

OBJETIVIDAD DE LOS MÉTODOS DE MUESTREO PROBABILÍSTICOS

JHON ALEJANDRO DELGADO AMEN

**UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
PROGRAMA DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN 2013**

OBJETIVIDAD DE LOS MÉTODOS DE MUESTREO PROBABILÍSTICOS

JHON ALEJANDRO DELGADO AMEN

**DIRECTOR
YILTON RIASCOS FORERO PhD.**

Trabajo presentado como requisito para optar al título de Matemático

**UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
PROGRAMA DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN
2013**

NOTA DE ACEPTACIÓN:

*Director: -----
Ph. D. YILTON RIASCOS FORERO.*

*JURADO: -----
MAGISTER. EDWIN RENGIFO C.*

*JURADO: -----
ESPECIALISTA. HENRY MUÑOZ M.*

Fecha de sustentación: Popayán, 19 de Diciembre de 2013

AGRADECIMIENTOS

Le doy gracias a Dios por haberme acompañado y guiado en mi carrera, por ser mi fortaleza en momentos de debilidad y por brindarme una vida llena de aprendizajes, experiencias y sobretodo felicidad.

A mis padres José Darío Delgado y Doris Amen Yip por apoyarme en todo momento, por los valores que me han inculcado y por haberme dado la oportunidad de obtener una excelente educación en el transcurso de mi vida. Principalmente por su ejemplo a seguir.

A mi hijo Juan Sebastián Delgado que ha sido mi mayor motivación para nunca rendirme en mis estudios y poder ser un gran ejemplo para él, te amo hijo.

A mi hermano Cristian Andrés Delgado por ser parte importante en mi vida y por apoyarme en los momentos en que más lo he necesitado

A mi familia,

Por creer en mí, por todo el apoyo que me brindaron en mis estudios, por su comprensión y todo su cariño.

A Maribel rojas, por ser parte fundamental en mi vida por su apoyo en las buenas y en malas, principalmente por su paciencia y todo su amor.

A mis maestros,

Especialmente a mi Amigo, Maestro y Director, Ph.D. Yilton Riascos Forero de quien he recibido todo su apoyo y orientación. Por la confianza y la fe que deposito en mí.

Por alentar el deseo de superación profesional y por generar un pensamiento crítico en todos los procesos educativos.

A los profesores Mg. Edwin Rengifo y Esp. Henry Muñoz por su apoyo, sugerencias personales y académicas.

A mis amigos,

Compañeros de la universidad del Cauca especialmente a los del departamento de Matemáticas, por su confianza y apoyo permanente para que este trabajo llegara a un buen término. Por haber hecho de mi etapa universitaria un trayecto de vivencias que nunca olvidare.

A mis compañeros del Real Colegio San Francisco de Asís que es la institución donde laboro, mil gracias por todo ese apoyo y por sus bendiciones.

Al grupo de docentes que hicieron parte del desarrollo de este trabajo mil gracias por sus enseñanzas.

A todas estas personas mil y mil gracias por su apoyo.

Tabla de contenido

Resumen:	7
I. Introducción:	8
II. Orígenes de la estadística	9
III. Surgimiento de la Teoría del Muestreo	19
IV. Teorías matemáticas que subyacen al método representativo	24
V. Distribución Muestral.....	31
1. De Proporciones	31
2. De Diferencias y Sumas	31
3. De la Varianza.....	33
VI. Diferentes Aspectos del Método Representativo	35
1. El Método de Muestreo Aleatorio	35
1.1. Muestreo aleatorio simple	37
1.2. Muestreo sistemático	38
1.3. Muestreo por conglomerados	38
1.4. Muestreo estratificado	40
1.4.1. Asignación proporcional.....	41
1.4.2. Asignación óptima.....	41
1.4.3. Asignación de Neyman (Teorema)	42
2. El Método de Selección Intencional	43
2.1. Muestreo No Probabilísticos	43
2.1.1. Muestreo por cuotas:	45
2.1.2. Muestreo opinático o intencional:.....	47
2.1.3. Muestreo casual o incidental:	49
2.1.4. Bola de nieve:.....	51
2.1.5. Muestreo Discrecional.....	53
3. Comparación de los Dos Métodos De Muestreo	55
4. Conclusiones:	59
Bibliografía.....	60

Resumen:

Este trabajo tiene como objetivo actualizar los términos del documento de Jerzy Neyman de 1934 denominado *Dos Aspectos Diferentes del Método de Representación: El Método de Muestreo Aleatorio y el Método de Selección Intencional*. Llegando a explicar cómo se dividen dichos métodos en lo que hoy conocemos como, los métodos probabilísticos y no probabilísticos.

Se ambienta la presentación con un recuento histórico de la estadística, considerando los primeros hechos que pueden denominarse como iniciales, e igualmente se complementa la presentación con una descripción de los diferentes tipos de muestreo que solamente son nombrados en el documento de Neyman.

El texto finaliza con la comparación de los métodos y con las conclusiones surgidas del contraste entre el trabajo de Neyman y las posiciones actuales basadas en la obviedad de la diferencia entre estos métodos sin considerar la importancia de ese trabajo para alcanzar esta diferenciación.

I. Introducción:

Este trabajo está basado en el documento de Jerzy Neyman de 1934, denominado *Dos Aspectos Diferentes del Método de Representación: El Método de Muestreo Aleatorio y el Método de Selección Intencional*.

La presentación se divide en seis partes. La primera corresponde a esta introducción; la segunda, Orígenes de la estadística, presenta un panorama acerca de las condiciones que se establecen para el desarrollo y consolidación de la historia de la estadística; la tercera, Surgimiento de la Teoría del Muestreo, presenta el Enfoque histórico sobre el surgimiento de la teoría del muestreo basada en la experimentación; la cuarta parte, Teorías matemáticas que subyacen al Método de Representación, se presenta todas las teorías matemáticas que permiten el soporte para el Método de Representación tanto en lo poblacional como en lo muestral.

En la 5ª parte, se aborda y desarrolla este texto siguiendo la estructura del documento de Neyman, presentando el desarrollo de la Distribución Muestral referida a las Proporciones, las Diferencias de promedio y las sumas de Varianza.

Y en la última parte del trabajo se presenta los diferentes métodos de muestreo, muestreo aleatorio y muestreo por selección intencional, ampliando cada uno de ellos, pasando por la comparación entre dichos métodos de representación.

Se finaliza con la comparación entre los métodos de representación el método aleatorio y el método de selección intencional.

II. Orígenes de la estadística

Son muy pocos los textos que intentan rastrear los orígenes de la estadística (Batanero, 2001; Galbiati Riesco, 2013; Hacking, 1995), por lo que la realización de este trabajo implica tomar postura y consideraciones al respecto, en lo que se refiere a la historia general de la estadística a partir de los hechos, o lo que se refiere al período a partir del cual la estadística se entiende como ciencia.

En esta parte del trabajo se intentará realizar una complementación de estos dos aspectos, procurando que el hilo conductor de la narrativa presente esta perspectiva.

En este sentido, es conveniente iniciar hablando de que los comienzos de la estadística pueden ser hallados en el antiguo Egipto, cuando los súbditos letrados de los faraones lograron recopilar, hacia el año 3.050 antes de Cristo, prolijos datos relativos a la población y la riqueza del imperio. De acuerdo con el historiador griego Heródoto, dicho registro de riqueza y población se hizo con el objetivo de preparar la construcción de las pirámides.

Se cuenta que en el mismo Egipto, Ramsés II pidió hacer un censo de las tierras con el objeto de verificar un nuevo reparto. Por su parte, la misma Biblia da referencias, en el libro de los Números, de que en el antiguo Israel se realizaron dos recuentos estadísticos de la población hebrea. El rey David por otra parte, ordenó a Joab, general del ejército hacer un censo de Israel con la finalidad de conocer el número de la población masculina apta para la guerra (Galbiati Riesco, 2013).

Los chinos también efectuaron censos hace más de cuarenta siglos. Los griegos lo hicieron periódicamente con fines tributarios, sociales (división de tierras) y militares (cálculo de recursos y hombres disponibles).

La investigación histórica revela que éstos realizaron más de 69 censos para calcular los impuestos, determinar los derechos de voto y ponderar la potencia guerrera; pero fueron los romanos, maestros de la organización política, quienes mejor supieron emplear los recursos de la estadística, ya que cada cinco años realizaban un censo de población y sus funcionarios públicos tenían la obligación de anotar nacimientos, defunciones y matrimonios, sin olvidar los recuentos periódicos del ganado y de las riquezas contenidas en las tierras conquistadas. Curiosamente, para el nacimiento de Cristo sucedía uno de estos empadronamientos de la población adelantado por la autoridad del imperio.

Durante los mil años siguientes a la caída del imperio Romano se realizaron muy pocas operaciones Estadísticas, con la notable excepción de las relaciones de tierras pertenecientes a la Iglesia, compiladas por Pipino el Breve en el 758 y por Carlomagno en el 762 DC. Durante el siglo IX se realizaron en Francia algunos censos parciales de siervos y tierras.

En Inglaterra, Guillermo el Conquistador recopiló, en año 1.086, la información del denominado Domesday Book o libro del Gran Catastro, un documento que da cuenta de la propiedad, extensión y valor de las tierras de Inglaterra. Esa obra es considerada como el primer compendio estadístico de Inglaterra (Galbiati Riesco, 2013).

Aunque Carlomagno, en Francia, y Guillermo el Conquistador, en Inglaterra, trataron de revivir la técnica romana, los métodos estadísticos permanecieron casi olvidados durante la Edad Media.

Durante los siglos XV, XVI, y XVII, hombres como Leonardo da Vinci, Nicolás Copérnico, Galileo, Neper, William Harvey, Sir Francis Bacon y René Descartes, hicieron grandes aportes al método científico, de tal forma que cuando se

crearon los Estados Nacionales y surgió como fuerza el Estado internacional existía ya un método capaz de aplicarse a los datos económicos.

Para el año 1532 empezaron a registrarse en Inglaterra las defunciones debido al temor que Enrique VII tenía por la peste. Más o menos por la misma época, en Francia la ley exigió a los clérigos registrar los bautismos, fallecimientos y matrimonios.

A partir de un brote de peste que apareció a fines de la década de 1500, el gobierno inglés comenzó a publicar estadísticas semanales de los decesos; costumbre que continuó muchos años, y en 1632 los Bills of Mortality (Cuentas de Mortalidad) contenían los nacimientos y fallecimientos por sexo.

En términos de los primeros hechos que, en la misma Inglaterra, dan comienzo a la estadística como ciencia, se cuenta que en 1662 el capitán John Graunt usó documentos que abarcaban treinta años y efectuó predicciones sobre el número de personas que morirían de varias enfermedades y sobre las proporciones de nacimientos de varones y mujeres que cabría esperar.

El trabajo de Graunt, condensado en su obra *Natural and Political Observations, Made upon the Bills of Mortality* (Observaciones Políticas y Naturales. Hechas a partir de las Cuentas de Mortalidad), fue un esfuerzo innovador en el análisis estadístico. (Galbiati Riesco, 2013)

Por el año 1540 el alemán Sebastián Muster realizó una compilación estadística comprensiva de los recursos nacionales, de datos sobre organización política, instrucciones sociales, comercio y poderío militar (Muñoz, 2004); además, se han encontrado pruebas de recogida de datos sobre población, bienes y producción en civilizaciones como la China (aproximadamente 1.000 años A. C.), sumeria y egipcia.

Sin embargo sólo muy recientemente la estadística ha adquirido la categoría de ciencia. En el siglo XVII surgió la Aritmética Política, desde la escuela alemana de Conring, quien impartió un curso con este título en la universidad de Helmsted. Posteriormente su discípulo Achenwall orientó su trabajo a la recogida y análisis de datos numéricos, con fines específicos y con base en los cuales se hicieron estimaciones y conjeturas, es decir se presentan ya los elementos básicos del método estadístico (Batanero, 2001).

Aunque a la fecha no es posible establecer una única definición de estadística, vale la pena señalar que para los aritméticos políticos de los siglos XVII y XVIII la estadística era el arte de gobernar; su función era la de servir de ojos y oídos al gobierno.

Con la proliferación de tablas numéricas se logró observar la frecuencia de distintos sucesos y el descubrimiento de leyes estadísticas. Señalándose como ejemplos notables los estudios de Graunt sobre tablas de mortalidad y esperanza de vida a partir de los registros estadísticos de Londres de 1.592 a 1.603 y los de Halley entre 1.687 y 1.691, para resolver el problema de las rentas vitalicias en las compañías de seguros (Batanero, 2001).

En su artículo, que se compone de tres acápites, (Gutiérrez C, 1983) desarrolla esta temática. En el primero, titulado *la estadística hipotético-deductiva de los siglos XVIII y XIX y las probabilidades directas*, presenta el trabajo del médico John Arbuthnot, quien realiza el primer análisis estadístico de naturaleza inferencial conocido, acerca de los reportes de nacimientos de niños en Londres, de acuerdo con su género, de 1.629 a 1.710, y establece la inferencia basado en la similitud de las frecuencias de sexo con las probabilidades del lanzamiento de una moneda (Riascos, 2010).

Ese conjunto de datos también es analizado y la inferencia de Arbutnot refutada por Nicolás Bernouilli en cartas dirigidas a Pierre Remond de Mortmont, argumento que también fue debatido por Abraham De Moivre, quien señaló que los planteamientos de Bernouilli no se adecuaban a los avanzados por el doctor Arbutnot. Efectivamente, se trataba de dos tesis contrapuestas: la que propugnaba *una causa superior* y la que atribuía las discrepancias al *azar*. La primera abría paso a la *Estadística Inductiva*; la segunda apuntaba al problema de las *probabilidades directas*; consagrada luego por la ley de los grandes números (Riascos, 2010).

Este trabajo es considerado como la primera formulación probabilística coherente del método hipotético-deductivo: formulación de un modelo hipotético mediante una inducción a partir de los datos y deducción, a partir del modelo, de unas consecuencias, todo en un ambiente de incertidumbre y con validez probable. Tan pronto como el cálculo de probabilidades empezó a tomar forma definitiva, los matemáticos se interesaron en la aplicación de los conceptos probabilísticos al estudio de las diferencias en las observaciones (Riascos, 2010).

Roger Cotes en 1.722, realiza un trabajo sobre la estimación de errores en medidas trigonométricas, discutiendo lo que llamaríamos “un problema de estimación en el plano” y aunque no explica el porqué de su solución, ni cómo llegar a ella, sus resultados, según Laplace, no fueron aplicados hasta que Euler (1.749) los utiliza en un trabajo sobre irregularidades en el movimiento de Saturno y Júpiter. Otros intentos de resolver el mismo problema fueron hechos por Mayer (1.750) y Boscovich (1.755), el primero sobre liberación lunar y el segundo en el cálculo de la órbita elíptica de la Tierra (Riascos, 2010).

En todo este tiempo de mediados del siglo XVIII hubo gran preocupación por los errores de observación. Las ideas eran puramente intuitivas, y venían expresadas en términos oscuros. Así, Simpson (1.757) aludía a una opinión corriente de que una buena observación era tan precisa como la “media” de un conjunto de datos, y el mismo Laplace (1.774), en su gran Memoria, se mostraba cauto respecto al uso de la media, cuando afirmaba que “para algunas distribuciones de errores podía haber estimaciones mejores que la media, como, por ejemplo, la mediana”, (Gutiérrez Cabria, 1994, pág. 11).

A pesar de que en la época se consideraba inevitable establecer las condiciones de trabajar con distribuciones finitas y de rango finito, Simpson (1.756-1.757), es el primero en introducir el concepto de distribución de errores y en considerar distribuciones continuas, después de obtener una distribución triangular continua y probar mediante ella que la media aritmética es preferible a una simple observación, llegando a deducir la probabilidad de un error dado para la media aritmética en el caso límite.

Influido por la idea de que una distribución de los errores debe tener rango finito, Bernoulli supone que esta distribución es semicircular y debe terminar abruptamente en sus extremos, supuestos con los cuales su formulación de máxima verosimilitud es clara y explícita, y se deduce de las que hoy llamaríamos “ecuaciones de máxima verosimilitud”, deducibles por derivación de la función de verosimilitud de la muestra.

“Lo que sucede en el curso de una observación particular, escasamente lo conocemos “ex hipótesis”, pero esta profunda ignorancia será el refugio en el que somos forzados a guarecernos cuando tomamos partido, por lo que no es verdadero sino verosímil, no cierto sino más probable (non verissimum sed verosimillimum, non certum sed probabilissimum), como enseña la teoría de la

probabilidad. Si esto es siempre y por todas partes idéntico a la media aritmética, usualmente aceptada, es cosa que puede ser razonablemente puesta en duda” (D. Bernoulli, 1.777), citado por Gutiérrez C. S., (1982, pág. 12)

Con lo anterior, no deja de ser sugestivo que el teórico de la probabilidad inversa, P. S. Laplace, verificara, en 1.789, la hipótesis que afirma que los cometas pertenecen al sistema solar, basado en el esquema lógico propuesto por D. Bernoulli, que contempla únicamente probabilidades directas en perfecta concordancia con el razonamiento hipotético deductivo. De este modo, la teoría clásica de los errores comienza a apoyarse, con Laplace, en la ley de los grandes números, y al parecer se presentaba el momento de la unión de la Estadística con el cálculo de probabilidades, lo que realmente vendría a ocurrir casi un siglo después (Riascos, 2010).

Aunque los errores aleatorios fueron considerado por Gauss con ciertas propiedades probabilísticas, sin darles mayor importancia, es Legendre quien escribe que en problemas en los que es necesario extraer conclusiones lo más exactas posibles de medidas de observación, “casi siempre” se llega a un sistema de la forma

$$l_i = \sum_{j=1}^q b_j Z_{ij} - X_j \quad (i = 1, 2, \dots, N > q)$$

Donde las Z_{ij} son “coeficientes” conocidos, las X_j son medidas, las b_j son las “incógnitas” y los l_i son los “errores”. El objetivo de Legendre era “determinar” (para nosotros, estimar) las q incógnitas (para nosotros, parámetros) b_j , de modo que cada “error” (para nosotros, residuo) llegue a ser muy pequeño y los “errores extremos” se conserven dentro de estrechos límites, independientemente del signo.

El *principio* que propuso para obtener esta “determinación” era la *minimización* por variación de las b_j en la suma de los cuadrados de los “errores” l_i . Este trabajo fue discutido y presentado por Gauss, hallando que la distribución de los errores, supuestamente continua, era necesariamente de forma normal. El principio de “mínimos” sugerido por Legendre recibe el apoyo de Gauss cuando escribió en su *“Theoria Combinationis”*.

“Determinar una magnitud por medio de observaciones, es como un juego en el que hay riesgo de perder sin esperanza de vencer... la magnitud de la pérdida debe ser valorada mediante una función de los errores, siempre positiva. Entre el infinito número de funciones que satisfacen estas condiciones parece natural escoger la *más simple*, la cual es sin contradicción *“el cuadrado del error”* (Gutiérrez C, 1983, pág. 13). Nació así, oficialmente, la teoría de la estimación.

El siglo XIX fue sobre todo, un conjunto de modelos que hundían sus raíces en una determinada comprensión de la sociedad y en las aplicaciones de otros campos como la física de gases o la evolución biológica; aparecen las leyes de los grandes números con Bernouilli y Poisson. Otro problema que recibe gran interés por parte de los matemáticos de su tiempo, como Euler, Simpson, Lagrange, Laplace, Legendre y Gauss es el del ajuste de curvas a los datos.

La estadística logra con estos descubrimientos una relevancia científica creciente, siendo reconocida por la British Association for the Advancement of Science, como una sección en 1.834, naciendo así la Royal Statistical Society.

En el momento de su fundación se definió la estadística como *“conjunto de hechos, en relación con el hombre, susceptibles de ser expresados en números, y lo suficiente numerosos para ser representados por leyes”*. Se crearon poco a poco sociedades estadísticas y oficinas estadísticas para organizar la recogida de datos estadísticos; la primera de ellas en Francia en 1.800.

Como consecuencia, fue posible comparar las estadísticas de cada país en relación con los demás, para determinar los factores determinantes del crecimiento económico y comenzaron los congresos internacionales, con el fin de homogeneizar los métodos usados. (Batanero & Godino, 2001)

El primero de ellos fue organizado por Quetelet en Bruselas en 1.853. Posteriormente se decidió crear una sociedad estadística internacional, naciendo en 1.885 el Instituto Internacional de Estadística (ISI) que, desde entonces celebra reuniones bianuales. Su finalidad específica es conseguir uniformidad en los métodos de recopilación y abstracción de resultados e invitar a los gobiernos al uso correcto de la estadística en la solución de los problemas políticos y sociales (Batanero & Godino, 2001, págs. 1-3).

Para la segunda mitad del siglo XX destacan los trabajos de Wilcoxon, que estudió los pesticidas desarrollando un test no paramétrico para comparar dos muestras, los de Kruskal Wallis, que aportó un test no paramétrico para comparar más de dos muestras, los de Spearman y Kendall que desarrollaron sendos coeficientes de correlación no paramétricos, y los de Tukey, que desarrolló procedimientos de comparación múltiple.

La llegada de los computadores revolucionó el desarrollo de la estadística, propiciando la aparición de nuevas técnicas. Benzecri, en Francia, y Tukey, en Estados Unidos, fueron pioneros en repensar la estadística en función de los ordenadores, adaptando, mejorando y creando nuevos instrumentos, técnicas analíticas y gráficas para estudiar una gran cantidad de datos.

De esta forma, en la actualidad, la disciplina científica de la Estadística se encuentra organizada a nivel mundial, contando con grandes asociaciones como la Royal Statistical Society (RSS), el International Statistical Institute (ISI) y la American Statistical Association (ASA), quienes, a través de capítulos, agrupan a

los estadísticos del mundo en sus diferentes áreas de interés y consolidan un trabajo que se vé fortalecido por la constitución de programas académicos en los diferentes niveles de formación y por el reconocimiento y desarrollo que los departamentos y escuelas de estadística tienen en las distintas universidades del mundo.

Una de las áreas de interés que tienen los estadísticos es la relacionada con el muestreo y las técnicas que para ello se han desarrollado, tanto con fundamento probabilístico como los denominados métodos no probabilísticos, cuya discusión y actualización es el tema de los siguientes acápite de este trabajo.

III. Surgimiento de la Teoría del Muestreo

Los logros surgidos del trabajo de los académicos de la Estadística, permitió que las diversas áreas pudieran comenzar a ser indagadas. Entre ellas la concerniente al muestreo, que logró consolidar teorías, al punto que hoy aparecen imprescindibles en procesos de investigación que requieren la aplicación de este tipo de metodologías estadísticas.

El enfoque propuesto por Neyman (1934), en la búsqueda de una estrategia de muestreo que resultara representativo bajo el paradigma de la inferencia basada en el diseño de muestreo, es ampliamente utilizado por las agencias gubernamentales en todo el mundo. Sin embargo, ha sido atacado desde hace varias décadas por estadísticos teóricos que muestran su inconformidad con los fundamentos filosóficos del enfoque.

En las últimas décadas se han propuesto otros tipos de enfoques, el más importante ha resultado ser el basado en modelos de súper-población, el cual no resulta comprensible sin atender a la evolución de la inferencia para poblaciones finitas.

Gutiérrez, (2009) cuenta que el primer interesado en el Método de Representación (más adelante conocido como teoría del muestreo), fue A. N. Kaier (1.897), estadístico noruego que demostró empíricamente que seleccionando muestras estratificadas se obtenían mejores resultados en los estimadores de medias y totales.

En 1906 Arthur Lyon Bowley, (Bristol, Inglaterra, 6 de noviembre de 1869 - Haslemere, Surrey, Inglaterra, 21 de enero de 1957) un estadístico y economista inglés que trabajó sobre la estadística económica y fue pionero en el uso de técnicas de muestreo en encuestas sociales, utiliza aproximaciones a la distribución normal para la estimación de proporciones y propone la fórmula de la estimación de la varianza para diseños de muestreo estratificado.

Para principios del siglo XX (1920), el Método de Representación era usado de manera difundida en Estados Unidos y el resto del mundo. Lo que obliga a que el ISI cree una comisión para la discusión de este método.

Los resultados del comité instalado, incluyen el trabajo de Bowley (1926) basado en métodos de selección representativos con probabilidades de inclusión iguales. Con estos avances teóricos y con la publicación de tablas de números aleatorios editadas por Tippett (1927), se facilitó la selección de muestras probabilísticas, (Gutiérrez, 2009).

Es para ese mismo año que se da una ampliación al campo de las aplicaciones cuando Hubback reconoce la necesidad de utilizar este enfoque en los estudios agrícolas, argumentando que: 1) evitaba los posibles sesgos personales y 2) era posible determinar un tamaño de muestra tal que satisficiera un margen de error determinado por el investigador.

El trabajo de Bowley junto con el reporte del ISI lograron que Neyman examinara las mismas bases teóricas de la inferencia en poblaciones finitas, a partir de lo cual, aparece el artículo de (Neyman, 1934), considerado como la demostración de los fundamentos del muestreo como se conoce hoy en día. En un comentario de Leslie Kish, al artículo de (Smith, 1976) enumera en siete las grandes contribuciones que Neyman realizó al muestreo:

1. Propuso la asignación de Neyman para el tamaño de muestra con diseños estratificados.
2. Descubrió que el muestreo por conglomerados puede realizarse basado en un esquema probabilístico tal que las varianzas de los estimadores resultantes pudieran ser calculadas o estimadas.
3. Para que lo anterior se diera, se requiere de una muestra grande de unidades.
4. Para seleccionar una muestra grande, es necesario definir un marco de selección de números aleatorios.
5. El conocimiento subjetivo del comportamiento de la población puede usarse para formar subgrupos poblacionales o estratos.
6. Un esquema de selección probabilístico es mejor que un esquema de selección convencional.
7. Para convencer a los escépticos acerca de la validez de sus afirmaciones, se dispuso a realizar ejemplos prácticos con encuestas verdaderas a gran escala.

Entendiendo que la idea central de la inferencia es que si una muestra proporciona “alguna” información sobre una población, es posible aumentar nuestro conocimiento sobre dicha población incrementando el tamaño de la muestra, se hace posible pensar en la inferencia estadística como una colección de métodos para aprender de la experiencia y, en la práctica, esto implica la posibilidad de acotar los valores de los parámetros de interés en las poblaciones, esto es, obtener intervalos de confianza para estos parámetros.

La comprensión de esta idea básica implica el equilibrio adecuado entre dos ideas aparentemente antagónicas: la representatividad muestral y la

variabilidad muestral. La primera de estas ideas sugiere que la muestra tendrá a menudo características similares a las de la población, si ha sido elegida con las precauciones adecuadas. La segunda, el hecho de que no todas las muestras son iguales entre sí. El punto adecuado de equilibrio entre los extremos de información total e información nula respecto a la población es complejo, puesto que depende de tres factores: variabilidad de la población, tamaño de la muestra y coeficiente de confianza (Batanero & Godino, 2001).

El trabajo teórico que se estableció alrededor de estos factores, se consolidó en lo que se denominó Método de Representación, el cual tuvo su proceso de constitución teórica y de aplicaciones prácticas a partir de la labor del ISI, y tal vez, aún más de los logros personales del profesor A. L. Bowley (1912–1985), que consiguió llamar la atención de muchos estadísticos en diferentes países. Muy probablemente, esta popularidad del Método de Representación también se debe particularmente a la crisis general, a la escasez de dinero y a la necesidad de llevar a cabo investigaciones estadísticas relacionadas con la vida social, de una manera un tanto precipitada en esa época (Neyman, 1934).

Los resultados eran buscados en algunos meses, a veces en pocas semanas, y después del inicio del trabajo no había tiempo ni dinero para una investigación exhaustiva. Pero se cree que si las estadísticas prácticas han adquirido algún valor en el Método de Representación, se debe, principalmente al trabajo del profesor A. L. Bowley, quien, como ya dijo, no únicamente fue uno de los primeros en poner este método en práctica, sino que también escribió un artículo fundamental para la teoría del método (Neyman, 1934).

Desde entonces, el Método de Representación ha sido frecuentemente aplicado en diferentes países y para distintos propósitos. El tema principal es la teoría del

Método de Representación. No se hará énfasis en su historia ni se citaran los ejemplos de su aplicación práctica, aunque son importantes.

Hay dos aspectos del Método de Representación: uno de ellos se llama el Método de Muestreo Aleatorio y el otro, el Método de Selección Intencional. Se trata de dos grandes grupos y cada uno de estos puede subdividirse más (Neyman, 1934).

IV. Teorías matemáticas que subyacen al Método de Representación

El procedimiento utilizado para la obtención de cada uno de los elementos de las muestras puede ser aleatorio o no, disyuntiva que conduce a que la selección de la muestra sea probabilística o no.

Para garantizar la representativa de la muestra, los elementos deben ser extraídos de la manera más objetiva posible, a fin de no influir en la selección de cada uno de ellos, lográndose la representatividad cuando la extracción se realiza al azar.

Para que una muestra posea validez estadística es necesario que cumpla con los siguientes requisitos:

- Ser representativa o reflejo general del conjunto o universo que se va a estudiar, reproduciendo de la manera más exacta posible las características de éste.
- Que su tamaño sea estadísticamente proporcional al tamaño de la población.
- Que el error muestral se mantenga dentro de límites aceptables.

El muestreo se lleva a cabo con remplazo cuando extraído un elemento, y hechas sobre él las observaciones oportunas, se devuelve al colectivo, lo que supone que la población no es modificada y el elemento puede ser elegido de nuevo. Esta forma de actuar implica que la probabilidad de extracción de cada elemento es la misma para ellos, pues la población no cambia.

El muestreo tiene lugar sin remplazamiento cuando el elemento elegido se excluye del colectivo y, por consiguiente, éste se modifica de tal manera que la

probabilidad de extracción de un elemento dependa de cuántos y cuáles hayan salido con anterioridad.

El muestreo con remplazo conduce a que los elementos de la muestra sean probabilísticamente independientes, mientras que en el muestreo sin remplazo no lo son.

En todo el estudio teórico que se realizara en este trabajo las muestras serán con remplazamiento, denominándolas muestras aleatorias simples.

Obviamente, el problema del Método de Representación es por excelencia el problema de la estimación estadística. Básicamente el interés se centra en las características de cierta población, digamos K , la cual es si no imposible, por lo menos muy difícil de estudiar en detalle y, se debe estimar estas características basando un juicio en la muestra.

Hasta hace poco se ha asumido generalmente que la solución exacta de este problema requiere el conocimiento de las probabilidades a priori ligadas a las diferentes hipótesis admisibles con respecto a los valores colectivos de la población k . Por consiguiente, la memoria de A. L. Bowley debe considerarse dividida en dos partes. Cada pregunta es tratada desde dos puntos de vista:

- a) Se supone que la población K es conocida, la pregunta que debe responderse es: ¿cuáles podrían ser las muestras de esta población?
- b) Conocemos la muestra y se refiere a las probabilidades a posteriori que se atribuyen a diferentes hipótesis acerca de la población.

Las secciones clasificadas como (a) se refieren al campo seguro de la teoría clásica de la probabilidad, reducible a la teoría de las combinaciones.

En la sección (b) sin embargo, se encuentran conclusiones basadas, entre otras cosas, en algunas hipótesis acerca de las probabilidades a priori, y el Profesor Bowley acompaña sus resultados con la siguiente observación: "Se trata de enfatizar que la inferencia así formulada se basa en supuestos que son difíciles de verificar y los cuales no son aplicables en todos los casos".

Si se toman todas las posibles muestras de tamaño n de una población, el conjunto de todas ellas constituyen el espacio muestral T , integrado por tantos elementos como muestras distintas se desea obtener, y dado que cada muestra viene definida por un conjunto de n valores $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ se puede pensar, también, en el espacio muestral como incluido en un espacio n - dimensional, en el que las coordenadas de cada punto son los correspondientes elementos muestrales $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ de cada una de ellas.

Se Puede tomar muestras de la población K y emplearlas para obtener valores que sirven para estimar parámetros poblacionales, por ejemplo considérese X como una variable aleatoria cuyos valores son las diferentes estaturas. Para obtener una muestra se debe escoger un individuo de la población. Este individuo puede tener cualquier valor por ejemplo x_1 de las diferentes estaturas posibles y considerar x_1 el valor de la variable aleatoria X_1 , de la misma manera se escoge el segundo individuo para la muestra, que puede ser cualquiera de los valores x_2 de las estaturas posibles, y x_2 como el valor de la variable aleatoria X_2 , así sucesivamente hasta obtener el valor x_n de las estaturas posibles y x_n como el valor de la variable aleatoria X_n .

En el caso general una muestra de tamaño n se describe por los valores $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ de las variables aleatorias $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, serian variables aleatorias independientes distribuidas idénticamente con distribución de probabilidad $f(x)$. Entonces su distribución conjunta sería:

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = f(x_1)f(x_2) \dots f(x_n) \quad (1)$$

Cualquier cantidad obtenida de una muestra con el propósito de estimar un parámetro poblacional se llama estadístico muestral o estadístico. Matemáticamente, un estadístico muestral para una muestra de tamaño n puede definirse como función de variables aleatorias $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, es decir $g(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$. La función $g(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ es otra variable aleatoria, cuyos valores pueden representarse por $g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$. La palabra estadístico se emplea frecuentemente para la variable aleatoria o para sus valores, el sentido determinado se deduce lógicamente del contexto. (Spiegel, 1975)

En general, correspondiente a cada parámetro poblacional habrá un estadístico a calcularse de la muestra. Comúnmente el método para obtener un estadístico de la muestra es semejante a obtener un parámetro de una población finita. Ya que una muestra consiste en un conjunto finito de valores. Sin embargo, esto no siempre produce el “mejor estimador” y uno de los problemas importantes es cómo formar el mejor estadístico muestral apropiado que mejor estime un parámetro poblacional dado.

Se utilizan letras griegas tales como μ, σ, \dots etc, para valores de parámetros poblacionales y letras romanas m y s etc para valores estadísticos muestrales.

Como se ha dicho, un estadístico muestral que se computa de $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ es una función de estas variables aleatorias y es por tanto una variable aleatoria. La distribución de un estadístico muestral se llama distribución muestral del estadístico.

Al considerar todas las muestras de tamaño n que pueden extraerse de la población, se puede para cada muestra computar el estadístico. De esta manera se obtiene la distribución del estadístico, que es su distribución muestral.

Para una distribución muestral se puede lógicamente computar la media, varianza, desviación típica, momentos, etc.

Sean $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ las variables aleatorias para una muestra de tamaño n como se describe anteriormente. Entonces la media de la muestra o media muestral es una variable aleatoria definida por

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n}{n} \quad (2)$$

En analogía si $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ denotan valores obtenidos en una muestra específica de tamaño n entonces la media para esa muestra se denota por (1)

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} \quad (3)$$

Sea $f(x)$ la distribución de probabilidad de alguna población dada, de la cual extraemos una muestra de tamaño n . Entonces es natural buscar la distribución de probabilidad del estadístico muestral \bar{X} , que se llama distribución muestral para la media de la muestra o la distribución muestral medias, Los siguientes teoremas son importantes para este trabajo. (Spiegel, 1975) (Klinger Angarita, 2005)

Teorema 1: La media de la distribución muestral de medias, denotada por $\mu_{\bar{X}}$, está dada por

$$E(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}} = \mu \quad (4)$$

Donde μ es la media de la población, por lo tanto la expresión (3) establece que el valor esperado de la media muestral es la media de la población.

Teorema 2 : Si una población es infinita o si el muestreo es con remplazo, entonces la varianza de la distribución muestral de medias, denotada por $\sigma_{\bar{X}}^2$, está dada por

$$E[(\bar{X} - \mu)^2] = \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \quad (5)$$

Donde σ^2 es la varianza de la población.

Teorema 3 : Si la población es de tamaño N , si el muestreo es sin remplazamiento y el tamaño de la muestra es $n \leq N$ entonces el teorema anterior se reemplaza por

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \left(\frac{N - n}{N - 1} \right) \quad (6)$$

En tanto que $\mu_{\bar{X}}$ aún se dé por el teorema 1.

Observe que el Teorema 3 se reduce al teorema 2 cuando $N \rightarrow \infty$

Teorema 4 : Si la población de la cual se toman las muestras tiene una distribución de probabilidad con media μ y varianza σ^2 entonces la media muestral está normalmente distribuida con media μ y varianza σ^2 / n .

Teorema 5 : Si la población de la cual se toman las muestras tienen una distribución de probabilidad como media μ y varianza σ^2 que no necesariamente tiene una distribución normal entonces la variable tipificada asociada con X , esta dada por

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \quad (7)$$

Es normal asintóticamente, esto es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-u^2/2} du \quad (8)$$

El Teorema 5 es una consecuencia del teorema del límite central, se supone aquí que la población es infinita o que el muestreo es con remplazo. De otra forma lo anterior es correcto si reemplazamos σ / \sqrt{n} en (7) por $\sigma_{\bar{X}}$ como se da en (6). (Spiegel, 1975) (Klinger Angarita, 2005)

V. Distribución Muestral

1. De Proporciones

Si una población es infinita está distribuida binomialmente, si p y $q = 1 - p$ son las probabilidades respectivas de que un miembro dado exhiba o no una propiedad determinada. Por ejemplo la población puede ser los posibles lanzamientos de una moneda legal, allí la probabilidad del suceso "cara" es $p = 1/2$

Consideremos las posibles muestras de tamaño n extraídas de esta población y para cada muestra determinar el estadístico que es la proporción P de éxitos. En el caso de la moneda, P sería la proporción de caras que resulten de n lanzamientos. Entonces se obtiene una distribución muestral de proporciones cuya media μ_P y desviación típica σ_P están dadas por

$$\mu_P = p \quad \sigma_P = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \quad (9)$$

Que pueden obtenerse de (4) y (5) al colocar $\mu = p$, $\sigma = \sqrt{pq}$

2. De Diferencias y Sumas

Dadas dos poblaciones. Por cada muestra de tamaño n_1 extraída de la primera población se calcula un estadístico S_1 . Esto resulta en una distribución muestral de S_1 cuya media y desviación típica la denotamos por μ_{S_1} y

σ_{S_1} Respectivamente. En forma análoga por cada muestra de tamaño n_2 extraída de la segunda población calculamos un estadístico S_2 cuya media y desviación típica son μ_{S_2} y σ_{S_2} respectivamente.

En forma general por cada muestra de tamaño n_n extraída de la n -ésima población computaremos un estadístico S_n cuya media y desviación se denotaran por μ_{S_n} y σ_{S_n}

Tomando las posibles combinaciones de estas muestras de las dos poblaciones podemos obtener una distribución de las diferencias $S_1 - S_2$, que se llama la distribución muestral de la diferencia de estadísticos. La media y la desviación típica de esta distribución muestral denotada respectivamente por $\mu_{S_1-S_2}$ y $\sigma_{S_1-S_2}$, están dadas por:

$$\mu_{S_1-S_2} = \mu_{S_1} - \mu_{S_2} \quad \sigma_{S_1-S_2} = \sqrt{\sigma_{S_1}^2 + \sigma_{S_2}^2} \quad (10)$$

Dado que las muestras escogidas en ninguna forma dependen entre sí, entonces la muestras son independientes (en otras palabras, las variables aleatorias S_1 y S_2 son independientes).

Si por ejemplo S_1 y S_2 son las medias muestrales de poblaciones, denotadas por \bar{X}_1 y \bar{X}_2 respectivamente, entonces la distribución muestral de la diferencia de las medias está dada para poblaciones infinitas con media y desviación típica μ_1, σ_1 y μ_2, σ_2 respectivamente por

$$\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \mu_{\bar{X}_1} - \mu_{\bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2 \quad \sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\sigma_{\bar{X}_1}^2 + \sigma_{\bar{X}_2}^2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \quad (11)$$

Utilizando (4) y (5). Este resultado también es válido para poblaciones finitas si el muestreo es con remplazamiento. La variable tipificada

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

En tal caso tiene casi una distribución normal si n_1 y n_2 son grades ($n_1, n_2 \geq 30$) (Spiegel, 1975) (Klinger Angarita, 2005)

3. De la Varianza

Si $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ denota las variables aleatorias para una muestra de tamaño n entonces la variable aleatoria que da la varianza de la muestra se define de cómo

$$s^2 = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2}{n} \quad (12)$$

Entonces en el teorema 1 hallamos que $E(\bar{X}) = \mu$ y sería increíble que también se pudiera tener que $E(s^2) = \sigma^2$. Siempre que el valor esperado de un estadístico sea igual al parámetro poblacional correspondiente llamamos al estadístico un estimador insesgado, y el valor una estimación insesgada de este parámetro, sin embargo, resulta ser que

$$E(s^2) = \mu_{\sigma^2} = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \quad (13)$$

Que está muy próximo a σ^2 solamente para grandes valores de n ($n \geq 30$) el estimador insesgado está definido por

$$\tilde{S}^2 = \frac{n}{n-1} S^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n}{n-1} \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2}{n} \\
&= \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2}{n-1} \quad (14)
\end{aligned}$$

De modo que $E(\tilde{S}^2) = \sigma^2$.

Los resultados anteriores son válidos si el muestreo es de población infinita o con reemplazamiento para una población finita. Si el muestreo es sin reemplazamiento de una población finita de tamaño N , entonces la media de la distribución muestral de varianza está dada por

$$E(S^2) = \left(\frac{N}{N-1}\right) \left(\frac{n-1}{n}\right) \sigma^2 \quad (15)$$

Cuando $N \rightarrow \infty$ esta se reduce a (13). (Spiegel, 1975) (Klinger Angarita, 2005)

VI. Diferentes Aspectos del Método de Representación

Se conocen dos procedimientos para abordar el Método de Representación. El Método de Muestreo Aleatorio y el Método de Selección Intencional, cada uno de los cuales se describe a continuación.

1. El Método de Muestreo Aleatorio

El método de muestreo aleatorio consiste, como se sabe, en tomar elementos en forma aleatoria de la población que se pretende estudiar. Los elementos componen una muestra que luego es estudiada. Los resultados forman la base de las conclusiones relativas a la población. La naturaleza de la población es arbitraria. Denotamos esta población Ω . Sus elementos serán cada uno de los individuos, de los cuales debemos considerar un carácter definido x , que puede ser medible o no (es decir, un atributo). Supongamos que queremos estimar el valor promedio del carácter x , dígase X , en todos los individuos que forman la población Ω .

Su valor numérico en esos individuos será 0 o 1, y su valor medio de X será la proporción de los individuos que realmente tengan el atributo x . (Neyman, 1934)

Forman parte de este tipo de muestreo, todos aquellos métodos para los que puede calcular la probabilidad de extracción de cualquiera de las muestras posibles. Este conjunto de técnicas de muestreo es el más aconsejable, aunque en ocasiones no es posible optar por él. En este caso se habla de muestras probabilísticas, pues no es en rigor correcto hablar de *muestras representativas*

dado que, al no conocer las características de la población, no es posible tener certeza de que tal característica se haya conseguido.

Sin reposición de los elementos: Cada elemento extraído se descarta para la subsiguiente extracción. Por ejemplo, si se extrae una muestra de una "población" de bombillas para estimar la vida media de las bombillas que la integran, no será posible medir más que una vez la bombilla seleccionada.

Con reposición de los elementos: Las observaciones se realizan con remplazamiento de los individuos, de forma que la población es idéntica en todas las extracciones. En poblaciones muy grandes, la probabilidad de repetir una extracción es tan pequeña que el muestreo puede considerarse con reposición aunque, realmente, no lo sea.

Con reposición múltiple: En poblaciones muy grandes, Para realizar este tipo de muestreo, y en determinadas situaciones, es muy útil la extracción de números aleatorios mediante ordenadores, calculadoras o tablas construidas al efecto pero no es exacto. El método del muestreo aleatorio puede ser de varios tipos:

- Método de muestreo aleatoria simple
- Método de muestreo sistemático
- Método de muestreo estratificado
- Método de muestreo por conglomerados

1.1. Muestreo aleatorio simple

Este método de muestreo proporciona un punto de partida para una exposición de los métodos de muestreo probabilístico, no porque sea uno de los Métodos de muestreo más utilizados, sino porque constituyen la base de métodos de muestreo más complejos.

Dependiendo si el muestreo es con reposición o sin reposición, podemos hablar de muestreo aleatorio simple con reposición o sin reposición respectivamente. De manera formal, este diseño básico o técnica de muestreo se define de la siguiente manera.

Definición 3.1: Si se selecciona muestra de tamaño n de una población de Tamaño N , de tal manera que cada muestra posible de tamaño n , tenga la misma probabilidad de ser seleccionada, el procedimiento de muestreo se denomina Muestreo aleatorio simple. A la muestra así obtenida se le denomina muestra Aleatoria simple.

Dada la forma de selección de la muestra, el conjunto formado por todas las muestras T tiene un total de:

$$C_n^N = \binom{N}{n} \quad (16)$$

Muestras posibles, ya que estamos considerando muestras no ordenadas. Luego Si todas las muestras son equiprobables, la probabilidad de cada muestra viene Dada por (Anonimo, 2013). (Klinger Angarita, 2005)

$$P(t) = \frac{1}{\binom{N}{n}} \quad \forall t \in T \quad (17)$$

1.2. Muestreo sistemático

Sea N el tamaño de una población y n el tamaño de la muestra que deseamos elegir

Sea $k = \frac{N}{n}$ y sea h un número al azar entre los k primeros de una lista de todos los elementos poblacionales.

Un muestreo sistemático de n elementos consiste en seleccionar la muestra formada por los elementos $h, h + k, h + 2k, \dots, h + (n - 1)k$.

Debemos tener en cuenta que esta muestra depende de los valores h y k . Dada una población y un tamaño de muestra, k es un valor fijo que indica la separación entre los elementos sucesivos de la muestra en la población y que permite obtener la muestra del tamaño deseado. El valor h se debe elegir aleatoriamente e indica el punto de inicio para seleccionar los elementos de la muestra. (Klinger Angarita, 2005)

1.3. Muestreo por conglomerado

Se aplica cuando es difícil tener una lista de todos los individuos que forman parte de la población de estudio, pero sin embargo sabemos que se encuentran agrupados naturalmente en grupos.

Se divide la población en varios grupos de características parecidas entre ellos y luego se analizan completamente algunos de los grupos, descartando los demás.

Dentro de cada conglomerado existe una variación importante, pero los distintos conglomerados son parecidos. Requiere una muestra más grande, pero suele simplificar la recogida de muestras. Frecuentemente los conglomerados se aplican a zonas geográficas.

Es un método en el cual la unidad de muestreo consiste de un grupo de unidades Elementales. Es decir, que cada grupo o conglomerado es un agregado de unidades elementales. Cada conglomerado es considerado como una unidad de muestreo de diferente rango a las unidades elementales que son las de interés.

Entonces:

$$c = \{Y_i\}_{i=1}^n \quad (18)$$

En muestreo por conglomerados se tienen 2 tipos de unidades:

- 1) Unidades elementales (de interés)
- 2) Conglomerados (Unidades de Muestreo)

Puesto que en Muestreo lo más caro es llegar a la unidad de muestreo, entonces ¿No sería posible en lugar de enumerar una sola de ellas al llegar al lugar de localización, enumerar uno solo de ellos?

Esto es lo que se hace en el Muestreo por Conglomerados; es decir, se incrementa con bajo costo el tamaño de muestra.

Es parecido al muestreo estratificado, con la diferencia que la población se divide en grupos heterogéneos, como si fueran subpoblaciones dentro de la población general. Ejemplos de conglomerados serían unidades hospitalarias, mesas electorales, etc.

La objetividad del muestreo por conglomerados consiste en hallar una lista confiable de elementos de la población y optimizar los costos para la elaboración de una lista sobre todo cuando la población es grande. (Gómez, 2010; Smith, 1976) (Klinger Angarita, 2005).

1.4. Muestreo estratificado

Un muestreo aleatorio estratificado es aquel en el que se divide la población de N individuos, en k subpoblaciones o estratos, atendiendo a criterios que puedan ser importantes en el estudio, de tamaños respectivos N_1, N_2, \dots, N_k .

$$N = N_1 + N_2 + \dots + N_k \quad (19)$$

Y realizando en cada una de estas subpoblaciones muestreos aleatorios simples de tamaño n_i , $i = 1, 2, \dots, k$.

Teniendo en cuenta las diferencias entre el muestreo por conglomerados y estratificado es la de la homogeneidad de los conglomerados y de los estratos, pero esta diferencia se debe a que en el muestreo estratificado se escoge una muestra dentro de cada estrato, mientras que en el muestreo por conglomerados se toma una muestra de conglomerados, es decir, supongamos que se tiene 10 conglomerados y se escoges una muestra de 2 conglomerados, entonces la muestra final la componen todos los elementos que componen el conglomerado 1 y conglomerado 2, en el estratificado no se hace esto, se toma una muestra de tamaño menor que el tamaño del estrato y la unión de todas esas muestras es la muestra final.

1.4.1. Asignación proporcional

Sea n el número de individuos de la población total que forman parte de alguna muestra:

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k \quad (20)$$

Cuando la asignación es proporcional el tamaño de la muestra de cada estrato es proporcional al tamaño del estrato correspondiente con respecto a la población total

$$n_i = n \frac{N_i}{N} \quad (21)$$

1.4.2. Asignación óptima

Cuando se realiza un muestreo estratificado, los tamaños muestrales en cada uno de los estratos, n_i , los elige quien hace el muestreo, y para ello puede basarse en alguno de los siguientes criterios:

- Elegir los, n_i de tal modo que se minimice la varianza del *estimador*, para un costo especificado, o bien.
- Habiendo fijado la varianza que podemos admitir para el estimador, minimizar el costo en la obtención de las muestras.

Así en un estrato dado, se tiende a tomar una muestra más grande cuando:

- El estrato es más grande;
- El estrato posee mayor variabilidad interna (varianza);
- El muestreo es más barato en ese estrato.

Atendiendo a la objetividad de este trabajo se puede establecer una caracterización de estas asignaciones, la asignación proporcional se basa en una distribución frecuentista de todos los elementos de la población, mientras que la asignación óptima se basa principalmente en costos, ya que uno de los inconvenientes principales de aplicar métodos de muestreo son los valores económicos de dichos estudios.

1.4.3. Asignación de Neyman (Teorema)

Sea E una población con N elementos, dividida en k estratos, con N_i elementos cada uno de ellos, $i = 1, 2, \dots, k$.

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k \quad N = N_1 + N_2 + \dots + N_k \quad (22)$$

Sea n el número total de elementos al realizar el muestreo, y que se dividen en cada estrato como

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k \quad (23)$$

Sea X la v.a. que representa el carácter colectivo que intentamos estudiar. Sobre cada estrato puede definirse entonces la v.a. \bar{X}_i

Como el valor medio de X obtenida en una muestra de tamaño n_i en el estrato E_i . Sea la varianza de dicha v.a. Entonces (Malaga) (Klinger Angarita, 2005)

$$\sum_{i=1}^k \sigma_{\bar{X}_i}^2 \quad (24)$$

Se minimiza cuando

$$n_i = n \frac{N_i \hat{S}_i}{\sum_{j=1}^k N_j \hat{S}_j} \quad (25)$$

Donde

$$\hat{S}_i = \frac{1}{N_i - 1} \sum_{j=1}^{N_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \begin{cases} x_{ij} = j\text{-ésimo elemento de } E_i \\ \bar{x}_i = \text{media poblacional de } E_i \end{cases}$$

Es la cuasi-varianza del estrato E_i .

2. El Método de Selección Intencional

2.1. Muestreo No Probabilísticos

A veces, para estudios exploratorios, el muestreo probabilístico resulta excesivamente costoso y se acude a métodos no probabilísticos, aun siendo cocientes de que no sirven para realizar generalizaciones, pues no se tiene certeza de que la muestra extraída sea representativa, ya que no todos los sujetos de la población tienen la misma probabilidad de ser elegidos. En general se selecciona a los sujetos siguiendo determinados criterios y procurando que la muestra sea representativa. En este método es muy importante tener la opinión de un experto ya que con su criterio se podrá realizar diferentes análisis sobre un fenómeno llegando a una representación teórica.

Los métodos de muestreo no probabilísticos no garantizan la representatividad de la muestra ya que no se tiene una función certera de distribución de probabilidad y por lo tanto no permiten realizar estimaciones inferenciales sobre la población.

(En algunas circunstancias los métodos estadísticos permiten resolver los problemas de representatividad aun en situaciones de muestreo no probabilístico, por ejemplo los estudios de caso-control, donde los casos no son seleccionados aleatoriamente de la población.)

Algunas desventajas del método de muestreo no probabilístico son

- No se basa en la teoría de la probabilidad por lo tanto no se puede calcular exactitud.
- No es posible el cálculo de la confianza para las estimaciones ni la precisión.
- El investigador elige los casos que más le interesan con el propósito de lograr una buena representación.
- No posee función de distribución de la población.

Todos estos aspectos mencionados anteriormente hacen que el muestreo no probabilístico, presente diferentes aspectos donde la muestra no es representativa

Cuándo utilizar el muestreo no probabilístico

- Este tipo de muestreo puede ser utilizado cuando se quiere mostrar que existe un rasgo determinado en la población.
- También se puede utilizar cuando el investigador tiene como objetivo hacer un estudio cualitativo, piloto o exploratorio.
- Se puede utilizar cuando es imposible la aleatorización, como cuando la población es casi ilimitada.

- Se puede utilizar cuando la investigación no tiene como objetivo generar resultados que se utilicen para hacer generalizaciones respecto de toda la población.
- También es útil cuando el investigador tiene un presupuesto, tiempo y mano de obra limitados.
- Esta técnica también se puede utilizar en un estudio inicial que será llevado a cabo nuevamente utilizando un muestreo probabilístico aleatorio.

Los métodos de muestreo no probabilístico son los siguientes:

2.1.1. Muestreo por cuotas:

También denominado en ocasiones "accidental". Se asienta generalmente sobre la base de un buen conocimiento de los estratos de la población y/o de los individuos más "representativos" o "adecuados" para los fines de la investigación. Mantiene, por tanto, semejanzas con el muestreo aleatorio estratificado, pero no tiene el carácter de aleatoriedad de aquél.

En este tipo de muestreo se fijan unas "cuotas" que consisten en un número de individuos que reúnen unas determinadas condiciones, por ejemplo: 20 individuos de 25 a 40 años, de sexo femenino y residentes en Popayán. Una vez determinada la cuota se eligen los primeros que se encuentren que cumplan esas características. Este método se utiliza mucho en las encuestas de opinión.

- El primer paso para el muestreo por cuotas no probabilístico es dividir a la población en subgrupos exclusivos.

- Luego, el investigador debe identificar las proporciones de estos subgrupos en la población. Esta misma proporción será aplicada al proceso de muestreo.
- Por último, el investigador selecciona sujetos de los diversos subgrupos teniendo en cuenta las proporciones observadas en el paso anterior.
- El último paso garantiza que la muestra sea representativa de toda la población. También permite que el investigador estudie rasgos y características que se ven en cada subgrupo.

Ventajas sobre el muestreo por cuotas:

La razón principal por la que los investigadores eligen muestras por cuotas es que permiten que los investigadores hagan un muestreo de un subgrupo que es de gran interés para el estudio. Si un estudio tiene como objetivo investigar una característica o rasgo de un determinado subgrupo, ésta es la técnica ideal.

El muestreo por cuotas también permite que los investigadores observen las relaciones entre los subgrupos. En algunos estudios, los rasgos de un determinado subgrupo interactúan con otros rasgos de otro subgrupo. En tales casos, también es necesario que el investigador utilice este tipo de técnica de muestreo.

Desventajas de las muestras por cuotas:

Puede parecer que esta técnica de muestreo es totalmente representativa de la población. En algunos casos no es así. Se debe tener en cuenta que se han considerado sólo los rasgos seleccionados de la población para formar los subgrupos.

En el proceso de muestreo de estos subgrupos, otros rasgos de la muestra pueden ser representados de más. En un estudio que tiene en cuenta el género, el nivel socioeconómico y la religión como base de los subgrupos, la muestra final puede tener una representación sesgada de la edad, la raza, el nivel educativo alcanzado, el estado civil y mucho más. (Explorable, 2013).

2.1.2. Muestreo opinático o intencional:

Este tipo de muestreo se caracteriza por un esfuerzo deliberado de obtener muestras "representativas" mediante la inclusión en la muestra de grupos supuestamente típicos. Es muy frecuente su utilización en sondeos preelectorales de zonas que en anteriores votaciones han marcado tendencias de voto.

El muestreo opinático o intencional se utiliza en los casos en que la especialidad de una autoridad puede seleccionar una muestra más representativa que pueda arrojar resultados más precisos que mediante otras técnicas de muestreo probabilístico. El proceso consiste en elegir intencionalmente a dedo a los individuos de la población sobre la base del conocimiento o juicio de la autoridad o investigador.

Ventajas del muestreo intencional:

Los investigadores utilizan el muestreo intencional no sólo porque es fácil de usar, sino porque también tiene otras ventajas para la investigación.

En Pruebas Piloto, la muestra de conveniencia se suele utilizar ya que permite al investigador obtener los datos básicos y las tendencias con respecto a su estudio, sin las complicaciones del uso de una muestra aleatoria.

Esta técnica de muestreo es también útil para documentar que una calidad particular de una sustancia o fenómeno se produzca dentro de una muestra dada. Tales pruebas piloto, o de prueba inicial son también muy útiles para la detección de relaciones entre los fenómenos diferentes.

Desventajas del muestreo intencional:

La crítica más obvia acerca del muestreo por conveniencia son los sesgos o prejuicios del muestreo. Por no demostrar imparcialidad al ser escogida, la muestra no es representativa de toda la población. Este puede ser el mayor inconveniente al utilizar una muestra por conveniencia, ya que además conduce a más problemas y críticas.

El sesgo sistemático proviene de un sesgo de muestreo. Esto se refiere a una diferencia constante entre los resultados de la muestra y los resultados teóricos de toda la población. No es raro que los resultados de un estudio, que utiliza una muestra de conveniencia, difieran significativamente con los resultados de toda la población. Una de las consecuencias de tener un sesgo sistemático es la obtención de resultados sesgados.

Otra crítica importante acerca del uso de una muestra por conveniencia es la limitación en la generalización y las posibles inferencias que pueden surgir sobre toda una población. Dado que la muestra no es representativa de la población, los resultados del estudio no pueden ser generalizados a la población,

ni hablar de toda la población. Esto da lugar a una baja validez externa del estudio. (Explorable, 2013).

2.1.3. Muestreo casual o incidental:

Se trata de un proceso en el que el investigador selecciona directa e intencionadamente los individuos de la población. El caso más frecuente de este procedimiento, es utilizar como muestra los individuos a los que se tiene fácil acceso. En todas las formas de investigación, sería ideal generalizar los resultados a la totalidad de la población, pero en la mayoría de los casos, la población es demasiado grande y resulta imposible incluir cada individuo. Esta es la razón por la cual algunos de los investigadores utilizan técnicas de muestreo, como el muestreo casual o incidental, la más común de todas las técnicas de muestreo. Muchos investigadores prefieren esta técnica de muestreo, ya que es rápida, barata, fácil y sobre todo, los sujetos están disponibles. (Los profesores de universidad emplean con mucha frecuencia a sus propios alumnos) (Medina, 2010).

Ventajas del muestreo casual:

Los investigadores utilizan el muestreo casual o incidental no sólo porque es fácil de usar, sino porque también tiene otras ventajas para la investigación. En Pruebas Piloto, la muestra de conveniencia se suele utilizar ya que permite al investigador obtener los datos básicos y las tendencias con respecto a su estudio, sin las complicaciones del uso de una muestra aleatoria.

Esta técnica de muestreo es también útil para documentar que una calidad particular de una sustancia o fenómeno se produzca dentro de una muestra

dada. Tales pruebas piloto, o de prueba inicial son también muy útiles para la detección de relaciones entre los fenómenos diferentes.

Cuando se utiliza el muestreo causal o incidental, es necesario describir cómo la muestra de las pruebas en la investigación actual sería diferente de la muestra ideal, seleccionada al azar. También es necesario describir los individuos que podrían quedar por fuera durante el proceso de selección o los individuos que están sobrerrepresentados en la muestra. (Explorable, 2013)

En relación a esto, es mejor si se pueden describir los posibles efectos que, los sujetos no-incluidos en la muestra o los que están sobrerrepresentados, pueden proporcionar a los resultados. Esto permitirá a los lectores de la investigación obtener una buena comprensión de la muestra que se prueba. También les permitirá estimar la posible diferencia entre los resultados en ésta prueba piloto y los resultados que se podrían dar si representada correctamente toda la población. (Explorable, 2013)

Desventajas del muestreo causal:

La crítica más obvia acerca del muestreo por conveniencia son los sesgos o prejuicios del muestreo. Por no demostrar imparcialidad al ser escogida, la muestra no es representativa de toda la población. Este puede ser el mayor inconveniente al utilizar una muestra por conveniencia, ya que además conduce a más problemas y críticas.

El sesgo sistemático proviene de un sesgo de muestreo. Esto se refiere a una diferencia constante entre los resultados de la muestra y los resultados teóricos de toda la población. No es raro que los resultados de un estudio, que utiliza una muestra de conveniencia, difieran significativamente con los resultados de toda

la población. Una de las consecuencias de tener un sesgo sistemático es la obtención de resultados sesgados.

Otra crítica importante acerca del uso de una muestra por conveniencia es la limitación en la generalización y las posibles inferencias que pueden surgir sobre toda una población. Dado que la muestra no es representativa de la población, los resultados del estudio no pueden ser generalizados a la población, ni hablar de toda la población. Esto da lugar a una baja validez externa del estudio. (Explorable, 2013)

2.1.4. Bola de nieve:

El muestreo de bola de nieve es una técnica utilizada por los investigadores para identificar a los sujetos potenciales en estudios en donde los elementos son difíciles de encontrar, este consiste en localizar algunos individuos, los cuales conducen a otros, y estos a otros, y así hasta conseguir una muestra suficiente. Este tipo se emplea muy frecuentemente cuando se hacen estudios con poblaciones "marginales", delincuentes, sectas, determinados tipos de enfermos, etc. (Medina, 2010)

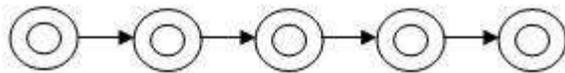
Los investigadores utilizan este método de muestreo si la muestra para el estudio es muy rara o si está limitada a un subgrupo muy pequeño de la población. Este tipo de técnica de muestreo funciona en cadena. Luego de observar al primer sujeto, el investigador le pide ayuda a él para identificar a otras personas que tengan un rasgo de interés similar.

El proceso de muestreo de bola de nieve es como pedirles a los sujetos que designen a otra persona con el mismo rasgo. Luego, el investigador observa a los

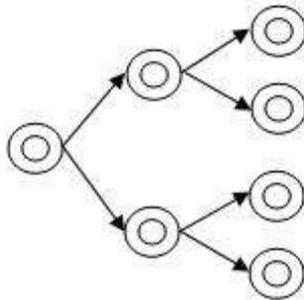
sujetos designados y sigue de la misma manera hasta obtener el número suficiente de sujetos.

Tipos de muestreo de bola de nieve:

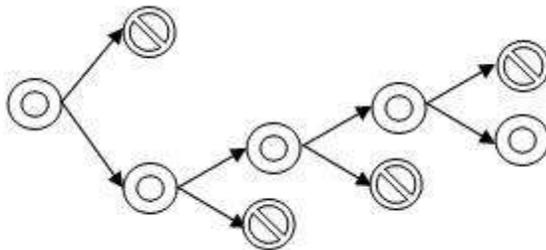
Muestreo de bola de nieve lineal



Muestreo de bola de nieve no discriminatorio exponencial



Muestreo de bola de nieve discriminatorio exponencial



Ventajas del muestreo de bola de nieve:

- El proceso en cadena permite que el investigador llegue a poblaciones que son difíciles de probar cuando se utilizan otros métodos de muestreo.
- El proceso es barato, simple y rentable.
- Esta técnica de muestreo necesita poca planificación y menos mano de obra que otras técnicas de muestreo.

Desventajas del muestreo de bola de nieve:

El investigador tiene poco control sobre el método de muestreo. Los sujetos que el investigador puede obtener se basan principalmente en los sujetos observados anteriormente.

La representatividad de la muestra no está garantizada. El investigador no tiene ni idea de la verdadera distribución de la población ni de la muestra.

El sesgo de muestreo es también un miedo de los investigadores cuando se utiliza esta técnica. Los primeros sujetos tienden a designar a personas que conocen bien. Como consecuencia, es muy posible que los sujetos compartan los mismos rasgos y características y, por lo tanto, la muestra que obtenga el investigador será sólo un pequeño subgrupo de toda la población. (Explorable, 2013).

2.1.2 Muestreo Discrecional

En el muestreo discrecional la selección de los elementos de la muestra la realiza un experto que indica al investigador que elementos de la población son los que más pueden contribuir al estudio. Este muestreo es adecuado cuando existen líderes de opinión dentro de la población objeto de estudio, sabemos quiénes

son esos líderes y no queremos que se nos escapen por utilizar un método totalmente aleatorio o de conveniencia.

Ejemplo: Seleccionar a los cajeros de un banco en el estudio sobre el comportamiento del usuario ante el pago de impuestos.

Ventajas del muestreo discrecional:

El diseño del muestreo discrecional generalmente se utiliza cuando un número limitado de individuos posee el rasgo de interés. Es la única técnica de muestreo viable para obtener información de un grupo muy específico de personas. También es posible utilizar el muestreo discrecional si el investigador conoce a un profesional o autoridad fiable que él cree que es capaz de reunir una muestra representativa.

Desventajas del muestreo discrecional:

Las dos debilidades principales del muestreo discrecional se encuentran en la autoridad y en el proceso de muestreo, ambos relacionados con la fiabilidad y el sesgo que acompañan a la técnica de muestreo.

Desafortunadamente, generalmente no hay manera de evaluar la fiabilidad del experto o de la autoridad. La mejor manera de evitar el error de muestreo presentada por el experto es elegir la mejor autoridad y más experimentada en el campo de interés.

El proceso de muestreo generalmente estará sesgado, ya que no se utiliza ninguna aleatorización para obtener la muestra. También vale la pena señalar que los miembros de la población no tienen las mismas posibilidades de ser

seleccionados. Su consecuencia es la mala representación de toda la población que limitará las generalizaciones de los resultados del estudio. (Explorable, 2013).

VII. Comparación de los Dos Métodos De Muestreo

El método de representación está fundamentado en la inferencia basada en el diseño de muestreo y por lo tanto se debe tener en cuenta que dicha inferencia está soportada en los intervalos de confianza y en las pruebas de hipótesis, generando la distribución de probabilidad con la ayuda del teorema del límite central para datos de distribución normal.

Esta distribución de probabilidad es una función que muestra la representatividad de los datos de la siguiente manera:

La función de distribución acumulada, o simplemente la función de distribución, para una variable aleatoria X se define por

$$P(X \leq x) = F(x)$$

donde x es cualquier número real, es decir $-\infty < x < \infty$.

La función de distribución puede obtenerse de la función de probabilidad notando que

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{u \leq x} f(u)$$

(Siempre que x sea un variable aleatoria discreta)

Donde la suma a la derecha se toma para todos los valores de u para los cuales $u \leq x$; recíprocamente, la función de probabilidad puede obtenerse de la función de distribución.

Si X toma únicamente un número finito de valores $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ entonces la función de distribución está dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0; & -\infty < x < x_1 \\ f(x_1); & x_1 \leq x < x_2 \\ f(x_1)+f(x_2); & x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \\ f(x_1)+f(x_2)+ \dots + f(x_n); & x_n \leq x < \infty \end{cases}$$

Así podemos establecer que cada uno de los valores $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ de la variable aleatoria X tienen la posibilidad de ser elegidos en una muestra cualquiera, de este modo podemos establecer que existe un principio de probabilidad para cada uno de los datos que se tienen para los diferentes métodos mencionados anteriormente.

- Método de muestreo aleatoria simple
- Método de muestreo sistemático
- Método de muestreo estratificado
- Método de muestreo por conglomerados

Con lo cual podemos asumir que existe un error para cada una de las estimaciones pretendidas y que es susceptible de calcularlo de la siguiente forma:

$$\delta = |\bar{\theta} - \theta| \text{ error de muestreo prefijado}$$

Donde $\bar{\theta}$ es la estimación y θ el parámetro.

Así podemos establecer que estos son métodos de muestreo probabilísticos y a su vez es factible generar todo su desarrollo basado en el principio de aleatoriedad.

Por otro lado están los métodos de selección intencional, que son aquellos en los cuales no existe principio de equiprobabilidad, ya que son datos sesgados al ser tomados intencionalmente, junto del o de los criterios que asuma el investigador, con lo cual no se puede establecer un error de muestreo prefijado para cada uno de los métodos mencionados.

- Método de muestreo por cuotas
- Método de muestreo opinático o intencional
- Método de muestreo causal o incidental
- Método de muestreo bola de nieve
- Método de muestreo discrecional

Así establecemos que este tipo de métodos no son probabilísticos y así podemos determinar la división que existe entre los métodos aleatorios y los no aleatorios, dando paso a lo que hoy conocemos como el Método de Representación cuyos elementos son el método de aleatorio y el método de selección intencional.

VIII. Conclusiones:

El desarrollo de este trabajo deja varias apreciaciones acerca de cómo se divide el método de representación, con lo cual se puede establecer las siguientes conclusiones.

En la historia se asumía que el método de representación solo era uno, basados en la argumentación del profesor Bowley, que consideraba que para obtener una muestra representativa, se podía tomar en forma aleatoria o en forma intencional, pero es Neyman quien establece que el método de representación se presenta en dos formas totalmente distintas, una que la llamó muestreo probabilístico y otra que se denominó muestreo por selección intencional, dando paso a lo que hoy se conoce como intervalos de confianza y pruebas de hipótesis, generando el desarrollo de la inferencia estadística, la teoría de la estimación y de la decisión.

La división del método de representación ocasionó el desarrollo de la teoría del muestreo, ya que se estableció el principio de equiprobabilidad y se pudo estimar el error.

Se establece que el método aleatorio que engloba a los métodos de muestreo probabilísticos se basa en el principio de equiprobabilidad. Es decir, aquel en el que todos los individuos tienen la misma probabilidad de ser elegidos para formar parte de una muestra y, por consiguiente, todas las posibles muestras de tamaño n tienen la misma probabilidad de ser seleccionadas. Sólo éstos métodos de muestreo probabilísticos aseguran la representatividad de la muestra extraída y son, por tanto, los más recomendables.

A veces, para estudios exploratorios, el muestreo probabilístico resulta excesivamente costoso y se acude a métodos no probabilísticos, aun siendo conscientes de que no sirven para realizar generalizaciones (estimaciones inferenciales sobre la población), pues no se tiene certeza de que la muestra extraída sea representativa, ya que no todos los sujetos de la población tienen la misma probabilidad de ser elegidos.

En general se selecciona a los sujetos siguiendo determinados criterios, procurando en la medida de lo posible, que la muestra sea representativa. En algunas circunstancias los métodos estadísticos y epidemiológicos permiten resolver los problemas de representatividad aún en situaciones de muestreo no probabilístico, por ejemplo los estudios de caso-control, donde los casos no son seleccionados aleatoriamente de la población.

El documento con el cual se pudo realizar este trabajo se denominó *Dos Aspectos Diferentes del Método de Representación: El Método de Muestreo Aleatorio y el Método de Selección Intencional*, por Jerzy Neyman en 1934, y para el desarrollo de esta monografía se debió realizar la traducción, del inglés al español, con el objetivo de ofrecer un documento para la comunidad hispanohablante que no tiene acceso al documento original.

Bibliografía

- Explorable*. (10 de 07 de 2013). Obtenido de Explorable:
<http://explorable.com/es/muestreo-de-bola-de-nieve>
- Anónimo. (12 de 07 de 2013).
http://matematicas.unex.es/~inmatorres/teaching/muestreo/assets/Cap_3.pdf.
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Recuperado el 14 de febrero de 2006, de www.ugr.es/~batanero
- Batanero, C., & Godino, J. D. (2001). *Análisis de Datos y su Didáctica*. Recuperado el 23 de febrero de 2006, de www.ugr.es/~batanero
- Bowley, A. L. (1936). La aplicación del muestreo a los problemas económicos y psicológicos. *Journal of the American Statistical Association*.
- Friedman, M. (2003). *Azar, economía y política en Milton Friedman*. Madrid: Biblioteca Miguel De Cervantes .
- Galbiati Riesco, J. (15 de 07 de 2013). *Desarrollo Histórico de la Estadística*. Obtenido de http://www.jorgegalbiati.cl/ejercicios_4/HistoriaEstadistica.pdf
- Gómez, Á. (10 de 10 de 2010). *Muestreo por Conglomerados*. Obtenido de Estadística.com: <http://www.estadistica.com.ve/home/wp-content/uploads/2010/10/Muestreo-por-Conglomerado.pdf>
- Gutiérrez C, S. (1983). Desarrollo de la inferencia estadística desde sus comienzos hasta principios de este siglo. *Estadística española*, 13.
- Gutiérrez Cabria, S. (1982). Inferencia Estadística e inducción. *Estadística Española*, 53-68.
- Gutiérrez Cabria, S. (1994). *Filosofía de la Estadística*. Valencia: Servei de Publicacions Universitat de Valencia.
- Gutiérrez, H. A. (2009). *Estrategia de Muestreo: Diseño de encuestas y estimación de parámetros*. Bogotá: Universidad Santo Tomás.
- Hacking, I. (1995). *La Domesticación del Azar: La erosión del determinismo y el nacimiento de las ciencias del caos*. (A. L. Bixio, Trad.) Barcelona, España: Gedisa.
- Jordi Casal, E. M. (2003). *Tipo de muestreo* . Obtenido de Tipo de muestreo : http://blog.unach.mx/vicente_castro/files/2012/08/Tipos_Muestreo.pdf
- Kahneman, D., Slovic, P., & Tversky, A. (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. New York: Cambridge University Press.
- Klinger Angarita, R. A. (2005). *Conceptos y aplicaciones de los métodos de muestreo*. Santiago de Cali: Universidad del Valle.
- Malaga, U. d. (s.f.). *Bioestadística: Métodos y Aplicaciones*. Obtenido de <http://www.bioestadistica.uma.es/libro/node89.htm>
- Medina, J. A. (9 de mayo de 2010). *aprende en línea*. Obtenido de aprendeonline.udea.edu.co/lms/moodle/mod/forum/discuss.php?d=24335&parent=87751
- Mirás, J. (2006). Inferencia estadística sobre poblaciones finitas con muestras intencionales. *Estadística Española vol 48*, 295 - 331.
- Muñoz, D. R. (2004). *Manual De Estadística*. Sevilla España: eumed.net.

- Neyman, J. (1934). On the Two Different Aspects of the Representative Method: The Method of Stratified Sampling and the Method of Purposive Selection. *Journal of the Royal Statistical Society*, 97(4), 558 - 625.
- Riascos, Y. (2010). *El muestreo estadístico en las prácticas investigativas de estudiantes universitarios: un problema del significado del concepto*. Universidad del Valle, Valle del Cauca. Cali: Universidad del Valle.
- Ruiz Luis, P. M. (1999). *FUNDAMENTOS DE INFERENCIA ESTADISTICA*. Madrid: AC Libros científicos y técnicos.
- Smith, T. M. (1976). The foundations of survey sampling. *Journal of The Royal Satatistics Society.*, págs. 183-204.
- Spiegel, M. R. (1975). *Probabilidad y Estadística*. México: Mc Graw Hill.
- Yule, G. U., & Kendall, M. G. (1947). *Introducción a la Estadística*. Madrid: M. Aguilar Editor.