $v \in H^1(\Omega)$ y $\tilde{v} := v - \int_\Omega v\hat{\eta} \in \widetilde{H}^1(\Omega)$. Luego, de (3.2.5) se sigue que:

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, w \cdot \mathbf{grad}\, \tilde{v} = \int_\Omega \xi(\boldsymbol{p}_0 \cdot \mathbf{grad}\, \tilde{v}).$$

Del lado izquierdo tenemos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, w \cdot \mathbf{grad}\, \tilde{v} &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, w \cdot \left(\mathbf{grad}\, v - \mathbf{grad} \left(\int_{\Omega} v\hat{\eta} \right) \right) \\ &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, w \cdot \mathbf{grad}\, v.\end{aligned}$$

Y del lado derecho,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \xi (p_0 \cdot \mathbf{grad}\, \tilde{v}) &= \int_{\Omega} \xi \left(\boldsymbol{p}_0 \cdot \mathbf{grad} \left(v - \int_{\Omega} v\hat{\eta} \right) \right) \\ &= \int_{\Omega} \xi (\boldsymbol{p}_0 \cdot \mathbf{grad}\, v).\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que los problemas variacionales (3.2.4) y (3.2.5) son equivalentes. Finalmente, resta demostrar que el problema variacional (3.2.5) tiene solución única, lo cual se realizará verificando las condiciones del Teorema de Lax-Milgram.

Definimos la forma $a : \widetilde{H}^1(\Omega) \times \widetilde{H}^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ como

$$a\,(w, v) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, w \cdot \mathbf{grad}\, v, \tag{3.2.6}$$

y el funcional $l : \widetilde{H}^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ como

$$l(v) = \int_{\Omega} \xi (\boldsymbol{p}_0 \cdot \mathbf{grad}\, v). \tag{3.2.7}$$

Paso 1. $a\,(\cdot, \cdot)$ definido en (3.2.6) es una forma bilineal.

En efecto, sean $u, v, w \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\begin{aligned}a\,(\alpha u + \beta v, w) &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, (\alpha u + \beta v) \cdot \mathbf{grad}\, w \\ &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}\, (\mathbf{grad}\, \alpha u + \mathbf{grad}\, \beta v) \cdot \mathbf{grad}\, w \\ &= \alpha \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, u \cdot \mathbf{grad}\, w + \beta \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, v \cdot \mathbf{grad}\, w \\ &= \alpha a\,(u, w) + \beta a\,(v, w)\,.\end{aligned}$$

De manera similiar se verifica que

$$a\,(u, \alpha w + \beta v) = \alpha a\,(u, v) + \beta a\,(u, w)\,.$$

Paso 2. $a\,(\cdot, \cdot)$ definida por (3.2.6) es acotada.

Sea

$$\sigma_{\text{máx}} := \sup_{\substack{\boldsymbol{x} \in \Omega \\ 1 \leq i,j \leq 3}} |\sigma_{ij}(\boldsymbol{x})|\,.$$

Para $w, v \in \widetilde{H}^1(\Omega)$, se tiene por desigualdad de Cauchy-Schwarz que

$$
\begin{aligned}
|a\,(w,v)| &= \left| \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, w \cdot \mathbf{grad}\, v \right| \\
&\leq \sigma_{\text{máx}} \int_\Omega |\mathbf{grad}\, w \cdot \mathbf{grad}\, v| \\
&\leq \sigma_{\text{máx}} \left\| \mathbf{grad}\, w \right\|_{(L^2(\Omega))^3} \left\| \mathbf{grad}\, v \right\|_{(L^2(\Omega))^3} \\
&= \sigma_{\text{máx}} \left\| w \right\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)} \left\| v \right\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)} .
\end{aligned}
$$

Con lo cual $a(\cdot,\cdot)$ es acotado.

Paso 3. $a(\cdot,\cdot)$ definida por (3.2.6) es $\widetilde{H}^1(\Omega)-$elíptica.

Sea

$$
\sigma_{\text{mín}} := \inf_{\substack{\boldsymbol{x}\in\Omega \\ 1\leq i,j\leq 3}} |\sigma_{ij}(\boldsymbol{x})| .
$$

Para $w \in \widetilde{H}^1(\Omega)$, se tiene

$$
\begin{aligned}
|a\,(w,w)| &= \left| \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, w \cdot \mathbf{grad}\, w \right| \\
&\geq \int_\Omega |\sigma_{\text{mín}}\, \mathbf{grad}\, w \cdot \mathbf{grad}\, w| \\
&= \sigma_{\text{mín}} \int_\Omega |\mathbf{grad}\, w|^2 \\
&= \sigma_{\text{mín}} \left\| \mathbf{grad}\, w \right\|^2_{(L^2(\Omega))^3} \\
&= \sigma_{\text{mín}} \left\| w \right\|^2_{\widetilde{H}^1(\Omega)} .
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $a(\cdot,\cdot)$ es $\widetilde{H}^1(\Omega)-$elíptica.

Paso 4. l definido por (3.2.7) es lineal.

Sean $w, v \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$
\begin{aligned}
l(w+\beta v) &= \int_\Omega \xi \left(\boldsymbol{p}_0 \cdot \mathbf{grad}\, (\alpha w + \beta v) \right) \\
&= \int_\Omega \xi \left(\boldsymbol{p}_0 \cdot \mathbf{grad}\, w \right) + \int_\Omega \xi \left(\boldsymbol{p}_0 \cdot \mathbf{grad}(\beta v) \right) \\
&= \int_\Omega \xi(\boldsymbol{p}_0 \cdot \mathbf{grad}\, w) + \beta \int_\Omega \xi(\boldsymbol{p}_0 \cdot \mathbf{grad}\, v) \\
&= l(w) + \beta l(v).
\end{aligned}
$$

Paso 5. l definido por (3.2.7) es acotado.

Sea $v \in \widetilde{H}^1(\Omega)$, entonces:

$$\begin{aligned}
|l(v)| &= \left| \int_\Omega \xi(\boldsymbol{p}_0 \cdot \mathbf{grad}\, v) \right| \\
&\leq \int_\Omega |\xi(\boldsymbol{p}_0 \cdot \mathbf{grad}\, v)| \\
&\leq \left(\int_\Omega |\xi \boldsymbol{p}_0|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\mathbf{grad}\, v|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= |\boldsymbol{p}_0| \left(\int_\Omega |\xi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|\mathbf{grad}\, v\|_{(L^2(\Omega))^3} \right) \\
&\leq |\boldsymbol{p}_0| \left(\max_{x \in \overline{\Omega}} |\xi(x)| \right) (\mu(\Omega))^{\frac{1}{2}} \|v\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)} .
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $l(\cdot)$ es acotado.

Así, se han verificado las hipotésis del Teorema de Lax-Milgram, con lo cual tenemos que el problema variacional (3.2.5) tiene única solución. Además, como los problemas (3.2.4) y (3.2.5) son equivalentes entonces garantizamos única solución de (3.2.4). □

Lema 3.8. *Si la solución de (3.2.4) satisface*

$$w \in \widetilde{H}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega),$$

entonces u es solución del problema fuerte (3.2.1), es decir,

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, w) = \operatorname{div}(\boldsymbol{p}_0 \xi) \quad \textit{c.t.p. en } \Omega, \quad (\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, w) \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \textit{c.t.p. en } \partial\Omega.$$

Demostración. En efecto, si $v \in H^1(\Omega)$, la identidad de Green (teorema 1.76) implica:

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, w \cdot \mathbf{grad}\, v = -\int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, w) v + \int_{\partial\Omega} ((\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, w) \cdot \boldsymbol{n})\, v,$$

y

$$\int_\Omega \boldsymbol{p}_0 \xi \cdot \mathbf{grad}\, v = -\int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{p}_0 \xi) v + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{p}_0 \cdot \boldsymbol{n} \xi v.$$

De donde

$$-\int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, w) v + \int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{p}_0 \xi) v + \int_{\partial\Omega} ((\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, w \cdot \boldsymbol{n}))\, v = 0,$$

luego

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, w - \boldsymbol{p}_0 \xi) v = \int_{\partial\Omega} ((\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, w) \cdot \boldsymbol{n})\, v. \tag{3.2.8}$$

Si tomamos $v \in C_0^\infty(\Omega)$, el término de la derecha se anula. Así,

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, w - \boldsymbol{p}_0 \xi) v = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Luego

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,w - \boldsymbol{p}_0\xi) = 0 \quad \text{c.t.p. en } \Omega.$$

Por lo tanto

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,w) = \operatorname{div}(\boldsymbol{p}_0\xi) \quad \text{c.t.p. en } \Omega.$$

En consecuencia de (3.2.8) se sigue

$$\int_\Omega ((\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,w)\cdot\boldsymbol{n})\,v = 0 \quad \forall v\in H^1(\Omega).$$

En particular

$$\int_\Omega ((\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,w)\cdot\boldsymbol{n})\,v = 0 \quad \forall v\in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

y así por la densidad del espacio

$$\left\{v|_{\partial\Omega} : v\in C^\infty(\overline{\Omega})\right\}$$

en $L^2(\partial\Omega)$, se tiene que

$$(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,w)\cdot\boldsymbol{n} = 0 \quad \text{c.t.p. en } \partial\Omega.$$

Además, como $w\in\widetilde{H}^1(\Omega)$ entonces

$$\int_\Omega w\hat{\eta} = 0.$$

□

Por otro lado, para $\psi\in H_0^1(\Omega)$, consideremos el problema de Neumann: Hallar $\hat{\varphi}$ tal que

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{\varphi}) = \psi - \left(\int_\Omega\psi\right)\hat{\eta} & \text{en } \Omega \\ (\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{\varphi})\cdot\boldsymbol{n} = 0 & \text{en } \partial\Omega \\ \int_\Omega\hat{\varphi} = 0. & \end{cases} \tag{3.2.9}$$

Este problema es un problema de Neumann homogéneo, por lo tanto es necesario verificar la condición de compatibilidad de los datos (ver [9, sección 3.2.2.]), esto es

$$\int_\Omega\left(\psi - \left(\int_\Omega\psi\right)\hat{\eta}\right) = \int_\Omega\psi - \left(\int_\Omega\psi\right)\int_\Omega\hat{\eta} = 0.$$

Sea

$$f := \psi - \left(\int_\Omega\psi\right)\hat{\eta}.$$

A continuación, procedemos a encontrar una formulación débil de (3.2.9). Multiplicando la primera ecuación de (3.2.9) por $v\in H^1(\Omega)$, integrando sobre Ω y aplicando integración por partes se obtiene del lado izquierdo

$$\begin{aligned}\int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{\varphi})\,v &= -\int_\Omega\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{\varphi}\cdot\mathbf{grad}\,v + \int_{\partial\Omega}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{\varphi})\cdot\boldsymbol{n}v \\ &= -\int_\Omega\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{\varphi}\cdot\mathbf{grad}\,v,\end{aligned}$$

y del lado derecho

$$\int_\Omega fv.$$

Luego, si definimos

$$\widehat{H^1}(\Omega) := \left\{ w \in H^1(\Omega) \middle| \int_\Omega w = 0 \right\},$$

la formulación débil del problema (3.2.9) consiste en:
Hallar $\hat{\varphi} \in \widehat{H^1}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{\varphi} \cdot \mathbf{grad}\,v = -\left(\int_\Omega fv \right) \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Proposición 3.9. *Definimos el funcional $F : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ por*

$$F(w) = \int_\Omega w, \quad \forall w \in H^1(\Omega). \tag{3.2.10}$$

Entonces el funcional F es lineal y continuo.

Demostración. Ver Proposición 2.2. □

Observación 3.10. *Como*

$$\widehat{H^1}(\Omega) := \left\{ w \in H^1(\Omega) : F(w) = 0 \right\},$$

entonces

$$\widehat{H^1}(\Omega) = Ker(F).$$

Como F es lineal y continuo, tenemos que $Ker(F)$ es cerrado y por tanto $H^1(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $\widehat{H^1}(\Omega)$.

A continuación mostraremos un teorema que permite concluir que la seminorma $\|\mathbf{grad}(\cdot)\|_{(L^2(\Omega))^3}$ es una norma en $\widehat{H^1}(\Omega)$, equivalente a la norma usual de $H^1(\Omega)$.

Teorema 3.11. *La seminorma*

$$\|w\|_{\widehat{H^1}(\Omega)} := \|\mathbf{grad}\,w\|_{(L^2(\Omega))^3} = |w|_1$$

es una norma en $\widehat{H^1}(\Omega)$, equivalente a la norma usual de $H^1(\Omega)$. Además, $\left(\widehat{H^1}(\Omega), \|\cdot\|_{\widehat{H^1}(\Omega)}\right)$ es un espacio de Banach.

Demostración. Consideremos el operador lineal y continuo $F : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$F(w) = \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega w,$$

cumple que $F(1) = 1$ como se probó en la observación 2.5. Entonces por la variante de la desigualdad de Friedrichs (teorema 2.4), tenemos que existe $c = c(\Omega)$

$$\|w\|_{L^2(\Omega)} \leq c\left(|F(w)| + |w|_1\right), \quad \forall w \in H^1(\Omega).$$

En particular, para $w \in \widehat{H^1}(\Omega)$ tenemos que

$$\|w\|_{L^2(\Omega)} \leq c\,|w|_1\,.$$

Si $|w|_1 = 0$, entonces lo anterior implica que $\|w\|_{L^2(\Omega)} = 0$ y por tanto $w = 0$. Luego, la seminorma $\|\cdot\|_{\widehat{H^1}(\Omega)}$ define una norma en $\widehat{H^1}(\Omega)$.

Además,

$$\begin{aligned}\|w\|_{H^1(\Omega)} &= \|w\|_{L^2(\Omega)} + |w|_1\\ &\leq c\,|w|_1 + |w|_1\\ &= (c+1)\,|w|_1 = (c+1)\,\|w\|_{\widehat{H^1}(\Omega)}\,,\end{aligned}$$

y

$$\|w\|_{H^1(\Omega)} \geq |w|_1 = \|w\|_{\widehat{H^1}(\Omega)}\,.$$

De lo anterior,

$$\|w\|_{\widehat{H^1}(\Omega)} = |w|_1 \leq \|w\|_{H^1(\Omega)} \leq (c+1)\,|w|_1 = (c+1)\,\|w\|_{\widehat{H^1}(\Omega)}\,.$$

Por lo tanto, la norma $\|\cdot\|_{\widehat{H^1}(\Omega)}$ es equivalente a la norma usual de $H^1(\Omega)$. Finalmente, como $\widehat{H^1}(\Omega)$ es subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$, entonces $\widehat{H^1}(\Omega)$ es un espacio de Banach con la norma de $H^1(\Omega)$; además, como las normas $\|\cdot\|_{\widehat{H^1}(\Omega)}$ y $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ son equivalentes entonces $\widehat{H^1}(\Omega)$ también debe ser un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_{\widehat{H^1}(\Omega)}$. □

Proposición 3.12. *Definamos la función* $(\cdot,\cdot)_{\widehat{H^1}(\Omega)} : \widehat{H^1}(\Omega) \times \widehat{H^1}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *por*

$$(u,v)_{\widehat{H^1}(\Omega)} := \int_\Omega \mathbf{grad}\, u \cdot \mathbf{grad}\, v, \quad \forall u, v \in \widehat{H^1}(\Omega).$$

Entonces $(\cdot,\cdot)_{\widehat{H^1}(\Omega)}$ *define un producto interior en* $\widehat{H^1}(\Omega)$*.*

Demostración. Ver Proposición 3.5. □

Observación 3.13. *Como*

$$(u,u)_{\widehat{H^1}(\Omega)} = |u|_1^2 = \|\mathbf{grad}\, u\|_{\widehat{H^1}(\Omega)}\,,$$

entonces la norma $\|\cdot\|_{\widehat{H^1}(\Omega)}$ *es inducida por el producto interior* $(\cdot,\cdot)_{\widehat{H^1}(\Omega)}$*. Además, como* $\left(\widehat{H^1}(\Omega), \|\cdot\|_{\widehat{H^1}(\Omega)}\right)$ *es un espacio de Banach, entonces* $\widehat{H^1}(\Omega))$ *es un espacio de Hilbert.*

Ahora, consideremos los problemas variacionales: Hallar $\hat{\varphi} \in \widehat{H^1}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, \hat{\varphi} \cdot \mathbf{grad}\, v = -\left(\int_\Omega f v\right) \quad \forall v \in H^1(\Omega), \tag{3.2.11}$$

y hallar $\hat{\varphi} \in \widehat{H^1}(\Omega)$

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{\varphi}\cdot\mathbf{grad}\,v = -\left(\int_\Omega fv\right) \quad \forall v \in \widehat{H^1}(\Omega), \tag{3.2.12}$$

los cuales son equivalentes y tienen única solución, tal como se demostrará en el siguiente teorema.

Teorema 3.14. *Sea $\psi \in H_0^1(\Omega)$. Entonces los problemas (3.2.11) y (3.2.12) son equivalentes y además tienen única solución.*

Demostración.

1. (3.2.11) $\Longrightarrow$ (3.2.12). Se tiene pues que si (3.2.11) se cumple para toda $v \in H^1(\Omega)$ entonces en particular se cumple para toda $v \in \widehat{H^1}(\Omega)$, pues $\widehat{H^1}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$.

2. (3.2.12) $\Longrightarrow$ (3.2.11). Sea $v \in H^1(\Omega)$. Definamos $\hat{v}$ como

$$\hat{v} := v - \frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega v.$$

Así,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \hat{v} &= \int_\Omega\left(v - \frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega v\right)\\ &= \int_\Omega v - \frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega v\int_\Omega 1\\ &= 0.\end{aligned}$$

En consecuencia $\hat{v} \in \widehat{H^1}(\Omega)$. Ahora, sean $\hat{\varphi} \in \widehat{H^1}(\Omega)$ solución de (3.2.12), $v \in H^1(\Omega)$ y $v := v - \frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega v$. Luego, de (3.2.12) se sigue que

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{\varphi}\cdot\mathbf{grad}\,\hat{v} = -\left(\int_\Omega f\hat{v}\right).$$

Del lado izquierdo tenemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{\varphi}\cdot\mathbf{grad}\,\hat{v} &= \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{\varphi}\cdot\mathbf{grad}\left(v - \frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega v\right)\\ &= \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{\varphi}\cdot\mathbf{grad}\,v.\end{aligned}$$

Y del lado derecho

$$
\begin{aligned}
-\left(\int_\Omega f\hat{v}\right) &= -\left(\int_\Omega \psi\hat{v} - \left(\int_\Omega \psi\right)\int_\Omega \hat{\eta}\hat{v}\right)\\
&= -\left(\int_\Omega \psi\left[v - \frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega v\right] - \left(\int_\Omega \psi\right)\int_\Omega \hat{\eta}\left[v - \frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega v\right]\right)\\
&= -\left(\int_\Omega \psi v - \left[\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega v\right]\int_\Omega \psi - \left(\int_\Omega \psi\right)\left(\int_\Omega \hat{\eta}v - \left[\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega v\right]\int_\Omega \hat{\eta}\right)\right)\\
&= -\left(\int_\Omega \psi v - \left(\int_\Omega \psi\right)\int_\Omega \hat{\eta}v\right) + \left[\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega v\right]\left(\int_\Omega \psi - \int_\Omega \psi\right)\\
&= -\left(\int_\Omega \psi v - \left(\int_\Omega \psi\right)\int_\Omega \hat{\eta}v\right)\\
&= -\left(\int_\Omega f v\right).
\end{aligned}
$$

Con lo cual se tiene que los problemas (3.2.11) y (3.2.12) son equivalentes. Finalmente, resta demostrar que (3.2.12) tiene única solución, lo cual se realizará verificando las condiciones del Teorema de Lax-Milgram. Definamos la forma $a : \widehat{H^1}(\Omega) \times \widehat{H^1}(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$
a(\hat{\varphi}, v) := \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, \hat{\varphi} \cdot \mathbf{grad}\, v, \tag{3.2.13}
$$

y el funcional $l : \widehat{H^1}(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$
l(v) := -\left(\int_\Omega f v\right). \tag{3.2.14}
$$

Para verificar que $a(\cdot,\cdot)$ definida por (3.2.13) es una forma bilineal, acotada y elíptica se procede de manera análoga que en el teorema anterior (teorema 3.7). Solo resta probar que $l : \widehat{H^1}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por (3.2.14) es lineal y acotado.

Paso 1. l es lineal

Sean $w, v \in \widehat{H^1}(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$
\begin{aligned}
l(w + \alpha v) &= -\left(\int_\Omega f(w + \alpha v)\right)\\
&= -\left(\int_\Omega f w\right) - \alpha\left(\int_\Omega f v\right)\\
&= l(w) + \alpha l(v).
\end{aligned}
$$

Paso 2. l es acotado.

Sea $v \in \widehat{H^1}(\Omega)$, entonces

$$
\overline{v} = \frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega v = 0
$$

y por desigualdad de Poincaré (teorema 1.79) se tiene que

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq k \|\mathbf{grad}\, v\|_{(L^2(\Omega))^3}. \tag{3.2.15}$$

Así

$$\begin{aligned}
|l(v)| &= \left| \int_\Omega fv \right| \\
&= \left| \int_\Omega \psi v - (\psi) \int_\Omega \hat{\eta} v \right| \\
&\leq \left| \int_\Omega \psi v \right| + \left| \int_\Omega \psi \right| \left| \int_\Omega \hat{\eta} v \right| \\
&\leq \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \|\psi\|_{L^2(\Omega)} (\mu(\Omega))^{\frac{1}{2}} \|v\|_{L^2(\Omega)} \|\hat{\eta}\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|v\|_{L^2(\Omega)} \Big(\|\psi\|_{H^1(\Omega)} + \|\psi\|_{H^1(\Omega)} (\mu(\Omega))^{\frac{1}{2}} \|\hat{\eta}\|_{H^1(\Omega)} \Big) \\
&\leq k \|\mathbf{grad}\, v\|_{(L^2(\Omega))^3} \\
&= k \|v\|_{\widehat{H^1}(\Omega)},
\end{aligned}$$

donde

$$k = \|\psi\|_{H^1(\Omega)} + \|\psi\|_{H^1(\Omega)} (\mu(\Omega))^{\frac{1}{2}} \|\hat{\eta}\|_{H^1(\Omega)}.$$

Con lo cual l es lineal y $\widehat{H^1}(\Omega)-$acotado, así se verifican las hipótesis del Teorema de Lax-Milgran y entonces existe única solución del problema (3.2.12). Como tenemos que los problemas (3.2.11) y (3.2.12) son equivalentes, entonces tenemos que existe una única solución para nuestro problema (3.2.11). □

Lema 3.15. *Si la solución de (3.2.11) satisface*

$$\hat{\varphi} \in \widehat{H^1}(\Omega) \cap H^2(\Omega),$$

entonces $\hat{\varphi}$ es solución del problema fuerte (3.2.9), es decir

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, \hat{\varphi}) = f \quad \text{c.t.p. en } \Omega, \quad (\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, \hat{\varphi}) \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{c.t.p. en } \partial\Omega.$$

Demostración. En efecto, si $v \in H^1(\Omega)$, la identidad de Green (teorema 1.76) implica

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, \hat{\varphi} \cdot \mathbf{grad}\, v = -\int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, \hat{\varphi}) v + \int_{\partial\Omega} ((\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, \hat{\varphi}) \cdot \boldsymbol{n})\, v.$$

Así, reemplazado en el problema variacional tenemos

$$-\int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, \hat{\varphi}) v + \int_{\partial\Omega} ((\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, \hat{\varphi}) \cdot \boldsymbol{n})\, v = -\left(\int_\Omega fv \right).$$

Entonces

$$\int_\Omega (\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, \hat{\varphi}) - f)\, v = \int_{\partial\Omega} ((\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, \hat{\varphi}) \cdot \boldsymbol{n})\, v. \tag{3.2.16}$$

Si tomamos $v \in C_0^\infty(\Omega)$, el término a la derecha se anula. Así:

$$\int_\Omega (\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, \hat{\varphi}) - f)\, v = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Luego
$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{\varphi}) - f = 0 \quad \text{c.t.p. en } \Omega,$$
por lo tanto
$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{\varphi}) = f \quad \text{c.t.p. en } \Omega.$$
En consecuencia de (3.2.16) se sigue
$$\int_{\partial\Omega} ((\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{\varphi}) \cdot \boldsymbol{n})\, v = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$
En particular
$$\int_{\partial\Omega} ((\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{\varphi}) \cdot \boldsymbol{n})\, v = 0 \quad \forall v \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$
y así, por la densidad del espacio
$$\left\{ v|_{\partial\Omega} : v \in C^\infty(\overline{\Omega}) \right\}$$
en $L^2(\partial\Omega)$, se tiene que
$$(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{\varphi}) \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{c.t.p. en } \partial\Omega.$$
Además, como $\hat{\varphi} \in \widehat{H^1}(\Omega)$ entonces
$$\int_\Omega \hat{\varphi} = 0.$$
□

Antes de considerar el principal resultado de este capítulo, en el que se demuestra que el problema (3.1.3) tiene solución única, requerimos de un resultado sobre regularidad de la solución de un problema elíptico. Consideremos el problema de ecuaciones diferenciales
$$Lu = f \quad \text{en } \Omega, \tag{3.2.17}$$
donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto y acotado, $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ es desconocida, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es dada y L tiene la forma de divengencia, esto es
$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij}(x) u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x) u_{x_i} + c(x) u. \tag{3.2.18}$$
Surge la pregunta: ¿Qué tan suave es la solución u de (3.2.17)? Para dar una respuesta al anterior interrogante se tiene la teoría matemática que se conoce con el nombre de regularidad para soluciones débiles. Sobre esta rama de las atemáticas se mencionara un teorema para un problema elíptico cuando el operador L tiene la forma de divergencia.

Teorema 3.16 (Regularidad interior de grado superior)**.** *Sea m un entero no negativo, supongamos que*
$$a^{ij}, b^i, c \in C^{m+1}(\Omega) \quad (i, j = 1, \ldots, n)$$

y

$$f \in H^m(\Omega).$$

Si $u \in H^1(\Omega)$ es una solución débil del problema de ecuaciones diferenciales

$$Lu = f \quad \textit{en } \Omega,$$

con L dado por (3.2.18), entonces

$$u \in H^{m+2}_{loc}(\Omega).$$

Además, para cada $V \subset\subset \Omega$ se tiene la estimación

$$\|u\|_{H^{m+2}(V)} \leq k \left(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

donde la constante k depende solamente de m, Ω, V y los coeficientes de L.

Demostración. Ver [4, Teorema 2, pág. 314.] □

Lema 3.17. *Sea $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones tales que*

$$\zeta_k \in C_0^{\infty}(B_{r_*}(\boldsymbol{x}_0)), \quad \zeta_k \geq 0, \quad \int_\Omega \zeta_k = 1 \quad .$$

Si $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ es tal que para cada k, $u_k \in H^1(\Omega)$ es la solución débil del problema de Neumann (cuya existencia y unicidad fue demostrada en el teorema 3.7)

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, u_k) = \operatorname{div}(\boldsymbol{p}_0 \zeta_k) & \textit{en } \Omega \\ (\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, u_k) \cdot \boldsymbol{n} = 0 & \textit{en } \partial\Omega \\ \int_\Omega u_k \hat{\eta} = 0, & \end{cases}$$

entonces $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ posee una subsucesión que converge débilmente en $H^{-1}(\Omega)$.

Demostración. Sea $u_k \in H^1(\Omega)$ la solución del problema de Neumann

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, u_k) = \operatorname{div}(\boldsymbol{p}_0 \zeta_k) & \text{en } \Omega \\ (\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, u_k) \cdot \boldsymbol{n} = 0 & \text{en } \partial\Omega \\ \int_\Omega u_k \hat{\eta} = 0. & \end{cases}$$

En particular, integrando por partes y recordando que $\boldsymbol{\sigma}$ es simétrica, tenemos que cada u_k satisface

$$\begin{aligned} \int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, u_k)\varphi &= -\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, u_k \cdot \mathbf{grad}\, \varphi + \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, u_k) \cdot \boldsymbol{n}\varphi \quad \forall \varphi \in X \\ &= -\int_\Omega (\mathbf{grad}\, u_k) \cdot (\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, \varphi) + \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, u_k) \cdot \boldsymbol{n}\varphi \quad \forall \varphi \in X \\ &= \int_\Omega u_k \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, \varphi) - \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, \varphi) \cdot \boldsymbol{n} u_k \quad \forall \varphi \in X \\ &= \int_\Omega u_k \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, \varphi) \quad \forall \varphi \in X \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{p}_0\zeta_k)\varphi &= -\int_\Omega \boldsymbol{p}_0\cdot(\mathbf{grad}\,\varphi)\zeta_k + \int_{\partial\Omega}\boldsymbol{p}_0\cdot\boldsymbol{n}\zeta_k\varphi \quad \forall\varphi\in X\\ &= -\int_\Omega \boldsymbol{p}_0\cdot(\mathbf{grad}\,\varphi)\zeta_k \quad \forall\varphi\in X,\end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que $\zeta_k\in C_0^\infty(B_{r_*}(\boldsymbol{x}_0))$ y $\varphi\in X$. Así,

$$\int_\Omega u_k\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\varphi) = -\int_\Omega \boldsymbol{p}_0\cdot(\mathbf{grad}\,\varphi)\zeta_k \quad \forall\varphi\in X. \tag{3.2.19}$$

Sea $\psi\in H_0^1(\Omega)$. Deseamos encontrar una acotación para $|\langle u_k,\psi\rangle|$. Consideremos $\hat\varphi\in H^1(\Omega)$ solución del problema de Neumann

$$\begin{cases}\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat\varphi) = \psi - \left(\int_\Omega\psi\right)\hat\eta & \text{en } \Omega\\ (\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat\varphi)\cdot\boldsymbol{n} = 0 & \text{en } \partial\Omega\\ \int_\Omega\hat\varphi = 0. & \end{cases} \tag{3.2.20}$$

De un lado, sea

$$f := \psi - \left(\int_\Omega\psi\right)\hat\eta.$$

Entonces $f\in H_0^1(\Omega)$ puesto que $\psi,\hat\eta\in H_0^1(\Omega)$. Por otro lado, utilizando el hecho de que

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat\varphi) = \sum_{j=1}^3\sum_{i=1}^3\left(\sigma_{ij}\hat\varphi_{x_i}\right)_{x_j},$$

con $\sigma_{ij}\in W^{3,\infty}(\Omega)$, entonces por la desigualdad de Sobolev (teorema 1.77) con $s=3, n=3$ y $p=\infty$ tenemos que

$$\sigma_{ij}\in C^2(\Omega). \tag{3.2.21}$$

Además, $\hat\varphi$ es una solución débil de (3.2.20), entonces por el teorema de regularidad interior de grado superior (teorema 3.16) garantizamos que

$$\hat\varphi\in H^3(B_{r_*}(\boldsymbol{x}_0))$$

y

$$\|\hat\varphi\|_{H^3(B_{r_*}(\boldsymbol{x}_0))}\le c_1\left(\|f\|_{H^1(\Omega)}+\|\hat\varphi\|_{L^2(\Omega)}\right) \tag{3.2.22}$$

donde c_1 depende de Ω. Ahora, aplicando desigualdad de Sobolev (teorema 1.77) a $\hat\varphi\in H^3(B_{r_*}(\boldsymbol{x}_0))$, con $s=3, n=3$ y $p=2$ se concluye que

$$\hat\varphi\in C^1\left(\overline{B_{r_*}(\boldsymbol{x}_0)}\right)$$

y

$$\|\hat\varphi\|_{C^1(\overline{B_{r_*}(\boldsymbol{x}_0)})}\le c_2\|\hat\varphi\|_{H^3(B_{r_*}(\boldsymbol{x}_0))} \tag{3.2.23}$$

donde c_2 depende de $\boldsymbol{\sigma},\hat\eta,r_*$, pero no de ψ. Resumiendo lo anterior, tenemos que

$$\hat\varphi\in H^1(\Omega),\quad \hat\varphi\in C^1(\overline{B_{r_*}(\boldsymbol{x}_0)}),\quad \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat\varphi)\in H_0^1(\Omega)$$

y

$$(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{\varphi})\cdot\boldsymbol{n}=0 \quad \text{en } \partial\Omega,$$

con lo que concluimos que $\hat{\varphi}\in X$.

Realizando la sustitución de (3.2.22) en (3.2.23) se tiene que

$$\begin{aligned}\|\hat{\varphi}\|_{C^1(\overline{B_{r_*}(\boldsymbol{x}_0)})} &\le c_3\left(\|f\|_{H^1(\Omega)}+\|\hat{\varphi}\|_{L^2(\Omega))}\right)\\ &\le c_3\left(\|f\|_{H^1(\Omega)}+\|\hat{\varphi}\|_{H^1(\Omega)}\right)\end{aligned} \tag{3.2.24}$$

donde c_3 depende de $\boldsymbol{\sigma},\hat{\eta},r_*$, pero no de ψ. Además,

$$\langle f,v\rangle=-\int_\Omega \psi v+\left(\int_\Omega \psi\right)\left(\int_\Omega \hat{\eta}v\right)\quad \forall v\in\widehat{H^1}(\Omega).$$

Así, utilizando *desigualdad de Cauchy-Schwarz* y (3.2.15) tenemos

$$\begin{aligned}|\langle f,v\rangle| &\le \left|\int_\Omega \psi v\right|+\left|\int_\Omega \psi\right|\left|\int_\Omega \hat{\eta}v\right|\\ &\le \|\psi\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}+\left|\int_\Omega\psi\right|\|\hat{\eta}\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le\left(\|\psi\|_{L^2(\Omega)}+\left|\int_\Omega\psi\right|\|\hat{\eta}\|_{L^2(\Omega)}\right)\|v\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le c_4\|\mathbf{grad}\,v\|_{(L^2(\Omega))^3}\\ &=c_4\|v\|_{\widehat{H^1}(\Omega)},\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}c_4 &= \|\psi\|_{L^2(\Omega)}+\left|\int_\Omega\psi\right|\|\hat{\eta}\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le \|\psi\|_{L^2(\Omega)}+(\mu(\Omega))^{\frac12}\|\psi\|_{L^2(\Omega)}\|\hat{\eta}\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le\left(1+(\mu(\Omega))^{\frac12}\|\hat{\eta}\|_{L^2(\Omega)}\right)\|\psi\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le\left(1+(\mu(\Omega))^{\frac12}\|\hat{\eta}\|_{L^2(\Omega)}\right)\|\psi\|_{H^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|f\|_{(\widehat{H^1}(\Omega))^*}:=\sup_{v\in\widehat{H^1}(\Omega)}\frac{|\langle f,v\rangle|}{\|v\|_{\widehat{H^1}(\Omega)}}\le c_5\|\psi\|_{H^1(\Omega)}, \tag{3.2.25}$$

con

$$c_5=\left(1+(\mu(\Omega))^{\frac12}\|\hat{\eta}\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

De otro lado, como $\hat{\varphi}$ es solución del problema de Neumann, entonces por el Teorema de Lax-Milgram (teorema 1.30) se tiene que

$$\|\hat{\varphi}\|_{H^1(\Omega)}\le c_6\|f\|_{(\widehat{H^1}(\Omega))^*} \tag{3.2.26}$$

$$\le c_7\|\psi\|_{H^1(\Omega)}\quad \text{por (3.2.25).} \tag{3.2.27}$$

Además, para $|\boldsymbol{\alpha}| \leq 1$ tenemos que

$$\partial^{\boldsymbol{\alpha}} f = \partial^{\boldsymbol{\alpha}} \psi - \left(\int_\Omega \psi \right) \partial^{\boldsymbol{\alpha}} \hat{\eta}$$

y así,

$$\begin{aligned}
\|\partial^{\boldsymbol{\alpha}} f\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|\partial^{\boldsymbol{\alpha}} \psi\|_{L^2(\Omega)} + \left| \int_\Omega \psi \right| \|\partial^{\boldsymbol{\alpha}} \hat{\eta}\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|\partial^{\boldsymbol{\alpha}} \psi\|_{L^2(\Omega)} + |\mu(\Omega)|^{\frac{1}{2}} \|\psi\|_{L^2(\Omega)} \|\partial^{\boldsymbol{\alpha}} \hat{\eta}\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|\psi\|_{H^1(\Omega)} + |\mu(\Omega)|^{\frac{1}{2}} \|\psi\|_{H^1(\Omega)} \|\partial^{\boldsymbol{\alpha}} \hat{\eta}\|_{L^2(\Omega)} \\
&= \left(1 + |\mu(\Omega)|^{\frac{1}{2}} \|\partial^{\boldsymbol{\alpha}} \hat{\eta}\|_{L^2(\Omega)} \right) \|\psi\|_{H^1(\Omega)} .
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|f\|_{H^1(\Omega)} \leq c_7 \|\psi\|_{H^1(\Omega)} . \tag{3.2.28}$$

Reemplazando (3.2.26) y (3.2.28) en (3.2.24) se tiene

$$\|\hat{\varphi}\|_{C^1(\overline{B_{r_*}(\boldsymbol{x}_0)})} \leq c \|\psi\|_{H^1(\Omega)} . \tag{3.2.29}$$

Ahora estamos en posición de estimar $|\langle u_k, \psi \rangle|$, utilizando (1.4.1) y (3.2.29) tenemos que

$$\begin{aligned}
|\langle u_k, \psi \rangle| &= \left| \int_\Omega u_k \psi \right| \\
&= \left| \int_\Omega u_k \psi - 0 \right| \\
&= \left| \int_\Omega u_k \psi - \left(\int_\Omega \psi \right) \int_\Omega u_k \hat{\eta} \right| \\
&= \left| \int_\Omega u_k \left[\psi - \left(\int_\Omega \psi \right) \hat{\eta} \right] \right| \\
&= \left| \int_\Omega u_k \operatorname{div} (\boldsymbol{\sigma} \, \mathbf{grad} \, \hat{\varphi}) \right| \\
&= \left| - \int_\Omega \boldsymbol{p}_0 \cdot \mathbf{grad} \, \hat{\varphi} \zeta_k \right| \\
&\leq \int_\Omega |\boldsymbol{p}_0 \cdot \mathbf{grad} \, \hat{\varphi} \zeta_k| \\
&\leq |\boldsymbol{p}_0| \, \|\mathbf{grad} \, \hat{\varphi}\|_{C^0(\overline{B_{r_*}(\boldsymbol{x}_0)})} \int_\Omega \zeta_k \\
&\leq c_0 \, |\boldsymbol{p}_0| \, \|\psi\|_{H^1(\Omega)} .
\end{aligned}$$

En otras palabras

$$\|u_k\|_{H^{-1}(\Omega)} := \sup_{\psi \in H_0^1(\Omega)} \frac{|\langle u_k, \psi \rangle|}{\|\psi\|_{H^1(\Omega)}} \leq c_0 \, |\boldsymbol{p}_0|$$

Así, la sucesión $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ es acotada en $H^{-1}(\Omega)$ y por lo tanto, siendo $H^{-1}(\Omega)$ un espacio de Hilbert podemos extraer una subsucesión (denotemosla también por u_k) la cual converge débilmente en $H^{-1}(\Omega)$ a cierto $u \in H^{-1}(\Omega)$ (teorema 1.34). $\square$

Teorema 3.18. *Existe una única solución u de (3.1.3).*

Demostración. **Existencia.**

Sea $\varphi \in X$. Dado que $\xi := \mathbf{grad}\,\varphi \in C^0(B_{r_*}(\boldsymbol{x}_0))$, entonces existe una sucesión de funciones $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ (proposición 1.61), tal que

$$\zeta_k \in C_0^{\infty}(B_{r_*}(\boldsymbol{x}_0)), \quad \zeta_k \geq 0, \quad \int_{\Omega} \zeta_k = 1 \quad \text{y} \int_{\Omega} \zeta_k \xi \to \xi(\boldsymbol{x}_0).$$

Así,

$$-\int_{\Omega} \boldsymbol{p}_0 \cdot (\mathbf{grad}\,\varphi)\zeta_k = -\boldsymbol{p}_0 \cdot \left[\int_{\Omega} (\mathbf{grad}\,\varphi)\zeta_k\right] \to -\boldsymbol{p}_0 \cdot \xi(\boldsymbol{x}_0) = -\boldsymbol{p}_0 \cdot \mathbf{grad}\,\varphi(\boldsymbol{x}_0). \tag{3.2.30}$$

Por otro lado, sea $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H^1(\Omega)$ una sucesión de soluciones de la familia de problemas elípticos

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,u_k) = \operatorname{div}(\boldsymbol{p}_0\zeta_k) & \text{en } \Omega \\ (\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,u_k) \cdot \boldsymbol{n} = 0 & \text{en } \partial\Omega \\ \int_{\Omega} u_k\hat{\eta} = 0. & \end{cases}$$

Por el lema anterior (lema 3.17), existe una subsucesión de $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, que denotaremos también $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, y $u \in H^{-1}(\Omega)$ tales que

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{en } H^{-1}(\Omega).$$

Así, dado $\varphi \in X$, se tiene que $\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\varphi) \in H_0^1(\Omega)$ y por lo tanto,

$$\int_{\Omega} u_k \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\varphi) = \langle u_k, \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\varphi)\rangle \to \langle u, \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\varphi)\rangle\,. \tag{3.2.31}$$

En consecuencia, haciendo que $k \to \infty$ en (3.2.19) y usando (3.2.30) y (3.2.31), se sigue que u satisface la primera ecuación de (3.1.3). Finalmente,

$$0 = \int_{\Omega} u_k\hat{\eta} = \langle u_k, \hat{\eta}\rangle \to \langle u, \hat{\eta}\rangle$$

y por lo tanto u es solución de (3.1.3).

Unicidad.

Sea u solución de (3.1.3). Para cada $\psi \in H_0^1(\Omega)$, consideremos $\hat{\varphi}$ solución de (3.2.20). Así de (3.1.3) tenemos

$$\begin{aligned} |\langle u, \psi\rangle| &= \left|\langle u, \psi\rangle - \left(\int_{\Omega} \psi\right)\langle u, \hat{\eta}\rangle\right| \\ &= \left|\left\langle u, \psi - \left(\int_{\Omega} \psi\right)\hat{\eta}\right\rangle\right| \\ &= |\langle u, \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{\varphi})\rangle| \\ &= |-\boldsymbol{p}_0 \cdot \mathbf{grad}\,\hat{\varphi}(\boldsymbol{x}_0)| \\ &\leq |\boldsymbol{p}_0|\,\|\mathbf{grad}\,\hat{\varphi}\|_{C^0(\overline{B_{r_*}(\boldsymbol{x}_0)})} \\ &\leq c_0\,|\boldsymbol{p}_0|\,\|\psi\|_{H^1(\Omega)}\,, \end{aligned}$$

de este modo,
$$\|u\|_{H^{-1}(\Omega)} := \sup_{\psi \in H_0^1(\Omega)} \frac{|\langle u, \psi\rangle|}{\|\psi\|_{H^1(\Omega)}} \leq c_0 \, |\boldsymbol{p}_0| \, .$$
En el caso de que $\boldsymbol{p}_0 = \mathbf{0}$, tenemos que la solución del problema (3.1.3) es la trivial $u = 0$. Así, si consideramos u_1, u_2 soluciones de (3.1.3), tendremos que
$$\langle u_1 - u_2, \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, \varphi)\rangle = \mathbf{0},$$
lo cual implica que $u_1 - u_2 = 0$ y por tanto $u_1 = u_2$. □

Observación 3.19. *Si la solución (3.1.3) satisface*
$$u \in H^{-1}(\Omega) \cap H^2(\Omega),$$
entonces u es solución del problema fuerte (3.0.1), es decir,
$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, u) = \operatorname{div}(\boldsymbol{p}_0 \delta_{\boldsymbol{x}_0}) \quad \textit{c.t.p. en } \Omega, \quad (\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, u) \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \textit{c.t.p. en } \partial\Omega.$$

En efecto, sea $u \in H^{-1}(\Omega)$ solución de
$$\begin{cases} \langle u, \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, \varphi)\rangle = -\boldsymbol{p}_0 \cdot \mathbf{grad}\, \varphi(\boldsymbol{x}_0) \qquad \forall \varphi \in X, \\ \langle u, \hat{\eta}\rangle = 0. \end{cases}$$
En particular, tendremos que se verifica para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ y así,
$$\begin{aligned} -\boldsymbol{p}_0 \cdot \mathbf{grad}\, \varphi\, (\boldsymbol{x}_0) &= -\boldsymbol{p}_0 \, \langle \delta_{\boldsymbol{x}_0}, \mathbf{grad}\, \varphi\rangle \\ &= -\langle \boldsymbol{p}_0 \delta_{\boldsymbol{x}_0}, \mathbf{grad}\, \varphi\rangle \\ &= \langle \operatorname{div}(\boldsymbol{p}_0 \delta_{\boldsymbol{x}_0}), \varphi\rangle \\ &= \int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{p}_0 \delta_{\boldsymbol{x}_0})\, \varphi, \end{aligned}$$
y
$$\begin{aligned} \int_\Omega u \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, \varphi) &= -\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, u \cdot \mathbf{grad}\, \varphi + \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, \varphi) \cdot \boldsymbol{n} u \\ &= \int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, u)\, \varphi - \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, u) \cdot \boldsymbol{n}\varphi + \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, \varphi) \cdot u \\ &= \int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, u)\, \varphi - \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, u) \cdot \boldsymbol{n}\varphi. \end{aligned}$$
Es decir,
$$\int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, u - \boldsymbol{p}_0 \delta_{\boldsymbol{x}_0})\, \varphi = -\int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, u) \cdot \boldsymbol{n}\varphi \qquad (3.2.32)$$
Como $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, entonces el término de la derecha se anula y así,
$$\int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, u - \boldsymbol{p}_0 \delta_{\boldsymbol{x}_0})\, \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$
de este modo
$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, u - \boldsymbol{p}_0 \delta_{\boldsymbol{x}_0}) = 0 \quad \text{en c.t.p. } \Omega,$$

por lo tanto

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,u) = \operatorname{div}(\boldsymbol{p}_0\delta_{\boldsymbol{x}_0}) \quad \text{en c.t.p. } \Omega.$$

En consecuencia, de (3.2.32) y por la densidad de $C_0^\infty(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$, se sigue que

$$\int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,u)\cdot\boldsymbol{n}\varphi = 0 \quad \forall\varphi \in H^1(\Omega).$$

En particular

$$-\int_{\partial\Omega} ((\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{u})\cdot\boldsymbol{n} - g)\,\varphi = 0 \quad \forall\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

así por la densidad del espacio

$$\left\{v|_{\partial\Omega} : v \in C^\infty(\overline{\Omega})\right\}$$

en $L^2(\partial\Omega)$, se tiene que

$$(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{u})\cdot\boldsymbol{n} = 0 \quad \text{c.t.p. en } \partial\Omega.$$

Observación 3.20. *Por la desigualdad de Sobolev con $s = 2, n = 3$ y para $p > 3$ tenemos que*

$$W^{2,p}(\overline{B_{r_*}(\boldsymbol{x}_0)}) \subset C^1(\overline{B_{r_*}(\boldsymbol{x}_0)}).$$

Adémas, si asumimos que $\psi \in L^p(\Omega)$, entonces por los resultados de regularidad para problemas elípticos (ver [7, capítulo 10]) garantizamos que la solución $\hat{\varphi}$ de (3.2.20) pertenece a $W^{2,p}(\overline{B_{r_*}(\boldsymbol{x}_0)})$ y que

$$\|\hat{\varphi}\|_{C^1(\overline{B_{r_*}(\boldsymbol{x}_0)})} \leq \hat{c}_0 \|\psi\|_{L^p(\Omega)}.$$

Repitiendo el mismo argumento para deducir $|\langle u_k, \psi\rangle|$ tenemos que

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega u_k\psi\right| &= \left|-\int_\Omega \boldsymbol{p}_0\cdot\mathbf{grad}\,\hat{\varphi}\delta_k\right| \\ &\leq |\boldsymbol{p}_0|\,\|\mathbf{grad}\,\hat{\varphi}\|_{C^0(\overline{B_{r_*}(\boldsymbol{x}_0)})} \\ &\leq \hat{c}_0\,|\boldsymbol{p}_0|\,\|\psi\|_{L^p(\Omega)}.\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\|u_k\|_{L^q(\Omega)} := \sup_{\psi\in L^p(\Omega)} \frac{\left|\int_\Omega u_k\psi\right|}{\|\psi\|_{L^p(\Omega)}} \leq \hat{c}_0\,|\boldsymbol{p}_0|,$$

para q tal que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ (en particular para $p > 3$ tenemos que $q < \frac{3}{2}$). Pasando al límite con respecto a k tenemos que $u \in L^q(\Omega)$, con $1 \leq q < \frac{3}{2}$.

3.3. Formulación débil del problema directo EEG para $p \neq 2$

La idea que nosotros presentamos no está basada en la estructura de Hilbert de los espacios de Sobolev $H^s(\Omega)$, pero si en la dualidad. Por eso, si se renuncia a la elección de $p = 2$ como exponente de sumabilidad, también se puede considerar el problema:
Hallar $u_p \in L^{p^*}(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} \int_\Omega u_p \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\varphi) = -\boldsymbol{p}_0\cdot\mathbf{grad}\,\varphi(\boldsymbol{x}_0) & \forall\varphi \in X_p, \\ \int_\Omega u_p\hat{\eta} = 0 \end{cases} \tag{3.3.1}$$

donde $3 < p < \infty$ es un número fijo, p^* es el exponente del espacio dual definido por $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ y

$$X_p := \left\{ \varphi \in W^{1,p}(\Omega) : \varphi \in C^1\left(B_{r_*}(\boldsymbol{x}_0)\right), \operatorname{div}\left(\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, \varphi\right) \in L^p(\Omega), (\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, \varphi) \cdot \boldsymbol{n} = 0 \ \textit{en} \ \partial\Omega \right\}.$$

Procediendo como antes, se prueba la existencia y unicidad de la solución de (3.3.1).

Lema 3.21. *Sea* $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ *una sucesión de funciones tales que*

$$\zeta_k \in C_0^\infty(B_{r_*}(\boldsymbol{x}_0)), \quad \zeta_k \geq 0, \quad \int_\Omega \zeta_k = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Si $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ *es tal que para cada* k*,* $u_k \in H^1(\Omega)$ *es la solución débil del problema de Neumann (cuya existencia y unicidad fue demostrada en el teorema 3.7)*

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, u_k) = \operatorname{div}(\boldsymbol{p}_0 \zeta_k) & \textit{en } \Omega \\ (\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, u_k) \cdot \boldsymbol{n} = 0 & \textit{en } \partial\Omega \\ \int_\Omega u_k \hat{\eta} = 0, \end{cases}$$

entonces $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ *posee una subsucesión que converge débilmente en* $L^{p^*}(\Omega)$*.*

Demostración. Sea $u_k \in H^1(\Omega)$ la solución del problema de Neumann

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, u_k) = \operatorname{div}(\boldsymbol{p}_0 \zeta_k) & \text{en } \Omega \\ (\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, u_k) \cdot \boldsymbol{n} = 0 & \text{en } \partial\Omega \\ \int_\Omega u_k \hat{\eta} = 0. \end{cases}$$

En particular, integrando por partes y recordando que $\boldsymbol{\sigma}$ es simétrica, tenemos que u_k satisface que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, u_k)\varphi &= -\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, u_k \cdot \mathbf{grad}\, \varphi + \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, u_k) \cdot \boldsymbol{n}\varphi \\ &= -\int_\Omega (\mathbf{grad}\, u_k) \cdot (\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, \hat{\varphi}) + \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, u_k) \cdot \boldsymbol{n}\varphi \\ &= \int_\Omega u_k \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, \varphi) - \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, \varphi) \cdot \boldsymbol{n} u_k \\ &= \int_\Omega u_k \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, \varphi) \quad \forall \varphi \in X_p \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{p}_0 \zeta_k)\varphi &= -\int_\Omega \boldsymbol{p}_0 \cdot (\mathbf{grad}\, \varphi)\zeta_k + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{p}_0 \cdot \boldsymbol{n}\zeta_k\varphi \\ &= -\int_\Omega \boldsymbol{p}_0 \cdot (\mathbf{grad}\, \varphi)\zeta_k \quad \forall \varphi \in X_p, \end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que $\zeta_k \in C_0^\infty(B_{r_*}(\boldsymbol{x}_0))$ y $\varphi \in X_p$. Así,

$$\int_\Omega u_k \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{grad}\, \varphi) = -\int_\Omega \boldsymbol{p}_0 \cdot (\mathbf{grad}\, \varphi)\zeta_k \quad \forall \varphi \in X_p. \tag{3.3.2}$$

Sea $\psi \in H_0^1(\Omega)$. Deseamos encontrar una acotación para $\left|\int_\Omega u_k\psi\right|$. Consideremos $\hat{\varphi} \in H^1(\Omega)$ solución del problema de Neumann

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{\varphi}) = \psi - \left(\int_\Omega \psi\right)\hat{\eta} & \text{en } \Omega \\ (\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{\varphi})\cdot\boldsymbol{n} = 0 & \text{en } \partial\Omega \\ \int_\Omega \hat{\varphi} = 0. \end{cases} \tag{3.3.3}$$

En primer lugar, por la teoría de regularidad para problemas elípticos (ver [7, capítulo 10]) aplicada al término $\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{\varphi}) \in H_0^1(\Omega)$ da que $\hat{\varphi} \in W^{1,p}(\Omega)$ para $p > 3$. Además, por la desigualdad de Sobolev (teorema 1.77) con $s = 2, n = 3$ y para $p > 3$ se tiene que

$$W^{2,p}(\overline{B_{r_*}(\boldsymbol{x}_0)}) \subset C^1(\overline{B_{r_*}(\boldsymbol{x}_0)}).$$

Sea

$$f := \psi - \left(\int_\Omega \psi\right)\hat{\eta}.$$

Si asumimos que $\psi \in L^p(\Omega)$, entonces $f \in L^p(\Omega)$. Así, por los resultados de regularidad se garantiza que la solución $\hat{\varphi}$ de (3.3.3) pertenece a $W^{2,p}(\overline{B_{r_*}(\boldsymbol{x}_0)}) \subset C^1(\overline{B_{r_*}(\boldsymbol{x}_0)})$ y que

$$\|\hat{\varphi}\|_{C^1(\overline{B_{r_*}(\boldsymbol{x}_0)})} \leq \hat{c}_0\,\|\psi\|_{L^p(\Omega)}\,.$$

Así, resumiendo tenemos que

$$\hat{\varphi} \in W^{1,p}(\Omega), \quad \hat{\varphi} \in C^1(\overline{B_{r_*}(\boldsymbol{x}_0)}), \quad \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{\varphi}) \in L^p(\Omega)$$

y

$$(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{\varphi})\cdot\boldsymbol{n} = 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

Por lo tanto, $\hat{\varphi} \in X_p$. Repitiendo el argumento del lema anterior (lema 3.17) para acotar $|\langle u_k, \psi\rangle|$, se tiene que

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega u_k\psi\right| &= \left|-\int_\Omega \boldsymbol{p}_0\cdot\mathbf{grad}\,\hat{\varphi}\zeta_k\right| \\ &\leq |\boldsymbol{p}_0|\,\|\mathbf{grad}\,\hat{\varphi}\|_{C^0(\overline{B_{r_*}(\boldsymbol{x}_0)})} \\ &\leq \hat{c}_0\,|\boldsymbol{p}_0|\,\|\psi\|_{L^p(\Omega)}\,. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\|u_k\|_{L^{p^*}(\Omega)} := \sup_{\psi\in L^p(\Omega)} \frac{\left|\int_\Omega u_k\psi\right|}{\|\psi\|_{L^p(\Omega)}} \leq \hat{c}_0\,|\boldsymbol{p}_0|\,.$$

Así, la sucesión $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ es acotada en $L^{p^*}(\Omega)$ y por lo tanto, siendo $L^{p^*}(\Omega)$ un espacio de Banach, reflexivo y separable podemos extraer una subsucesión (denotemosla también $\{u_k\}_{k=1}^\infty$) la cual converge débilmente en $L^{p^*}(\Omega)$ a cierto $u_p \in L^{p^*}(\Omega)$ (teorema 1.35). □

Teorema 3.22. *Existe una única solución u_p para (3.3.1).*

Demostración. **Existencia.**

Sea $\varphi \in X_p$. Dado que $\xi := \mathbf{grad}\,\varphi \in C^0(B_{r_*}(\boldsymbol{x}_0))$, entonces existe una sucesión de funciones $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ (proposición 1.61), tal que

$$\zeta_k \in C_0^{\infty}(B_{r_*}(\boldsymbol{x}_0)), \quad \zeta_k \geq 0, \quad \int_\Omega \zeta_k = 1 \text{ y } \int_\Omega \zeta_k \xi \to \xi(\boldsymbol{x}_0).$$

Así,

$$-\int_\Omega \boldsymbol{p}_0 \cdot \mathbf{grad}\,\varphi \zeta_k = -\boldsymbol{p}_0 \cdot \left[\int_\Omega (\mathbf{grad}\,\varphi)\zeta_k\right] \to -\boldsymbol{p}_0 \cdot \xi(\boldsymbol{x}_0) = -\boldsymbol{p}_0 \cdot \mathbf{grad}\,\varphi(\boldsymbol{x}_0). \quad (3.3.4)$$

Por otro lado, sea $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H^1(\Omega)$ una sucesión de soluciones de la familia de problemas elípticos

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,u_k) = \operatorname{div}(\boldsymbol{p}_0\zeta_k) & \text{en } \Omega \\ (\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,u_k) \cdot \boldsymbol{n} = 0 & \text{en } \partial\Omega \\ \int_\Omega u_k \hat{\eta} = 0. \end{cases}$$

Por lema anterior (lema 3.21), existe una subsucesión de $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, que denotaremos también $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, y $u_p \in L^{p^*}(\Omega)$ tales que

$$u_k \rightharpoonup u_p.$$

Así, dado que $\varphi \in X_p$, se tiene que $\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\varphi) \in L^p(\Omega)$ y por lo tanto,

$$\int_\Omega u_k \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\varphi) \to \int_\Omega u_p \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\varphi). \quad (3.3.5)$$

En consecuencia, haciendo que $k \to \infty$ en (3.3.2) y usando (3.3.4) y (3.3.5) se sigue que u_p satisface la primera ecuación de (3.3.1). Finalmente,

$$0 = \int_\Omega u_k \hat{\eta} \to \int_\Omega u_p \hat{\eta}$$

y por lo tanto u_p es solución de (3.3.1).

Unicidad.

Sea u_p solución de (3.3.1). Para cada $\psi \in L^p(\Omega)$, consideremos $\hat{\varphi}$ solución de (3.3.3). Así de (3.3.1) tenemos

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega u_p \psi\right| &= \left|\int_\Omega u_p \psi - \int_\Omega u_k \hat{\eta}\right| \\ &= \left|\int_\Omega u_p \psi - \left(\int_\Omega \psi\right) \int_\Omega u_k \hat{\eta}\right| \\ &= \left|\int_\Omega u_p \left(\psi - \left(\int_\Omega \psi\right) \hat{\eta}\right)\right| \\ &= \left|\int_\Omega u_p \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\hat{\varphi})\right| \\ &= \left|-\boldsymbol{p}_0 \cdot \mathbf{grad}\,\hat{\varphi}(\boldsymbol{x}_0)\right| \\ &\leq |\boldsymbol{p}_0| \left\|\mathbf{grad}\,\hat{\varphi}\right\|_{C^0(\overline{B_{r_*}(\boldsymbol{x}_0)})} \\ &\leq c_0 |\boldsymbol{p}_0| \left\|\psi\right\|_{L^p(\Omega)}, \end{aligned}$$

de este modo,

$$\|u_p\|_{L^{p^*}(\Omega)} := \sup_{\psi\in H_0^1(\Omega)} \frac{\left|\int_\Omega u_p\psi\right|}{\|\psi\|_{L^{p^*}}} \le c_0\,|\boldsymbol{p}_0|\,.$$

En el caso de que $\boldsymbol{p}_0 = \mathbf{0}$, tenemos que la solución del problema (3.3.1) es la trivial $u_p = 0$. Así, si consideramos u_{p_1}, u_{p_2} soluciones de (3.3.1), tendremos que

$$\int_\Omega (u_{p_1} - u_{p_2})\,\mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,\varphi) = 0,$$

lo cual imploca que $u_{p_1} - u_{p_2} = 0$ y por lo tanto $u_{p_1} = u_{p_2}$. □

3.4. Comentarios finales

1. El método de dualidad no usa la propiedad de Hilbert del espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, sino que busca la solución del problema directo EEG en su espacio dual $H^{-1}(\Omega)$.

2. Las condiciones que se establecen sobre la conductividad $\boldsymbol{\sigma}$ en Valli ([18]), son que $\boldsymbol{\sigma}$ es una matriz simétrica y definida positiva, cuyas entradas σ_{ij} pertenecen a $L^\infty(\Omega)$ y que además, existe $r_0 > 0$ tal que

$$\sigma_{ij} \in W^{2,\infty}(B_{r_0}(\boldsymbol{x}_0)). \tag{3.4.1}$$

   Sin embargo en nuestro análisis fue requerida mayor regularidad para $\boldsymbol{\sigma}$, más precisamente que

$$\sigma_{ij} \in W^{3,\infty}(B_{r_0}(\boldsymbol{x}_0))$$

   Lo anterior debido a que la teoría de regularidad de ecuaciones parciales no nos permitio obtener (3.2.21), suponiendo solamente (3.4.1).

3. A pesar de que un principio la solución del problema directo de EEG se encuentra en $H^{-1}(\Omega)$, es posible demostrar (ver observación 3.20) regularidad adicional para dicha solución. Más exactamente, se demuestra que la solución u esta en $L^q(\Omega)$, con $1 \le q < \frac{3}{2}$.

4. Debido a que el método de dualidad no está basado en la estructura de espacio de Hilbert de los espacios funcionales involucrados en la formulación, este permite proponer una formulación débil del problema directo de EEG cuando el exponente de sumabilidad p cumple que $p > 3$ y encontrar la solución del mismo en el espacio funcional $L^{p^*}(\Omega)$, que es el espacio dual de $L^p(\Omega)$.

Conclusiones

1. Se realizó el análisis de existencia y unicidad de solución para un problema directo de electroencefalografía (EEG) por medio de dos enfoques distintos, uno basado en el llamado método de sustracción y el otro basado en el método de dualidad.

2. El método de sustracción consiste en que el potencial total u, el cual es solución de (2.1.7), se divide en un potencial de singularidad u_0 y en un potencial de correción $\hat{u}$, de tal forma que
$$u = u_0 + \hat{u},$$
donde el potencial de singularidad se define como la solución para un dipolo en un conductor ilimitado, con conductividad $\boldsymbol{\sigma}_0$ constante. Se mostró la existencia del potencial de corrección con el potencial de singularidad y la teoría de elementos finitos y así obtuvo el potencial total u, el cual es solución del problema directo de EEG.

3. El método de sustracción usa la propiedad de espacio de Hilbert del espacio $H^1(\Omega)$, lo cual permite el uso del Teorema de Lax-Milgram para mostrar existencia y unicidad del potencial de corrección; sin embargo, este método requiere de un preprocesamiento para obtener un potencial de singularidad y así mostrar la existencia del potencial de corrección. Además, el método de sustracción exige regularidad adicional de la conductividad eléctrica, más precisamente se requiere que $\boldsymbol{\sigma} \in C^1(\Omega)$.

4. El método de dualidad no usa la estructura de Hilbert de los espacios de Sobolev $H^s(\Omega)$, sino que esta basado en sus espacios duales. Más exactamente, la solución se buscó en el espacio $H^{-1}(\Omega)$ (espacio dual de $H_0^1(\Omega)$), donde se consideró un espacio de funciones test, un subespacio adecuado de $H^1(\Omega)$. Este método consiste en acotar en la norma del espacio $H^{-1}(\Omega)$ una sucesión de funciones $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ de $H^1(\Omega)$, las cuales son solución del problema elíptico
$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,u_k) = \operatorname{div}(\boldsymbol{p}_0\delta_k) & \text{en } \Omega \\ (\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{grad}\,u_k)\cdot\boldsymbol{n} = 0 & \text{en } \partial\Omega \\ \int_\Omega u_k\hat{\eta} = 0. \end{cases}$$
Con lo cual se lográ extraer una subsucesión de $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, que converge débilmente en $H^{-1}(\Omega)$ y es solución de la formulación débil (3.1.3).

5. En el método de dualidad, a pesar de que en un principio la solución del problema directo de EEG se encuentra en $H^{-1}(\Omega)$, se puede garantizar regularidad adicional para la solución; más precisamente, la solución se encuentra en los espacios $L^q(\Omega)$, con $1 \leq q < \frac{3}{2}$. Además, como este método no esta basado en la estructura de Hilbert

de los espacios funcionales involucrados en la formulación, este permite proponer una formulación débil cuando el exponente de sumabilidad p cumple que $p \neq 2$ y encontrar la solución en $L^{p^*}(\Omega)$, que es el espacio dual de $L^p(\Omega)$.

Bibliografía

[1] R. Albanese, P. B. Monk, *The Inverse Source Problem for Maxwell's Equations*, Inverse problems 22, 2006, 1023-1035.

[2] H. Ammari, G. Bao, J. L. Fleming, *An Inverse Source Problem for Maxwell's Equations in Magnetoencephalography*, SIAM J. Appl. Math. 62, 2002, 1369-1382.

[3] Haim Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.

[4] Lawrence C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1998.

[5] David Gilbarg, Neil S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Orden*, Springer, 1998.

[6] M. Gnewuch and S. A. Sauter, *Boundary Integral Equations for Second Orden Eliptic Boundary Value Problems*, in Preprint No. 55, Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwisenschaften Leipzing, 1999.

[7] Jürger Jost, *Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2002.

[8] S. He, V. G. Romanov, *Identification of Dipole Sources in a Bounded Domain for Maxwell's Equations,*, Wave Motion 28, 25-40, 1998.

[9] S. Kesavan, *Topics in Funtional Analysis And Applications*, Wiley Eastern Limited, India, 1989.

[10] Erwin Kreyszig *Introductory Functional Analiysis with Applications*, Wilay classics library, New York, 1978.

[11] S. Lew, C. H. Wolters, T. Dierkes, C, Röer, R. S. Macleod, *Accuracy and Runtime Comparison for Differential Potential Approaches and Iterative Solvers in Finite Element Method Based EEG Source Analysis*, Appl. Numer. Math. 59, 1970-1988, 2009.

[12] P. Monk, *Finite Element Methods for Maxwell's Equations*, Oxford sciences publications, 2003.

[13] J. C. Mosher, R. M. Leahy and P. S. Lewis. *EEG and MEG: Forward Solutions for Inverse Methods*, IEEE Transaction on Biomedical Engeneering 46, pp. 245–259, 1999.

[14] Eider Yesid Perdomo, *Formulación Débil y de Galerkin de la Ecuación Bidimensional de Poisson*, Universidad del Cauca, Popayán, 2011.

[15] A. Alonso-Rodríguez and A. Valli. *Eddy Current Approximation of Maxwell Equations: Theory, Algorithms and Applications*, Springer, Italia, 2010.

[16] H. I Royden, P. M Fitzpatrick, *Real Analysis*, fourth edition, Pearson, 2010.

[17] J. Sarvas, *Basic Mathematical and Electromagnetic Concepts of the Biomagnetic Inverse Problem*, Phys. Med. Biol. 32, 1987, 11-22.

[18] A. Valli , *Solving an Electrostatics-like Problem with a Current Dipole Source by Means of the Duality Method*, Appl. Math. Lett. 25(10), 1410-1414, 2012.

[19] T. Waberski, H. Buchner, K. Lehnertz, A. Hufnagel, M. Fuchs, R. Beckmann and A. Rienöcker, *Properties of Advanced Headmodelling and Source Reconstruction for the Localization of Epileptiform Activity*, Brain Topography. 10, 283-290, 1998.

[20] C. H. Wolters, H. Köstler, C. Möller, J. Härdtlein, L. Grasedyck, W. Hackbusch, *Numerical Mathematics of the Subtraction Method for the Modeling of a Current Dipole in EEG Source Reconstruction Using Finite Element Head Models*, SIAM J: Sci. Comput 30, 24-45,2007/08.