UNA APLICACIÓN DE LAS DERIVACIONES LOCALMENTE NILPOTENTES AL PROBLEMA DE EXTENDIBILIDAD

AMELIA ELIZABETH CÓRDOBA GARCÍA
REYNALDO MANZANO CALVACHE

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN, CAUCA
2013

UNA APLICACIÓN DE LAS DERIVACIONES LOCALMENTE NILPOTENTES AL PROBLEMA DE EXTENDIBILIDAD

TRABAJO DE GRADO
En la modalidad de Seminario de Grado presentado
como requisito parcial para optar al título de Matemático

AMELIA ELIZABETH CÓRDOBA GARCÍA
REYNALDO MANZANO CALVACHE

Director:
M.Sc. MARIBEL DIAZ NOGUERA

Asesor:
PhD. DANIEL DAIGLE

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN, CAUCA
2013

Nota de aceptación

Director:

M.Sc. Maribel Diaz Noguera

Jurados:

Profesor. Freddy William Bustos

Profesor. Diego Fernando Ruiz Solarte

Fecha de sustentación: Popayán, 14 de Agosto de 2013

Este trabajo está dedicado a mi padres Gladys García Andrade y Jesús Ruperto Córdoba Castro, a mi hermana Alejandra Córdoba G, a Rodrigo Navia, a mis abuelos Elisa Andrade, Nicanor Córdoba y Rosalba Castro.

Este trabajo está dedicado a mis padres Laura Maria Calvache y Reynaldo Manzano Díaz (QDEP), a mi esposa Diana Elizabeth Córdoba Agredo, a mi hijo Jhon Sebastian, A mis tias Teresa, Matilde y Laura, a mis abuelos Teresa Muños y Fidencio Calvache, a mis amigos Camilo Montilla, Miguel Sandoval, Oscar Mostacilla y Julian Osorio.

Agradecimientos

Agradecemos a Dios por tener la oportunidad de terminar un sueño más en nuestras vidas y de haber tenido el privilegio de contar con el apoyo incondicional de la Mg. Maribel Díaz Noguera, directora de este trabajo quien no sólo compartió con nosotros sus conocimientos sino que nos instruyó e inspiró para ser mejores personas y buenos profesionales.

A nuestro asesor Ph. Daniel Daigle de la Universidad de Ottawa Canada, por todas sus sugerencias y aportes.

A los profesores Freddy William Bustos y Diego Fernando Ruiz S. miembros del comité de seguimiento por todas sus sugerencias y aportes.

A la Universidad del Cauca y a todos los profesores que estuvieron en nuestro proceso de formación profesional.

A nuestras familias por el apoyo incondicional que siempre nos han brindado.

A nuestros amigos y compañeros que durante estos años estuvieron a nuestro lado brindándonos todo su apoyo y a todas aquellas personas que de una u otra forma colaboraron o participaron en la realización del presente trabajo.

INTRODUCCIÓN

Definición 1. *Una derivación D de un anillo B es un homomorfismo de grupos $D : B \to B$ tal que para todo $f, g \in B$, se satisface $D(fg) = D(f)g + fD(g)$.*

Dada una derivación D de un anillo B se define el núcleo de D como el conjunto $Ker(D) = \{x \in B | D(x) = 0\}$. Un primer resultado relacionado con éste conjunto es que define un subanillo en B.

Como un ejemplo clásico de derivación se tiene que, si R es un anillo y $B = R[x_1, \ldots, x_n] = R[X]$, para cada $i = 1, \ldots, n$, la derivada parcial $\frac{\partial}{\partial x_i}$ es una derivada de B. En este caso se tiene que para cada $p(x_1, ..., x_n) \in B$, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{\partial}{\partial x_i}^m [p(x_1, ..., x_n)] = 0$, de ahí que D es una derivación localmente nilpotente de B.

Las Derivaciones Localmente Nilpotentes han sido utilizadas, en la solución de diversos problemas. Uno de los más relevantes es el Décimo Cuarto Problema de Hilbert, que es enunciado así: *Sea $B = k[x_1, \ldots, x_n]$ el anillo de polinomios en n variábles sobre un cuerpo k de característica cero, y $k(x_1, \ldots, x_n)$ su cuerpo de fracciones. Suponga que L es un subcuerpo de $k(x_1, \ldots, x_n)$ conteniendo k. ¿Entonces, la k- subálgebra $L \cap B$ de $k(x_1, \ldots, x_n)$ es finitamente generada?* En 1954, O. Zariski, presenta una respuesta positiva si $tr\mathrm{gr}_k L \leq 2$. Un caso particular cuando $n > 3$, es preguntarse si el núcleo de una derivación localmente nilpotente de B es finitamente generado. En este caso ya fueron obtenidos varios ejemplos de derivaciones localmente nilpotentes, cuyo núcleo no es finitamente generado, por ejemplo, en *A counterexample to Hilbert's Fourteenth Problem In Dimension Six*, Transform. Groups **5** (2000) 69-71., G. Freudenburg presenta una de tales derivaciones cuando $n = 6$, luego la conjetura en este caso es falsa.

Por otro lado un problema clásico en álgebra conmutativa, y resuelto parcialmente, es el **Pro-**

blema de Extendibilidad, que tiene como objeto decidir cuándo una n-upla es extendible.

Definición 2. *Sean* $F_1, F_2, ..., F_{n-1} \in \mathbb{C}[X] = \mathbb{C}^{[n]}$. *Decimos que la* $n-1$*-upla* $(F_1, F_2, ..., F_{n-1})$ *es extendible si existe un polinomio* $F_n \in \mathbb{C}[X]$ *tal que* $\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[F_1, ..., F_n]$.

Con relación a las derivaciones localmente nilpotentes, un problema actual es determinar si una derivación localmente nilpotente D definida en un anillo $B = C^{[n]}$ tiene o no, un *Slice* es decir un elemento $s \in B$ tal que $D(s) = 1$. Éste problema del álgebra conmutativa se denomina **Problema del Slice**.

El Problema de Extendibilidad y el Problema de Slice estan fuertemente relacionados. Se pretende mediante éste trabajo mostrar un resultado publicado en la artículo *Locally Nilpotent Automorphism and the jacobian conjecture progress in Mathematics*, de la revista *JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA* que muestra como una solución al problema del Slice implica una solución al problema de extendibilidad.

Índice general

Capítulo 1

DERIVACIONES DE UN ANILLO

1.1. Derivación

En el presente capítulo se desarrolla la teoría básica sobre derivaciones en un anillo, la cual permite abordar el estudio del problema de extendibilidad.
Es necesario tener en cuenta que siempre que se hable de un anillo B este se considera conmutativo con unitario. Se escribe $A \leq B$ para indicar que A es un subanillo de B, se denota por $A^{[n]}$ al anillo de polinomios en n variables sobre un anillo A y $\mathbb{K}$ denota un campo.

1.1.1. Derivación de anillos

Definición 3. *Una derivación D de un anillo B es un homomorfismo de grupos $D : B \to B$ que satisface que para todo $f, g \in B$, $D(fg) = D(f)g + fD(g)$.*

El conjunto $R = C^{\infty}(\mathbb{R})$ de las funciones reales de variable real x e infinitamente diferenciables, junto con la suma y producto usual de funciones forma un anillo . El operador lineal denotado por $\frac{d}{dx}$, conocido del cálculo y denominado la derivada con respecto a x definido en R satisface las condiciones de la definición anterior, el cual, es un ejemplo clásico de derivación.

Ejemplo 1. *Sea el anillo $R = C^{\infty}(\mathbb{R})$, entonces $D = \frac{d}{dx}$ es una derivada del anillo R.*

Dado que una derivación D de un anillo B es un homomorfismo aditivo, se define su núcleo de la siguiente manera.

Definición 4. *Dada una derivación D de un anillo B se define el núcleo de D como* $ker(D) = \{x \in B : D(x) = 0\}$.

Por teoría de grupos el núcleo de un homomorfismo D de B es un subgrupo normal de B. A continuación se prueba que $ker(D) \leq B$

Teorema 1. *Si D es una derivación definida en un anillo B, entonces $ker(D)$ es un subanillo de B.*

Demostración. Sean $x, y \in Ker(D)$, entonces

$$\begin{aligned} D(xy) &= xD(y) + yD(x) \\ &= x0 + y0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Es decir $xy \in Ker(D)$ y asì se tiene que $ker(D)$ es un subanillo de B. □

El núcleo de una derivación D, es llamado anillo de constantes y se denota por B^D.

Definición 5. *Si $A \leq B$ y D una derivación de B, se dice que D es una A-derivación de B si satisface que $D(A) := \{D(a) : a \in A\} = \{0\}$.*

Observación. De la definición anterior, se tiene que $A \leq ker(D) \leq B$.

El conjunto de todas las derivaciones de un anillo B se denota por $Der(B)$ y al conjunto de las A-derivaciones de B por $Der_A(B)$. Note que $Der(B) \neq \emptyset$ ya que el homomorfismo nulo definido en B es una derivación de B.

Como se muestra a continuación el conjunto $Der(B)$, junto con la suma usual de funciones, tiene una estructura de grupo. Además, B actúa linealmente sobre éste mediante el producto por escalar definido así:

Definición 6. *Sean B un anillo, $b \in B$ y $D, D_1 \in Der(B)$, se define la función producto por escalar así*

$$\begin{aligned} bD : B &\longrightarrow B \\ x &\mapsto bD(x). \end{aligned}$$

Y la suma de derivaciones como la función

$$D + D_1 : B \longrightarrow B$$
$$x \mapsto D(x) + D_1(x)$$

Lema 1. *Sean B un anillo, $b \in B$ y $D, D_1 \in Der(B)$. Entonces $bD - D_1 \in Der(B)$.*

Demostración. Sean $x, y \in B$. Note que

$$\begin{aligned}[bD - D_1](x + y) &= bD(x + y) - D_1(x + y) \\ &= bD(x) + bD(y) - [D_1(x) + D_1(y)] \\ &= [bD - D_1](x) + [bD - D_1](y).\end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}[bD - D_1](xy) &= (bD)(xy) - D_1(xy) \\ &= bD(xy) - D_1(xy) \\ &= bD(x)y + bD(y)x - [D_1(x)y + D_1(y)x] \\ &= y[bD(x) - D_1(x)] + x[bD(y) - D_1(y)] \\ &= y[bD - D_1](x) + x[bD - D_1](y).\end{aligned}$$

Por tanto $bD - D_1 \in Der(B)$. □

Del lema anterior, tomando $b = 1$, se concluye que el conjunto $Der(B)$ junto con la suma es un subgrupo del grupo abeliano de homomorfismos de B y por tanto $Der(B)$ es un grupo. Este grupo junto con el producto por escalar tiene estructura de B- módulo como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 2. *Si $A \leq B$, entonces $Der(B)$ es un B-módulo y $Der_A(B)$ es un B-submódulo de $Der(B)$.*

Demostración. Sea $z \in B$. A continuación se probará que $Der(B)$ es un B-módulo.

1. Si $x, y \in B$ y $D \in Der(B)$, entonces

$$\begin{aligned}[(x + y)D](z) &= (x + y)D(z) \\ &= xD(z) + yD(z).\end{aligned}$$

   Luego $(x + y)D = xD + yD$.

2. Si $x \in B$ y $D_1, D_2 \in Der(B)$, entonces

$$\begin{aligned}[x(D_1 + D_2)](z) &= x[(D_1 + D_2)(z)] \\ &= x[D_1(z) + D_2(z)] \\ &= xD_1(z) + xD_2(z) \\ &= (xD_1)(z) + (xD_2)(z).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $x(D_1 + D_2) = xD_1 + xD_2$.

3. Si $x, y \in B$ y $D \in Der(B)$, entonces

$$\begin{aligned}[(xy)D](z) &= (xy)D(z) \\ &= x(yD(z)) \\ &= x(yD)(z).\end{aligned}$$

De ahí que $(xy)D = x(yD)$

4. Claramente $1D = D$.

De lo anterior se tiene que $Der(B)$ es un B- módulo.

Ahora se muestra que $Der_A(B)$ es B-submódulo de $Der(B)$. Como toda $A-$derivación de un anillo B es en particular una derivación de B, se tiene que $Der_A(B) \subseteq Der(B)$. Además, $Der_A(B)$ es un subgrupo de $Der(B)$, para esto es suficiente ver que si $D_1, D_2 \in Der_A(B)$, entonces $D_1(a) - D_2(a) = 0 - 0 = 0$ para todo $a \in A$. Así $D_1 - D_2 \in Der_A(B)$.
Por otro lado, si $x \in B$ y $D \in Der_A(B)$, entonces $xD(a) = x0 = 0$, para todo $a \in A$,y así $xD \in Der_A(B)$. □

A continuación se muestra cómo a través de iteraciones de composición de derivaciones es posible obtener la $n-$ésima derivada para una derivación D de B.

Definición 7. *Sea B un anillo y D una derivada en B. Se define recursivamente la $n-$ésima derivada para D en $b \in B$ como*

1. $D^0(b) = I_B(b) = b$, *donde I_B es la función idéntica en B.*

2. $D^n(b) = D(D^{n-1}(b))$ *para $n \geq 1$.*

Una de las principales reglas al respecto es dada a continuación.

Teorema 3. *(Regla de Leibniz) Sea B es un anillo. Si $D \in Der(B), x, y \in B$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$D^n(xy) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} D^{n-i}(x)D^i(y).$$

Demostración. Se probará por inducción sobre n. En el caso de $n = 1$ la igualdad es verdadera pues $D \in Der(B)$. Sea $n > 1$. Suponga que la igualdad es válida para todo $k < n$, así se tiene que

$$\begin{aligned}
D^n(xy) &= D\left(D^{n-1}(xy)\right) = D\left(\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} D^{n-1-i}(x)D^i(y)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} D\left(D^{n-1-i}(x)D^i(y)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \left(D^{n-i}(x)D^i(y) + D^{n-1-i}(x)D^{i+1}(y)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} D^{n-i}(x)D^i(y) + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} D^{n-1-i}(x)D^{i+1}(y) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} D^{n-i}(x)D^i(y) + \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} D^{n-i}(x)D^i(y) \\
&= D^n(x)y + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}\right) D^{n-i}(x)D^i(y) + xD^n(y) \\
&= D^n(x)y + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} D^{n-i}(x)D^i(y) + xD^n(y) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} D^{n-i}(x)D^i(y).
\end{aligned}$$

Luego la igualdad se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Para finalizar esta sección, se presenta una relación para calcular $D(b^n)$ conociendo $D(b)$, donde D es una derivación de un anillo B y $b \in B$. Note que, dado $f(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i t^i \in B[t] = B^{[1]}$, $f(b) \in B$ para cada $b \in B$, luego tiene sentido evaluar D en $f(b)$. También se tiene que $\sum_{i=0}^{n} D(b_i)t^i \in B[t]$, y se denota como $f^{(D)}(t)$.

El siguiente teorema muestra la relación entre las anteriores expresiones.

Teorema 4. *Sean B un anillo y $D : B \to B$ una derivación de B. Las siguientes afirmaciones son verdaderas.*

1. $D(b^n) = nb^{n-1}D(b)$, *para todo* $b \in B$, $n \in \mathbb{N}$ *y* $n \geq 2$.

2. *Sea* $f(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i t^i \in B[t] = B^{[1]}$. *La siguiente igualdad se cumple para todo* $b \in B$

$$D(f(b)) = f^{(D)}(b) + f'(b)D(b), \tag{1.1}$$

donde $f'(b) = \sum_{i=1}^{n} ib_i b^{i-1}$.

Demostración. Sean B un anillo, $D : B \to B$ una derivación, $b \in B$ y $n \in \mathbb{N}$.

1. Por inducción sobre n se prueba que $D(b^n) = nb^{n-1}D(b)$.

   Si $n = 2$, se tiene que

$$\begin{aligned} D(b^2) &= D(bb) \\ &= D(b)b + bD(b) \\ &= 2bD(b) \\ &= 2b^{2-1}D(b). \end{aligned}$$

   Ahora suponiendo que la igualdad es verdadera para $n = k > 2$, esto es $D(b^k) = kb^{k-1}D(b)$, se prueba que la afirmación 1 se cumple para $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} D(b^{k+1}) &= D(b^k b) \\ &= D(b^k)b + b^k D(b) \\ &= kb^{k-1}D(b)b + b^k D(b) \\ &= kb^k D(b) + b^k D(b) \\ &= (k+1)b^k D(b) \\ &= (k+1)b^{(k+1)-1}D(b). \end{aligned}$$

   Luego, por el principio de inducción matemática se tiene que, $D(b^n) = nb^{n-1}D(b)$ para todo $n \geq 2$ con $n \in \mathbb{N}$.

2. Ahora se probará que

$$D(f(b)) = f^{(D)}(b) + f'(b)D(b) \tag{1.2}$$

$$
\begin{aligned}
D(f(b)) &= D\left(\sum_{i=0}^{n} b_i b^i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} D(b_i b^i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} [D(b_i)b^i + b_i D(b^i)] \\
&= \sum_{i=0}^{n} D(b_i)b^i + \sum_{i=0}^{n} b_i D(b^i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} D(b_i)b^i + \sum_{i=1}^{n} b_i i b^{i-1} D(b) \\
&= f^{(D)}(b) + f'(b)D(b).
\end{aligned}
$$

$\square$

Observación. Si $b_i \in ker(D)$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ entonces la fórmula (1.2) se simplifica a $D(f(b)) = f'(b)D(b)$.

1.1.2. Derivación en anillos de polinomios

Sea $B = A[x_1, x_2, \ldots, x_n] = A^{[n]}$ un anillo de polinomios. Por el Teorema 2 se sabe que $Der_A(B)$ es un B-submódulo de $Der(B)$. El objetivo fundamental en esta sección es mostrar que $Der_A(B)$ es un B-módulo libre.

Observación. Si se considera el anillo de polinomios $B = A[t]$ como una A-álgebra se tiene que un conjunto generador de B es $\{t\}$. Por el Teorema 4, para definir una A-derivación en el anillo $B = A^{[1]}$, basta conocer cómo actua la derivada en t.

Una derivación particular en el anillo de polinomios está dada por la siguiente definición.

Definición 8. *Sea A un anillo y $B = A[t]$. Se define la aplicación $\frac{d}{dt} : B \to B$ por la formula $\frac{d}{dt}(\sum\limits_{i=0}^{n} a_i t^i) = \sum\limits_{i=0}^{n} i a_i t^{i-1}$ donde $a_i \in A$ para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$.*

Del Teorema 3 se deduce que para $t^n \in B$, $\frac{d}{dt}(t^n) = nt^{n-1}$. En general, para $p(t) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i t^i \in B$, $\frac{d}{dt}(p(t)) = \sum\limits_{i=1}^{n} i a_i t^{i-1}$.

Notación: Para $p(t) \in B$ se denota $p'(t) = \frac{d}{dt}(p(t))$. Análogamente, dado $n \in \mathbb{N}_0$, $p^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n}(p(t))$ denota la $n-$ésima derivada $\left(\frac{d}{dt}\right)^n (p(t))$.

El núcleo de la derivada con respecto a t en $\mathbb{K}[t]$ depende de la característica de $\mathbb{K}$. En general calcular el núcleo de una derivación en $B = \mathbb{K}^{[n]}$ es un problema abierto en álgebra conmutativa; en este sentido cabe resaltar que este problema esta resuelto para $n = 1, 2$ y parcialmente resuelto para $n = 3$, como se muestra en el siguiente teorema para $n = 1$:

Teorema 5. *Sea D la derivada con respecto a t en $\mathbb{K}[t]$.*

1. *Si la característica de $\mathbb{K}$ es cero entonces $ker(D) = \mathbb{K}$.*
2. *Si la característica de $\mathbb{K}$ es $p > 0$ entonces $ker(D) = \mathbb{K}[t^p]$.*

Demostración.

1. Sea $\mathbb{K}$ es un campo de característica cero, se prueba que $ker(D) = \mathbb{K}$. Es claro que $\mathbb{K} \subseteq Ker(D)$. Ahora si se toma $q(t) = \sum_{i=0}^{m} a_i t^i \in ker(D)$, entonces se tiene que $ia_i = 0$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Como la característica de $\mathbb{K}$ es cero entonces $a_i = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.Así, $q(t) = a_0 \in \mathbb{K}$ de donde $Ker(D) \subseteq \mathbb{K}$ y $ker(D) = \mathbb{K}$.

2. Sea $\mathbb{K}$ un campo de característica $p > 0$, entonces

   a) $\mathbb{K}[t^p] \subseteq Ker(D)$.
   En efecto sea $q(t^p) = \sum_{i=0}^{m} a_i (t^p)^i \in \mathbb{K}[t^p]$, derivando se tiene que $D(q(t^p)) = \sum_{i=1}^{m} (pi) a_i t^{(pi-1)} = \sum_{i=1}^{m} i(pa_i) t^{(pi-1)}$, como la característica de $\mathbb{K}$ es p, entonces $pa_i = 0$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ luego $D(q(t^p)) = 0$ y $q(t^p) \in Ker(D)$.

   b) $Ker(D) \subseteq \mathbb{K}[t^p]$,
   Se probará por contradición. Supóngase que existe un polinomio $q(t) = \sum_{i=0}^{m} a_i t^i \in Ker(D)$ y que $q(t)$ no está en $\mathbb{K}[t^p]$, entonces existe un término $j-$ ésimo no nulo $a_j t^j$ de $q(t)$, tal que $j = kp + s$ donde $k, p \in \mathbb{N}$ y $0 < s < p$. Derivando $q(t)$ se tiene que $\sum_{i=1}^{m} i a_i t^{i-1} = 0$, por igualdad de polinomios $ia_i = 0$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, en particular para j

$$\begin{aligned} ja_j &= 0 \\ (kp + s)a_j &= 0 \\ sa_j &= (s1)a_j = 0. \end{aligned}$$

   Esto es una contradición, ya que $a_j \neq 0$ y $0 < s1 \neq 0$. Por lo tanto, $q(t) \in \mathbb{K}[t^p]$.

De lo anterior $Ker(D) = \mathbb{K}[t^p]$. $\square$

Ejemplo 2. *Sean* $B = \mathbb{Z}_5[t]$ *y* $D = \frac{d}{dt}$. *Esta es una* $\mathbb{Z}_5-$*derivación en* B*, además por el Teorema 4. se sabe que* $Ker(D) = \mathbb{Z}_5[t^5]$.
En particular, para $p(t) = 4t^5+3t+1$, $D(p(t)) = \frac{d}{dt}(4t^5+3t+1) = 3$ *y para* $q(t) = t^{20}+2t^{15}-t^5+4$, *la derivada*
$D(q(t)) = \frac{d}{dt}(t^{20} + 2t^{15} - t^5 + 4) = 0$, *ya que* $q \in \mathbb{Z}_5[t^5]$.

En general para un anillo de polinomios con n indeterminadas se puede definir la derivada con respecto a alguna de sus variables así:

Definición 9. *Sea* A *un anillo y* $B = A[x_1, x_2, \ldots, x_n] = A^{[n]}$ *el anillo de polinomios sobre* A. *La derivada parcial,* $\frac{\partial}{\partial x_i}$ *es la única* A*-derivada de* B *definida por* $\frac{\partial}{\partial x_i}(x_i) = 1$ *y* $\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j) = 0$, *para todo* $i \neq j$.

Observación. Sean A un anillo y el anillo de polinomios $B = A[x_1, x_2, \ldots, x_n] = A^{[n]}$ y $f_1, f_2, \ldots, f_n \in B$. Como $Der_A(B)$ es un $B-$módulo entonces $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in Der_A(B)$, aún más cualquier A-derivación de B puede expresarse de esta forma, como se prueba a continuación.

Teorema 6. *Sean* A *un anillo y* $B = A[x_1, \ldots, x_n] = A^{[n]}$. *Entonces:*

1. *Si* $D \in Der_A(B)$ *y* $f \in B$ *entonces* $D(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f D(x_i)$.
2. *Si* $f_1, f_2, ..., f_n \in A^{[n]}$ *entonces existe una única* $A-$*derivación* D *de* B*, tal que* $D(x_i) = f_i$ *para todo* $i \in 1, 2, ..., n$. *Esta derivación es dada por* $D = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}$.

Demostración.

1. Sea $D \in Der_A(B)$ y se verifica que el conjunto $M = \{g \in A^{[n]}; D(g) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} g D(x_i)\}$ es una $A-$subálgebra de B:

   a) Primero se prueba que M es un subanillo de B.

      1) Para cada $a \in A$, se tiene que $D(a) = 0$ ya que $D \in Der_A(B)$, y
      $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a D(x_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} 0 D(x_i) = 0 = D(a)$, así $M \neq \emptyset$.

2) Sean $f, g \in M$, entonces

$$D(f) - D(g) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f D(x_i) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} g D(x_i);$$
$$D(f-g) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(f-g) D(x_i).$$

Luego, $f - g \in M$.

3) Además si $f, g \in M$ entonces $fg \in M$. Veamos:

$$\begin{aligned} D(fg) &= fD(g) + gD(f) \\ &= f\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} g D(x_i) + g\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f D(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[f\frac{\partial}{\partial x_i} g + g\frac{\partial}{\partial x_i} \right] f D(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(fg) D(x_i). \end{aligned}$$

Luego, $M \leqslant B$.

b) Ahora se prueba que si $g \in M$ y $a \in A$, entonces $ag \in M$.

$$\begin{aligned} D(ag) &= aD(g) + gD(a) \\ &= a\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} g D(x_i) + g0 \\ &= \sum_{i=1}^{n} a\frac{\partial}{\partial x_i} g D(x_i) + g\frac{\partial}{\partial x_i} a D(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(ag) D(x_i). \end{aligned}$$

De ahí que $ag \in M$. Luego, M es una A-subálgebra de B.

Además, $x_i \in M$ para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$, ya que $\frac{\partial}{\partial x_i}(x_i) = 1$ y $\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j) = 0$ para $i \neq j$, entonces se tiene que $\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(x_i) D(x_j) = \frac{\partial}{\partial x_i}(x_i) D(x_i) = 1D(x_i) = D(x_i)$. Como $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ genera a B, entonces $M = B$.

2. Por la anterior observación se sabe que $D = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in Der_A(B)$ y $D(x_i) = f_i$ para todo $i = 1, 2, ..., n$. Para probar la unicidad se supone que $D_1 \in Der_A(B)$ y que satisface

$D_1(x_i) = f_i$.

Ahora si $f \in B$, por el item(1) se tiene que:

$$\begin{aligned} D_1(f) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f D_1(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f f_i \\ &= D(f). \end{aligned}$$

Luego $D_1 = D$ y esta derivación es única.

$\square$

El teorema anterior permite concluir que si A es un anillo y $B = A[x_1, x_2, \ldots, x_n] = A^{[n]}$, entonces $Der_A(B)$ es un B-módulo libre con base $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$.

Ejemplo 3. *Sean $B = \mathbb{Z}_4[x, y]$ y $f_1(x, y) = 2x - y$, $f_2(x, y) = 3x^2 - 1 \in B$, si se considera la $\mathbb{Z}_4$-derivación $D : B \longrightarrow B$, tal que $D(x) = f_1$ y $D(y) = f_2$ entonces $D = f_1\frac{\partial}{\partial x} + f_2\frac{\partial}{\partial y}$ y para:*

1. *$f(x, y) = 2x - 3y \in B$ se tiene que*

$$\begin{aligned} D(f) &= (2x - y)\frac{\partial}{\partial x}(2x - 3y) + (3x^2 - 1)\frac{\partial}{\partial y}(2x - 3y) \\ &= (2x - y)2 + (3x^2 - 1)(-1) \\ &= -2y - 3x^2 + 1 \\ &= x^2 + 2y + 1. \end{aligned}$$

2. *$g(x, y) = 2x^2y^2 - 3 \in B$ se tiene que*

$$\begin{aligned} D(g) &= (2x - y)\frac{\partial}{\partial x}(2x^2y^2 - 3) + (3x^2 - 1)\frac{\partial}{\partial y}(2x^2y^2 - 3) \\ &= (2x - y)0 + (3x^2 - 1)0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Entonces $g \in ker(D)$.

Para finalizar esta sección, se determinará bajo que condiciones el núcleo de una derivación D de un anillo B es algebraicamente cerrado en B.

Definición 10. *Sean $A \leq B$ anillos. Un elemento $b \in B$ es algebraico sobre A si existe un polinomio no cero $f \in A[t]$ tal que $f(b) = 0$; si b no es algebraico sobre A, se dice que b es transcendental sobre A y se dice que A es algebraicamente cerrado en B si cada elemento de $B \backslash A$ es trascendental sobre A.*

Lema 2. *Si B es un dominio de característica cero y $D \in Der(B)$,entonces $ker(D)$ es algebraicamente cerrado en B.*

Demostración. Sea $A = ker(D) \leq B$ y consideremos $b \in B$ algebraico sobre A, es decir existe un polinomio no cero $f = \sum_{i=1}^{n} b_i t^i \in A[t]$ de grado minimal tal que $f(b) = 0$ entonces $0 = D(f(b))$, luego por la ecuación (1.1) se tiene que

$$\begin{aligned} 0 = D(f(b)) &= f^{(D)}(b) + f'(b)D(b) \\ &= \sum_{i=0}^{n} D(b_i)b^i + f'(b)D(b). \end{aligned}$$

Como $b_i \in A[t]$ entonces $D(b_i) = 0$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, por tanto

$$f'(b)D(b) = 0.$$

Dado que f es el polinomio de grado minimal tal que $f(b) = 0$, entonces $f'(b) \neq 0$, asi $D(b) = 0$ luego $b \in ker(D) = A$. Esto indica que no hay elementos algebraicos de $B \backslash A$ sobre A. □

Observación. Sea B un anillo de característica $n > 0$ y sea $0 \neq D \in Der(B)$. Para cada $b \in B$ es facil probar que $b^n \in ker(D)$. En efecto, dado que la característica de B es n y $b^{n-1} \in B$, se tiene que $D(b^n) = nb^{n-1}D(b) = 0$. Es decir, $b^n \in ker(D)$.
De lo anterior se puede concluir que, $ker(D)$ no es algebraicamente cerrado en B, ya que para cualquier elemento $b \in B$, existe $p(x) = x^n - b^n \in ker(D)[x]$ tal que $p(b) = b^n - b^n = 0$, de aquí que b es algebraico sobre $ker(D)$, luego $ker(D)$ no es algebraicamente cerrado en B.

1.1.3. Derivación Jacobiana en $\mathbb{K}^{[n]}$

Se puede construir una derivada en el anillo de polinomios $B = \mathbb{K}^{[n]}$ como en la Definición 12 y se denomina Derivación Jacobiana. El estudio de esta derivación es de gran importancia para el desarrollo de este trabajo, como se vera más adelante está estrechamente relacionada con el Problema de Extendibilidad.

Definición 11. *Sea* $B = \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n] = \mathbb{K}^{[n]}$ *y* $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in B^n$*, se define la matriz jacobiana de* f *por*

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(f_1) & \frac{\partial}{\partial x_2}(f_1) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_1) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(f_2) & \frac{\partial}{\partial x_2}(f_2) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_2) \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(f_n) & \frac{\partial}{\partial x_2}(f_n) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_n) \end{pmatrix}$$

Definición 12. *Sean* $B = \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n] = \mathbb{K}^{[n]}$ *y* $f = (f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}) \in B^{n-1}$*, se define la Derivada Jacobiana* Δ_f *en* $g \in B$ *por*

$$\Delta_f(g) = det(J(f, g)),\ \text{donde } J(f, g) \text{ es la matriz jacobiana de } (f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, g) \in B^n.$$

Un resultado clásico con relación a esta derivación se presenta en el siguiente teorema.

Teorema 7. *Si* B, f *y* Δ_f *son como en la definición anterior, entonces* $\Delta_f \in Der_{\mathbb{K}}(B)$*.*

Demostración. Para g, h elementos de B, se tiene que

$$\Delta f(g+h) = det\left(\frac{\partial}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)}(f, g+h)\right)$$

$$= det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(f_1) & \frac{\partial}{\partial x_2}(f_1) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_1) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(f_2) & \frac{\partial}{\partial x_2}(f_2) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_2) \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(f_{n-1}) & \frac{\partial}{\partial x_2}(f_{n-1}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_{n-1}) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(g+h) & \frac{\partial}{\partial x_2}(g+h) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(g+h) \end{pmatrix}$$

$$= det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(f_1) & \frac{\partial}{\partial x_2}(f_1) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_1) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(f_2) & \frac{\partial}{\partial x_2}(f_2) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_2) \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(f_{n-1}) & \frac{\partial}{\partial x_2}(f_{n-1}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_{n-1}) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(g) + \frac{\partial}{\partial x_1}(h) & \frac{\partial}{\partial x_2}(g) + \frac{\partial}{\partial x_2}(h) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(g) + \frac{\partial}{\partial x_n}(h) \end{pmatrix}$$

$$= det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(f_1) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_1) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(f_2) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_2) \\ \vdots & & \ddots \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(f_{n-1}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_{n-1}) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(g) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(g) \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(f_1) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_1) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(f_2) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_2) \\ \vdots & & \ddots \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(f_{n-1}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_{n-1}) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(h) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(h) \end{pmatrix}$$

$$= \Delta f(g) + \Delta f(h).$$

$$\Delta f(gh) = det \left(\frac{\partial}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)}(f, gh) \right)$$

$$= det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(f_1) & \frac{\partial}{\partial x_2}(f_1) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_1) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(f_2) & \frac{\partial}{\partial x_2}(f_2) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_2) \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(f_{n-1}) & \frac{\partial}{\partial x_2}(f_{n-1}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_{n-1}) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(gh) & \frac{\partial}{\partial x_2}(gh) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(gh) \end{pmatrix}$$

$$= det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(f_1) & \frac{\partial}{\partial x_2}(f_1) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_1) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(f_2) & \frac{\partial}{\partial x_2}(f_2) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_2) \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(f_{n-1}) & \frac{\partial}{\partial x_2}(f_{n-1}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_{n-1}) \\ h\frac{\partial}{\partial x_1}(g) + g\frac{\partial}{\partial x_1}(h) & h\frac{\partial}{\partial x_2}(g) + g\frac{\partial}{\partial x_2}(h) & \cdots & h\frac{\partial}{\partial x_n}(g) + g\frac{\partial}{\partial x_n}(h) \end{pmatrix}$$

$$= det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(f_1) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_1) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(f_2) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_2) \\ \vdots & & \ddots \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(f_{n-1}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_{n-1}) \\ h\frac{\partial}{\partial x_1}(g) & \cdots & h\frac{\partial}{\partial x_n}(g) \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(f_1) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_1) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(f_2) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_2) \\ \vdots & & \ddots \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(f_{n-1}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_{n-1}) \\ g\frac{\partial}{\partial x_1}(h) & \cdots & g\frac{\partial}{\partial x_n}(h) \end{pmatrix}$$

$$= hdet \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(f_1) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_1) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(f_2) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_2) \\ \vdots & & \ddots \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(f_{n-1}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_{n-1}) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(g) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(g) \end{pmatrix} + gdet \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(f_1) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_1) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(f_2) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_2) \\ \vdots & & \ddots \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(f_{n-1}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_{n-1}) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(h) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(h) \end{pmatrix}$$

$$= h\Delta f(g) + g\Delta f(h).$$

Luego $\Delta f \in Der(B)$.

Sea $k \in \mathbb{K}$. Entonces

$$\Delta f(k) = det\left(\frac{\partial}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)}(f, k)\right)$$

$$= det\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(f_1) & \frac{\partial}{\partial x_2}(f_1) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_1) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(f_2) & \frac{\partial}{\partial x_2}(f_2) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_2) \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(f_{n-1}) & \frac{\partial}{\partial x_2}(f_{n-1}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_{n-1}) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(k) & \frac{\partial}{\partial x_2}(k) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(k) \end{pmatrix}$$

$$= det\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(f_1) & \frac{\partial}{\partial x_2}(f_1) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_1) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(f_2) & \frac{\partial}{\partial x_2}(f_2) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_2) \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(f_{n-1}) & \frac{\partial}{\partial x_2}(f_{n-1}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_{n-1}) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 0$$

De lo anterior, se tiene que $\Delta f \in Der_{\mathbb{K}}(B)$.

$\square$

Nota 1. *Si $g = f_i$ para algún $i \in \{1, 2, \ldots n-1\}$ entonces $\Delta_f(g) = \Delta_f(f_i) = 0$ y como $ker(\Delta_f)$ es un subanillo de B se tiene que $\mathbb{K}[f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}] \subseteq ker(\Delta f)$.*

Ejemplo 4. *Sean $f_1 = x^2 + y^2$ y $f_2 = xy + yz + xz$ elementos de $B = \mathbb{R}[x, y, z] = \mathbb{R}^{[3]}$. Si consideramos $f = (f_1, f_2) \in B^2$ entonces la derivación jacobiana $D = \Delta_f : B \to B$ para $h \in B$ esta dada por*

$$\Delta_f(h) = det\begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ y+z & x+z & y+x \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Y para los elementos generadores de B

$$\Delta_f(x) = det\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(f_1) & \frac{\partial}{\partial y}(f_1) & \frac{\partial}{\partial z}(f_1) \\ \frac{\partial}{\partial x}(f_2) & \frac{\partial}{\partial y}(f_2) & \frac{\partial}{\partial z}(f_2) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= det \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ y+z & x+z & x+y \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= 2y^2 + 2yz := g_1.$$

$$\Delta_f(y) = det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(f_1) & \frac{\partial}{\partial y}(f_1) & \frac{\partial}{\partial z}(f_1) \\ \frac{\partial}{\partial x}(f_2) & \frac{\partial}{\partial y}(f_2) & \frac{\partial}{\partial z}(f_2) \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= det \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ y+z & x+z & x+y \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= -2x^2 - 2xy := g_2.$$

$$\Delta_f(z) = det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(f_1) & \frac{\partial}{\partial y}(f_1) & \frac{\partial}{\partial z}(f_1) \\ \frac{\partial}{\partial x}(f_2) & \frac{\partial}{\partial y}(f_2) & \frac{\partial}{\partial z}(f_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= det \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ y+z & x+z & x+y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= 2x^2 + 2xz - 2yz - 2y^2 := g_3.$$

Luego, como $\Delta_f \in Der_{\mathbb{R}}(B)$ por el Teorema 7 para cada $h \in B$ se tiene que $\Delta_f(h) = g_1\frac{\partial h}{\partial x} + g_2\frac{\partial h}{\partial y} + g_3\frac{\partial h}{\partial z}$.

Capítulo 2

DERIVACIONES LOCALMENTE NILPOTENTES

En este capitulo se presentan algunos resultados básicos sobre la teoría de derivaciones localmente nilpotentes, que son fundamentales para el desarrollo de este trabajo.

2.1. Conceptos y Resultados Básicos

Definición 13. *Sean B un anillo y $D \in Der(B)$. Se define el conjunto*

$$Nil(D) = \{x \in B, \exists n \in \mathbb{N} | D^n(x) = 0\}$$

Observación. El núcleo de una derivación D está contenido en $Nil(D)$ ya que para $x \in ker(D)$ existe $n = 1$ tal que $D^1(x) = D(x) = 0$. Además, $Nil(D)$ es una subálgebra de B como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 8. *Sean B un anillo y $D \in Der(B)$. Entonces el conjunto $Nil(D)$ es una $A-$subálgebra de B, donde $A = ker(D)$.*

Demostración. $1 \in Nil(D)$ ya que $1 \in ker(D)$.
Sean $x, y \in Nil(D)$. Entonces existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $D^n(x) = D^m(y) = 0$.

Considere $M = \text{máx}\{m, n\}$, luego existen $k, t \in \mathbb{N}$ tales que $M = k + n$ y $M = t + m$. Así

$$\begin{aligned} D^M(x - y) &= D^M(x) + D^M(-y) \\ &= D^M(x) - D^M(y) \\ &= D^{k+n}(x) - D^{t+m}(y) \\ &= D^k(D^n(x)) - D^t(D^m(y)) \\ &= D^k(0) - D^t(0) \\ &= 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $x - y \in Nil(D)$.

Ahora, usando la regla de Leibniz se tiene que

$$\begin{aligned} D^{m+n}(xy) &= \sum_{i=0}^{m+n} \begin{pmatrix} m+n \\ i \end{pmatrix} D^{m+n-i}(x)D^i(y) \\ &= \sum_{i=0}^{m+n} \begin{pmatrix} m+n \\ i \end{pmatrix} \underbrace{D^{m+n-i}(x)D^i(y)}_{(1,1)}. \end{aligned}$$

Como $0 \leq i \leq m + n$, se consideran dos casos para i con respecto a m.

1. Si $i \geq m$, entonces

$$\begin{aligned} D^i(y) &= D^{i-m}(D^m(y)) \\ &= D^{i-m}(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

   Luego $D^{m+n-i}(x)D^i(y) = 0$.

2. Ahora si $i < m$, entonces $m + n - i = (m - i) + n > n$. Luego $D^{m+n-i}(x) = 0$, de donde se tiene que $D^{m+n-i}(x)D^i(y) = 0$.

De 1 y 2 se concluye que $D^{m+n-i}(x)D^i(y) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$ es decir, $D^{m+n}(xy) = 0$. Por lo tanto $xy \in Nil(D)$. De lo anterior se concluye que $Nil(D)$ es un subanillo de B. Además, si $a \in ker(D)$, $x \in Nil(D)$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $D^n(ax) = a^n D^n(x)$, de ahí que facilmente se verifica $ax \in Nil(D)$. $\square$

El estudio de las derivaciones D de un anillo B que satisfacen la propiedad $Nil(D) = B$ es fundamental para el desarrollo de este trabajo. A continuación se presentan hechos importantes con relación a este tipo de derivaciones.

Definición 14. *Sea B un anillo. Una derivación D de B es localmente nilpotente si y solo si $Nil(D) = B$.*

En otras palabras una derivación D de un anillo B es localmente nilpotente si para cada $b \in B$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $D^n(b) = 0$. El conjunto de todas las derivaciones localmente nilpotentes de un anillo B se denota por $LND(B)$.
Cada derivación localmente nilpotente de un anillo B induce una función grado de B en $\mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ como sigue.

Definición 15. *Sean B un anillo y $D \in LND(B)$. Se define la función*

$$deg_D : B \to \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$$

dada por $deg_D(x) =$máx$\{n \in \mathbb{N} | D^n(x) \neq 0\}$ para $x \in B \backslash \{0\}$ y $deg_D(0) = -\infty$.

Observación. Si $deg_D(x) = n$ para $x \in B\backslash\{0\}$, entonces $D^n(x) \neq 0$ y $D^{n+1}(x) = 0$.

Ejemplo 5. *Sean A un anillo, $B = A[t] = A^{[1]}$ y $D = \frac{d}{dt}$ la derivada con respecto a t de B. Entonces $t \in Nil(D)$, luego si $p(t) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i t^i \in B$, se tiene que $p(t) \in Nil(D)$ por ser $Nil(D)$ una $A-$subálgebra de B. Así se concluye que, en este caso, $Nil(D) = B$ y por tanto $\frac{d}{dt}$ es una derivación localmente nilpotente de B.*
En el caso en que A sea un dominio de característica cero, la función deg_D asociada a la derivada con respecto a t coincide con la función grado definida en B, la cual asigna a cada polinomio su grado. En efecto, si $p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ es un polinomio de grado n ($a_n \neq 0$), se sabe que ${\frac{d}{dt}}^{n+1}(p(t)) = 0$ y ${\frac{d}{dt}}^{n}(p(t)) = n!a_n$, como $a_n \neq 0$ y la característica de A es cero entonces $n!a_n \neq 0$ esto indica que $deg_D(p(t)) = n$.

Ejemplo 6. *Sean A un anillo y $B = A[x_1, ..., x_n] = A^{[n]}$. La derivada parcial $\frac{\partial}{\partial x_i} \in LND(B)$ para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$ ya que para $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B \setminus \{0\}$, $(\frac{\partial}{\partial x_i})^{m_i+1}[p(x_1, \ldots, x_n)] = 0$ donde m_i es el grado de $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en la variable x_i.*

Teorema 9. *Sean B un anillo, $D \in LND(B)$ y $A = ker(D)$. Entonces*

1. *Si $a \in A$ entonces $(aD)^n = a^n D^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

2. *Si $a \in A$ entonces $aD \in LND(B)$.*

Demostración. Sean B un anillo, $D \in LND(B)$ y $A = ker(D)$

1. Sean $a \in A$ y $x \in B$, por inducción matemática sobre $n \in \mathbb{N}$ se muestra que $(aD)^n = a^n D^n$.

   Para $n = 0$:

$$\begin{aligned}(aD)^0(x) &= x\\ &= 1x\\ &= a^0 D(x)\end{aligned}$$

   Para $n = 1$:

$$\begin{aligned}(aD)^1(x) &= aD(x)\\ &= a^1 D^1(x)\end{aligned}$$

   Para $n = 2$:

$$\begin{aligned}(aD)^2(x) &= (aD)[(aD)(x)]\\ &= (aD)[aD(x)]\\ &= aD[aD(x)]\\ &= a(D(a)D(x) + aD^2(x))\\ &= a(aD^2(x))\\ &= a^2 D^2(x)\end{aligned}$$

   Luego $(aD)^2(x) = a^2 D^2(x)$ para todo $x \in B$.

   Ahora suponga que $(aD)^k = a^k D^k$, para todo $n \leq k$. Se debe probar que, $(aD)^{k+1}(x) = a^{k+1} D^{k+1}(x)$ con $x \in B$

$$\begin{aligned}(aD)^{k+1}(x) &= (aD)[(aD)^k(x)]\\ &= (aD)[a^k D^k(x)]\\ &= a(D(a^k)D^k(x) + a^k D^{k+1}(x))\\ &= a(ka^{k-1}D(a)D^k(x) + a^k D^{k+1}(x))\\ &= a(a^k D^{k+1}(x))\\ &= a^{k+1} D^{k+1}(x)\end{aligned}$$

   Luego $(aD)^{k+1}(x) = a^{k+1} D^{k+1}(x)$.

   Por lo tanto $(aD)^n = a^n D^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Sea $a \in A$, se debe mostrar que $aD \in LND(B)$, es decir, para cada elemento $x \in B$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(aD)^n(x) = 0$.

   Dado que $D \in LND(B)$, para cada $x \in B$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $D^n(x) = 0$ y por 1 se tiene que

$$\begin{aligned}(aD)^n(x) &= a^n D^n(x)\\ &= a^n 0\\ &= 0.\end{aligned}$$

   Así, $aD \in LND(B)$.

$\square$

Observación. El conjunto de derivaciones localmente nilpotentes de un anillo B no tiene estructura de anillo, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7. *Para $B = \mathbb{K}[x, y] = \mathbb{K}^{[2]}$ se sabe que $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}$ es una base para $Der_{\mathbb{K}}(B)$ y como cada derivada parcial es una derivación localmente nilpotente de B, se puede pensar que cualquier $\mathbb{K}$-derivación de B es una derivación localmente nilpotente de B.*
Sin embargo, si $D = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} \in Der_{\mathbb{K}}(B)$, $x, y \notin Nil(D)$. En efecto, dado que $D(x) = y$, $D(y) = x$ para $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$D^n(x) = \begin{cases} x, si \quad n \quad es \quad par \\ y, si \quad n \quad es \quad impar \end{cases}$$

Verificar que una derivación de un anillo de polinomios es localmente nilpotente, no es fácil. Por ejemplo, *¿las derivaciones $D_1 = x\frac{\partial}{\partial y}$ y $D_2 = y\frac{\partial}{\partial x}$ del anillo $B = \mathbb{K}[x, y] = \mathbb{K}^{[2]}$, son localmente nilpotentes?*, responder a esta pregunta a partir de la definición de derivación localmente nilpotente es complejo, aunque la respuesta es afirmativa. El lema siguiente muestra un criterio que permite decidir si una derivación de un anillo de polinomios es localmente nilpotente; antes de enunciarlo es necesario tener en cuenta la siguiente definición.

Definición 16. *Sean A un anillo y $B = A[x_1, x_2, ..., x_n] = A^{[n]}$. Una derivación $D : B \to B$ es triangular si $D(A) = \{0\}$, $D(x_i) \in A[x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}]$ para todo $i \in \{2, ..., n\}$ y $D(x_1) \in A$.*

Observación. De acuerdo con la definición anterior, toda derivación triangular D de $B = A^{[n]}$ es una A-derivación de B.

Lema 3. *Sean A un anillo y $B = A[x_1, x_2, ..., x_n] = A^{[n]}$. Entonces toda derivación triangular de B es localmente nilpotente.*

Demostración. Sea $D : B \to B$ una derivación triangular. Para demostrar que D es una derivación localmente nilpotente se debe mostrar que $B = A[x_1, x_2, ..., x_n] \subseteq Nil(D)$.
Sea $x_1 \in B$, como D es triangular $D(x_1) = a \in A$, luego existe $n = 2 \in \mathbb{N}$ tal que $D^2(x_1) = D(D(x_1)) = D(a) = 0$, así $x_1 \in Nil(D)$.
Ahora para $x_2 \in B$, se tiene que $D(x_2) \in A[x_1] \subseteq Nil(D)$, luego existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $D^n(D(x_2)) = 0$, así $n + 1 \in \mathbb{N}$ y $D^{n+1}(x_2) = 0$, por tanto $x_2 \in Nil(D)$.
Mediante un proceso inductivo se concluye que, $x_1, x_2, ..., x_n \in Nil(D)$ y como $Nil(D)$ es una A-subálgebra de B, se tiene que $A[x_1, x_2, ..., x_n] \subseteq Nil(D)$. Por lo tanto, $B = Nil(D)$. Esto es, D es una derivación localmente nilpotente de B. $\square$

Ejemplo 8. *Sea $B = \mathbb{K}[x, y] = \mathbb{K}^{[2]}$ un anillo de polinomios. Las derivaciones $D_1 = x\frac{\partial}{\partial y}$, $D_2 = y\frac{\partial}{\partial x}$ de B son triangulares ya que para D_1 se tiene que*

$$D_1(\mathbb{K}) = 0.$$
$$D_1(x) = 0 \in \mathbb{K}.$$
$$D_1(y) = x \in \mathbb{K}[x].$$

Y para D_2 si se considera la igualdad $\mathbb{K}[x, y] = \mathbb{K}[y, x]$,

$$D_2(\mathbb{K}) = 0.$$
$$D_2(y) = 0 \in \mathbb{K}.$$
$$D_2(x) = y \in \mathbb{K}[y].$$

Por el Lema anterior se concluye que las derivaciones D_1 y D_2 son derivaciones localmente nilpotentes.

A continuación se estudiarán algunos resultados básicos de derivaciones en un anillo cociente.

Si B es un anillo, $D \in Der(B)$ y S es un subconjunto multiplicativamente cerrado de $A = Ker(D)$, entonces la función

$$S^{-1}D : S^{-1}B \to S^{-1}B$$

definida por la fórmula

$$S^{-1}D\left(\frac{r}{s}\right)=\frac{D(r)}{s}$$

para $r\in B$ y $s\in S$, es una derivación $S^{-1}B$ que extiende D.

En efecto para $\frac{x}{s},\frac{y}{t}\in S^{-1}B$ se tiene que

$$\begin{aligned}S^{-1}D\left(\frac{x}{s}-\frac{y}{t}\right)&=S^{-1}D\left(\frac{xt-ys}{st}\right)\\&=\frac{D(xt-ys)}{st}\\&=\frac{D(xt)-D(ys)}{st},\end{aligned}$$

dado que $S\subseteq A=ker(D)$ lo anterior es iagual a

$$\begin{aligned}&\frac{tD(x)-sD(y)}{st}\\&=\frac{D(x)}{s}-\frac{D(y)}{t}\\&=S^{-1}D\left(\frac{x}{s}\right)-S^{-1}D\left(\frac{y}{t}\right).\end{aligned}$$

Además $S^{-1}D$ es un homomorfismo de $S^{-1}A$- módulos ya que si $\frac{a}{r}\in S^{-1}A$ se tiene que

$$\begin{aligned}S^{-1}D\left(\left(\frac{a}{r}\right)\left(\frac{x}{s}\right)\right)&=S^{-1}D\left(\frac{ax}{rs}\right)\\&=\frac{D(ax)}{rs}\end{aligned}$$

y como $a\in A=ker(D)$ lo anterior es igual a

$$\begin{aligned}&\frac{aD(x)}{rs}\\&=\frac{a}{r}\frac{D(x)}{s}\\&=\frac{a}{r}S^{-1}D\left(\frac{x}{s}\right)\end{aligned}$$

Luego $S^{-1}D:S^{-1}B\to S^{-1}B$ es un homomorfismo de $S^{-1}A$-módulos.

Ahora, una pregunta natural es ¿ si D es localmente nilpotente es $S^{-1}D$ localmente nilpotente?. El siguiente teorema muestra que en efecto, cuando B es un dominio de característica cero $S^{-1}D$ es localmente nilpotente .

Teorema 10. *Sean B un dominio de característica cero, $D\in LND(B)$, con $D\neq 0$, $A=ker(D)$ y $S\subseteq A$ un subconjunto multiplicativamente cerrado. Entonces*

1. $S^{-1}D\in LND(S^{-1}B)$.

2. $ker(S^{-1}D) = S^{-1}A$.

Demostración. 1. Si $D \in LND(B)$ y $S \subset kerD$, sea $\frac{r}{s} \in S^{-1}D$; luego $(S^{-1}D)\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{D(r)}{s}$. Por inducción sobre n se tiene que $(S^{-1}D)^n\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{D^n(r)}{s}$ y de $D^n(r) = 0$ se tiene $(S^{-1}D)^n\left(\frac{r}{s}\right) = 0$. Es decir, $S^{-1}D$ es localmente nilpotente.

2. Dado $\frac{a}{s} \in S^{-1}B$ tenemos que $S^{-1}D\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{D(a)}{s}$, de ahí que claramente $S^{-1}A \subseteq KerS^{-1}D$. Para la otra inclusión, se tiene que $\frac{D(a)}{s} = 0$ si y solo si $D(a) = 0$. Luego $kerS^{-1}D = S^{-1}A$

□

2.2. Derivaciones localmente nilpotentes de $\mathbb{Q}$-álgebras

Dado que $B = \mathbb{C}[X] = \mathbb{C}^{[n]}$ es una $\mathbb{Q}-$ álgebra y que el problema de extendibilidad está definido en B, se requiere estudiar algunos resultados básicos sobre derivaciones localmente nilpotentes definidas en $\mathbb{Q}-$álgebras, los cuales son fundamentales para abordar el objetivo principal de este trabajo que es presentar la relación que existe entre las derivaciones localmente nilpotentes y el problema de extendibilidad.

Teorema 11. *Si B es una $\mathbb{Q}$-álgebra, entonces $Der(B) = Der_{\mathbb{Q}}(B)$.*

Demostración. Como B es una $\mathbb{Q}$-álgebra, $\mathbb{Q} \leq B$. Así se puede hablar del conjunto $Der_{\mathbb{Q}}(B) \subseteq Der(B)$.
Para mostrar que $Der(B) = Der_{\mathbb{Q}}(B)$ solo resta verificar que $Der(B) \subseteq Der_{\mathbb{Q}}(B)$.
Sea $D \in Der(B)$ se debe mostrar que $D(\mathbb{Q}) = 0$. Dado que $\mathbb{Q}$ es el cuerpo de fracciones del dominio entero $\mathbb{Z}$, basta mostrar que la derivada se anula en cada entero y en su inverso multiplicativo.
Verifiquemos que $D(\mathbb{Z}) = \{0\}$. Como $< 1 >= \mathbb{Z}$, es suficiente mostrar que $D(1) = 0$.

$$\begin{aligned} D(1) &= D(1^2) \\ &= 2D(1) \end{aligned}$$

y como B es un dominio de característica cero $D(1) = 0$. Ahora se muestra que para cada

$n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ $D(n^{-1}) = D(1/n) = 0$. Como

$$\begin{aligned} 0 = D(1) &= D(nn^{-1}) \\ &= n^{-1}D(n) + nD(n^{-1}) \\ &= nD(n^{-1}) \end{aligned}$$

y $n \neq 0$, entonces $D(n^{-1}) = 0$.

En general, para $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} D\left(\frac{m}{n}\right) &= D(mn^{-1}) \\ &= n^{-1}D(m) + mD(n^{-1}) \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Es decir, $D \in Der_{\mathbb{Q}}(B)$. $\square$

De lo anterior, se concluye que para el anillo de polinomios $B = \mathbb{Q}[x_1, x_2, ..., x_n] = \mathbb{Q}^{[n]}$, toda derivación definida en B es una $\mathbb{Q}$-derivación ($\mathbb{Q} \subseteq ker(D)$).

Definición 17. *Sea B una $\mathbb{Q}$-álgebra. Dada $D \in LND(B)$ se define la función*

$$\begin{aligned} \xi_D : B &\to B[t] \\ b &\mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}D^n(b)t^n \end{aligned}$$

llamada la función exponencial asociada a D.

Observación. Para cada $b \in B$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}D^n(b)t^n$ es un polinomio en $B[t]$, ya que $D \in LND(B)$ y $\xi_D(b) = \sum_{i=0}^{deg_D(b)} \frac{1}{n!}D^n(b)t^n$.

Ejemplo 9. *Sean $B = \mathbb{Q}[x] = \mathbb{Q}^{[1]}$ y $D = \frac{d}{dx}$. Para $p(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ la función ξ_D asociada a D, asigna a $p(x)$ el polinomio, $\xi_D(p(x)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}D^n(x^2+1)t^n$ y como $deg_D(p(x)) = 2$ entonces*

$$\begin{aligned} \xi_D(p(x)) &= \sum_{n=0}^{2} \frac{1}{n!}D^n(x^2+1)t^n \\ &= D^0(x^2+1) + D^1(x^2+1)t + \frac{1}{2!}D^2(x^2+1)t^2 \\ &= (x^2+1) + (2x)t + \frac{1}{2}(2)t^2 \\ &= x^2 + 1 + 2xt + t^2 \in \mathbb{Q}[x,t]. \end{aligned}$$

Teorema 12. *Sean B una $\mathbb{Q}$-álgebra y $D \in LND(B)$. Entonces la función $\xi_D : B \to B[t]$ es un homomorfismo inyectivo de A-álgebras, donde $A = ker(D)$.*

Demostración. Veamos que ξ_D es inyectiva. Para ello se considera $x, y \in B$ y

$$\xi_D(x) = \xi_D(y)$$
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} D^n(x) t^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} D^n(y) t^n$$

por igualdad de polinomios se tiene que

$$\frac{1}{i!} D^i(x) t^i = \frac{1}{i!} D^i(y) t^i$$
$$D^i(x) = D^i(y)$$
$$D^i(x-y) = 0$$

para todo $i \in \mathbb{N}$, en particular con $i = 0$, se tiene $D^0(x-y) = x - y = 0$, entonces $x = y$.
Así ξ_D es inyectiva.
Ahora se prueba que ξ_D es un homomorfismo de A-álgebras donde $A = ker(D)$.
Sean $x, y \in B$ y $a \in A$. Luego $D(ax+y) = aD(x) + D(y)$ y por inducción sobre n se tiene que $D^n(ax+y) = aD^n(x) + D^n(y)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por tanto $\xi(ax+y) = a\xi(x) + \xi(y)$. Resta probar que $\xi(xy) = \xi(x)\xi(y)$, esto es,

$$\left(\sum_{i\in} \mathbb{N}\frac{1}{i!} D^i(x) t^i\right)\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{j!} D^j(y) t^j\right) = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} D^n(xy) t_n\right). \tag{2.1}$$

Ahora, el coeficiente de t^n em $\xi(x)\xi(y)$ es

$$\begin{aligned}\sum_{i+j=n} \frac{1}{i!}\frac{1}{j!} D^i(x) D^j(y) &= \frac{1}{n!} \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i!j!} D^i(x) D^j(y) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} D^{n-j}(x) D^j(y) = \frac{1}{n!} D^n(xy)\end{aligned}$$

donde la última igualdad sigue de la regla de Leibniz. Luego la igualdad **(2.1)** es válida. Se concluye que ξ es um homomorfismo de A-álgebras. $\square$

En particular si D es la función nula, ξ_D es la función inclusión.

Lema 4. *Sea B una $\mathbb{Q}$-álgebra y $D \in LND(B)$. Entonces ξ_D es la función inclusión si y solo si $D = 0$.*

Demostración. $\Rightarrow$). Se tiene que $\xi_D : B \to B[t]$ es la función inclusión, es decir $\xi_D(b) = b$ para $b \in B$. Luego

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} D^n(b)t^n = b$$

Por igualdad de polinomios se tiene que $\frac{1}{n!}D^n(b) = 0$ para todo $n \geq 1$. Como B es un anillo de característica cero por ser una $\mathbb{Q}$-álgebra, entonces $D^n(b) = 0$ para todo $n \geq 1$. En particular para $n = 1$, $D(b) = 0$ esto es $D = 0$.

$\Leftarrow$). Si D es la derivación nula, claramente $\xi_D(b) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}D^n(b)t^n = b$. Es decir, ξ_D es la función inclusión. □

Ejemplo 1. *Sean $B = \mathbb{C}[x, y, z] = \mathbb{C}^{[3]}$ y $D = x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z}$. Dado que D es una derivación triangular $D \in LND(B)$. Teniendo en cuenta que $\xi_D : B \to B[t]$ es un homomorfismo de $\mathbb{C}$-algebras, ξ_D esta descrito por las imágenes de los generadores de B como $\mathbb{C}$-álgebra y en este caso $\xi_D(x) = 0$, $\xi_D(y) = xt$ y $\xi_D(z) = yt + \frac{1}{2}xt^2$.*

2.3. Slice y Preslice

El objetivo ahora es determinar cuándo $B = A^{[1]}$ con A siendo el núcleo de una derivación localmente nilpotente.

Definición 18. *Sean B un anillo, $D \in LND(B)$ y $s \in B$. Se dice que s es un slice de D si $D(s) = 1$ y s es un preslice de D si $D(s) \neq 0$ y $D^2(s) = 0$.*

Ejemplo 10. *Sea $B = \mathbb{C}[x, y, z] = \mathbb{C}^{[3]}$. Entonces*

1. *x es un slice de $\frac{\partial}{\partial x} \in LND(B)$, ya que $\frac{\partial}{\partial x}(x) = 1$.*

2. *Si $D \in LND(B)$ es tal que $D(z) = y$, $D(y) = x$, D(x)=0, entonces para $f \in B$.*

$$\begin{aligned} D(f) &= f_x D(x) + f_y D(y) + f_z D(z) \\ &= x f_y + y f_z \end{aligned}$$

esto es $D(B)$ está incluido en el ideal de B generado por x e y, por lo tanto D no tiene slice.

Del ejemplo anterior se puede concluir que no toda derivación localmente nilpotente de una anillo B posee un slice. En la actualidad, el problema de determinar condiciones para la existencia de un slice se conoce como El Problema del Slice.

La existencia de un slice en una derivación localmente nilpotente definida en una $\mathbb{Q}$-álgebra, garantiza que B es un anillo de polinomios sobre el núcleo de D como se demuestra en el siguiente teorema.

Teorema 13. *Sea B un dominio que contiene a $\mathbb{Q}$. Si $D \in LND(B)$ tiene un slice $s \in B$ entonces $B = A[s] = A^{[1]}$ donde $A = ker(D)$ y $D = \frac{d}{ds} : A[s] \to A[s]$.*

Demostración. Sea $s \in B$ con $D(s) = 1$ y

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \in A[t] \backslash \{0\}$$

donde $n \geq 0$, $a_i \in A$ y $a_n \neq 0$. Del Teorema 4 se tiene que $D(f(s)) = f'(s)D(s) = f'(s)$ y por inducción $D^j(f(s)) = D^j\left(\sum_{i=0}^{n} a_i s^i\right) = f^{(j)}(s)$ para todo $j \in \mathbb{N}$, donde $f^{(j)}(t) \in A[t]$ indica la j-ésima derivada de f . En particular, $D^n(f(s)) = n!a_n \neq 0$ y por tanto $f(s) \neq 0$. Luego s es trascendente sobre A, esto es, $A[s] = A^{[1]}$. Ahora se prueba que $B = A^{[1]}$. Si se considera la función $\xi : B \to B$ dada por

$$\xi(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{D^j(x)}{j!}(-s)^j,$$

para cada $x \in B$. Siendo $\gamma = -s$ y $c = b$ se sigue del Teorema 12 que ξ es un homomorfismo de A-álgebras y que

$$D(\xi(x)) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{D^{j+1}(x)(-s)^j}{j!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{D^j(x)}{j!} j(-s)^{j-1}(-1) = 0.$$

Luego $\xi(B) \subseteq A$. Siendo ξ un A-homomorfismo se sigue que $\xi(B) = A$. Por inducción sobre el $deg_D(x)$, se muestra que $x \in A[s]$ para todo $x \in B$. Es claro que si $deg_D(x) \leq 0$ entonces $x \in A[s]$. Sea $deg_D(x) \geq 1$. Como $x = \xi(x) + (x - \xi(x))$ y
$x - \xi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{D^j(x)}{j!}(-s)^j \in sB$ se tiene que

$$x = a + x's, \tag{2.2}$$

para algún $a \in A$ e $x' \in B$. Luego, $D(x) = D(x')s + x'$ y por inducción sobre m se tiene que $D^m(x) = D^m(x')s + mD^{m-1}(x')$ para todo $m \geq 1$. Siendo D nilpotente, existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que $D^{m_1-1}(x') \neq 0$ y $D^{m_1}(x') = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} D^{m_1}(x) &= mD^{m_1-1}(x') \neq 0 \quad \text{y} \\ D^{m_1+1}(x) &= 0, \end{aligned}$$

luego $deg_D(x') = deg_D(x) - 1$. Por la hipótesis de inducción se tiene que $x' \in A[s]$ y por la igualdad (2.2) finalmente se concluye que $x \in A[s]$. $\square$

Si $B = A[x] = A^{[1]}$ existe una derivación D localmente nilpotente de B tal que D tiene slice.

Corolario 1. *Sean B una $\mathbb{Q}$-álgebra, $D \in LND(B)$ y $A = ker(D)$. Si $s \in S$ satisface que $D(s)$ es una unidad de A entonces $B = A[s] = A^{[1]}$*

Demostración. Sea $s \in S$ tal que $D(s)$ es una unidad de A, esto es, existe $a \in A$ tal que $aD(s) = 1$.
Como $A = ker(D)$, $D(as) = aD(s) = 1$, esto es, as es un slice de D. Por el teorema anterior $B = A[as]$ y como $a \in A$, $B = A[s]$. $\square$

Ejemplo 2. *Si $B = \mathbb{Q}[x, y] = \mathbb{Q}^{[2]}$ y $D = \frac{\partial}{\partial x}$, entonces se tiene que $x + 10$ es un slice. Por lo tanto $\mathbb{Q}[x, y] = \mathbb{Q}[y][x + 10] = Q[x + 10, y]$. En general, $\mathbb{Q}[x, y] = \mathbb{Q}[x + a, y]$ donde $a \in \mathbb{Q}$.*

Observación. La hipótesis de que B es una $\mathbb{Q}$ álgebra es necesaria en el teorema anterior como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3. *Sean $B = \mathbb{Z}[x, t] = \mathbb{Z}^{[2]}$ y $D = \frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial x}$ una derivación de B. Además, D es triangular ya que $D(t) = \frac{\partial}{\partial t}(t) + t\frac{\partial}{\partial x}(t) = 1 \in \mathbb{Z}$. Además, $D(x) = \frac{\partial}{\partial t}(x) + t\frac{\partial}{\partial x}(x) = t \in \mathbb{Z}[y]$. Por lo tanto, D es localmente nilpotente en este caso t es un slice de D, de la cual se conoce $ker(D) = \mathbb{Z}[2x - t^2]$, la prueba de este hecho requiere teoría adicional no estudiada en este trabajo, por ello no se presenta(Ver apéndice).*
Sin embargo se puede notar que $ker(D)[t] \neq \mathbb{Z}[x, t]$ debido a que para $x \in \mathbb{Z}[x, t]$ se tiene que $x \notin Z[2x - t^2][t]$. Ésto último se verifica utilizando igualdad de polinomios.

Corolario 2. *Sean B una $\mathbb{Q}$-álgebra, $D \in LND(B)$ y $A = ker(D)$. Si $s \in B$ es tal que $D(s) = \alpha \neq 0$ y $D'(s) \neq 0$, entonces $B_\alpha = A_\alpha[s]$. En este caso B_α y A_α son los anillos localizados $S^{-1}B$ y $S^{-1}A$ por $S = \{1, \alpha, \alpha^2, ...\}$.*

Demostración. Sean $s \in B$ un slice de D y $D(s) = \alpha \in B\backslash\{0\}$. Se tiene que el conjunto $S = \{1, \alpha, \alpha^2, ...\} \subseteq B$, por construcción S es un conjunto multiplicativamente cerrado. Por el Teorema 10 $S^{-1}D \in LND(S^{-1}B)$ y $ker(S^{-1}D) = S^{-1}A$.
Como $s/1 \in S^{-1}B$, entonces $(S^{-1}D)(s/1) = D(s)/1 = \alpha/1 \in (S^{-1}A)^*$. Por el Corolario1 se tiene que $B_\alpha = S^{-1}B = (S^{-1}A)[s]$ donde $\alpha = D(s)$. $\square$

Capítulo 3

EL PROBLEMA DE EXTENDIBILIDAD

El principal objetivo de este capitulo es presentar una aplicación de la teoría de las derivaciones localmente nilpotentes definida en el anillo de polinomios al problema de extendibilidad, dicha aplicación fue tomada de el artículo *Locally Nilpotent Automorphism and the jacobian conjecture progress in Mathematics publicado por Arno Van den Essen*, de la revista *JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA* en la que se muestra que si $F_1, ..., F_{n-1} \in \mathbb{C}[X]$, la $n-1$- upla $(F_1, ..., F_{n-1})$ es extendible si y solo si existe una derivación jacobiana D definida en $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ que posee un *Slice* y tal que $Ker(D) = \mathbb{C}[F_1, ..., F_{n-1}]$. Así, una solución al problema del Slice implica una solución al problema de extendiblidad.

Definición 19. *Sean $f_1, ..., f_{n-1} \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$. Se dice que la $n-1$ upla $(f_1, ..., f_{n-1})$ es extendible si existe un polinomio $f_n \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ tal que $\mathbb{C}[f_1, ..., f_{n-1}, f_n] = \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$.*

Lema 5. *Sean $f_1, ..., f_{n-1} \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n] = \mathbb{C}^{[n]}$. Si $f = (f_1, ..., f_{n-1})$ es extendible, entonces la derivada jacobiana Δ_f es una derivación localmente nilpotente, $Ker(\Delta_f) = \mathbb{C}[f_1, ..., f_{n-1}]$, Δ_f tiene un slice s y $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n] = \mathbb{C}[f_1, ..., f_{n-1}, s]$*

Demostración. Sean $f_1, ..., f_{n-1} \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n] = \mathbb{C}^{[n]}$. Si $f = (f_1, ..., f_{n-1})$ es extendible, entonces existe $g_n \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ tal que $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n] = \mathbb{C}[f_1, ..., f_{n-1}, g_n]$. Así para x_i con $i \in 1, 2, \ldots, n$ existe $G_i \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n] = \mathbb{C}[f_1, ..., f_{n-1}, g_n] = \mathbb{C}^{[n]}$ tal que $x_i = G_i(f_1, ..., f_{n-1}, g_n)$.

Por la regla de la cadena se tiene que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j) &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial t_i}(G_i)\frac{\partial}{\partial x_i}(f_i) + \frac{\partial}{\partial t_n}(G_n)\frac{\partial}{\partial x_n}(g_n) \\
&= \begin{cases} 1, si & i = j \\ 0, si & i \neq j. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Luego, si se considera el determinante de la matriz jacobiana $J(f)$ con $f = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, se tiene que

$$
1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1) & \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(x_1) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(x_2) & \frac{\partial}{\partial x_2}(x_2) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(x_2) \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(x_n) & \frac{\partial}{\partial x_2}(x_n) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(x_n) \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial t_1}(G_1) & \frac{\partial}{\partial t_1}(G_1) & \cdots & \frac{\partial}{\partial t_1}(G_1) \\ \frac{\partial}{\partial t_2}(G_2) & \frac{\partial}{\partial t_2}(G_2) & \cdots & \frac{\partial}{\partial t_2}(G_2) \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial}{\partial t_n}(G_n) & \frac{\partial}{\partial t_n}(G_n) & \cdots & \frac{\partial}{\partial t_n}(G_n) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(f_1) & \frac{\partial}{\partial x_2}(f_1) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_1) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(f_2) & \frac{\partial}{\partial x_2}(f_2) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(f_2) \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(g_n) & \frac{\partial}{\partial x_2}(g_n) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}(g_n) \end{vmatrix}
$$

$$
= p(x_1, ..., x_n)q(x_1, ..., x_n)
$$

De ahí que $q = \Delta_f(g_n) \in \mathbb{C}$. Sea $q(x_1, ..., x_n) = k$. Así $\Delta_f(g_n) = k$. Si se asigna $f_n = k^{-1}g_n$ entonces $\Delta_f(k^{-1}g_n) = 1$. Además, $\Delta_f(f_i) = 0$ para $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ de donde se concluye que Δ_f es localmente nilpotente de $\mathbb{C}^{[n]}$ y f_n es un slice.

Por otro lado, haciendo uso del Teorema 6, $\Delta_f = \frac{\partial}{\partial f_1}\Delta_f(f_1) + \frac{\partial}{\partial f_2}\Delta_f(f_2) + \ldots + \frac{\partial}{\partial f_{n-1}}\Delta_f(f_{n-1}) + \frac{\partial}{\partial f_n}\Delta_f(f_n) = \frac{\partial}{\partial f_n}$ y por tanto $Ker(\Delta_f) = \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_n]$).

□

Ejemplo 11. *Sea* $f_1 = x - y \in \mathbb{C}[x, y]$*. Luego* f_1 *es extendible, ya que existe un polinomio* $f_2 = 2x - y \in \mathbb{C}[x, y]$ *tal que* $\mathbb{C}[x, y] = \mathbb{C}[f_1, f_2]$*, en efecto*

$$x = -(x - y) + (2x + y).$$

$$y = 2(x - y) - (2x - y).$$

por otra parte se tiene

$$\Delta_{f_1}(f_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(f_1) & \frac{\partial}{\partial y}(f_1) \\ \frac{\partial}{\partial x}(f_2) & \frac{\partial}{\partial y}(f_2) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-2) = 3$$

Ahora, si se toma $f_2 = \frac{1}{3}(2x + y)$*, se tiene* $\Delta_{f_1}(f_2) = 1$*. Así* Δ_{f_1} *es una derivación localmente nilpotente,* f_2 *es un slice de* Δ_{f_1} *y* $ker(\Delta_{f_1}) = \mathbb{C}[x - y]$*.*

Observación. Por el Teorema 13 se tiene que para $B = \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$, si $D \in LND(B)$ tiene un slice $s \in B$ entonces $B = A[s] = A^{[1]}$ donde $A = ker(D)$ y $D = \frac{d}{ds} : A[s] \to A[s]$.

Por el Lema 5 y la observación anterior se tiene el principal resultado de este trabajo

Teorema 14. *Sea* $f_1, ..., f_{n-1} \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ *y* $f = (f_1, ..., f_{n-1})$*. Entonces* $(f_1, ..., f_{n-1})$ *es extendible si y solo si* Δ_f *es una derivación localmente nilpotente en* $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ *que tiene un slice* s *y* $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]^D = \mathbb{C}[f_1, ..., f_{n-1}]$*.*

Así se concluye que una solución al problema de extendibilidad implica una solución al problema de extendibilidad y viceversa.

Apéndice A

En este apéndice se presenta la demostración del Ejemplo 3 en la sección 2.3, la cual fue realizada por Ph. Daniel Daigle profesor de la Universidad de Ottawa Canada.

f

BIBLIOGRAFÍA

[1] Daigle, D. *Locally nilpotent derivations*, lecture notes for september School of algebraic geometry, Lukecin, Poland, September 2003. Available at http://aixi.otttawa.ca/ddaigle, or http://www.minuw.edu.pl/jarekw/EAGER/lukencin03.html

[2] Daigle,D. *Introduction to locally nilpotent derivations,* Lecture notes, 2010.

[3] Fraleigh, John B. , *Algebra Abstracta* . Addison-Weslwy Iberoamericana, 1987

[4] Freudenburg, G. *Counterexaple to Hilbert´s Fourteenth Problem in Dimension Six* , Transform. Group 5 2000. pp. 69-71.

[5] Hungerford, Tomas W. *Álgebra*. Springer, 1974.

[6] Kunz, Ernest. *Introduction to Conmutative Algebra and Algebraic Geometry*. Birkauses Boston, 1985.

[7] Macdnald I.G, Atiyah M.F. *Introducción al álgebra conmutativa* . Editorial Reverté, S.A. XCMLX-XIII.

[8] Nowicki, Andrzej. *Polynomial Derivations and Their Rings of Constants.* Torun.

[9] Pierre Samuel, Oscar Zariski. *Conmutative Algebra. Vol.1*. Springer, 1985.

[10] Van den Essen, Arno. *Locally Nipotent derivations and their Applications, III.* Journal of Pure and applied Algebra 98,1995 pp.15-23

[11] Van Den Essen, Arno. *Polynomial Automorphisms and Jacobian Conejure progress in Matematics,* Birkhauser, 2000.

[12] J. Chadzynski and T. Krasinski, On the Lojasiewicz exponent at infinite for polynomial mappings from $\mathbb{C}^2$ into $\mathbb{C}^2$ y components of polynomial automorphisms of $\mathbb{C}^2$, preprint (1992).