APLICACIONES DE LA TEORÍA DE SEMIGRUPOS EN ECUACIONES DISPERSIVAS LINEALES Y LA ECUACIÓN DEL CALOR PARA EL CASO DE UNA BARRA FINITA

Néstor Daniel Racines Carabalí

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Matemáticas
Programa de Matemáticas
Popayán
2014

APLICACIONES DE LA TEORÍA DE SEMIGRUPOS EN ECUACIONES DISPERSIVAS LINEALES Y LA ECUACIÓN DEL CALOR PARA EL CASO DE UNA BARRA FINITA

Néstor Daniel Racines Carabalí

Trabajo de Grado
En modalidad de Seminario de Grado, presentado como requisito parcial
para optar al título de Matemático

Directora
Dra. Aida Patricia González N.

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Matemáticas
Programa de Matemáticas
Popayán
2014

Nota de aceptación

____

____

____

Directora: ____________________

Dra. Aida Patricia González N.

Jurado: ____________________

Dr. Ramiro Miguel Acevedo

Jurado: ____________________

Dr. Willy Will Sierra

Fecha de sustentación: Popayán, 31 de Marzo de 2014.

Dedicado a mi madre Milbia Fanny y a mi abuelita Estanislada.
Gracias a sus esfuerzos logré llegar a este peldaño.

Agradecimientos

La realización de este trabajo no hubiese sido posible sin la participación de mi directora Aida Patricia González. Su gran apoyo y todo su conocimiento fueron vitales para guiar mis ideas en el desarrollo de esta labor. Su orientación y rigurosidad fueron claves para el buen trabajo realizado. También expreso mis agradecimientos a los docentes Ramiro Acevedo y Willy Sierra por su participación activa en el desarrollo de este trabajo. De ellos tres destaco su disponibilidad y paciencia. Sin duda alguna, con ellos se ha enriquecido mi conocimiento.

Índice general

Introducción

El trabajo «Aplicaciones de la teoría de semigrupos en ecuaciones dispersivas lineales y la ecuación del calor para el caso de una barra finita», realizado en la modalidad de seminario de grado por el estudiante Néstor Daniel Racines Carabalí bajo la dirección de la Dra. Aida Patricia González N. y como requisito para la obtención del título de Matemático que otorga la Universidad del Cauca.

El eje principal es la aplicación de algunos tópicos de la teoría de semigrupos en las ecuaciones dispersivas lineales. En ese orden de ideas se realiza una revisión de esta teoría y se muestran algunos resultados importantes en ella.

A nivel de motivación, se parte del hecho de que si f es una función continua de valor real en $[0,\infty)$ que satisface $f(0) = 1$ y la propiedad de semigrupo $f(t+s) = f(t)f(s)$ para $t,s \geq 0$, entonces hay un número real a tal que $f(t) = e^{ta}$ para $t \geq 0$, siendo ésta la única función que cumple con tales propiedades. El número a puede ser calculado directamente por la fórmula

$$a = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-1}{h} = \frac{d^+}{dt} f(t)\bigg|_{t=0}. \tag{1}$$

Esta observación es importante porque ella conecta a f con el problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'(t) = au(t), \qquad t \geq 0 \\ u(0) = z. \end{cases} \tag{2}$$

En particular, $u(t) \equiv f(t)z$ es la solución para (2). Recíprocamente, dado el problema de valor inicial (2) hay varias formas para construir la solución directamente. Las tres fórmulas

$$e^{ta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} a^n, \quad e^{ta} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{t}{n} a\right)^n, \quad e^{ta} = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{t}{n} a\right)^{-n} \tag{3}$$

son conocidas del cálculo elemental como válidas.

Gracias a esta motivación, en el primer capítulo de este documento se estudiará la definición de C_0-*semigrupo* en espacios de Banach o en otros espacios como los de Hilbert y se presentarán algunas de sus propiedades importantes. En el capítulo dos se mostrará como ilustración específica el estudio de la ecuación del calor, caso dominio acotado, a través de C_0-*semigrupos* definidos en espacios de Hilbert. En el capítulo tres se presentan algunas características principales de las ecuaciones dispersivas lineales y en el capítulo cuatro se estudia la ecuación de onda como un caso particular de las ecuaciones dipersivas lineales de segundo orden en la variable temporal y se muestra el semigrupo asociado a esta importante ecuación diferencial utilizando la teoría de los operadores maximales disipativos.

Capítulo 1

Preliminares

A continuación se presentan algunas definiciones y varios resultados relacionados con operadores lineales y teoría de semigrupos.

1.1. Operadores Lineales

Definición 1.1.1. *Sean X y Y espacios de Banach y $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ un operador lineal con $D(A)$ siendo su dominio.*

*(a) A es un operador **acotado** en $D(A)$ si existe $C > 0$ tal que:*

$$\|Ax\|_Y \leq C \|x\|_X \quad \forall x \in D(A);$$

de lo contrario se dice que A es no acotado.

*(b) A es un operador **densamente definido** si $\overline{D(A)} = X$.*

*(c) A es un operador **cerrado** si para toda sucesión $\{x_n\} \subseteq D(A)$ tal que $x_n \to x$ y $Ax_n \to y$ cuando $n \to \infty$, se tiene que $x \in D(A)$ y $Ax = y$.*

Definición 1.1.2. *Sean X y Y espacios de Banach y $A : X \longrightarrow Y$ un operador lineal y acotado. Se define la norma de A como*

$$\|A\| := \sup_{x \neq 0_X} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} < +\infty. \tag{1.1}$$

La norma definida anteriormente satisface las siguientes propiedades:

Si A y B son operadores lineales y acotados y $x \in X$, entonces

- $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$
- $\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$
- Si $A = B$ se tiene que $\|A^2\| \leq \|A\|^2$. En general, $\left\|A^k\right\| \leq \|A\|^k$ (para $k = 2, 3...$) donde A^k indica la composición de A consigo mismo k-veces.

1.2. Introducción a la teoría de semigrupos

En adelante, a menos que se diga lo contrario, X denotará un espacio de Banach arbitrario.

Definición 1.2.1. *Sea $T = \{T(t)\}_{t \geq 0}$ una familia de operadores lineales y acotados de X en X. Se dice que T es un C_0-semigrupo si se satisfacen las condiciones*

(a) $T(0) = I$ (I es el operador identidad en X),

(b) $T(t + s) = T(t)T(s)$ para t, $s \geq 0$ (la propiedad de semigrupo),

(c) para cada $x \in X$ fijo, $t \to T(t)x$ es continua de $[0, \infty)$ en X (la propiedad C_0).

Si además,

(d) $\|T(t)\| \leq 1$ para todo $t \geq 0$ (propiedad de contracción),

se dice que T es un C_0-semigrupo de contracciones.

Observación 1.2.1. *El prefijo C_0 hace referencia a la continuidad del semigrupo en $t = 0$. Por otra parte, la expresión $T(t)T(s)$ en la segunda propiedad se entiende como la composición de los operadores $T(t)$ y $T(s)$ y la tercera propiedad indica que para cada $x \in X$ fijo, el operador $T(t)x$ es continuo con respecto a t.*

Observación 1.2.2. *Mediante algunas modificaciones y bajo ciertas condiciones se hace posible transformar un C_0-semigrupo en un C_0-semigrupo de contracciones y así, en tal caso, se puede asumir que el C_0-semigrupo es un C_0-semigrupo de contracciones. Cuando tales condiciones de transformación no se tienen, a partir del C_0-semigrupo original se puede construir uno nuevo que satisface ser C_0-semigrupo de contracciones. Más adelante se mostrará como se hace.*

Definición 1.2.2. *Sea T un C_0-semigrupo en X. El generador infinitesimal de T es el operador A con $D(A) \subset X$ definido por*

$$Ax = \lim_{h \to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} \quad \text{para todo} \quad x \in D(A), \tag{1.2}$$

con $D(A)$ siendo el conjunto de los $x \in X$ tales que este límite existe.

Por ejemplo, si A es un operador lineal y acotado entonces

$$T(t) = e^{tA} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n, \quad t \geq 0,$$

es el C_0-*semigrupo* cuyo generador es A. Este semigrupo es el único cuyo generador infinitesimal es un operador acotado (ver [8], Teorema 1.2). Sin embargo, en la literatura se puede encontrar que las aplicaciones más importantes surgen de C_0-*semigrupos* cuyos generadores son no acotados tal como se verá más adelante al estudiar el semigrupo de la ecuación del calor (caso barra finita) y el de la ecuación de onda.

Teorema 1.2.1. *Sea* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0*-semigrupo en* X*. Entonces existen constantes* $M \geq 1$ *y* $w \geq 0$ *tales que:*

$$\|T(t)\| \leq Me^{tw}, \text{ para todo } t \geq 0. \tag{1.3}$$

Demostración. Ver [8], Teorema 2.2.

□

Observación 1.2.3. *Puesto que*

$$\|x\| = \|Ix\| \leq \|I\| \, \|x\| \quad \forall x \in X,$$

entonces $\|I\| \geq 1$*. Así, tomando* $t = 0$ *en* (1.3)*, se sigue que*

$$1 \leq \|I\| = \|T(0)\| \leq M,$$

lo que justifica que $M \geq 1$*.*

Observación 1.2.4. *La propiedad de semigrupo más la propiedad de* C_0 *implican que* $D(A)$ *es siempre denso en* X *y que* T *satisface*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x, \quad t \geq 0, \quad T(0)x = x \in D(A). \tag{1.4}$$

En particular, $T(t)x \in D(A)$ *si* $x \in D(A)$*.*

Para entender un poco más estás afirmaciones, veamos los siguientes resultados.

Teorema 1.2.2. *Sean* T *un* C_0*-semigrupo en* X *y* A *su generador infinitesimal. Para* $x \in D(A)$ *se cumple que*

$$T(t)x \in C^1([0,\infty); X) \cap C([0,\infty); D(A)) \quad y \quad \frac{d}{dt}(T(t)x) = AT(t)x = T(t)Ax.$$

Demostración. Sea $x \in D(A)$.

$$\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)T(t)x = \frac{T(h)T(t)x - T(t)x}{h} = \frac{T(h+t)x - T(t)x}{h} = \frac{T(t)T(h)x - T(t)x}{h}$$

$$= T(t)\left(\frac{T(h)x - x}{h}\right) \to T(t)Ax, \text{ cuando } h \to 0^+, \text{por definición de } A.$$

Luego, $T(t)x \in D(A)$ para todo $x \in D(A)$. Además $AT(t)x = T(t)Ax = D^+T(t)x$.

Por otro lado, para $t, h > 0$ tales que $t - h > 0$ se tiene

$$\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} = T(t-h)\left(\frac{T(h)x - x}{h}\right).$$

En consecuencia,

$$\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax = T(t-h)\left(\frac{T(h)x - x}{h} - Ax\right) + (T(t-h) - T(t))\,Ax.$$

Así,

$$\left\|\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax\right\| \leq \left\|T(t-h)\left(\frac{T(h)x - x}{h} - Ax\right)\right\| + \|(T(t-h) - T(t))\,Ax\|.$$

Pero, dado que $h > 0$ y usando el Teorema 1.2.1, se sigue que

$$\left\|T(t-h)\left(\frac{T(h)x - x}{h} - Ax\right)\right\| \leq Me^{wt}\left\|\frac{T(h)x - x}{h} - Ax\right\| \to 0 \text{ cuando } h \to 0^+.$$

Además,

$$\begin{aligned}
\|(T(t-h) - T(t))Ax\| &= \|T(t-h)Ax - T(t)Ax\| \\
&= \|T(t-h)Ax - T(t-h)T(h)Ax\| \\
&\leq \|T(t-h)\|\,\|Ax - T(h)Ax\| \\
&\leq Me^{tw}\,\|T(h)Ax - Ax\| \to 0, \text{cuando } \ h \to 0^+.
\end{aligned}$$

Así, $D^-T(t)x = T(t)Ax = D^+T(t)x$ [1] y por lo tanto

$$\frac{d}{dt}(T(t)x) = AT(t)x = T(t)Ax.$$

[1] D^- significa derivada por izquierda y D^+ significa derivada por derecha

De esta manera se muestra que $T(t)x$ es diferenciable de $[0, \infty)$ con valores en X. Por otro lado como la aplicación $t \longrightarrow T(t)x$ es continua de $[0, \infty)$ en X, también lo es en $D(A)$. Esto completa la demostración del teorema. □

Observación 1.2.5. *Si $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es un C_0-semigrupo con generador infinitesimal A, entonces por el teorema anterior $u(t) = T(t)u_0$ define una solución para el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), & \textit{con} \quad t \geq 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

siempre que $u_0 \in D(A)$ (ver [3], sección 4.2). Esto muestra que existe una estrecha relación entre los semigrupos de operadores y las ecuaciones diferenciales. Para probar la unicidad, si $v(t)$ es otra solución se define $w(s) = T(t-s)v(s)$. Entonces

$$\frac{dw}{ds} = -AT(t-s)v(s) + T(t-s)Av(s) = 0.$$

Así, w es constante y esto implica que $w(t) = w(0)$ de donde $v(t) = T(t)u_0 = u(t)$.

A continuación se mostrará que un generador infinitesimal es cerrado y densamente definido. Para ello se hará uso de las integrales de Bochner (ver Apéndice A). Dado $h > 0$, se verifica

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} (T(\tau) - T(t))x \, d\tau = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(\tau)x \, d\tau - T(t)x.$$

Lema 1.2.1. *Para todo $x \in X$, se tiene la igualdad*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(\tau)x \, d\tau = T(t)x.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(\tau)x \, d\tau - T(t)x \right\| &= \left\| \frac{1}{h}\int_t^{t+h} (T(\tau)x - T(t)x) \, d\tau \right\| \\ &\leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|T(\tau)x - T(t)x\| \, d\tau. \end{aligned}$$

Como $T(\delta)T(t)x \to T(t)x$ cuando $\delta \to 0^+$, entonces para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta^*(\epsilon) > 0$ tal que $|\delta| < \delta^*$ implica $\|T(\delta)T(t)x - T(t)x\| < \epsilon$. Es decir, $\|T(t+\delta)x - T(t)x\| < \epsilon$ siempre que $0 < \delta < \delta^*$. Haciendo $\delta^* = h$ y $\tau = t + \delta$ se tiene que $0 < \tau - t = \delta < h$, lo que es equivalente a $|\tau - t| < h$. Con h suficientemente pequeño se llega a que

$$\|T(\tau)x - T(t)x\| < \epsilon,$$

de donde

$$\left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(\tau)x d\tau - T(t)x \right\| < \epsilon.$$

Significa que

$$\lim_{h \to 0^+} \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(\tau)x d\tau - T(t)x \right\| = 0$$

y así se obtiene el resultado. □

Teorema 1.2.3. *Sea A el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ en X. Entonces para todo $x \in X$*

$$\int_0^t T(\tau)x\, d\tau \in D(A) \quad y \quad A\left(\int_0^t T(\tau)x\, d\tau\right) = T(t)x - x.$$

Demostración. Sea $h > 0$. Así,

$$\begin{aligned} \left(\frac{T(h) - I}{h}\right) \int_0^t T(\tau)x\, d\tau &= \frac{1}{h}\left[\int_0^t (T(\tau + h)x - T(\tau)x)\, d\tau\right] \\ &= \frac{1}{h}\left[\int_0^t T(\tau + h)x\, d\tau - \int_0^t T(\tau)x\, d\tau\right]. \end{aligned}$$

Luego, haciendo el cambio de variable $y = \tau + h$ se tiene

$$\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)\int_0^t T(\tau)x\,d\tau = \frac{1}{h}\left[\int_h^{t+h} T(y)x\,dy - \int_0^t T(\tau)x\,d\tau\right]$$
$$= \frac{1}{h}\left[\int_h^t T(\tau)x\,d\tau + \int_t^{t+h} T(\tau)x\,d\tau - \int_0^h T(\tau)x\,d\tau - \int_h^t T(\tau)x\,d\tau\right]$$
$$= \frac{1}{h}\left[\int_t^{t+h} T(\tau)x\,d\tau - \int_0^h T(\tau)x\,d\tau\right].$$

Por el Lema 1.2.1

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(\tau)x\,d\tau - \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_0^h T(\tau)x\,d\tau = T(t)x - T(0)x = T(t)x - x,$$

de donde

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)\int_0^t T(\tau)x\,d\tau < \infty,$$

es decir,

$$\int_0^t T(\tau)x\,d\tau \in D(A).$$

Además, por la definición de generador infinitesimal

$$A\left(\int_0^t T(\tau)x\,d\tau\right) = T(t)x - x.$$

□

Corolario 1.2.1. *Si A es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, entonces A es cerrado y densamente definido.*

Demostración. Sea $x \in X$. Entonces, por Teorema 1.2.3 se tiene que

$$\int_0^h T(\tau)x\,d\tau \in D(A)$$

y además por el Lema 1.2.1

$$\frac{1}{h}\int_0^h T(\tau)x\,d\tau \to T(0)x = x.$$

De otra manera, haciendo $h = \frac{1}{n}$

$$y_n = \frac{1}{\frac{1}{n}} \int_0^{1/n} T(\tau)x \, d\tau \to T(0)x = x \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Así entonces, se tiene que para cada $x \in X$ existe una sucesión de puntos de $D(A)$ que converge a x. Por lo tanto $D(A)$ es denso en X.

Probemos ahora que A es un operador cerrado. Supongamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+} \subseteq D(A)$ es tal que $x_n \to x^*$ en X y que $Ax_n \to y$ en X. Se debe mostrar que $x^* \in D(A)$ y que $Ax^* = y$.

Obsérve que

$$\frac{T(h)x^* - x^*}{h} = \lim_{n\to\infty} \frac{T(h)x_n - x_n}{h}.$$

Además, como

$$\frac{d}{dt}T(t)x_n = T(t)Ax_n,$$

integrando respecto a t se tiene

$$\int_0^h \frac{d}{dt}T(t)x_n \, dt = \int_0^h T(t)Ax_n \, dt$$

y así,

$$T(h)x_n - T(0)x_n = \int_0^h T(t)Ax_n \, dt$$

de donde,

$$\frac{T(h)x^* - x^*}{h} = \lim_{n\to\infty} \frac{T(h)x_n - x_n}{h} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{h} \int_0^h T(\tau)Ax_n \, d\tau.$$

Como $Ax_n \to y$ se sigue que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)x^* - x^*}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h T(\tau)y \, d\tau = y.$$

Esto es, $x^* \in D(A)$ y $Ax^* = y$, con lo cual finaliza la prueba. $\square$

Teorema 1.2.4. *Si dos C_0-semigrupos $\{T_1(t)\}_{t\geq 0}$ y $\{T_2(t)\}_{t\geq 0}$ tienen el mismo generador infinitesimal A, entonces ellos son idénticos.*

Demostración. Para cada $x \in D(A)$ defínase la función $F : [0,t] \longrightarrow X$ dada por

$$F(s) = T_1(t-s)T_2(s)x.$$

Luego, usando el Teorema 1.2.2, se puede afirmar que

$$\frac{dF(s)}{ds} = -AT_1(t-s)T_2(s)x + T_1(t-s)AT_2(s)x = 0$$

lo cual permite concluir que la función F es constante, y así $F(t) = F(0)$. Luego, para $t \geq 0$ se tiene $T_1(t-t)T_2(t)x = T_1(t)T_2(0)x$. Esto significa que $T_1(0)T_2(t)x = T_1(t)T_2(0)x$. O lo que es lo mismo, $T_2(t)x = T_1(t)x$. Además, como $D(A)$ es denso en X, $T_2(t)x = T_1(t)x$ para todo $x \in X$ y para todo $t \geq 0$. Lo que demuestra que $T_1(t) = T_2(t)$ para todo $t \geq 0$. $\square$

El siguiente corolario establece una relación entre el operador exponencial y los semigrupos.

Corolario 1.2.2. *Si $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es un C_0-semigrupo cuyo generador infinitesimal A es acotado, entonces $T(t) = e^{tA}$.*

Demostración. Dado que A es un operador lineal acotado entonces la familia $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ es un C_0-semigrupo cuyo generador infinitesimal es el operador A. De esta manera, los C_0-semigrupos $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ y $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ tienen el mismo generador infinitesimal. Por el teorema anterior se tiene que $T(t) = e^{tA}$ para todo $t \geq 0$. $\square$

1.2.1. C_0-semigrupos de contracciones

Tal como se mencionó anteriormente, en algunos casos es posible transformar un *C_0-semigrupo* en un *C_0-semigrupo de contracciones*. Considérese el siguiente lema:

Lema 1.2.2. *Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semigrupo que satisface $\|T(t)\| \leq M$ ($M \geq 1$). Se define*

$$|x| = \sup_{t\geq 0} \|T(t)x\|. \tag{1.5}$$

Entonces

$$\|x\| \leq |x| \leq M \|x\| \tag{1.6}$$

y se tiene que $|\cdot|$ es una nueva norma en X la cual es equivalente a la norma original $\|\cdot\|$. Además se tiene que

$$|T(t)x| = \sup_{s\geq 0} \|T(s)T(t)x\| \leq \sup_{s\geq 0} \|T(s)x\| = |x| \tag{1.7}$$

y así $T(t)$ es un C_0-semigrupo de contracciones con la nueva norma $|\cdot|$ con la cual se ha dotado al espacio X.

Demostración. 1) Veamos que en efecto $|\cdot|$ define una norma en X.

i) Sea $x \in X$

$$|x| = \sup_{t\geq 0} \|T(t)x\| \geq 0$$

dado que $\|\cdot\|$ es una norma en X.

ii) Supongamos que $|x| = 0$. Entonces,

$$0 = \sup_{t\geq 0} \|T(t)x\|$$

Así que $\|T(t)x\| = 0$ para todo $t \geq 0$. Luego, como $\|\cdot\|$ es una norma, se tiene que $\|T(t)x\| = 0$ si solo si $T(t)x = 0_X$. Como $T(t)$ es un operador lineal para cada $t \geq 0$, en particular para $t = 0$ se verifica que $x = 0_X$.

iii) Sean x, $y \in X$.

$$\begin{aligned}
|x+y| = \sup_{t\geq 0} \|T(t)(x+y)\| &= \sup_{t\geq 0} \|T(t)x + T(t)y\| \\
&\leq \sup_{t\geq 0}(\|T(t)x\| + \|T(t)y\|) \\
&\leq \sup_{t\geq 0} \|T(t)x\| + \sup_{t\geq 0} \|T(t)y\| \\
&= |x| + |y| .
\end{aligned}$$

iv) Sean α un escalar y $x \in X$.

$$\begin{aligned}
|\alpha x| = \sup_{t\geq 0} \|T(t)(\alpha x)\| &= \sup_{t\geq 0} \|\alpha T(t)x\| \\
&= \sup_{t\geq 0} |\alpha| \, \|T(t)x\| \\
&= |\alpha| \sup_{t\geq 0} \|T(t)x\| \\
&= |\alpha| \, |x| .
\end{aligned}$$

2) Probemos que $\|\cdot\| \leq |\cdot| \leq M \|\cdot\|$

En primer lugar

$$\|x\| = \|T(0)x\| \leq \sup_{t\geq 0} \|T(t)x\| = |x| .$$

En segundo lugar

$$|x| = \sup_{t\geq 0} \|T(t)x\| \leq \sup_{t\geq 0} \|T(t)\| \, \|x\| \leq \sup_{t\geq 0} M \|x\| = M \|x\|$$

3) Probemos que $T(t)$ sigue siendo un C_0-*semigrupo* con la nueva norma. En efecto, de la Definición 1.2.1 las propiedades a) y b) se satisfacen inmediatamente dado que no se ha modificado la familia de operadores. Mientras tanto, la propiedad c) se

satisface de la siguiente manera:

Sea $x \in X$. Así, por la ecuación (1.6)

$$|T(t)x - x| \leq M \|T(t)x - x\|,$$

pero $\|T(t)x - x\| \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad t \downarrow 0$. Es decir, $T(t)x \to x$ cuando $t \downarrow 0$ con la norma $|\cdot|$.

4) Probemos la desigualdad dada en la ecuación (1.7).

   Por la definición de $|\cdot|$, se tiene que para todo $t \geq 0$

$$|T(t)x| = \sup_{s \geq 0} \|T(s)T(t)x\|.$$

   Por otra parte,

$$\sup_{s\geq 0} \|T(s)T(t)x\| = \sup_{s\geq 0} \|T(s+t)x\| = \sup_{\tau \geq t} \|T(\tau)x\| \leq \sup_{\tau \geq 0} \|T(\tau)x\| = |x|$$

   y se concluye

$$|T(t)x| \leq |x|.$$

5) Finalmente veamos que $T(t)$ es un C_0-*semigrupo de contracciones* con la norma $|\cdot|$.

   Por definición se tiene que

$$|T(t)| := \sup_{x \neq 0_X} \frac{|T(t)x|}{|x|}$$

   y por la ecuación (1.7) $|T(t)x| \leq |x|$. Así se deduce que

$$|T(t)| := \sup_{x \neq 0_X} \frac{|T(t)x|}{|x|} \leq \sup_{x \neq 0_X} \frac{|x|}{|x|} = 1.$$

□

Observación 1.2.6. *Para el caso en que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sea en general un C_0-semigrupo en X, por el Teorema 1.3 existen constantes M y w tales que $\|T(t)\| \leq Me^{tw}$. Se puede construir* *el C_0-semigrupo $S(t) = e^{-tw}T(t)$ el cual cumple que $\|S(t)\| \leq M$ y en consecuencia será un C_0-semigrupo de contracciones con la norma definida en* (1.5)*. Además A es el generador infinitesimal de $T(t)$ si y sólo si $A - wI$ es el generador infinitesimal de $S(t)$.*

Teorema 1.2.5. *(**Hille-Yosida**) Un operador lineal no acotado A en un espacio de Banach X es el generador infinitesimal de un semigrupo contractivo si y sólo si se cumplen las tres condiciones*

1. *A es cerrado,*
2. *A es densamente definido,*
3. *para todo $\lambda > 0$, $(\lambda I - A)^{-1}$ es un operador lineal acotado y $\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \dfrac{1}{\lambda}$.*

Demostración. Ver [3], sección 4.4. □

1.2.2. C_0-semigrupos en espacios de Hilbert.

El estudio de C_0-*semigrupos* realizado en espacios de Banach se puede desarrollar más detalladamente en espacios de Hilbert. Por ejemplo, supóngase que H es un espacio de Hilbert con producto interno denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y que $\{e_n\}_1^\infty$ es una sucesión ortonormal completa [2] en H. Supóngase además que $\{\lambda_n\}_1^\infty$ es una sucesión decreciente de números reales. Para cada $t \geq 0$ y $z \in H$ se define el siguiente operador en H:

$$S(t)z := \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle z, e_n \rangle e_n. \tag{1.8}$$

[2] La sucesión $\{e_n\}_1^\infty$ es ortonormal completa (u ortonormal total) si cumple las propiedades:

a)
$$\begin{cases} \langle e_m, e_n \rangle = 0 & \text{si} \quad m \neq n \\ \langle e_m, e_n \rangle = 1 & \text{si} \quad m = n \end{cases}$$

b) Para todo $z \in H$, $z = \sum_{n=1}^{\infty} \langle z, e_n \rangle e_n$

Lema 1.2.3. *Para cada $t \geq 0$ el operador $S(t)$ definido por la ecuación (1.8) es un operador lineal y acotado en H, con $\|S(t)\| \leq e^{\lambda_1 t}$, y la familia $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ define un C_0-semigrupo en H.*

Demostración. Sean t, $s \geq 0$, z_1, $z_2 \in H$ y α_1, α_2 escalares.

1) $S(t)$ es un operador lineal. En efecto

$$\begin{aligned}
S(t)(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2, e_n \rangle e_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \left(\langle \alpha_1 z_1, e_n \rangle + \langle \alpha_2 z_2, e_n \rangle \right) e_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle \alpha_1 z_1, e_n \rangle e_n + \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle \alpha_2 z_2, e_n \rangle e_n \\
&= \alpha_1 \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle z_1, e_n \rangle e_n + \alpha_2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle z_2, e_n \rangle e_n \\
&= \alpha_1 S(t) z_1 + \alpha_2 S(t) z_2.
\end{aligned}$$

2) $S(t)$ es un operador acotado. Por una parte,

$$\begin{aligned}
\|z\|^2 = \langle z, z \rangle &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle z, e_n \rangle e_n, \sum_{m=1}^{\infty} \langle z, e_m \rangle e_m \right\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \langle z, e_n \rangle \langle z, e_n \rangle \langle e_n, e_n \rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |\langle z, e_n \rangle|^2 .
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}\|S(t)z\|^2 = \langle S(t)z, S(t)z\rangle &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle z, e_n\rangle e_n, \sum_{m=1}^{\infty} e^{\lambda_m t} \langle z, e_m\rangle e_m \right\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\lambda_n t} \langle z, e_n\rangle \langle z, e_n\rangle \langle e_n, e_n\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\lambda_n t} |\langle z, e_n\rangle|^2 \\ &\leq e^{2\lambda_1 t} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle z, e_n\rangle|^2 \\ &= e^{2\lambda_1 t} \|z\|^2\end{aligned}$$

y así se tiene que

$$\|S(t)z\| \leq e^{\lambda_1 t} \|z\|.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\|S(t)\| &= \sup_{z\neq 0_H} \frac{\|S(t)z\|}{\|z\|} \\ &\leq \sup_{z\neq 0_H} \frac{e^{\lambda_1 t}\|z\|}{\|z\|} \\ &= e^{\lambda_1 t}.\end{aligned}$$

3) La familia $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ define un C_0-*semigrupo* en H.

(a)

$$S(0)z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n(0)} \langle z, e_n\rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle z, e_n\rangle e_n = z$$

(b)

$$S(t)S(s)z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle S(s)z, e_n\rangle e_n.$$

Pero,

$$
\begin{aligned}
\langle S(s)z, e_n\rangle &= \left\langle \sum_{m=1}^{\infty} e^{\lambda_m s} \langle z, e_m\rangle e_m, e_n \right\rangle \\
&= \left\langle \lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{N} e^{\lambda_m s} \langle z, e_m\rangle e_m, e_n \right\rangle \\
&= \lim_{N\to\infty} \left\langle \sum_{m=1}^{N} e^{\lambda_m s} \langle z, e_m\rangle e_m, e_n \right\rangle \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{N} e^{\lambda_m s} \langle z, e_m\rangle \langle e_m, e_n\rangle
\end{aligned}
$$

y como

$$
\sum_{m=1}^{N} e^{\lambda_m s} \langle z, e_m\rangle \langle e_m, e_n\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } N < n \\ e^{\lambda_n s} \langle z, e_n\rangle & \text{si } N \geq n, \end{cases}
$$

entonces,

$$
\lim_{N\to\infty} \sum_{m=1}^{N} e^{\lambda_m s} \langle z, e_m\rangle \langle e_m, e_n\rangle = e^{\lambda_n s} \langle z, e_n\rangle .
$$

En consecuencia se muestra que

$$
S(t)S(s)z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} e^{\lambda_n s} \langle z, e_n\rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n (t+s)} \langle z, e_n\rangle e_n = S(t+s)z.
$$

(c) Finalmente, veamos que $\lim_{t\to 0} S(t)z = z$. En efecto, dado $z \in H$ y $S(t)z \in H$

$$
\begin{aligned}
\|S(t)z - z\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle z, e_n\rangle e_n - \sum_{n=1}^{\infty} \langle z, e_n\rangle e_n \right\|^2 \\
&= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (e^{\lambda_n t} - 1) \langle z, e_n\rangle e_n \right\|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (e^{\lambda_n t} - 1)^2 \left|\langle z, e_n\rangle\right|^2 .
\end{aligned}
$$

Denotemos $a_n(t) = (e^{\lambda_n t} - 1)^2 \left|\langle z, e_n\rangle\right|^2$. Entonces, si $t \in [0, t_0]$

$$0 \leq a_n(t) \leq 2(e^{2\lambda_n t} + 1) \left|\langle z, e_n\rangle\right|^2 \leq J \left|\langle z, e_n\rangle\right|^2 \tag{1.9}$$

donde,

$$J = \begin{cases} 2(e^{2\lambda_1 t_0} + 1) & \text{si } \lambda_1 > 0 \\ 4 & \text{si } \lambda_1 \leq 0. \end{cases}$$

Así pues, $a_n(t) \leq J \left|\langle z, e_n\rangle\right|^2$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} J \left|\langle z, e_n\rangle\right|^2 = J \left\|z\right\|^2$. Usando este hecho y el Test M de Weierstrass (ver [1], sección 2.2) se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{\lambda_n t} - 1)^2 \left|\langle z, e_n\rangle\right|^2$$

converge uniforme y absolutamente en $[0, t_0]$.

Así entonces, por la convergencia uniforme,

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \left\|S(t)z - z\right\|^2 &= \lim_{t\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{\lambda_n t} - 1)^2 \left|\langle z, e_n\rangle\right|^2 \\ &= \lim_{t\to 0} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (e^{\lambda_n t} - 1)^2 \left|\langle z, e_n\rangle\right|^2 \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \lim_{t\to 0} (e^{\lambda_n t} - 1)^2 \left|\langle z, e_n\rangle\right|^2 \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} 0 \left|\langle z, e_n\rangle\right|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

y se prueba lo que se quería.

$\square$

Después de demostrar el lema anterior, se hace preciso pensar en el generador infinitesimal del C_0-*semigrupo* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Recurriendo a la Definición 1.2.2 el generador infinitesimal A está dado por la expresión

$$Az = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)z - z}{t} = \lim_{t\to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_n t} - 1}{t} \langle z, e_n \rangle \, e_n.$$

Asumiendo que se tienen todas las condiciones para intercambiar los límites en la serie entonces,

$$Az = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{t\to 0^+} \frac{e^{\lambda_n t} - 1}{t} \langle z, e_n \rangle \, e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle z, e_n \rangle \, e_n$$

que es equivalente a

$$Az = \frac{d}{dt} S(t)z \Big]_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle z, e_n \rangle \, e_n$$

y así se define el operador A en $D(A) \subset H$ por

$$Az := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle z, e_n \rangle \, e_n \quad \forall z \in D(A), \tag{1.10}$$

donde

$$D(A) \equiv \left\{ z \in H : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle z, e_n \rangle \, e_n \quad \text{existe en} \quad H \right\}.$$

De esta manera la familia $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ define un C_0-*semigrupo* y su generador infinitesimal es el operador definido por la ecuación (1.10).

En particular, dado el operador A definido por la ecuación (1.10) y dado $z \in H$, una solución u:[0,∞) $\to H$ para el problema de valor inicial

$$u'(t) = Au(t), \quad t > 0, \quad u(0) = z, \tag{1.11}$$

es $u(t) = S(t)z$, donde S está definido por la ecuación (1.8).

1.2.3. Semigrupos de contracción en espacios de Hilbert

Al igual que en la sección anterior, asumiremos que H es un espacio de Hilbert con producto interno denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Los resultados aquí mostrados serán de vital importancia para el posterior estudio del semigrupo asociado a la ecuación de onda.

Definición 1.2.3. *(Operador Disipativo y Operador Maximal Disipativo) Un operador $A : D(A) \subset H \to H$, lineal y no acotado se dice que es un **operador disipativo** si*

$$\langle Au, u \rangle \leq 0 \quad \textit{para todo } u \in D(A).$$

*Si además, el operador $I - A$ es sobreyectivo, es decir el rango $R(I - A) = H$, se dice que A es un **operador maximal disipativo**.*

Lema 1.2.4. *Si A es el generador de un semigrupo de contracciones $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ en H, entonces A es un operador maximal disipativo.*

Demostración. Como $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo de contracciones, entonces por la Definición 1.2.1

$$\|S(t)\| \leq 1 \quad \text{para todo} \quad t \geq 0,$$

lo que implica que

$$\|S(t)u\| \leq \|u\| \,. \tag{1.12}$$

Si $u \in D(A)$ entonces

$$\langle S(t)u - u, u \rangle = \langle S(t)u, u \rangle - \langle u, u \rangle$$

pero, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\langle S(t)u, u \rangle - \langle u, u \rangle \leq \|S(t)u\| \, \|u\| - \|u\|^2$$

y por la ecuación (1.12)

$$\|S(t)u\| \, \|u\| - \|u\|^2 \leq \|u\|^2 - \|u\|^2 = 0,$$

es decir,

$$\langle S(t)u - u, u \rangle \leq 0.$$

Luego, multiplicando por $\frac{1}{t}$ y pasando al límite cuando $t \to 0$ llegamos a:

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lim_{t\to 0} \left\langle \frac{S(t)u - u}{t}, u \right\rangle \\ &= \left\langle \lim_{t\to 0} \frac{S(t)u - u}{t}, u \right\rangle \\ &= \langle Au, u \rangle, \end{aligned}$$

por definición de generador infinitesimal. Así se muestra que A es un operador disipativo. Además por el teorema de Hille-Yosida (Teorema 1.2.5), $R(I - A) = H$ dado que $I - A$ es un operador invertible. En consecuencia, A es un operador maximal disipativo. $\square$

Observación 1.2.7. *La palabra maximal en la anterior definición se debe a que si A es disipativo y además $R(I - A) = H$, A es maximal en el sentido en que no existe otro operador lineal B con las mismas propiedades y tal que B sea una extensión de A.*

Definición 1.2.4. *Si A es un operador lineal, no necesariamente acotado, en H, el conjunto resolvente de A $\rho(A)$ es el conjunto de todos los números reales para los cuales $\lambda I - A$ es un operador invertible, esto es, $(\lambda I - A)^{-1}$ es un operador lineal y acotado en H.*

Esta definición es importante para la demostración del siguiente teorema:

Teorema 1.2.6. *Sea A maximal disipativo. Entonces,*

1. *A es cerrado,*

2. *A es densamente definido,*

3. *para cada $\lambda > 0$, $\lambda I - A$ es invertible y*

$$\left\| (\lambda I - A)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demostración. **Paso 1.** Sea $v \in H$ tal que $\langle u, v \rangle = 0$ para todo $u \in D(A)$. Como $R(I - A) = H$, existe $w \in D(A)$ tal que $w - Aw = v$. Tomando el producto interno entre v y w, se tiene que

$$0 = \langle v, w \rangle = \|w\|^2 - \langle Aw, w \rangle \geq \|w\|^2 .$$

Así, $w = 0$ lo cual implica que $v = 0$. Por lo tanto, $D(A)$ es denso en H (para más detalles, ver [4] Lema 3.3-7) y en consecuencia A es densamente definido.

Paso 2. Ahora, sean $v \in H$ y $u \in D(A)$ tal que $u - Au = v$. Tal $u \in D(A)$ es único dado que si existe u_1 tal que $u_1 - Au_1 = v = u - Au$, entonces $(u_1 - u) - A(u_1 - u) = 0$. Luego $0 = \langle (u_1 - u) - A(u_1 - u), u_1 - u \rangle = \|u_1 - u\|^2 - \langle A(u_1 - u), u_1 - u \rangle \geq \|u_1 - u\|^2$ de lo cual se deduce que $u_1 = u$. La unicidad de u implica que el operador $I - A$ es inyectivo y por la sobreyectividad se tiene que $I - A$ es un operador biyectivo en H. Además,

$$\|u\|^2 \leq \|u\|^2 - \langle Au, u \rangle = \langle v, u \rangle \leq \|v\| \|u\| . \quad \text{(Desigualdad de Cauchy-Schwarz)}$$

Así, $\|u\| \leq \|v\|$ y la aplicación

$$v \longrightarrow u$$

es un operador lineal con norma menor o igual a 1. Claramente $u = (I - A)^{-1}v$ por la biyectividad del operador $I - A$. Así

$$\left\|(I - A)^{-1}\right\| \leq 1.$$

Paso 3. Considérese $u_n \in D(A)$ tal que $u_n \longrightarrow u$ y $Au_n \longrightarrow v$, cuando $n \longrightarrow \infty$. Como $(I - A)u_n = u_n - Au_n$, entonces $u_n = (I - A)^{-1}(u_n - Au_n)$. Pasando al límite se tiene que $u = (I - A)^{-1}(u - v)$, de donde $u \in D(A)$ y $(I - A)u = u - v$, es decir, $u - Au = u - v$ o $v = Au$. Luego, A es cerrado.

Paso 4. Sea $\Lambda = \{\lambda > 0 | R(\lambda I - A) = H\}$

- $\Lambda \neq \emptyset$ dado que por hipótesis $R(I - A) = H$. Es decir $\lambda = 1 \in \Lambda$.

- Λ es abierto. En efecto, sea $\lambda \in \Lambda$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que:

$$\begin{aligned} \|\lambda u - Au\| \, \|u\| &\geq |\langle \lambda u - Au, u\rangle| \\ &\geq \langle \lambda u - Au, u\rangle \\ &= \langle \lambda u, u\rangle - \langle Au, u\rangle \\ &= \lambda \|u\|^2 - \langle Au, u\rangle \\ &\geq \lambda \|u\|^2 \end{aligned}$$

  de donde,

$$\|(\lambda I - A)u\| \geq \lambda \|u\| \quad \forall u \in D(A)$$

  y como $R(\lambda I - A) = H$, se tiene que $\lambda \in \rho(A)$ el cual es abierto (ver [11], capítulo VIII, sección 1, teorema 1). Entonces se puede hallar una vecindad de λ en $\rho(A)$. La intersección de esa vecindad con la recta real está contenida en Λ, lo cual significa que $\exists \delta > 0$ tal que $(\lambda - \delta, \lambda + \delta) \subseteq \Lambda$ y en consecuencia Λ es abierto.

- Λ es cerrado en $(0, \infty)$. Sea $\{\lambda_n\} \subseteq \Lambda$ tal que $\lambda_n \to \lambda \in (0, \infty)$. Demostremos que $\lambda \in \Lambda$. Para cada $v \in H$ y $n \in \mathbb{N}$ existe $u_n \in D(A)$ tal que $\lambda_n u_n - Au_n = v$. Luego, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\|u_n\| \leq \frac{1}{\lambda_n} \|\lambda_n u_n - Au_n\| = \frac{\|v\|}{\lambda_n} \leq C,$$

  para alguna constante $C > 0$.

Además,

$$\begin{aligned}
\|u_n - u_m\| &\leq \frac{1}{\lambda_m} \|\lambda_m(u_n - u_m) - A(u_n - u_m)\| \\
&= \frac{1}{\lambda_m} \|\lambda_m(u_n - u_m) - A(u_n - u_m) - (\lambda_m - \lambda_n)u_n + (\lambda_m - \lambda_n)u_n\| \\
&= \frac{1}{\lambda_m} \|\lambda_m u_n - \lambda_m u_m - Au_n + Au_m - \lambda_m u_n + \lambda_n u_n + (\lambda_m - \lambda_n)u_n\| \\
&= \frac{1}{\lambda_m} \|(\lambda_n I - A)u_n - (\lambda_m I - A)u_m + (\lambda_m - \lambda_n)u_n\| \\
&= \frac{1}{\lambda_m} \|v - v + (\lambda_m - \lambda_n)u_n\| \\
&= \frac{1}{\lambda_m} \|(\lambda_m - \lambda_n)u_n\| \\
&= \frac{1}{\lambda_m} |\lambda_m - \lambda_n| \, \|u_n\| \\
&\leq C_1 |\lambda_n - \lambda_m| \,,
\end{aligned}$$

para alguna constante $C_1 > 0$. Como $\{\lambda_n\}$ es de Cauchy, también lo es $\{u_n\}$ y por tanto $u_n \to u$ para algún $u \in H$. De allí, $Au_n \to \lambda u - v$ y como A es cerrado entonces $u \in D(A)$ y además $(\lambda I - A)u = v$. Se concluye que $\lambda \in \Lambda$. Finalmente, como $(0, \infty)$ es conexo, se tiene que $\Lambda = (0, \infty)$. Así se prueba que $\forall \lambda > 0$ el operador $\lambda I - A$ es sobreyectivo y más aún, utilizando un argumento similar al utilizado en el paso 2, se puede mostrar que $\forall \lambda > 0$ el operador $\lambda I - A$ es biyectivo e invertible con

$$\left\| (\lambda I - A)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

$\square$

Observación 1.2.8. *El anterior teorema en conjunto con el teorema de Hille-Yosida (Teorema 1.2.5), permiten concluir que todos los operadores maximales disipativos son generadores de semigrupos de contracción. La ventaja del anterior resultado es que para demostrar que A genera un C_0-semigrupo de contracciones basta con mostrar que A es maximal disipativo.*

Tal como se mencionó en la Sección 1.2, un semigrupo es una familia de operadores lineales y acotados $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ que satisfacen determinadas propiedades las cuales también pueden ser verificadas para algunas familias uni-paramétricas definidas en toda la recta real. En este caso se hablará de grupos y no de semigrupos. Veamos la siguiente definición.

Definición 1.2.5. *Una familia uni-paramétrica $\{T(t)\}_{-\infty<t<\infty}$ de operadores lineales acotados en un espacio de Banach X es un grupo de operadores acotados si satisface las condiciones*

(a) $T(0) = I$,

(b) $T(t+s) = T(t)T(s)$ *para* $-\infty < t, s < \infty$,

(c) $\lim_{t\to 0} T(t)x = x$ *para todo* $x \in X$.

Esta definición y el siguiente teorema serán importantes para el estudio del semigrupo de la ecuación de onda en el capítulo 4 de este documento.

Teorema 1.2.7. *Sean H un espacio de Hilbert y $A : D(A) \subset H \to H$ tal que A y $-A$ son operadores maximales disipativos. Entonces A y $-A$ juntos generan un grupo de isometrías.*

Demostración. Como A y $-A$ son maximales disipativos, entonces se verifica que $\langle Au, u\rangle = \langle -Au, u\rangle = 0$ para todo $u \in D(A)$. Sean $u_0 \in D(A)$ y $u(t)$ la solución de

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad t > 0, \\ u(0) = u_0 \in D(A). \end{cases} \tag{1.13}$$

Entonces se tiene que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 = \langle Au(t), u(t)\rangle = 0.$$

Por lo tanto, $\|u(t)\| = \|u_0\|$ para todo $t \geq 0$, ésto es, si $\{S^+(t)\}_{t\geq 0}$ es el semigrupo de contracción generado por A, entonces $\|S^+(t)u_0\| = \|u_0\|$ para todo $t \geq 0$, con $u_0 \in D(A)$.

Pero como $D(A)$ es denso en H entonces tenemos que para todo $u \in H$ existe $\{u_n\} \subseteq D(A)$ tal que $u_n \to u$ cuando $n \to \infty$. Por lo tanto $\|S^+(t)u_n\| = \|u_n\|$ y pasando al límite se tiene que $\|S^+(t)u\| = \|u\|$ y así cada $S^+(t)$ es una isometría en H. Similarmente si $\{S^-(t)\}_{t\geq 0}$ es el semigrupo de contracción generado por $-A$, entonces $S^-(t)$ es también una isometría para cada $t \geq 0$.

Ahora, retomando el problema (1.13), para cada $t \in [0, t_0]$ sea $\tilde{u}(t) = u(t_0 - t)$. Entonces en $[0, t_0]$ se tiene

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{u}(t)}{dt} = -\dfrac{du(t_0 - t)}{dt} = -Au(t_0 - t) = -A\tilde{u}(t), \\ \tilde{u}(0) = u(t_0) = S^+(t_0)u_0. \end{cases} \tag{1.14}$$

Por unicidad de la solución para problemas de valor inicial, se llega a que

$$\tilde{u}(t) = S^-(t)S^+(t_0)u_0.$$

En particular,

$$\tilde{u}(t_0) = S^-(t_0)S^+(t_0)u_0,$$

pero

$$\tilde{u}(t_0) = u(0) = u_0.$$

Así, para cada $u_0 \in D(A)$

$$S^-(t_0)S^+(t_0)u_0 = u_0.$$

Como $D(A)$ es denso en H, esto es cierto para todo $u_0 \in H$. Similarmente se puede determinar que

$$S^+(t_0)S^-(t_0)u_0 = u_0,$$

para todo $u_0 \in H$.

Si se define

$$S(t) = \begin{cases} S^+(t) & \text{si } t \geq 0 \\ S^-(-t) & \text{si } t < 0, \end{cases}$$

entonces $(S(t))^{-1} = S(-t)$ y así $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ es ahora un grupo de isometrías. En efecto,

(a) En primer lugar, $S(0) = S^+(0) = I$ dado que $\{S^+(t)\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo de contracción.

(b) En segundo lugar,

- Si $t, s > 0$, $S(t+s) = S^+(t+s) = S^+(t)S^+(s) = S(t)S(s)$
- Si $t, s < 0$, $S(t+s) = S^-(-t-s) = S^-(-t)S^-(-s) = S(t)S(s)$
- Si $t > 0 > s$ y $t+s > 0$, $S(t+s) = S^+(t+s)S^+(-s)S^-(-s) = S^+(t)S^-(-s) = S(t)S(s)$
- Si $t > 0 > s$ y $t+s < 0$, $S(t+s) = S^+(t+s)S^+(-s)S^-(-s) = S^+(t)S^-(-s) = S(t)S(s)$

Es decir, $S(t+s) = S(t)S(s)$ para $-\infty < t, s < \infty$.

(c) Finalmente, si $u \in H$

- $\lim\limits_{t\to 0^+} S(t)u = \lim\limits_{t\to 0} S^+(t)u = u$.
- $\lim\limits_{t\to 0^-} S(t)u = \lim\limits_{t\to 0} S^-(-t)u = u$.

Es decir, $\lim\limits_{t\to 0} S(t)u = u$ para todo $u \in H$.

De esta manera se verifican las condiciones de la Definición 1.2.5. Además, por las condiciones (a) y (b), se tiene que

$$I = S(0) = S(t-t) = S(t)S(-t).$$

De donde $(S(t))^{-1} = S(-t)$. $\square$

Capítulo 2

Ecuación del Calor, caso barra finita

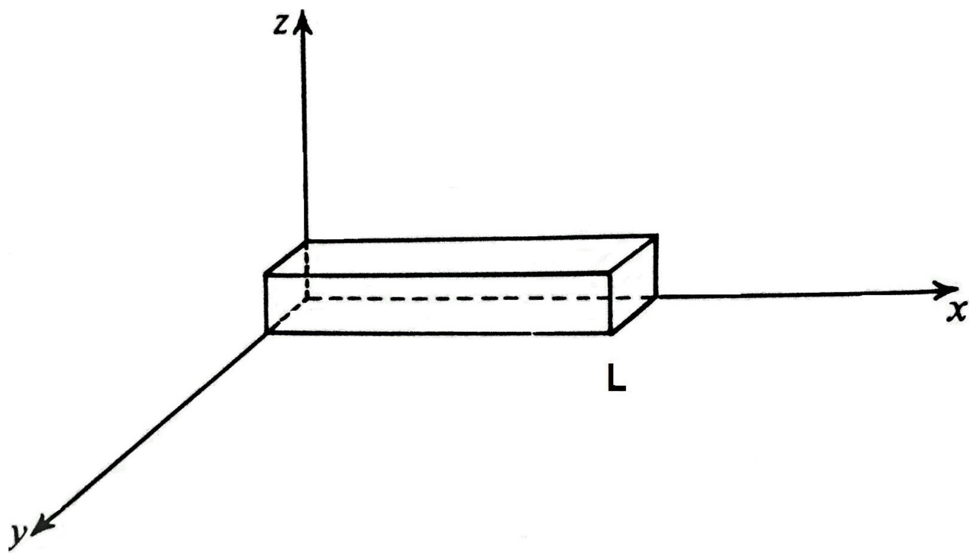
2.1. Conducción de calor en una barra

Considérese una barra finita de longitud L, cuya sección transversal tiene área A^*, hecha de un material uniforme conductor del calor. Supóngase que la superficie lateral de la barra esté aislada térmicamente de modo que no se permite el paso de calor a través de las extremidades de la barra. La uniformidad del material y el aislamiento térmico lateral implican que el flujo de calor ocurre solamente en dirección longitudinal y, por tanto, se tiene un problema de conducción de calor en una dimensión. Más precisamente, las variables físicas son constantes en cada sección transversal, pudiendo variar de una sección a otra.

La ley de enfriamiento de Fourier afirma lo siguiente: Considere dos placas P_1 y P_2 de áreas iguales a A^* mantenidas a temperaturas constantes T_1 y T_2. Si se colocan paralelamente a una distancia d una de la otra, habrá paso de calor de la más caliente a la más fría y la cantidad de calor por unidad de tiempo, transferida de una placa a otra, está dada por

$$Q = \frac{kA^* \left| T_2 - T_1 \right|}{d}, \tag{2.1}$$

donde k es la conductividad térmica del material entre las placas.



Represéntese por $u(x,t)$ la temperatura de un punto de abcisa x en el tiempo t. La temperatura es independiente de las coordenadas espaciales y y z. Tómense dos secciones transversales de la barra localizadas en x y en $x+d$. Para aplicar la ley de Fourier, imagínese esas secciones como las placas P_1 y P_2 anteriores. Mientras tanto surge una dificultad porque las temperaturas en estas secciones varían con el tiempo y en consecuencia no son constantes como requiere la ley de Fourier. Para superar tal dificultad, se introduce un gran flujo de calor a través de una sección x, en un instante t, lo que será hecho del siguiente modo: fíjese el tiempo t en (2.1), hágase $T_2 = u(x+d,t)$ y $T_1 = u(x,t)$ y pásese al límite cuando d tiende a cero. Tal límite será $kA^* \left| u_x(x,t) \right|$. Se define entonces el flujo de calor en la dirección positiva del eje x como una función $q(x,t)$ dada por

$$q(x,t) = -kA^* u_x(x,t) \tag{2.2}$$

El signo menos en (2.2) es justificado de la siguiente manera: si la temperatura u crece con x, u_x será positivo; más, como el calor fluirá a la izquierda, q deberá ser negativo. Por otro lado, si u decrece con x, u_x será negativo; más, como el calor fluirá hacia la derecha, q deberá ser positivo.

Fíjese ahora un elemento de la barra entre x_0 y $x_0+\delta$ y véase cuál es la cantidad de calor (q) que allí entra, en el periodo de tiempo ente t_0 y $t_0+\tau$. Usando el flujo de calor $q(x,t)$, se puede ver que

$$q=\int_{t_0}^{t_0+\tau} q(x_0,t)dt-\int_{t_0}^{t_0+\tau} q(x_0+\delta,t)dt,$$

osea,

$$q=\int_{t_0}^{t_0+\tau} k[u_x(x_0+\delta,t)-u_x(x_0,t)]A^*dt. \tag{2.3}$$

Por otro lado, se sabe que el calor específico de una sustancia es la cantidad de calor necesaria para elevar en $1°C$ la temperatura de un gramo de tal sustancia. Por tanto q puede ser también escrito como

$$q=\int_{t_0}^{t_0+\tau}\int_{x_0}^{x_0+\delta} cu_t(x,t)dt\rho A^*dx, \tag{2.4}$$

donde ρ es la densidad de la sustancia.

Usando el teorema fundamental del cálculo en (2.3) e igualando con la expresión dada en (2.4), se obtiene

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau}\int_{x_0}^{x_0+\delta} ku_{xx}(x,t)dxdt,=\int_{t_0}^{t_0+\tau}\int_{x_0}^{x_0+\delta} c\rho u_t(x,t)dxdt. \tag{2.5}$$

Como la expresión anterior es válida para todo $t_0>0$, todo $x_0<x<L$ y todo $\tau,\delta>0$, se concluye que

$$ku_{xx}(x,t)=c\rho u_t(x,t),$$

es decir,

$$u_t(x,t)=Ku_{xx}(x,t), \tag{2.6}$$

donde $K = k/(c\rho)$ es la difusividad térmica. La ecuación (2.6) es llamada la ecuación del calor y es la ley de la variación de la temperatura $u(x,t)$ en una barra uniforme con una superficie lateral aislada térmicamente. En la siguiente sección se presentará el problema de valores iniciales y de frontera asociado a está importante ecuación diferencial (ver más detalles en [1], capítulo 1).

2.2. Formulación matemática del problema de conducción de calor

Represéntese por R la región del plano (x,t) determinada por $0 < x < L$ y $t > 0$ y por $\bar{R}$ la unión de R con su frontera que está formada por las semirectas $\{x = 0, t > 0\}$ y $\{x = L, t > 0\}$ y por el segmento $\{0 \leq x \leq L, t = 0\}$. El problema de la conducción del calor consiste en encontrar una función de valor real $u(x,t)$ definida en $\bar{R}$ que satisfaga el PVIF

$$\begin{cases} u_t = K u_{xx} \quad \text{en } R, \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t > 0, \end{cases} \tag{2.7}$$

donde la constante K y la función $f : [0,L] \longrightarrow \mathbb{R}$ son dadas.
El método de Fourier aplicado a la ecuación del calor consiste en usar separación de variables y producir soluciones $u(x,t)$ de la forma

$$u(x,t) = F(x)G(t), \tag{2.8}$$

haciendo una serie de raciocinios informales sin preocuparse por la justificación de cada paso. Una vez identificado el candidato, se procede a probar rigurosamente que en realidad es la solución del problema.

Sustituyendo (2.8) en la ecuación del calor, se obtiene

$$F(x)G'(t) = KF''(x)G(t) \tag{2.9}$$

o de otra manera,

$$\frac{1}{K}\frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}. \tag{2.10}$$

Por supuesto, para pasar de (2.9) a (2.10) se asume que $G(t)$ y $F(x)$ no se anulan.

Observe que el lado izquierdo de (2.10) es una función que depende sólo de t y el lado derecho es una función de x. Luego, para que estas funciones sean iguales deberán ser independientes de x y t. Esto quiere decir que

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \sigma \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{K}\frac{G'(t)}{G(t)} = \sigma, \tag{2.11}$$

donde σ es un parámetro independiente de x y de t.
La primera ecuación, en (2.11) indica que F debe satisfacer la ecuación diferencial ordinaria

$$F''(x) - \sigma F(x) = 0, \qquad \text{para} \qquad 0 < x < L, \tag{2.12}$$

y como $u(0,t) = u(L,t) = 0$, la función F debe satisfacer también las condiciones

$$F(0) = F(L) = 0, \tag{2.13}$$

porque como $u(0,t) = F(0)G(t) = 0$ para todo $t > 0$, se sigue que si $F(0) \neq 0$ entonces $G \equiv 0$ y por tanto $u \equiv 0$ será solución de la ecuación del calor y satisface las condiciones de frontera pero no satisface la condición inicial $u(x,0) = f(x)$, a menos que $f \equiv 0$.
Ahora, se procede en el sentido de ver cuales son los valores de σ que conducen a soluciones F del problema dado en (2.12)-(2.13). Es claro que el interés se centra en hallar soluciones F que no sean idénticamente nulas. Se tienen tres posibilidades para σ las cuales son:

i) Si $\sigma > 0$, la solución general de (2.12) es de la forma

$$F(x) = c_1 e^{\sqrt{\sigma}x} + c_2 e^{\sqrt{\sigma}x}.$$

Por tanto, si tal F satisface (2.13), el par de constantes c_1, c_2 deberá ser solución del sistema

$$c_1 + c_2 = 0,$$

$$c_1 e^{\sqrt{\sigma}L} + c_2 e^{\sqrt{\sigma}L} = 0.$$

La única solución a este sistema es $c_1 = c_2 = 0$. Esto implica que $F \equiv 0$, lo cual no es interesante.

ii) Si $\sigma = 0$, la solución general de (2.12) es de la forma

$$F(x) = c_1 x + c_2,$$

y para satisfacer las condiciones en (2.13) debe ocurrir que

$$c_2 = 0$$

$$c_1 L + c_2 = 0,$$

lo que implica que $c_1 = c_2 = 0$ y por tanto se tiene de nuevo que $F \equiv 0$.

iii) Si $\sigma < 0$ se hace el cambio $\sigma = -\lambda^2$ y la solución general de (2.12) es de la forma

$$F(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \operatorname{sen} \lambda x.$$

Para que tal F satisfaga (2.13), se debe tener que

$$c_1 = 0$$

$$c_2 \operatorname{sen} \lambda L = 0.$$

Como no es de interés $c_2 = 0$ entonces $\operatorname{sen} \lambda L = 0$, lo que implica que $\lambda L = n\pi$ con n es un número entero no nulo ($n = \pm 1, \pm 2, \ldots$). Los valores de $-\sigma = \lambda^2$ donde

$$\lambda_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{L^2},$$

son llamados los valores propios o autovalores del problema dado en (2.12)-(2.13), y las funciones

$$F_n(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

son llamadas las funciones propias o autofunciones. No hay necesidad de considerar los valores negativos de λ_n, pues eso conduciría a una autofunción que difiere apenas en un signo menos de otra obtenida para un λ_n positivo.

Observe ahora que la segunda ecuación diferencial ordinaria en (2.11) tiene por solución general a

$$G(t) = ce^{\sigma K t}.$$

Luego, para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$, se tiene una función

$$u_n(x,t) = e^{-n^2\pi^2 K t/L^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

la cual satisface el PVIF (2.7). La dificultad está en que siendo

$$u_n(x,0) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

$u_n(x,t)$ será solución del PVIF (2.7) si la función dada $f(x)$ tiene la forma

$$f(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Usando el principio de superposición: «*Si u(x,t) y v(x,t) son soluciones del PVIF* (2.7), *entonces cualquier función de la forma*

$$au(x,t) + bv(x,t),$$

donde a y b son constantes, será también solución del PVIF (2.7) *y en general se cumple para cualquier combinación lineal de soluciones*». Si la función f se puede expresar como una serie de la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

entonces el candidato solución del PVIF (2.7) en tal caso estará dado por

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2 Kt/L^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}. \tag{2.14}$$

Por lo tanto, esta expresión sugiere que en la escogencia de los c_n éstos deben ser los coeficientes de Fourier de la función f, definida en $[0, L]$ y extendida al resto de $\mathbb{R}$ de modo impar y periódica de periodo $2L$. De esta manera,

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Definición 2.2.1. *Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es seccionalmente continua si ella tien un número finito de discontinuidades (todas de primera especie) en cualquier intervalo acotado. En otras palabras, dados $a < b$, existen $a \leq a_1 < \cdots < a_n \leq b$ tales que f es continua en cada intervalo abierto (a_j, a_{j+1}), $j = 1, \ldots, n-1$ y existen los límites laterales*

$$\lim_{x\to a_j^+} f(x) \qquad y \qquad \lim_{x\to a_j^-} f(x)$$

Definición 2.2.2 (Solución del PVIF (2.7) en el sentido I)**.** *Una función $u : \bar{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una solución del $PVIF$ (2.7) si ella es continua en $\bar{R}$, tiene derivadas parciales u_t y u_{xx} en R y satisface las tres relaciones en (2.7).*

Definición 2.2.3 (Solución del PVIF (2.7) en el sentido II)**.** *Una función $u : \bar{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una solución del $PVIF$ (2.7), si*

$$u_t = K u_{xx}, \quad en \quad R,$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t > 0 \quad y$$

$$\lim_{t\to 0^+} \int_0^L u(x,t)\varphi(x)dx = \int_0^L f(x)\varphi(x)dx, \tag{2.15}$$

para toda función φ seccionalmente continua en $[0, L]$. (Ver [1], Sección 4.1).

Observación 2.2.1. *La condición* (2.15) *en la definición anterior quiere decir que la condición inicial es satisfecha en sentido medio, dado que es más propio hablar de temperatura media en una vecindad V del punto x, a hablar propiamente de la temperatura en el punto x.*

Teorema 2.2.1. *Si $f \in L^2(0, L)$, entonces la expresión* (2.14) *define una función en $\bar{R}$ que es solución del PVIF*(2.7) *en el sentido II.*

Demostración. Ver [1], Teorema 4.1. □

2.3. C_0-semigrupo asociado a la ecuación del calor, caso barra finita

A continuación se muestra un ejemplo de aplicación de la teoría de C_0-*semigrupos* estudiada en espacios de Hilbert, a partir de la familia de operadores definida por la ecuación (1.8). Supongamos que $H = L^2(0, \pi)$, para $x \in [0, \pi]$ $e_n(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen}(nx)$ y $\lambda_n = -n^2$. Entonces para cada $z \in L^2(0, \pi)$ y $t \geq 0$, el operador $S(t)z$ en $L^2(0, \pi)$ está definido en [0,π] por la expresión

$$[S(t)z](x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} z(\rho) \operatorname{sen}(n\rho) d\rho \right] e^{-n^2 t} \operatorname{sen}(nx) \quad \text{(ver ecuación (1.8))}.$$

El Teorema 2.2.1 permite concluir que $v(x, t) \equiv [S(t)z](x)$ es una solución en el sentido II de la ecuación del calor con $K = 1$ y $L = \pi$, es decir,

$$\begin{cases} v_t(x,t) = v_{xx}(x,t), \qquad t > 0, \quad 0 < x < \pi, \\ v(0,t) = v(\pi,t) = 0, \quad t > 0, \\ \lim\limits_{t \to 0^+} \displaystyle\int_0^L v(x,t)\varphi(x)dx = \int_0^L z(x)\varphi(x)dx, \end{cases} \tag{2.16}$$

para toda función φ seccionalmente continua en $[0,\pi]$, teniendo en cuenta que $z \in L^2(0,\pi)$ no necesariamente es continua.

Nótese que si

$$[u(t)]\,(x) = [S(t)z]\,(x) = v(x,t),$$

entonces $[u'(t)](x)$ corresponde a $v_t(x,t)$. En efecto,

$$\begin{aligned}[u'(t)](x) = \lim_{h\to 0} \frac{[u(t+h)](x) - [u(t)](x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{[S(t+h)z](x) - [S(t)z](x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{v(x,t+h) - v(x,t)}{h} \\ &= v_t(x,t).\end{aligned}$$

Por otra parte, por la ecuación (1.10) se tiene que

$$[Az](x) = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 \left[\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} z(\rho)\operatorname{sen}(n\rho)d\rho\right]\operatorname{sen}(nx) \tag{2.17}$$

y escribiendo a z en serie de Fourier,

$$z(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} z(\rho)\operatorname{sen}(n\rho)d\rho\right]\operatorname{sen}(nx).$$

Luego,

$$z''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 \left[\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} z(\rho)\operatorname{sen}(n\rho)d\rho\right]\operatorname{sen}(nx) \tag{2.18}$$

y por (2.17) y (2.18) se tiene que

$$[Az](x) = z''(x) \quad \text{para todo} \quad z \in D(A)$$

donde

$$D(A) \supset \left\{z \in L^2(0,\pi) : z \quad \text{en} \quad C^2 \quad \text{y} \quad z(0) = z(\pi) = 0\right\}.$$

Mediante un análisis más cuidadoso se puede mostrar que

$$D(A) = \left\{z \in L^2(0,\pi) : z,\, z' \in AC[0,\pi], z'' \in L^2(0,\pi), z(0) = z(\pi) = 0\right\}, \tag{2.19}$$

donde $AC[0,\pi]$ denota el conjunto de funciones absolutamente continuas en $[0,\pi]$. (Ver Apéndice B).
En efecto, la primera contenencia se tiene por definición de $D(A)$:

$$D(A) \supset \left\{ z \in L^2(0,\pi) : z,\, z' \in AC[0,\pi], z'' \in L^2(0,\pi), z(0) = z(\pi) = 0 \right\}. \tag{2.20}$$

Por otra parte, si $z \in D(A)$ entonces $z'' \in L^2(0,\pi)$. Para que exista z'' debe existir z'. De esta manera se tiene que z y z' son derivables en casi toda parte y en consecuencia z y z' son absolutamente continuas ($z,\, z' \in AC[0,\pi]$). Además, por la condición de frontera del PVIF (2.16) se tiene que $z(0) = z(\pi) = 0$ y así se concluye que

$$D(A) \subset \left\{ z \in L^2(0,\pi) : z,\, z' \in AC[0,\pi], z'' \in L^2(0,\pi), z(0) = z(\pi) = 0 \right\}, \tag{2.21}$$

y a partir de (2.20) y (2.21) se tiene (2.19).

Observación 2.3.1.

- *Teniendo en cuenta que las condiciones de frontera en* (2.16) *son absorbidas dentro del dominio de A, se puede ver que si u es una solución de* (1.11) *[así que $u(t) \in D(A)$ para $t > 0$] y $v(x,t) \equiv [u(t)]\,(x)$, entonces $v(\cdot,t) \in D(A)$ lo cual implica que las condiciones de frontera en* (2.16) *son satisfechas. Por lo tanto, el problema de valores iniciales y de frontera* (2.16) *corresponde a una ecuación diferencial ordinaria del tipo* (1.11) *en el espacio de Hilbert $L^2(0,\pi)$.*

- *Por el Lema 1.2.3, se tiene que $\|S(t)\| \leq e^{\lambda_1 t} = e^{-t} \leq 1$, lo que significa que el C_0-semigrupo asociado a la ecuación del calor, caso barra finita, es un C_0-semigrupo de contracciones.*

- *En relación con los Espacios de Sóbolev, se puede mostrar que*

$$D(A) = H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi).$$

Para más detalles, ver Apéndices B y C.

Capítulo 3

Ecuaciones dispersivas lineales

3.1. Ecuaciones en derivadas parciales de evolución

La forma en la que las EDP se presentan habitualmente en el modelado de fenómenos de la Ciencia y Tecnología es precisamente la de modelos de evolución en los que se describe la dinámica a lo largo del tiempo de determinada cantidad o variable (también a veces denominada estado) que puede representar objetos de lo más diversos que van desde la posición de un satélite en el espacio hasta la dinámica de un átomo, pasando por el grado en que una enfermedad afecta a cierta población. En otras palabras, los modelos dinámicos o de evolución son los más naturales en la medida que reproducen nuestra propia concepción del mundo: un espacio tri-dimensional que evoluciona y cambia en el tiempo.

Cuando el estado o variable de un modelo o sistema de evolución es finito-dimensional, el modelo más natural es un sistema de EDO, cuya dimensión coincide precisamente con el del número de parámetros necesarios para describir dicho estado. Así, por ejemplo, para posicionar una partícula en el espacio necesitamos de tres variables dependientes del tiempo y para describir su dinámica un sistema de tres ecuaciones diferenciales. Pero en muchas ocasiones, como es el caso sistemáticamente en el contexto de la Mecánica de Medios Continuos, la variable de estado es infinito-dimensional. Esto ocurre por ejemplo cuando se pretende describir la deformación de cuerpos elásticos o la temperatura de un cuerpo sólido en los que la deformación o temperatura de cada uno de los puntos de ese medio continuo constituye una variable o incógnita del sistema. Los modelos matemáticos naturales en este caso son las EDP.

En la teoría clásica de EDP, éstas se clasifican en tres grandes grupos: elípticas, parabólicas e hiperbólicas. El modelo elíptico por excelencia involucra el operador de Laplace:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

En este modelo la variable tiempo está ausente. Es por eso que sólo permite describir estados estacionarios o de equilibrio. Las ecuaciones parabólicas y las hiperbólicas, representadas respectivamente por la ecuación del calor y la de onda, son los modelos clásicos en el contexto de las EDP de evolución. Sus características matemáticas son bien distintas. Mientras que la ecuación del calor permite describir fenómenos altamente irreversibles en tiempo en los que la información se propaga a velocidad infinita, la ecuación de onda es el prototipo de modelo de propagación a velocidad finita y completamente reversible en el tiempo.

El operador del calor es

$$\partial_t - \Delta,$$

de modo que al actuar sobre la función $u = u(x,t)$ que depende de la variable espacio-tiempo, $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times (0,\infty)$ tiene como resultado

$$[\partial_t - \Delta]\, u = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}.$$

Sin embargo el operador de onda o de D´Alembert es de la forma

$$\Box = \partial_t^2 - \Delta \tag{3.1}$$

y da lugar a

$$\Box u = \left[\partial_t^2 - \Delta\right] u = \frac{\partial^2 u}{\partial t} - \Delta u.$$

El operador del calor y el de onda se distinguen también por sus ámbitos de aplicación. Mientras que el primero es habitual en la dinámica de fluidos (a través de una versión más sofisticada, el operador de Stokes) o en fenómenos de difusión (del calor, de contaminantes, ...), el operador de onda y sus variantes intervienen de forma sistemática en elasticidad (frecuentemente a través de sistemas más sofisticados, como el de Lamé, por ejemplo) o en la propagación de ondas acústicas o electromagnéticas (ecuaciones de Maxwell).

En la Mecánica de Medios Continuos se encuentran también otras ecuaciones, operadores y modelos, pero en todos ellos, de una u otra manera, encontraremos siempre el operador del calor, de onda o una variante muy próxima de los mismos. Frecuentemente los modelos son más sofisticados que una «simple» ecuación aislada. Se trata a menudo de sistemas acoplados de EDP en los que es habitual encontrar tanto componentes parabólicos como hiperbólicos; es el caso por ejemplo de las ecuaciones de la termoelasticidad. En estos casos, si bien un buen conocimiento de los aspectos más relevantes de la ecuación del calor y de onda aisladamente puede no ser suficiente a causa de las interacciones de los diferentes componentes, sí que resulta indispensable. Por todo ello es natural e importante entender todos los aspectos matemáticos fundamentales de estas dos piezas clave: la ecuación del calor y la de onda. Evidentemente esto es también cierto desde el punto de vista del Análisis y del Cálculo Numérico.

Hasta ahora nos hemos referido sólo a las ecuaciones del calor y de onda en su expresión más sencilla: con coeficientes constantes. Estas ecuaciones, cuando modelan fenómenos en medios heterogéneos (compuestos por materiales de diversa naturaleza) adoptan formas más complejas y se presentan con coeficientes variables, dependientes de la variable espacial x, de la variable temporal t o de ambas.

En la descripción de un modelo de evolución se requiere que en el tiempo t el estado del sistema dado pueda ser descrito únicamente por un elemento del espacio X, asumiendo que X es un espacio de Banach. Dado un estado inicial $u_0 \in X$ en el tiempo $t = 0$, se denota el estado del sistema en el tiempo $t \geq 0$ por $u(t) = u(t; u_0)$. De esta manera, la evolución del sistema es determinada por la *ecuación de evolución*

$$u'(t) = F(u(t)), \quad t \geq 0, \quad u(0) = u_0, \tag{3.2}$$

donde $F : D(F) \longrightarrow X$, $D(F) \subseteq X$.

En (3.2) $u \in C^1([0, \infty), X)$ y $u(t) \in D(F)$ para cada $t \geq 0$. Para permitir «muchos» datos iniciales, se asume que $D(F)$ es denso en X. La dependencia continua en el estado inicial significa que la correspondencia

$$t \longrightarrow u(t, u_0)$$

es continua con la norma de X para cada $t \geq 0$. Se requiere que tal correspondencia sea uniformemente continua en $[0, t_0]$ para cada $t_0 > 0$.

3.2. Ecuaciones de evolución dispersivas

Dentro del extenso reino de las ecuaciones de evolución, se encuentran las llamadas *ecuaciones dispersivas*. Físicamente, dispersión significa que las ondas de diferentes frecuencias viajan a distintas velocidades. Una EDP lineal dispersiva con coeficientes constantes, toma la forma

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = Lu(t,x); \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases} \tag{3.3}$$

donde el campo $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow V$ toma valores en un espacio de Hilbert de dimensión finita y L es un operador diferencial anti-adjunto con coeficientes constantes en la variable espacial, es decir,

$$Lu(x) := \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha \partial_x^\alpha u(x)$$

donde $k \geq 1$ es un entero (el orden del operador diferencial), $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ el espacio de todos los multi-índices, con $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$ menor que o igual a k, ∂_x^α es la derivada parcial

$$\partial_x^\alpha := \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_d} \right)^{\alpha_d}$$

y los $c_\alpha \in End(V)$[1] y no dependen de la variable x. El operador L también puede ser escrito como $L = ih(D)$, donde D es el operador frecuencia

$$D := \frac{1}{i} \nabla = \left(\frac{1}{i} \partial_{x_1}, \dots, \frac{1}{i} \partial_{x_d} \right)$$

y $h : \mathbb{R}^d \to End(V)$ es el polinomio

$$h(\xi) = h(\xi_1, \dots, \xi_d) = \sum_{|\alpha| \leq k} i^{|\alpha|-1} c_\alpha \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_d^{\alpha_d}, \tag{3.4}$$

denominado *relación de dispersión* de la ecuación (3.3). En la sección siguiente se mostrará en detalle la importancia de la relación de dispersión en la clasificación de ecuaciones diferenciales parciales como dispersivas o no dispersivas y su vínculo con la teoría de semigrupos.

[1]Espacio de transformaciones lineales de V en V.

Por definición, un operador L es anti-adjunto si:

$$\langle Lu, v\rangle_V = -\langle u, Lv\rangle_V \,,$$

para todas las funciones test u, v. Esto es equivalente a pedir que los coeficientes del polinomio h sean auto-adjuntos. Por eso en el caso escalar, se requiere que h sea de valor real.

Dos ejemplos importantes de EDP lineales dispersivas son la ecuación de Schrödinger y la ecuación de Onda. Por una parte la ecuación de Schrödinger descrita en los términos

$$\begin{cases} i\partial_t u + \dfrac{\hbar}{2m}\Delta u = 0; \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{3.5}$$

donde $u : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \longrightarrow V$ es un campo complejo y Δ es el operador de Laplace. La constante de Planck $\hbar > 0$ y la masa $m > 0$ son constantes fijas.

Para escribir (3.5) en la forma (3.3) considérese: $V = L^2(\mathbb{R}^d)$, $u(t) = u(t,\cdot) \in V$ para cada $t \in \mathbb{R}$ y $L(u) = i\frac{\hbar}{2m}\Delta u$.

Por otra parte se tiene la ecuación de onda

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \quad \text{en} \quad [0,+\infty)\times\Omega, \\ u(0,x) = f(x) \quad \text{en} \quad \Omega, \\ \partial_t u(0,x) = g(x) \quad \text{en} \quad \Omega, \\ u(t,x) = 0 \quad \text{en} \quad [0,+\infty)\times\partial\Omega \end{cases} \tag{3.6}$$

donde $u : \mathbb{R}\times\Omega \longrightarrow H_0^1(\Omega)^2 \times L^2(\Omega)$, con Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^d$ (de clase C^∞). Haciendo $v = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, la ecuación se puede reescribir en la forma

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = v = 0\cdot u + v \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = \Delta u = \Delta u + 0\cdot v. \end{cases} \tag{3.7}$$

[2]Vea la definición de los espacios $H_0^1(\Omega)$ en el Apéndice C

Luego, el sistema se puede ver como

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot u + v \\ \Delta u + 0 \cdot v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

y llamando $U(t) = (u(t), v(t))^T$ la forma (3.3) de la ecuación de onda es

$$U'(t) = L(U(t)),$$

donde

$$L(U) = L\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

con

$$L : (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

actuando como

$$L\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \Delta u \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Se puede mostrar que L es un operador anti-adjunto. En efecto, en el espacio de Hilbert $V = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ se define el producto interno

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 + \int_\Omega u_2 v_2, \tag{3.11}$$

donde $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$ están en V.

Luego, si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in D(L)$ entonces

$$\begin{aligned} \langle L\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= \left\langle L\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} u_2 \\ \Delta u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \int_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla v_1 + \int_\Omega v_2 \Delta u_1 \end{aligned}$$

Usando la fórmula de Green (ver [3], Teorema 2.7.5), se tiene que

$$\int_\Omega v_2 \Delta u_1 = -\int_\Omega \nabla v_2 \cdot \nabla u_1 + \int_{\partial\Omega} v_2 \frac{\partial u_1}{\partial \nu},$$

pero $\displaystyle\int_{\partial\Omega} v_2 \frac{\partial u_1}{\partial \nu} = 0$ dado que $v_2 \in H_0^1(\Omega)$.
De la misma forma se puede mostrar que

$$\int_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla v_1 = -\int_\Omega u_2 \Delta v_1.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\langle L\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle &= -\left(\int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla v_2 + \int_\Omega u_2 \Delta v_1\right)\\
&= -\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_2 \\ \Delta v_1 \end{pmatrix} \right\rangle\\
&= -\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, L\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle\\
&= -\langle \mathbf{u}, L\mathbf{v}\rangle
\end{aligned}$$

Así se muestra que efectivamente el operador L es anti-adjunto.

3.3. Relación de dispersión y semigrupos

Como se indicó en la sección anterior, el operador L en la ecuación (3.3) puede escribirse como $L = ih(D)$ donde el polinomio h representa la relación de dispersión de la EDP. Veremos un método práctico para calcular h sabiendo que la ecuación diferencial parcial lineal con coeficientes constantes de la forma

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_d}\right) u(t,x) = 0, \tag{3.12}$$

donde P es un polinomio, admite soluciones de tipo onda plana de la forma

$$\begin{cases} u(t,x) = A_0 e^{i(\omega t + \xi x)} & \text{si} \quad \xi \in \mathbb{R}, \\ u(t,x) = A_0 e^{i(\omega t + \xi \cdot x)} & \text{si} \quad \xi \in \mathbb{R}^d \quad (\text{con } d \geq 2\ ), \end{cases} \tag{3.13}$$

donde A_0 es la **amplitud**, ξ es el **número de onda** y ω es la **frecuencia angular**.
Para cada ξ, no todos los valores de ω pueden ser tomados. Por ello, las EDP imponen una relación entre ξ y ω

$$\omega = \omega(\xi),$$

la cual es equivalente al polinomio h descrito en la ecuación (3.4). En general, cada número de onda corresponde a m frecuencias ω, donde m es el orden de la ecuación diferencial con respecto a t y es por eso que $\omega = \omega(\xi)$ es llamada una relación más que una función. Para la mayoría de los propósitos es apropiado restringir la atención en valores de ξ reales, en cuyo caso ω puede ser real o complejo dependiendo de la EDP. La onda (3.13) decrece si $\operatorname{Im}\,\omega > 0$ y crece si $\operatorname{Im}\,\omega < 0$. Se dice que un problema de propagación de ondas es **dispersivo** si $\omega(\xi)$ es real y la velocidad de grupo, $\dfrac{d\omega(\xi)}{d\xi}$ para el caso unidimensional o $\nabla_\xi \omega(\xi)$ para dimensiones superiores, no es constante. En los demás casos el problema es **no dispersivo**.
Así, cuando la solución (3.13) se sustituye en la ecuación diferencial (3.12), cada $\dfrac{\partial}{\partial t}$ produce un factor $i\omega$ y cada $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ produce un factor $i\xi_j$. De esta manera la relación de dispersión será

$$P\left(i\omega, i\xi_1, \ldots, i\xi_d\right) = 0 \tag{3.14}$$

y se tiene una correspondencia directa entre la ecuación diferencial y la relación de dispersión así:

$$\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow i\omega, \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \leftrightarrow i\xi_j, \tag{3.15}$$

donde además

$$\frac{\partial^k}{\partial x_j^k} \leftrightarrow (i\xi_j)^k. \tag{3.16}$$

Se puede prescindir de la ecuación una vez que se conoce la relación de dispersión y también se puede construir la ecuación a partir de la relación de dispersión. Para ilustrarlo, encontremos la relación de dispersión para cada una de las siguientes ecuaciones teniendo en cuenta que las soluciones son del tipo (3.13).

a) $u_t + c^2 u_{xxx} = 0$.

Al calcular las derivadas parciales se obtiene

$$u_t = A_0 e^{i(\omega t+\xi x)} (i\omega) = i\omega A_0 e^{i(\omega t+\xi x)} = i\omega u$$
$$u_{xxx} = A_0 e^{i(\omega t+\xi x)} (i\xi)^3 = -i\xi^3 A_0 e^{i(\omega t+\xi x)} = -i\xi^3 u.$$

Luego, sustituyendo en la ecuación diferencial se tiene que

$$u_t + c^2 u_{xxx} = i\omega u - ic^2\xi^3 u = \left(i\omega - ic^2\xi^3\right) u = 0.$$

La relación de dispersión es $\omega - c^2\xi^3 = 0$. Es decir,

$$\omega(\xi) = c^2\xi^3.$$

b) Para la ecuación de onda

$$u_{tt} - \Delta u = 0,$$

se tiene

$$u_{tt} = A_0 e^{i(\omega t+\xi\cdot x)} (i\omega)^2 = -\omega^2 A_0 e^{i(\omega t+\xi\cdot x)} = -\omega^2 u, \tag{3.17}$$
$$\Delta u = \Delta A_0 e^{i(\omega t+\xi\cdot x)} = -\left|\xi\right|^2 A_0 e^{i(\omega t+\xi\cdot x)} = -\left|\xi\right|^2 u. \tag{3.18}$$

Luego, sustituyendo en la ecuación diferencial

$$u_{tt} - \Delta u = -\omega^2 u + \left|\xi\right|^2 u = \left(-\omega^2 + \left|\xi\right|^2\right) u = 0. \tag{3.19}$$

La relación de dispersión es

$$-\omega^2 + \left|\xi\right|^2 = 0,$$

de donde

$$\omega(\xi) = \pm\left|\xi\right|.$$

Es decir, se tienen dos familias de soluciones:

$$u(t,x) = A_0 e^{i(|\xi|t+\xi\cdot x)} \qquad \text{y} \qquad u(t,x) = A_0 e^{-i(|\xi|t-\xi\cdot x)}.$$

Ahora, veamos que es posible determinar la ecuación diferencial a partir de su relación de dispersión.

a) Si $\omega + \alpha\xi - \beta\xi^3 = 0$

Multiplicando por i

$$i\omega + i\alpha\xi - i\beta\xi^3 = 0,$$

$$(i\omega) + \alpha(i\xi) + \beta(i\xi)^3 = 0.$$

Por (3.15) y (3.16), se tiene que

$$(i\omega) + \alpha(i\xi) + \beta(i\xi)^3 \equiv \frac{\partial}{\partial t}u + \alpha\frac{\partial}{\partial x}u + \beta\frac{\partial^3}{\partial x^3}u.$$

Luego, la ecuación diferencial correspondiente es

$$u_t + \alpha u_x + \beta u_{xxx} = 0.$$

b) Ahora, si $\omega - i\left|\xi\right|^2 = 0$

Multiplicando por i:

$$i\omega - i^2\left|\xi\right|^2 = 0,$$

$$i\omega - (-\left|\xi\right|^2) = 0.$$

Por (3.18) se sabe que $\Delta u = -\left|\xi\right|^2 u$. Luego, se tiene que

$$(i\omega) - (-\left|\xi\right|^2) \equiv \frac{\partial}{\partial t}u - \Delta u$$

y la ecuación diferencial asociada a la relación de dispersión indicada es la ecuación del calor

$$u_t - \Delta u = 0.$$

De esta manera se verifica la importancia de la relación de dispersión en el estudio de ecuaciones diferenciales parciales y más precisamente en la clasificación de éstas como dispersivas o no dispersivas. Aún sin ser dispersiva, una ecuación diferencial parcial lineal tiene relación de dispersión como en el caso de la ecuación del calor la cual no es dispersiva teniendo en cuenta que su relación de dispersión $\omega(\xi) = i\,|\xi|^2$ no es de valor real.

Veamos ahora la relación entre la teoría de semigrupos y la relación de dispersión para ecuaciones dispersivas de la forma (3.3). Para ello restrinjamos la atención al espacio de Schwartz $\boldsymbol{S}_x(\mathbb{R}^d)$ y consideremos inicialmente ecuaciones escalares, es decir, la relación de dispersión $h(\xi)$ es de valor real. Si $u \in C^1_{t,loc}\boldsymbol{S}_x(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$[3] es una solución clásica para (3.3), entonces tomando transformada de Fourier en (3.3)

$$\partial_t \widehat{u(t)}(\xi) = ih(\xi)\widehat{u(t)}(\xi) \tag{3.20}$$

y la única solución de esta ecuación es

$$\widehat{u(t)}(\xi) = e^{ith(\xi)}\widehat{u_0}(\xi). \tag{3.21}$$

Como $h(\xi)$ es real y $\widehat{u_0}$ es Schwartz, la función $e^{ith(\xi)}\widehat{u_0}(\xi)$ es también Schwartz para todo $t \in \mathbb{R}$. Podemos aplicar transformada de Fourier inversa para obtener la solución

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ith(\xi)+ix\cdot\xi}\widehat{u_0}(\xi)d\xi \tag{3.22}$$

y considerando que la solución de (3.3) es de la forma $u(t,x) = e^{tL}u_0(x) = e^{ith(D)}u_0(x)$ entonces la solución de (3.3) es

$$e^{tL}u_0(x) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{ith(\xi)+ix\cdot\xi}\widehat{u_0}(\xi)d\xi. \tag{3.23}$$

Este operador lineal está definido incialmente para funciones Schwartz, pero puede extenderse por argumentos de densidad a otros espacios como los espacios de Lebesgue o más generalmente a los espacios de Sóbolev pudiendo mostrar además que la familia $\left\{e^{tL}\right\}_{t\geq 0}$ representa un C_0-*semigrupo.*

[3]Espacio de las funciones Schwartz respecto a la variable espacial, que son continuamente diferenciables respecto a la variable temporal con primera derivada acotada esencialmente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$.

Capítulo 4

La ecuación de onda

4.1. Problema de Cauchy y relación de dispersión

La ecuación de onda es el ejemplo más simple de una ecuación hiperbólica y dispersiva de segundo orden. Si $x \in \mathbb{R}^d$ representa la variable espacial y t la variable temporal, esta ecuación puede modelar ondas en cuerdas vibrantes cuando $d = 1$, ondas en la superficie del agua cuando $d = 2$ y ondas en óptica o acústica cuando $d = 3$. El PVIF para la ecuación de onda se escribe como

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \quad \text{en} \quad (0, +\infty) \times \Omega, \\ u(0, x) = f(x) \quad \text{en} \quad \Omega, \\ \partial_t u(0, x) = g(x) \quad \text{en} \quad \Omega, \\ u(t, x) = 0 \quad \text{en} \quad [0, +\infty) \times \partial\Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ es un dominio acotado y f y g son respectivamente el desplazamiento y la velocidad iniciales.

En las secciones 3.2 y 3.3 se mostró que ésta es una ecuación dispersiva de la forma (3.3) con

$$L(U) = L\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \Delta u \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

donde

$$L : (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

es un operador antiadjunto dado que si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in D(L)$ entonces

$$\begin{aligned} \langle L\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= \left\langle L\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} u_2 \\ \Delta u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \int_\Omega \nabla u_2 \cdot \nabla v_1 + \int_\Omega v_2 \Delta u_1 \end{aligned}$$

y usando la fórmula de Green (ver [3], Teorema 2.7.5), se tiene que

$$\begin{aligned} \langle L\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= -\left(\int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla v_2 + \int_\Omega u_2 \Delta v_1 \right) \\ &= -\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_2 \\ \Delta v_1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= -\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, L\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= -\langle \mathbf{u}, L\mathbf{v} \rangle . \end{aligned}$$

La relación de dispersión para esta ecuación es $\omega(\xi) = \pm |\xi|$ y se calculó sustituyendo en la ecuación diferencial la solución tipo onda plana $u(t,x) = A_0 e^{i(\omega t + \xi \cdot x)}$. Ahora se mostrará la aplicación de la teoría de semigrupos a esta importante ecuación diferencial.

4.2. Semigrupo asociado al operador de onda

Sea $V = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. V es un espacio de Hilbert si está equipado con el producto interno

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 + \int_\Omega u_2 v_2, \tag{4.3}$$

donde $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ están en V.
Si se denota por v a $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ entonces se tiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden para u y v:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - v = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta u = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Se define el operador no acotado $A : D(A) \subset V \to V$ como

$$A\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \Delta u \end{pmatrix}, \mathbf{u} = (u, v)^T \in D(A),$$

$$D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega).$$

Lema 4.2.1. *A es un operador maximal disipativo y en consecuencia el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones.*

Demostración. El hecho de que A sea un operador anti-adjunto garantiza que tanto A como $-A$ sean disipativos en el sentido de la Definición 1.2.3. En efecto, como

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = - \langle \mathbf{u}, A\mathbf{v} \rangle,$$

para $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in D(A)$, entonces $\langle A\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = - \langle \mathbf{u}, A\mathbf{u} \rangle = - \langle A\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ dado que V es un espacio de Hilbert real. De ahí que

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$$

y en consecuencia A es un operador disipativo. Para comprobar que el operador A verifica la condición de maximalidad se debe mostrar que para todo par $(h_1, h_2)^T \in V$ la ecuación

$$(I - A)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

tiene por lo menos una solución, con $(u, v)^T \in D(A)$. Por la forma del operador A, la ecuación anterior puede escribirse como el sistema de dos ecuaciones

$$u - v = h_1; \quad v - \Delta u = h_2;$$

$$u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega); v \in H_0^1(\Omega).$$

Sumando las dos ecuaciones se tiene

$$u - \Delta u = h_1 + h_2$$

y como $h_1 + h_2 \in L^2(\Omega)$, existe un único $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ que satisface la igualdad $u - \Delta u = h_1 + h_2$ (ver Apéndice D). Entonces, existe $v = u - h_1 \in H_0^1(\Omega)$. Con esto se muestra que dado $\mathbf{h} = (h_1, h_2)^T \in V$, existe un único $\mathbf{u} = (u, v)^T \in D(A)$ tal que $(I - A)\mathbf{u} = \mathbf{h}$ lo cual significa que $R(I - A) = V$ y en consecuencia A es maximal disipativo. De la misma manera se puede demostrar que $-A$ también es maximal disipativo. Luego, A y $-A$ generan un grupo de isometrías (ver Teorema 1.2.7). En particular, por la Observación 1.2.8, el operador A es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Así, existe una única solución $\mathbf{u} = (u, v)^T \in V$ para la ecuación

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\mathbf{u} = A\mathbf{u}, \quad t > 0, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \in D(A), \end{cases} \tag{4.6}$$

con u satisfaciendo (4.1). $\square$

Apéndice A

Integral de Bochner

Definición A.0.1. *Una función vectorial $f : \mathbb{R} \to X$ se dice débilmente medible si para todo elemento del espacio dual, $F \in X'$, la función $F(f(s))$ es Lebesgue medible.*

Definición A.0.2. *Una función vectorial $f : \mathbb{R} \to X$ se dice simple si $f(J_i) = x_i$, $i = 1, \ldots, n$, donde los x_i son constantes no nulas y los J_i son intervalos disjuntos de medida Lebesgue finita, con $f(s) = 0$ en $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} J_i$.*

Observe que tal función es de la forma

$$f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{J_i}.$$

Se puede notar que la representación de una función simple es única.

Definición A.0.3. *Una función vectorial $f : \mathbb{R} \to X$ se dice medible si existe una sucesión de funciones simples $\{f_n\}$ que convergen a f en casi todo punto, es decir, $\lim_{n\to\infty} f_n(s) = f(s)$ para casi todo $s \in \mathbb{R}$*

Note que toda función simple es medible.

Definición A.0.4. *Una función vectorial $f : \mathbb{R} \to X$ se dice separadamente valuada si su rango $\{f(s) : s \in \mathbb{R}\}$ es separable y se dirá casi separadamente valuada si existe una familia J de subconjuntos Lebesgue medibles de medida nula tal que $\{f(s) : s \in \mathbb{R} \setminus J\}$ es separable.*

Teorema A.0.1. *(Teorema de Pettis) Una función vectorial $f : \mathbb{R} \to X$ es medible si y sólo si es débilmente medible y casi separadamente valuada.*

Demostración. Esta demostración aparece con todo detalle en el capítulo V, sección 4 de [11]. □

Definición A.0.5. *(Integral de Bochner) Se llama integral-Bochner de una función simple $f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{J_i}$ a*

$$\int_{\mathbb{R}} f(s)ds := \sum_{i=1}^{n} x_i m(J_i),$$

siendo m la medida Lebesgue en $\mathbb{R}$. Igualmente para todo subconjunto B de $\mathbb{R}$ Lebesgue medible,

$$\int_{B} f(s)ds := \sum_{i=1}^{n} x_i m(J_i \cap B),$$

Lo interesante es extender esta definición de manera consistente para funciones medibles.

Definición A.0.6. *Una función vectorial $f : \mathbb{R} \to X$ se dice integrable-Bochner si existe una sucesión de funciones simples $\{f_n\}$ tales que:*

i) $\lim_{n\to\infty} f_n(s) = f(s)$ *en casi todo punto, es decir, f es medible.*

ii) $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \|f(s) - f_n(s)\| = 0$

En tal caso,

$$\int_{\mathbb{R}} f(s)ds = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(s)ds$$

Igualmente para cualquier subconjunto Lebesgue medible B.

Para ver la consistencia de esta definición, tenemos que ver que el límite anterior existe y no depende de la sucesión de funciones simples que aproxima a la función. Como la función f es medible, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $f - f_n$ es medible ya que se aproxima por $\{f_m - f_n\}_{m\in\mathbb{N}}$, sucesión de funciones simples, luego la demostración del Teorema de Pettis que aparece en [11] nos dice que $\|f(s) - f_n(s)\|$ es medible, luego la integral en $ii)$ tiene sentido. Para ver que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(s)ds$ existe, tenemos que probar que $\left\{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n(s)ds\right\}$ converge en X. Usando que X es completo, veamos que es sucesión de Cauchy:

$$\begin{aligned}\left\|\int_{\mathbb{R}} f_n(s)ds - \int_{\mathbb{R}} f_k(s)ds\right\| &= \left\|\int_{\mathbb{R}} (f_n(s) - f_k(s))ds\right\| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \|f_n(s)ds - f_k(s)\|\, ds \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \|f_n(s)ds - f(s)\|\, ds + \int_{\mathbb{R}} \|f(s)ds - f_k(s)\|\, ds.\end{aligned}$$

Usando el hecho de que la suma de funciones simples es también una función, usando la desigualdad triangular de la norma y luego tomando límites, se obtiene lo que se quería. Además el límite no depende de la sucesión tomada.

Teorema A.0.2. *Una función vectorial $f : \mathbb{R} \to X$ medible es Bochner integrable si y sólo si $\|f(s)\|$ es Lebesgue integrable.*

Demostración. Supongamos que f es integrable-Bochner, luego existe una sucesión de funciones simples $\{f_n\}$ que aproximan a f y

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \|f(s)ds - f_n(s)\|\, ds = 0.$$

Se sabe por la demostración del Teorema de Pettis que $\|f(s)\|$ es Lebesgue medible por ser f medible. Como $\|f(s)\| \leq \|f_n(s)\| + \|f(s) - f_n(s)\|$ y $\|f_n(s)\|$ son integrables se tiene que:

$$\int_{\mathbb{R}} \|f(s)\|\, ds \leq \int_{\mathbb{R}} \|f_n(s)\|\, ds + \int_{\mathbb{R}} \|f(s) - f_n(s)\|\, ds,$$

Luego, tomando límite, como el segundo sumando tiende a cero basta ver que $\int_{\mathbb{R}} \|f_n(s)\|\, ds$ es convergente. Como

$$\begin{aligned}\left| \int_{\mathbb{R}} \|f(s)\|\, ds - \int_{\mathbb{R}} \|f_k(s)\|\, ds \right| &\leq \int_{\mathbb{R}} |\|f_n(s)\| - \|f_k(s)\||\, ds \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \|f_n(s) - f_k(s)\|\, ds \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \|f_n(s) - f(s)\|\, ds + \int_{\mathbb{R}} \|f(s) - f_k(s)\|\, ds\end{aligned}$$

Tomando límites, se obtiene que es una sucesión de Cauchy en consecuencia convergente. Inversamente, supongamos que $\|f(s)\|$ es Lebesgue integrable y que f es medible. Luego sea $\{f_n\}$ sucesión de funciones simples que aproximan a f. Se define una nueva sucesión de funciones como sigue:

$$\begin{aligned} g_n(s) &= f_n(s) \quad \text{si} \quad \|f_n(s)\| \leq \|f(s)\| \left(1 + 2^{-1}\right), \\ g_n(s) &= 0 \qquad\quad \text{si} \quad \|f_n(s)\| > \|f(s)\| \left(1 + 2^{-1}\right). \end{aligned}$$

Entonces las g_n cumplen que

$$\|g_n(s)\| \leq \|f(s)\| \left(1 + 2^{-1}\right).$$

Veamos primero que estas funciones aproximan a f. Como

$$|\|f_n(s)\| - \|f(s)\|| \leq \|f(s) - f_n(s)\| \to 0$$

cuando $n \to \infty$, se tiene que $\|f_n(s)\| \to \|f(s)\|$. Luego para n suficientemente grande, $\|f_n(s)\| \leq \|f(s)\| (1 + 2^{-1})$, es decir $g_n(s) = f_n(s)$. Así,

$$\lim_{n\to\infty} \|f(s) - g_n(s)\| = \lim_{n\to\infty} \|f(s) - f_n(s)\| = 0.$$

Además como para n suficientemente grande

$$\begin{aligned}\|f(s) - g_n(s)\| &\leq \|f(s)\| + \|g_n(s)\| \\ &= \|f(s)\| + \|f_n(s)\| \\ &\leq \left(2 + 2^{-1}\right) \|f(s)\|\end{aligned}$$

y $\|f(s)\|$ es Lebesgue integrable. Aplicando el Lema de Fatou se obtiene que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\|f(s)-g_n(s)\|\,ds=0,$$

luego $f(s)$ es Bochner integrable. $\square$

Corolario A.0.1. *Sean $T \in L(X,Y)$, con X y Y espacios de Banach, y $f:\mathbb{R}\to X$ integrable-Bochner. Entonces $Tf:\mathbb{R}\to X$ es Bochner integrable y*

$$\int_{\mathbb{R}} Tf(s)ds = T\int_{\mathbb{R}} f(s)ds.$$

Teorema A.0.3. *(Teorema fundamental del cálculo integral) Sea $f:\mathbb{R}\to X$ una función Bochner integrable y sea $F(t):=\displaystyle\int_0^t f(s)ds$. Entonces F es diferenciable en casi todo punto y $F'=f$.*

Demostración. Como f es Bochner integrable entonces existe una sucesión $\{f_n\}$ de funciones simples tales que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(s)=f(s)$ en casi todo punto y

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\|f(s)-f_n(s)\|\,ds=0.$$

Sea $h>0$,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(s)ds-f(t)\right\| &\le \frac{1}{h}\int_t^{t+h}\|f(s)-f(t)\|\,ds\\ &\le \frac{1}{h}\int_t^{t+h}\|f(s)-f_n(s)\|\,ds+\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\|f_n(s)-f_n(t)\|\,ds\\ &+\|f_n(t)-f(t)\|\end{aligned}$$

Veamos como se comporta cada uno de los tres sumandos cuando $h\to 0$. El primero, como $\|f(s)-f_n(s)\|$ es Lebesgue integrable, aplicando el Teorema Fundamental del Calculo Integral se tiene que éste tiende a $\|f(t)-f_n(t)\|$. El segundo, como $\|f_n(s)-f_n(t)\|$ es

Lebesgue integrable en un entorno de t por ser $\{f_n\}$ funciones simples, aplicando el mismo teorema se obtiene que este segundo sumando tiende a cero. Así,

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(s)ds - f(t)\right\| \leq 2\left\|f(t)-f_n(t)\right\| ds$$

lo cual tiende a cero cuando $n\to\infty$ en casi todo punto y se tiene lo que se quería. Es decir,

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(s)ds = f(t).$$

$\square$

Apéndice B

Funciones absolutamente continuas

Definición B.0.7. *Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se llama absolutamente continua si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para toda familia $\{(a_i, b_i)\}$ de intervalos disjuntos en $[a, b]$ tales que $\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta$ se cumple la desigualdad*

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon.$$

Teorema B.0.4. *Sea f una función absolutamente continua en $[a, b]$. Entonces f es derivable en casi toda parte en (a, b), su derivada f' es integrable sobre $[a, b]$ y*

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

Demostración. Ver [9], Capítulo 6, Teorema 10. □

Corolario B.0.2. *Sea f una función absolutamente continua en $[a, b]$. Entonces*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'.$$

Demostración. Supongamos que f es absolutamente continua en $[a, b]$. Luego, para todo $x \in (a, b]$ se tiene que f es absolutamente continua en $[a, x]$ y por el teorema anterior se verifica que

$$\int_a^x f' = f(x) - f(a),$$

de donde

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'.$$

□

Definición B.0.8. *Se dice que f es la integral indefinida de una función g sobre $[a, b]$, si g es Lebesgue integrable sobre $[a, b]$ y*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g \quad \forall x \in [a, b].$$

Teorema B.0.5. *Una función f en $[a, b]$ es absolutamente continua en $[a, b]$ si y solo si es una integral indefinida en $[a, b]$.*

Demostración. Ver [9], Capítulo 6, Teorema 11. □

Observación B.0.1. *El conjunto de funciones absolutamente continuas está contenido en el conjunto de funciones continuas y no al contrario. Por ejemplo, existe la «función de Cantor» la cual es continua pero no es absolutamente continua. (Ver [9], Capítulo 6, Sección 6.4)*

Apéndice C

Espacios de Sóbolev

Sean Ω un conjunto abierto en $\mathbb{R}^d$ y $\partial\Omega$ su frontera.

Definición C.0.9. *Sea $m > 0$ un entero y sea $1 \leq p \leq \infty$. El **espacio de Sóbolev** $W^{m,p}$ es definido por:*

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) | D^\alpha u \in L^p(\Omega), \quad \textit{para todo}\, |\alpha| \leq m \right\}. \tag{C.1}$$

En otras palabras, $W^{m,p}(\Omega)$ es la colección de todas las funciones en $L^p(\Omega)$ tales que sus derivadas, en sentido de distribución, hasta de orden m están también en $L^p(\Omega)$. En ese sentido, D^α se define como:

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d}} \quad \text{(ver [3], sección 1.3).} \tag{C.2}$$

$W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio vectorial y tal espacio está dotado de la norma:

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \tag{C.3}$$

o, equivalentemente, para $1 < p < \infty$,

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}. \tag{C.4}$$

Notación:

- Para el caso en que $p = 2$, tales espacios son denotados por $H^m(\Omega)$. Así,

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega) \tag{C.5}$$

  y para $u \in H^m(\Omega)$, se denota su norma por $\|u\|_{m,\Omega}$ en lugar de $\|u\|_{m,2,\Omega}$.

- Se puede considerar el espacio $L^p(\Omega)$ como un caso especial de las clases de Sóbolev, haciendo $m = 0$. Es decir, $L^p(\Omega) \equiv W^{o,p}(\Omega)$.

- Se definen los espacios $W_0^{m,p}(\Omega)$ como:

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \{u \in W^{m,p}(\Omega) | D^\alpha u = 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega \quad \text{para todo} \quad |\alpha| \leq m - 1\}. \tag{C.6}$$

  Así entonces, $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$.

Los espacios $H^m(\Omega)$ tienen un producto interno definido por:

$$\langle u, v\rangle = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v, \quad \text{para} \quad u, v \in H^m(\Omega). \tag{C.7}$$

Este producto interno produce la norma dada por la fórmula (C.4) cuando $p = 2$.

Teorema C.0.6. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}$ un conjunto abierto, sea $u : \Omega \to \mathbb{R}$ y sea $1 \leq p < \infty$. Entonces $u \in W^{1,p}(\Omega)$ si y sólo si u admite una representación absolutamente continua $\bar{u} : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\bar{u}$ y su derivada clásica $\bar{u}'$ pertenecen a $L^p(\Omega)$.*

(Este terorema indica que toda función de $L^p(\Omega)$ absolutamente continua es también un elemento de $W^{1,p}(\Omega)$ mientras que todo elemento de $W^{1,p}(\Omega)$ tiene una función representante en $L^p(\Omega)$ que es absolutamente continua.)

Demostración. Ver [5], Teorema 7.13. □

Apéndice D

Ecuaciones elípticas de segundo orden

En este apéndice se estudia la solución de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden elipticas sujetas a condiciones de frontera. Entre las distintas técnicas utilizadas se encuentra los métodos de energía dentro de los espacios de Sobolev.

Se estudiará principalmente el problema de valores en la frontera:

$$\begin{cases} Lu = f \quad \text{en} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{D.1}$$

donde Ω es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^d$ y $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ es desconocida, $u = u(x)$. Aquí, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ está dada y L denota un operador diferencial parcial de segundo orden que tiene alguna de las dos formas siguientes:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{d} (a^{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{d} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u, \tag{D.2}$$

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{d} a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{d} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u, \tag{D.3}$$

donde los coeficientes a^{ij}, b^i, c $(i, j = 1, \ldots, d)$ son funciones dadas.

Se dice que la *EDP* $Lu = f$ está en *forma divergente* si L está dado por la forma (D.2) y en *forma no divergente* si L está dado por (D.3). La condición $u = 0$ en $\partial\Omega$ en (D.1) es llamada *condición de frontera de Dirichlet.*

Definición D.0.10. *Se dice que el operador diferencial parcial L es elíptico si existe una constante $\theta > 0$ tal que:*

$$\sum_{i,j=1}^{d} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta \left|\xi\right|^2, \tag{D.4}$$

para casi todo $x \in \Omega$ y todo $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Elipticidad significa que para cada punto $x \in \Omega$, la matriz simétrica $M(x) = ((a^{ij}(x)))$ es definida positiva, con el menor de sus valores propios siendo mayor o igual a θ.

Asumiendo que:

$$a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(\Omega), (i, j = 1, \ldots, d), \tag{D.5}$$

$$f \in L^2(\Omega) \tag{D.6}$$

y suponiendo que u es una solución suave, multipliquemos la EDP $Lu = f$ por una función test $v \in C_c^\infty(\Omega)$ (funciones de C^∞ con soporte compacto), y después de aplicar integración por partes sobre Ω se obtiene:

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{d} a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{d} b^i u_{x_i} v + cuv \right) dx = \int_\Omega fv dx. \tag{D.7}$$

El término en la frontera se anula dado que $v = 0$ en $\partial\Omega$. Por aproximación se encuentra que la misma identidad se tiene con la función test v reemplazada por alguna $v \in H_0^1(\Omega)$, y la identidad resultante tiene sentido sólo si $u \in H_0^1(\Omega)$.

Definición D.0.11. *(i) La forma bilineal $B[\cdot,\cdot]$ asociada con la forma divergente para el operador L definida por* (D.2) *es:*

$$B[u,v] := \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{d} a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{d} b^i u_{x_i} v + cuv \right) dx \tag{D.8}$$

para $u, v \in H_0^1(\Omega)$.

(ii) Se dice que $u \in H_0^1(\Omega)$ es una solución débil del problema de valores en la frontera (D.1) *si*

$$B[u,v] = \langle f, v \rangle \tag{D.9}$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega)$, donde $\langle , \rangle$ denota el producto interno en $L^2(\Omega)$.

Observación D.0.2. *Cuando el problema tiene condiciones de frontera no nulas, se puede transformar adecuadamente en uno de tal forma. Supongamos que $\partial\Omega$ es C^1 y $u \in H^1(\Omega)$ es una solución débil del problema*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{en} \quad \Omega, \\ \quad u = g & \text{en} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{D.10}$$

Esto significa que $u = g$ en $\partial\Omega$ en el sentido traza y además la identidad (D.9) *se tiene para toda $v \in H_0^1(\Omega)$. Para que esto sea posible es necesario que g sea la traza de alguna función de $H^1(\Omega)$, digamos w. Así entonces, $\tilde{u} := u - w$ está en $H_0^1(\Omega)$ y es una solución débil de problema de valores en la frontera:*

$$\begin{cases} L\tilde{u} = \tilde{f} & \text{en} \quad \Omega, \\ \quad \tilde{u} = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{D.11}$$

donde $\tilde{f} = f - Lw$.

Asumiendo que H es un espacio de Hilbert con norma $\|\cdot\|$ y producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, se menciona el siguiente teorema:

Teorema D.0.7. *(Teorema de Lax-Milgram). Asuma que*

$$B : H \times H \to \mathbb{R}$$

es una correspondencia bilineal, para la cual existen constantes $\alpha, \beta > 0$ *tales que*

(i)

$$|B[u,v]| \leq \alpha \|u\| \|v\| \quad (u, v \in H)$$

y

(ii)

$$\beta \|u\|^2 \leq B[u,u] \quad (u \in H).$$

Finalmente, sea $f : H \to \mathbb{R}$ *un funcional lineal y acotado en* H*. Entonces existe un único elemento* $u \in H$ *tal que*

$$B[u,v] = (f,v) \tag{D.12}$$

para toda $v \in H$*, donde* (f,v) *denota el valor de* f *actuando sobre* v*.*

Demostración. Ver [2], Sección 6.2, Teorema 1. □

Retomando la forma bilineal definida por la ecuación (D.8), se trata de verificar las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram.

Teorema D.0.8. *(Estimaciones de energía). Existen constantes* $\alpha, \beta > 0$ *y* $\gamma \geq 0$ *tales que*

(i) $|B[u,v]| \leq \alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$

y

(ii) $\beta \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq B[u,u] + \gamma \|u\|^2_{L^2(\Omega)}$

para toda $u, v \in H_0^1(\Omega)$.

Demostración. Ver [2], Sección 6.2, Teorema 2. □

Se observa que si $\gamma > 0$ entonces $B[\cdot,\cdot]$ no precisamente satisface la hipótesis del Teorema de Lax-Milgram. El siguiente teorema de existencia permite considerar esa posibilidad.

Teorema D.0.9. *(Primer Teorema de existencia de soluciones débiles). Hay un número* $\gamma \geq 0$ *tal que para cada* $\mu \geq \gamma$ *y cada* $f \in L^2(\Omega)$ *existe una única solución débil* $u \in H_0^1(\Omega)$ *del problema de valores en la frontera*

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f \quad en \quad \Omega, \\ \quad u = 0 \quad en \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{D.13}$$

Demostración. Ver [2], Sección 6.2, Teorema 3. □

Para el caso de la ecuación elíptica asociada a la ecuación de onda (ver capítulo 4), el operador L está dado por la expresión

$$Lu = -\Delta u + u, \tag{D.14}$$

es decir, los coeficientes $a^{ij}(x)$, $b^i(x)$ y $c(x)$ en las ecuaciones (D.2) y (D.3) son:

$$a^{ij}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

$b^i(x) = 0$ $\forall i = 1, \ldots, d$ y $c(x) = 1$.

Luego, la forma bilineal definida por la ecuación (D.8) se expresa como

$$B[u,v] = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^d u_{x_i} v_{x_i} + uv \right) = \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \langle u, v \rangle, \tag{D.15}$$

para $u, v \in H_0^1(\Omega)$.

De ahí resulta:

$$|B[u,v]| = |\langle u, v\rangle| \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

y

$$B[u,u] = \int_\Omega \nabla u \nabla u + \int_\Omega uu = \langle u, u\rangle = \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}. \tag{D.16}$$

En consecuencia se satisfacen las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram con $\alpha = \beta = 1$ y los resultados del Teorema D.0.8 se verifican con $\alpha = \beta = 1$ y $\gamma = 0$. Así pues, para cada $\mu \geq \gamma = 0$ el Teorema D.0.9 garantiza la existencia de una única solución débil para la ecuación $Lu + \mu u = f$ con $f \in L^2(\Omega)$. En particular para $\mu = \gamma = 0$ y L dado por (D.14), la ecuación $Lu = f$ tiene una única solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$.

Bibliografía

[1] DJAIRO GUEDES DE FIGUEIREDO. *Análise de Fourier e equacões diferenciais parciais*. Editorial Impa, 2005.

[2] EVANS, LAWRENCE. *Partial Differential Equations*. American mathematical society. 1998.

[3] KESAVAN, SRINIVASAN. *Topics in functional analysis and applications*. Editorial Halsted Press, 1989.

[4] KREYSZIG, ERWIN. *Introductory functional analysis with applications*. Jhon Wiley & Sons, Inc. 1978.

[5] LEONI, GIOVANNI. *A First Course in Sobolev Spaces*. Graduate Studies in Mathematics, 105. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.

[6] LINARES FELIPE, PONCE GUSTAVO. *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations*. Felipe Linares e Gustavo ponce. 2006.

[7] MUÑOZ LUZ AYDA, ANGULO LIVIO. Los semigrupos de las ecuaciones del Calor y de Schrödinger. Trabajo de grado. Universidad del Cauca. 2012.

[8] PAZY, AMNON. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer-Verlag. Applied Math. Sciences, 1983.

[9] ROYDEN, H.L. FITZPATRICK P.M. *Real Analysis*. Fourth Edition. By Pearson Education Asia Limited and China Machine Press. 2010.

[10] TAO, TERENCE. Nonlinear Dispersive Equations. Local and Global Analysis. © 2006 by the American Mathematical Society.

[11] YOSIDA, KÔSAKU. Functional Analysis. Sixth edition. A Series of Comprehensive Studies in Mathematics. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York (1980).