

**GRUPO DE AUTOMORFISMOS DE LAS CURVAS PROYECTIVAS DE
FERMAT**



MARBY ZULEY BOLAÑOS ORTIZ

**UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN, CAUCA
2015**

**GRUPO DE AUTOMORFISMOS DE LAS CURVAS PROYECTIVAS DE
FERMAT**

TRABAJO DE GRADO

**En la modalidad de investigación presentado
como requisito parcial para optar al título de Matemática**

MARBY ZULEY BOLAÑOS ORTIZ

Directora:

Dra. MARTHA JUDITH ROMERO ROJAS

Codirectora:

Mag. MARIBEL DEL CARMEN DIAZ NOGUERA

**UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POPAYÁN, CAUCA
2015**

Nota de aceptación

Directora:

Dra. Martha Judith Romero Rojas

Codirectora:

Mag. Maribel del Carmen Diaz Noguera

Jurados:

Dra. Daniela Vasquez Latorre

Dr. Willy Will Sierra Arroyo

2 de Febrero de 2015

A Jairo A. Bolaños, cuyo recuerdo en historias ajenas
me ha inspirado siempre perseverancia y fortaleza.

Agradecimientos

Gracias a Dios, que es mi fortaleza. A mi familia por su apoyo y confianza, a mi hermano por su cariño y a mi madre por su entrega y amor desmedido.

A mis directoras, Martha Romero y Maribel Diaz por su constante colaboración, dedicación e infinita confianza. Fueron las mejores guías para la realización de este trabajo.

A todos los profesores que encontré en este camino, cada uno dejó un recuerdo y una valiosa lección .

A Daniela Vasquez Latorre y Willy Will Sierra, jurados de este trabajo, por su disposición y ayuda.

A todas las personas que en algún momento de este trayecto han sido compañía, apoyo y consejo.

Introducción

La idea de superficie de Riemann surge a mediados del siglo XIX a partir de los esfuerzos de Bernhard Riemann por extender el dominio de una función analítica. Sin embargo, el estudio de las superficies de Riemann se desarrolló posteriormente de manera abstracta, como variedades complejas independientes de las funciones que les dieron origen. En el estudio de las superficies de Riemann interactúan varias ramas de la matemática: geometría, álgebra, análisis y topología principalmente.

Como objetos abstractos, algunas superficies de Riemann pueden tener la misma estructura y esto ocurre cuando se puede establecer una biyección holomorfa entre ellas. Las biyecciones holomorfas de una superficie de Riemann en sí misma forman el grupo de automorfismos de dicha superficie. A finales del siglo XIX Schwarz mostró que el grupo de automorfismos de una superficie de Riemann compacta con género $g \geq 2$ es finito. A partir de esto Hurwitz probó, en 1893, que el orden de dicho grupo está acotado por $84(g - 1)$. Se ha probado además que son infinitos los valores de g para los cuales se alcanza la cota de Hurwitz, aunque actualmente solo se conocen dos superficies con esta característica, la cuártica de Klein y la curva de Fricke-Macbeath.

A partir de esto se han hecho importantes estudios tratando de resolver principalmente dos problemas. El primero consiste en determinar el mayor orden posible para el grupo de automorfismos de una superficie de género $g \geq 2$ dado y el segundo en encontrar el mínimo género de una superficie que tiene determinado grupo finito de automorfismos. Actualmente se tienen resultados para superficies orientables y no orientables, y sobre ciertas familias de grupos: abelianos, cíclicos, diédricos y ciertas clases de grupos metacíclicos, entre otros.

En este trabajo se estudia el grupo de automorfismos de las curvas proyectivas de Fermat, una familia de superficies de Riemann compactas de género $g \geq 2$. Se prueba que el grupo de auto-

morfismos de la curva proyectiva de Fermat de grado n sobre \mathbb{C} , es el producto semidirecto del grupo simétrico S_3 y la suma directa $(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n)$.

Con el fin de probar lo anterior y proporcionar una base al lector interesado en continuar el estudio sobre superficies de Riemann y acciones sobre superficies de Riemann, este trabajo se divide en tres capítulos. El primero es de carácter introductorio: se presentan nociones y resultados fundamentales sobre superficies de Riemann y funciones entre superficies de Riemann. El segundo capítulo trata de acciones de grupo sobre superficies de Riemann y muestra como el conjunto de clases de equivalencia dado por la acción de un grupo sobre una superficie de Riemann, bajo ciertas condiciones, tiene estructura de superficie de Riemann. El tercer capítulo está dedicado al estudio de las curvas proyectivas de Fermat, sus propiedades geométricas: estructura compleja, singularidades y género. Además se presenta una prueba grupo-teórica de que el grupo de automorfismos de la curva proyectiva de Fermat, en característica cero, es isomorfo al producto semidirecto $(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n) \rtimes S_3$. Esta prueba está basada en la presentada por Pavlos Tzermias en su artículo *The Group of Automorphisms of the Fermat Curve*, *Journal of Number Theory* 53, 1995.

Índice general

Introducción	VII
1. Preliminares	1
1.1. Superficies de Riemann	1
1.2. Funciones Holomorfas entre Superficies de Riemann	14
1.3. Clasificación Topológica	25
1.4. Fórmula de Hurwitz	26
2. Acciones de grupo	31
2.1. Acciones de Grupo en Superficies de Riemann	31
2.2. Espacio Cociente	34
3. Curvas Proyectivas de Fermat	47
3.1. Estructura Compleja	47
3.2. Grupo de Automorfismos de las Curvas Proyectivas de Fermat.	51

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentaremos definiciones y resultados básicos sobre superficies de Riemann y acciones de grupo sobre dichas superficies.

Intuitivamente podemos considerar una superficie de Riemann como un espacio que localmente luce como un conjunto abierto en el plano complejo. Antes de precisar este concepto recordemos algunos conceptos básicos sobre espacios topológicos

- Un homeomorfismo de espacios topológicos es una biyección continua entre dos espacios topológicos, cuya inversa también es continua. En este caso, los espacios topológicos se dicen homeomorfos.
- Un espacio topológico X es segundo contable si existe una base contable para su topología.
- Se dice que un espacio topológico X es Hausdorff si para cada par de puntos distintos p y q de X existen entornos disjuntos U y V (en X) de p y q respectivamente.

1.1. Superficies de Riemann

El hecho de que un espacio topológico X luzca localmente como un abierto del plano complejo, se deduce de los siguientes resultados y definiciones.

Definición 1.1.1. *Sea X un espacio topológico.*

- Una carta compleja en X es un homeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$, donde U es un abierto en X y V un abierto en \mathbb{C} .*

ii) Dos cartas en X , $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$, $i = 1, 2$ se dicen compatibles si la composición

$$\phi_1 \circ \phi_2^{-1} : \phi_2(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_1(U_1 \cap U_2)$$

es holomorfa siempre que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. En este caso, llamamos a $T = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ función de transición.

Cuando $\phi(p) = 0$ para una carta ϕ en X , diremos que ϕ está centrada en $p \in X$.

Observación 1.1.1. Dado que una aplicación holomorfa y biyectiva tiene inversa holomorfa, la función $T = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ es holomorfa si y solo si $T^{-1} = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ también lo es.

Ejemplo 1.1.1. Sea $X = \mathbb{R}^2$. Para cada abierto U de X definimos la función continua

$$\phi_U(x, y) = \frac{x}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

con inversa

$$\phi_U^{-1}(w) = \left(\frac{\operatorname{Re}(w)}{1 - |w|}, \frac{\operatorname{Im}(w)}{1 - |w|} \right)$$

continua, ya que para cualquier abierto U , $\phi_U(U) \subset A$, donde $A = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$. Así ϕ_U es una carta compleja en $X = \mathbb{R}^2$ para cada abierto U de X .

En este caso, cualquier par de cartas son compatibles debido a que la función de transición es la función identidad.

Por otro lado, las funciones dadas por $\psi_U(x, y) = x + iy$ para cada abierto U de \mathbb{R}^2 , son también cartas complejas en $X = \mathbb{R}^2$.

Notemos que estas cartas en \mathbb{R}^2 no son compatibles. En efecto, tomando las cartas $\phi_{U_1} : U_1 \rightarrow V_1$, $\psi_{U_2} : U_2 \rightarrow V_2$ donde, U_1, U_2 son abiertos de \mathbb{R}^2 tales que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ tenemos que la función de transición $T = \psi \circ \phi^{-1} : \phi(U_1 \cap U_2) \rightarrow \psi(U_1 \cap U_2)$ está dada por

$$T(w) = \psi \left(\frac{\operatorname{Re}(w)}{1 - |w|}, \frac{\operatorname{Im}(w)}{1 - |w|} \right) = \frac{\operatorname{Re}(w)}{1 - |w|} + i \frac{\operatorname{Im}(w)}{1 - |w|}.$$

Si $w = x + iy$, entonces

$$T(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

donde

$$u(x, y) = \frac{x}{1 - \sqrt{x^2 + y^2}} \quad y \quad v(x, y) = \frac{y}{1 - \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

De aqui

$$v_x = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}(1 - \sqrt{x^2 + y^2})^2} \quad y \quad u_y = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}(1 - \sqrt{x^2 + y^2})^2}$$

y por tanto $v_x \neq -u_y$. Es decir, la función de transición T no verifica las ecuaciones de Cauchy Riemann, por lo cual no es holomorfa en $\phi(U_1 \cap U_2)$.

Nuestro interés es que podamos cubrir un espacio topológico X con cartas complejas compatibles. Esta idea se precisa en la siguiente definición.

Definición 1.1.2. *Un atlas complejo A sobre un espacio topológico X es una colección*

$$A = \{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}$$

de cartas complejas compatibles dos a dos tales que $X = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$.

De este modo se pueden establecer varios atlas sobre un mismo espacio topológico X , los cuales pueden determinar una misma estructura de acuerdo a la definición que sigue.

Definición 1.1.3. *Dos atlas complejos A y B sobre un espacio topológico X son equivalentes si toda carta de A es compatible con toda carta de B .*

Según esta definición podemos afirmar que dos atlas complejos sobre un mismo espacio topológico X son equivalentes si y solo si, su unión es de nuevo un atlas complejo.

Por otra parte, considerando el conjunto de atlas sobre un espacio topológico X y la **Observación 1.1.1**, podemos verificar que la relación “ser equivalente” es una relación de equivalencia en el conjunto. Es claro que es reflexiva y simétrica, veamos que es transitiva.

Sean $A = \{\phi_\alpha : A_\alpha \rightarrow U_\alpha; \alpha \in I\}$, $B = \{\psi_\beta : B_\beta \rightarrow V_\beta; \beta \in J\}$ y $C = \{\varphi_\gamma : C_\gamma \rightarrow W_\gamma; \gamma \in K\}$ atlas complejos sobre X tales que A es equivalente con B y B es equivalente con C , $\phi : A_1 \rightarrow U_1$ y $\varphi : C_1 \rightarrow W_1$ cartas de A y C respectivamente, con $A_1 \cap C_1 \neq \emptyset$. Como B es un atlas sobre X entonces

$$X = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \quad y \quad A_1 \cap C_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

Luego $A_1 \cap C_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_1 \cap C_1) \cap B_i$ y

$$\phi(A_1 \cap C_1) = \phi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_1 \cap C_1) \cap B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \phi(A_1 \cap C_1 \cap B_i).$$

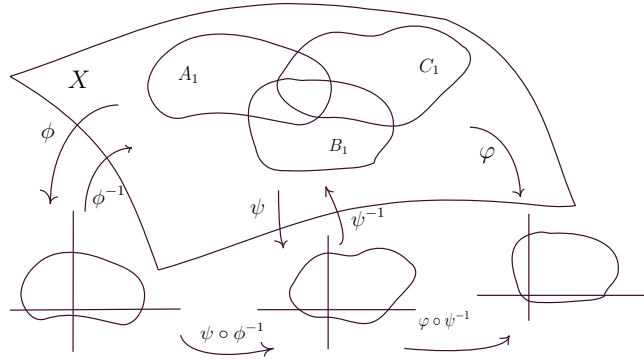
Así tenemos que si $\varphi \circ \phi^{-1}$ es holomorfa en cada $\phi(A_1 \cap C_1 \cap B_i)$, $\varphi \circ \phi^{-1}$ es holomorfa en $\phi(A_1 \cap C_1)$.

Ahora, para cada i la función

$$\varphi \circ \phi^{-1} : \phi(A_1 \cap C_1 \cap B_i) \rightarrow \varphi(A_1 \cap C_1 \cap B_i)$$

es holomorfa ya que

$$\varphi \circ \phi^{-1} = (\varphi \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \phi^{-1})$$



y por hipótesis $\varphi \circ \psi^{-1}$ es holomorfa ($\varphi \in A, \psi_i \in B$) al igual que $\psi \circ \phi^{-1}$ ($\psi_i \in B, \phi \in C$).

Como φ y ϕ son cartas arbitrarias, concluimos que A y C son equivalentes.

Ahora, considerando el conjunto de atlas sobre X y la relación de orden parcial dada por la contención, el Lema de Zorn garantiza que todo atlas está contenido en un atlas maximal y de este hecho se concluye que dos atlas son equivalentes si y solo si están contenidos en el mismo atlas maximal. Así cada atlas maximal representa la clase de equivalencia de todos los atlas contenidos en él y cada representante de una clase de equivalencia determina un atlas maximal.

Ahora definamos lo que es una estructura compleja.

Definición 1.1.4. *Una estructura compleja sobre un espacio topológico X es un atlas maximal sobre X , o equivalentemente, una clase de equivalencia de atlas complejos sobre X .*

En la práctica, para establecer una estructura compleja, no nos preocuparemos por encontrar un atlas maximal, será suficiente con exhibir un atlas para determinar una estructura compleja

en un espacio topológico X .

Con estos conceptos previos, definiremos ahora lo que es una superficie de Riemann, un concepto fundamental para el desarrollo de este trabajo.

Definición 1.1.5. (*Superficie de Riemann*). Una superficie de Riemann X es un espacio topológico conexo, Hausdorff y segundo contable que admite una estructura compleja.

Observación 1.1.2. Toda superficie de Riemann es una superficie orientable, dado que en una superficie de Riemann cualquier función de transición tiene jacobiano positivo, pues se verifican las ecuaciones de Cauchy Riemann por ser holomorfa.

Ejemplo 1.1.2. El plano complejo es una superficie de Riemann. En este caso un atlas está dado por la función identidad en cada abierto. Así mismo, cada abierto del plano complejo es una superficie de Riemann si se considera la topología inducida de \mathbb{C} y la restricción de la función identidad en cada caso.

Ejemplo 1.1.3. El plano complejo extendido $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es una superficie de Riemann. En este caso las cartas $\phi_1 : \hat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por la identidad y $\phi_2 : \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\phi_2(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{si } z \neq \infty \\ 0 & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

forman un atlas, ya que la función de transición

$$\begin{aligned} \phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ z &\mapsto \frac{1}{z} \end{aligned}$$

es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Ejemplo 1.1.4. La esfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ es conexa ya que el hemisferio superior es la imagen continua del círculo $x^2 + y^2 \leq 1$ a través de la función $f_1(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y el hemisferio inferior a través de $f_2(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Estas partes conexas tienen en común el círculo $x^2 + y^2 = 1$, luego su unión es conexa.

S^2 es Hausdorff por ser subespacio de \mathbb{R}^3 que es Hausdorff. Además es segundo contable, teniendo en cuenta la topología inducida de \mathbb{R}^3 que es segundo contable.

Considerando las funciones Φ_1 y Φ_2 , dadas de la siguiente manera.

$\Phi_1 : S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por la proyección estereográfica desde $(0, 0, 1)$

$$\Phi_1(x, y, z) = \frac{x}{1-z} + i \frac{y}{1-z}$$

con inversa

$$\Phi_1^{-1}(w) = \frac{1}{1+|w|^2} (2\operatorname{Re}(w), 2\operatorname{Im}(w), |w|^2 - 1)$$

y $\Phi_2 : S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\} \rightarrow \mathbb{C}$, la proyección estereográfica desde $(0, 0, -1)$

$$\Phi_2(x, y, z) = \frac{x}{1+z} - i \frac{y}{1+z}$$

con inversa

$$\Phi_2^{-1}(w) = \frac{1}{1+|w|^2} (2\operatorname{Re}(w), -2\operatorname{Im}(w), 1 - |w|^2),$$

tenemos que estas cartas son compatibles, puesto que la composición

$$\begin{aligned} \Phi_1 \circ \Phi_2^{-1} : \Phi_2(S^2 \setminus \{(0, 0, \pm 1)\}) &\rightarrow \phi_1(S^2 \setminus \{(0, 0, \pm 1)\}) \\ w &\mapsto \frac{1}{w} \end{aligned}$$

es holomorfa en $\Phi_2(S^2 \setminus \{(0, 0, \pm 1)\}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Así Φ_1 y Φ_2 forman un atlas complejo sobre S^2 y por tanto S^2 es una superficie de Riemann.

Hasta ahora, partimos de un espacio topológico Hausdorff, conexo y segundo contable donde establecemos una estructura compleja, sin embargo podemos obtener una topología para el espacio a partir de un atlas dado.

Proposición 1.1.1. Sean $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un cubrimiento de X , $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ una biyección, donde V_α es un abierto de \mathbb{C} . Entonces la siguiente definición de abierto determina una topología para cada $U_\alpha : U \subseteq U_\alpha$ es abierto si y solo si $\phi_\alpha(U)$ es abierto en V_α .

Demostración. Dado U_α , es claro que \emptyset es un abierto y U_α lo es por la biyectividad de ϕ_α , $\phi_\alpha(U_\alpha) = V_\alpha$ es abierto en \mathbb{C} .

Sea $\{W_\beta\}_{\beta \in J}$ una colección de abiertos en U_α . Como $\phi_\alpha(\bigcup_{\beta \in J} W_\beta) = \bigcup_{\beta \in J} \phi_\alpha(W_\beta)$ y cada $\phi_\alpha(W_\beta)$ es abierto en \mathbb{C} , se tiene que $\bigcup_{\beta \in J} W_\beta$ es abierto en U_α .

Ahora, sea $\{W_i\}_{i=1}^n$ una colección finita de abiertos en U_α .

Por la inyectividad de ϕ_α se tiene $\phi_\alpha\left(\bigcap_{i=1}^n W_i\right) = \bigcap_{i=1}^n \phi_\alpha(W_i)$ lo cual es un abierto en \mathbb{C} y por

tanto $\bigcap_{i=1}^n W_i$ es un abierto en U_α . ■

De este modo podemos dotar a X de una topología definiendo abierto como sigue.

Definición 1.1.6. U es abierto en X si y solo si $U \cap U_\alpha$ es un abierto en U_α para todo $\alpha \in I$, equivalentemente, U es un abierto en X si y solo si $\phi_\alpha(U \cap U_\alpha)$ es un abierto en V_α para cada $\alpha \in I$.

Notemos que los U_α son abiertos y el conjunto $A = \{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}$ es un atlas complejo sobre X . Además si este cubrimiento es contable X será segundo contable.

Observación 1.1.3. Teniendo en cuenta lo anterior podemos establecer en un conjunto X una estructura de superficie de Riemann sin tener previamente una topología; partiendo de un cubrimiento contable $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$, una colección de biyecciones $A = \{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}$ donde V_α es un abierto en \mathbb{C} y $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ es un abierto de V_α para cada $\alpha, \beta \in I$, (esto garantiza que las ϕ_α son cartas complejas) verificando la compatibilidad de las cartas dos a dos para establecer un atlas sobre X y por último comprobando que X sea Hausdorff y conexo.

Ejemplo 1.1.5. Línea proyectiva compleja.

La línea proyectiva compleja \mathbb{CP}^1 es el conjunto de clases de equivalencia dadas por la siguiente relación en $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$$(z_1, w_1) \sim (z_2, w_2) \Leftrightarrow (z_1, w_1) = \lambda(z_2, w_2), \text{ para algún } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

En este caso, cada clase de equivalencia es el conjunto

$$[x : y] = \{(\lambda x, \lambda y) : (x, y) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}.$$

Verifiquemos que \mathbb{CP}^1 es una superficie de Riemann teniendo en cuenta la observación anterior.

Sean

$$U_0 = \{[z : w] \in \mathbb{CP}^1 : z \neq 0\} \text{ y } U_1 = \{[z : w] \in \mathbb{CP}^1 : w \neq 0\},$$

notemos que $(\mathbb{CP}^1 = U_0 \cup U_1)$. Además, considerando las funciones

$$\varphi_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{C} \text{ y } \varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$$

dadas por:

$$\varphi_0([z : w]) = \frac{w}{z} \text{ y } \varphi_1([z : w]) = \frac{z}{w}$$

las cuales son biyectivas con inversas

$$\varphi_0^{-1}(x) = [1 : x] \quad \text{y} \quad \varphi_1^{-1}(x) = [x : 1].$$

Tenemos que $\varphi_0(U_0 \cap U_1) = \varphi_1(U_0 \cap U_1) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, de donde U_0 y U_1 son abiertos en \mathbb{CP}^1 por la **Definición 1.1.6**. La función de transición

$$\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1} : \varphi_0(U_0 \cap U_1) \rightarrow \varphi_1(U_0 \cap U_1)$$

definida por

$$\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}(x) = \varphi_0([1 : x]) = \frac{1}{x}$$

es holomorfa ya que $0 \notin \varphi_0(U_0 \cap U_1)$. Así, las cartas son compatibles y el conjunto formado por estas dos cartas es un atlas complejo sobre \mathbb{CP}^1 .

Por otra parte, como U_0 y U_1 son conexos por ser homeomorfos a \mathbb{C} y tienen intersección no vacía, su unión es un conexo. Es decir $\mathbb{CP}^1 = U_0 \cup U_1$ es conexo.

Ahora, sean $p, q \in \mathbb{CP}^1$ con $p \neq q$. Si $p, q \in U_i$, $i = 0, 1$ podemos encontrar entornos disjuntos de p y q ya que U_i es Hausdorff. Supongamos entonces que $p \in U_0 \setminus U_1$ y $q \in U_1 \setminus U_0$, luego $p = [1 : 0]$, $q = [0 : 1]$ y así, $\varphi_0^{-1}(D)$ y $\varphi_1^{-1}(D)$ son entornos de p y q respectivamente, donde $D = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ (D es el disco unidad). Veamos que $\varphi_0^{-1}(D) \cap \varphi_1^{-1}(D) = \emptyset$.

Supongamos que existe $[s, r] \in \varphi_0^{-1}(D) \cap \varphi_1^{-1}(D)$, entonces $\varphi_0([s, r]) \in D$ y $\varphi_1([s, r]) \in D$, lo cual lleva a la contradicción $|r| < |s|$ y $|s| < |r|$. Por tanto \mathbb{CP}^1 es Hausdorff.

Además, dado $[x : y] \in \mathbb{CP}^1$, si $|x| = \max(|x|, |y|)$, $\varphi_0([x : y]) \in \bar{D}$ donde \bar{D} es la adherencia de D , en el otro caso $\varphi_1([x, y]) \in \bar{D}$. Esto es $\mathbb{CP}^1 = \varphi_0^{-1}(\bar{D}) \cup \varphi_1^{-1}(\bar{D})$ y por la compacidad de $\varphi_i^{-1}(\bar{D})$, $i = 0, 1$, \mathbb{CP}^1 es compacto. Por tanto \mathbb{CP}^1 es una superficie de Riemann compacta.

Ejemplo 1.1.6. Curva plana suave afín.

Definición 1.1.7.

- i) Una curva plana afín es el lugar geométrico X de los ceros en \mathbb{C}^2 de un polinomio $f(z, w) \in \mathbb{C}[z, w]$.
- ii) El polinomio $f(z, w)$ es no singular en un punto $p \in X$ si $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$ o bien $\frac{\partial f}{\partial w}(p) \neq 0$. Decimos que X asociado a f , es no singular en p si f es no singular en p y X es suave (o no singular) si es no singular en cada uno de sus puntos.

Para ver que una curva suave afín tiene estructura de superficie de Riemann, estableceremos cartas complejas haciendo uso del siguiente teorema.

Teorema 1.1.1. (Teorema de la función implícita). Sean $f(z, w) \in \mathbb{C}[z, w]$ un polinomio, $X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : f(z, w) = 0\}$ y $p = (z_0, w_0)$ un punto de X . Si $\frac{\partial f}{\partial w}(p) \neq 0$ entonces existe una función holomorfa $g(z)$ definida en un entorno de z_0 tal que $w = g(z)$ en un entorno de p y además $g' = -\frac{\partial f}{\partial z} / \frac{\partial f}{\partial w}$ en un entorno de z_0 .

Sea X la curva suave afín asociada al polinomio $f(z, w)$ y $p = (z_0, w_0) \in X$. Entonces $\frac{\partial f}{\partial w}(p) \neq 0$ o bien $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$.

- Si $\frac{\partial f}{\partial w}(p) \neq 0$, por el teorema de la función implícita, en un entorno U_p de p , X luce como la gráfica de una función holomorfa g , es decir $U_p = \{(z, g(z)) : z \in V(z_0)\}$.

Sea $\phi_z : U_p \rightarrow V$ dada por $\phi_z(z, w) = z$ con inversa $\phi_z^{-1}(x) = (x, g(x))$. Tenemos que ϕ_z es un homeomorfismo por ser una proyección.

- Si p es tal que $\frac{\partial f}{\partial w}(p) = 0$ entonces $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$ (X es no singular) y de nuevo por el teorema de la función implícita, en un entorno U_p de p podemos establecer un homeomorfismo ϕ_w dado por la proyección en la segunda componente.

Es claro que estos abiertos U_p cubren a X , verifiquemos ahora la compatibilidad de las cartas.

Sean $U_p(p), U_q(q)$ entornos tales que $U_p \cap U_q \neq \emptyset$. Consideremos los siguientes casos:

- Si ϕ_p y ϕ_q están dadas por la proyección en la misma componente, la función de transición es la identidad.
- En este caso tomaremos cartas dadas por proyecciones distintas.

Sean $\phi_p(z, w) = z$ y $\phi_q(z, w) = w$. Entonces $\phi_p \circ \phi_q^{-1}(x) = \phi_p(g(x), x) = g(x)$ la cual es holomorfa por el teorema de la función implícita.

De ahí que en cualquier caso la función de transición es holomorfa. Además X es Hausdorff y segundo contable por ser subespacio de \mathbb{C}^2 y es conexo cuando f es irreducible (Ver [8]) Por tanto, si f es un polinomio no singular e irreducible, la curva suave afín X asociada a f es una superficie de Riemann.

Ejemplos más interesantes de superficies de Riemann compactas son definidos en espacios proyectivos. Por ello, a continuación recordaremos la construcción del plano complejo proyectivo \mathbb{CP}^2 y algunos aspectos importantes.

En $\mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ se define la relación de equivalencia

$$(x, y, z) \sim (a, b, c) \Leftrightarrow (a, b, c) = \lambda(x, y, z) \text{ para algún } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

donde $(x, y, z), (a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

Así, la clase de equivalencia de un punto $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ es el conjunto

$$[x : y : z] = \{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} : (a, b, c) \sim (x, y, z)\}.$$

\mathbb{CP}^2 es el conjunto de todas las clases de equivalencia.

Usando la proyección canónica

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} &\rightarrow \mathbb{CP}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto [x : y : z] \end{aligned}$$

dotamos a \mathbb{CP}^2 de una topología con la siguiente definición de abierto.

$U \subseteq \mathbb{CP}^2$ es abierto si y solo si $\pi^{-1}(U)$ es abierto en $\mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Así, π es continua, abierta y \mathbb{CP}^2 es Hausdorff. Además, es la unión de los abiertos

$$U_0 = \{[x : y : z] : x \neq 0\}, \quad U_1 = \{[x : y : z] : y \neq 0\}, \quad U_2 = \{[x : y : z] : z \neq 0\},$$

los cuales son homeomorfos a \mathbb{C}^2 . En efecto, existen los siguientes homeomorfismos:

- En U_0 , $\phi_0([x : y : z]) = \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$, con inversa $\phi_0^{-1}(a, b) = [1 : a : b]$.
- En U_1 , $\phi_1([x : y : z]) = \left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right)$, con inversa $\phi_1^{-1}(a, b) = [a : 1 : b]$.
- En U_2 , $\phi_2([x : y : z]) = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$, con inversa $\phi_2^{-1}(a, b) = [a : b : 1]$.

Por otra parte, $\mathbb{CP}^2 = \phi_0^{-1}(K) \cup \phi_1^{-1}(K) \cup \phi_2^{-1}(K)$, donde K es el compacto

$$K = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : \|z\| \leq 1 \wedge \|w\| \leq 1\}.$$

En efecto, sea $[x : y : z] \in \mathbb{CP}^2$

- i) Si $|x| = \max\{|x|, |y|, |z|\}$ entonces

$$\phi_0([x : y : z]) = \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) \in K,$$

ya que $\left|\frac{y}{x}\right| \leq 1$ y $\left|\frac{z}{x}\right| \leq 1$. Es decir, $[x : y : z] \in \phi_0^{-1}(K)$.

ii) Si $|y| = \max\{|x|, |y|, |z|\}$, $[x : y : z] \in \phi_1^{-1}(K)$.

iii) Si $|z| = \max\{|x|, |y|, |z|\}$, $[x : y : z] \in \phi_2^{-1}(K)$.

Luego \mathbb{CP}^2 es compacto.

Ahora, de modo similar a la curva afín, dotaremos de estructura compleja al lugar geométrico de las raíces de un polinomio, esta vez con variables en \mathbb{CP}^2 .

Dado un polinomio $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$, el grado de cada término es la suma de los exponentes de sus variables. Un polinomio $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$ se dice homogéneo si cada término tiene el mismo grado d y decimos que F es de grado d . Por ejemplo, el grado de $F(x, y, z) = xyz - 5z^3 + 7xy^2$ es 3.

Definición 1.1.8. *Un polinomio homogéneo $F(x, y, z) \in \mathbb{C}[x, y, z]$ es no singular si el sistema*

$$F = \partial F/\partial x = \partial F/\partial y = \partial F/\partial z = 0$$

no tiene solución en el plano proyectivo \mathbb{CP}^2 o equivalentemente en \mathbb{C}^3 .

Dado un polinomio homogéneo $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$ y $[x : y : z] \in \mathbb{CP}^2$ tenemos que

$$F(\lambda[x : y : z]) = \lambda^d F([x : y : z]),$$

luego F solo está bien definido en $X = \{[x : y : z] \in \mathbb{CP}^2 : F([x : y : z]) = 0\}$.

Por otro lado

$$\pi^{-1}(X) = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} : F(x, y, z) = 0\} = F^{-1}(\{0\}).$$

Luego X es cerrado por la continuidad de F .

Ejemplo 1.1.7. *Curva proyectiva suave.*

Sea $F(x, y, z) \in \mathbb{C}[x : y : z]$ un polinomio homogéneo, no singular de grado d . Entonces

$$X = \{[x : y : z] \in \mathbb{CP}^2 : F([x : y : z]) = 0\}$$

es una curva proyectiva suave. Notemos que $X_i = X \cap U_i, i = 0, 1, 2$ es una curva afín en \mathbb{C}^2 , en efecto,

$$\begin{aligned} X_0 &= \{[x : y : z] \in U_0 : F([x : y : z]) = 0\} \\ &\cong \left\{ \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x} \right) \in \mathbb{C}^2 : F \left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x} \right) := f \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x} \right) = 0 \right\} \\ &= \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 : f(a, b) = 0\}. \end{aligned}$$

Del mismo modo X_1 y X_2 son curvas afines.

Notemos además que si f es irreducible y no singular, $X_i, i = 0, 1, 2$ es una superficie de Riemann.

Ahora, veamos que la curva proyectiva X asociada a F tiene una estructura de superficie de Riemann siempre que F sea no singular. Para ello haremos uso de los siguientes lemas:

Lema 1.1.1. Sea $F(x, y, z) \in \mathbb{C}[x, y, z]$ un polinomio homogéneo de grado d . Entonces F es no singular si y solo si cada X_i es una curva plana suave afín en \mathbb{C}^2 .

Demostración. Ver [6, p.15].

Lema 1.1.2. Todo polinomio homogéneo no singular en $\mathbb{C}[x, y, z]$ es irreducible.

Así, dado un polinomio homogéneo no singular $F(x, y, z)$ y X el lugar geométrico de sus raíces en $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, por los Lemas anteriores, cada X_i es una curva suave afín cuyas cartas están dadas por las proyecciones como vimos anteriormente. Luego una carta en un punto $[x_0 : y_0 : z_0] \in X_0$ cuando $\frac{\partial f}{\partial b}(a_0, b_0) \neq 0$, es

$$\begin{aligned} \phi_0 : X_0 &\rightarrow \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} \\ [x : y : z] &\mapsto \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x} \right) \mapsto \frac{y}{x}, \end{aligned}$$

con inversa

$$\begin{aligned} \phi_0^{-1} : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}^2 \rightarrow X_0 \\ w &\mapsto (w, g(w)) \mapsto [1 : w : g(w)], \end{aligned}$$

donde $F[1 : a : b] = f(a, b)$ y g es la función holomorfa que garantiza el teorema de la función implícita.

Cuando $\frac{\partial f}{\partial a}(a_0, b_0) \neq 0$, la aplicación

$$\begin{aligned}\phi_1 : X_1 &\rightarrow \mathbb{C} \\ [x : y : z] &\mapsto \frac{y}{x},\end{aligned}$$

con inversa

$$\begin{aligned}\phi_1^{-1} : \mathbb{C} &\rightarrow X_1 \\ w &\mapsto [1 : g(w) : w]\end{aligned}$$

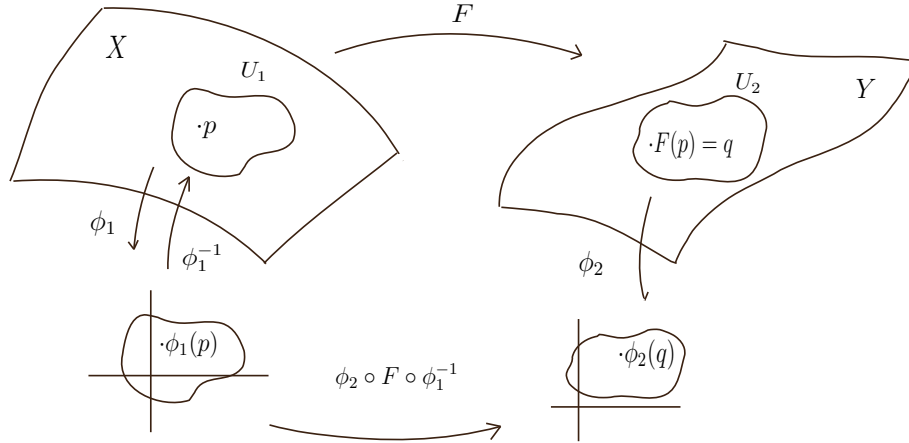
es una carta en un entorno de $[x_0 : y_0 : z_0]$. Análogamente se establecen las cartas en X_1 y X_2 . Como los X_i son superficies de Riemann, cualquier par de cartas en un mismo X_i son compatibles. Mas aún, sean $p = [x_0 : y_0 : z_0] \in U_1 \cap U_2$, $\phi_2([x : y : z]) = \frac{x}{y}$ una carta en un entorno de p en X_1 y ϕ_1 , como antes, una carta en un entorno de p en X_0 . Entonces

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(w) = \phi_2([1 : g(w) : w]) = \frac{1}{g(w)},$$

la cual es holomorfa ya que en un entorno de p , $g(z_0) = y_0 \neq 0$ ($p \in X_1$). De la misma manera se verifica la compatibilidad entre las otras posibles parejas. Además X es Hausdorff por ser un subespacio de \mathbb{CP}^2 y la conexidad se tiene por la conexidad de los X_i . Por tanto, la curva plana proyectiva asociada a un polinomio homogéneo no singular F es una superficie de Riemann compacta.

1.2. Funciones Holomorfas entre Superficies de Riemann

Una vez conocidos los objetos, es natural interesarse por la relación entre ellos. En esta sección estudiaremos algunos resultados sobre funciones entre superficies de Riemann.



El gráfico muestra que dada una función F definida entre las superficies X y Y , la composición $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ es una función de variable compleja, donde ϕ_1 y ϕ_2 son cartas en X y Y respectivamente, lo cual motiva la siguiente definición.

Definición 1.2.1. Una función $F: X \rightarrow Y$ entre superficies de Riemann, es holomorfa en un punto $p \in X$ si existen cartas $\phi_1: U_1 \rightarrow V_1$ en X , con $p \in U_1$ y $\phi_2: U_2 \rightarrow V_2$ en Y , con $F(p) \in U_2$ tales que $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ es holomorfa en $\phi(p)$. Decimos que F es holomorfa en un abierto $W \subseteq X$ si lo es en cada punto de W . En particular, se dice que F es holomorfa si lo es en todo X .

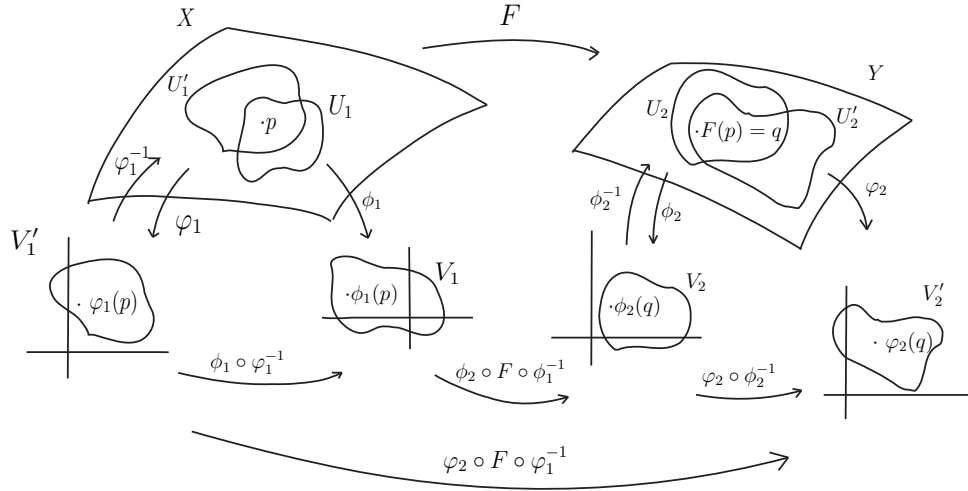
La definición anterior es independiente de las cartas $\phi_1: U_1 \rightarrow V_1$ y $\phi_2: U_2 \rightarrow V_2$ que se exhiban para mostrar que una función dada es holomorfa en un punto $p \in X$. Esta independencia está garantizada por el siguiente lema.

Lema 1.2.1. Sean $F: X \rightarrow Y$ y $G: Y \rightarrow Z$ funciones entre superficies de Riemann.

- i) F es holomorfa en p si y solo si para todo par de cartas $\phi_1: U_1 \rightarrow V_1$ en X con $p \in U_1$ y $\phi_2: U_2 \rightarrow V_2$ en Y con $F(p) \in U_2$ se tiene que $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ es holomorfa en $\phi(p)$.
- ii) Si F es holomorfa en $p \in X$ y G es holomorfa en $F(p) \in Y$, entonces la composición $G \circ F: X \rightarrow Z$ es una función holomorfa en $p \in X$.

Demostración.

i)



Supongamos que F es holomorfa en $p \in X$. Luego, existen cartas $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ con $p \in U_1$ y $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ con $F(p) \in U_2$, tales que $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ es holomorfa en $\phi_1(p)$. Sean $\varphi_1 : U'_1 \rightarrow V'_1$ con $p \in U'_1$ y $\varphi_2 : U'_2 \rightarrow V'_2$ con $F(p) = q \in U'_2$ cartas en X y Y . Entonces $\phi_1 \circ \varphi_1^{-1}$ es holomorfa en $\varphi_1(p) \in \varphi_1(U_1 \cap U'_1)$ y como $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ es holomorfa en $\phi_1(p) = (\phi_1 \circ \varphi_1^{-1})(\varphi_1(p))$, se tiene que $(\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}) \circ (\phi_1 \circ \varphi_1^{-1})$ es holomorfa en $\varphi_1(p)$. Además

$$(\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}) \circ (\phi_1 \circ \varphi_1^{-1})(\varphi_1(p)) = \phi_2(q) \in \phi_2(U_2 \cap U'_2).$$

Como $\varphi_2 \circ \phi_2^{-1}$ es holomorfa en $\phi_2(q)$, entonces

$$\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1} = (\varphi_2 \circ \phi_2^{-1}) \circ (\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}) \circ (\phi_1 \circ \varphi_1^{-1})$$

es holomorfa en un entorno de $\varphi_1(p)$.

La otra implicación es inmediata.

ii) Sean $p \in X$, $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ una carta en X con $p \in U_1$ y $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ una carta en Y con $q = F(p) \in U_2$ tales que $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ es holomorfa en $\phi_1(p)$.

Como G es holomorfa en Y , por (a) existe $\phi_3 : U_3 \rightarrow V_3$ en Z con $G(q) \in U_3$ tal que $\phi_3 \circ G \circ \phi_2^{-1}$ es holomorfa en $\phi_2(q)$. Luego

$$\phi_3 \circ (G \circ F) \circ \phi_1^{-1} = (\phi_3 \circ G \circ \phi_2^{-1}) \circ (\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1})$$

es holomorfa en $\phi_1(p)$ ya que $\phi_3 \circ G \circ \phi_2^{-1}$ es holomorfa en

$$\phi_2(q) = \phi_2(F(p)) = (\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1})(\phi_1(p)).$$

Por tanto $G \circ F$ es holomorfa en p . ■

Observación 1.2.1. *En el mismo sentido de la Definición 1.2.1 diremos que una función F entre superficies de Riemann es continua o \mathbb{C}^∞ . Así, tenemos que si F es una función holomorfa entre superficies de Riemann, entonces F es continua y \mathbb{C}^∞ por el resultado análogo en funciones de variable compleja.*

Dos superficies de Riemann pueden tener la misma estructura, de acuerdo a la siguiente definición.

Definición 1.2.2.

- i) Un isomorfismo (o biholomorfismo) entre las superficies de Riemann X y Y es una función $F : X \rightarrow Y$ holomorfa y biyectiva.*
- ii) Dos superficies X y Y son isomorfas si y solo si existe un isomorfismo entre ellas.*
- iii) Un isomorfismo $F : X \rightarrow X$ de una superficie X en si misma es llamado un automorfismo de X .*

Observación 1.2.2.

- *Si F es una función holomorfa e inyectiva entre superficies de Riemann entonces F es un isomorfismo entre X y $F(X)$.*
- *Si F es una función holomorfa y biyectiva entre superficies de Riemann, entonces F^{-1} es holomorfa. Esto se desprende del hecho de que una aplicación de variable compleja holomorfa y biyectiva tiene inversa holomorfa.*

Ejemplo 1.2.1. $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ y $\hat{\mathbb{C}}$ son superficies de Riemann isomorfas.

En efecto, la aplicación

$$F([z : w]) = \begin{cases} \frac{z}{w} & , [z : w] \neq [1 : 0] \\ \infty & , [z : w] = [1 : 0] \end{cases}$$

es un isomorfismo.

- Dado $w \in \hat{\mathbb{C}}$, si $w = \infty$ existe $[1 : 0] \in \mathbb{CP}^1$ tal que $F([1 : 0]) = \infty$ y si $w \neq \infty$ existe $[w : 1] \in \mathbb{CP}^1$ tal que $F([w : 1]) = w$. Luego F es sobreyectiva.
- Sean $[a : b] \neq [1 : 0]$ y $[c : d] \neq [1 : 0]$ tales que $F([a : b]) = F([c : d])$. Entonces

$$\begin{aligned} F([a : b]) &= F([c : d]) \\ \frac{a}{b} &= \frac{c}{d} \\ ad &= cd, \end{aligned}$$

de donde $[a : b] = [c : d]$ y así F es inyectiva.

- Veamos ahora que F es holomorfa en \mathbb{CP}^1 .

Sea $p = [z_0 : w_0] \in \mathbb{CP}^1$, si $p \neq [1 : 0]$, entonces $w_0 \neq 0$ y tomando la carta $\varphi_1([x : y]) = \frac{x}{y}$ en un entorno de p con inversa $\varphi_1^{-1}(w) = [w : 1]$ y la carta $\phi_1(x) = x$ en un entorno de $F(p) \in \mathbb{C}$ tenemos que

$$\phi_1 \circ F \circ \varphi_1^{-1}(z) = \phi_1(F[z : 1]) = \phi_1(z) = z.$$

Luego F es holomorfa en p para este caso.

Si $p = [1 : 0]$, $\varphi_0([x : y]) = \frac{y}{x}$ con inversa $\varphi_0^{-1}(w) = [1 : w]$ es una carta en p y $\phi_0(z) = \frac{1}{z}$ es una carta en un entorno de $F(p) = \infty$. Luego

$$\phi_0 \circ F \circ \varphi_0^{-1}(w) = \phi_0(F[1 : w]) = \phi_0\left(\frac{1}{w}\right) = w,$$

F es holomorfa en \mathbb{CP}^1 y por tanto un isomorfismo entre \mathbb{CP}^1 y $\hat{\mathbb{C}}$.

Ejemplo 1.2.2. S^2 y \mathbb{CP}^1 son isomorfos. La aplicación $F : \mathbb{CP}^1 \rightarrow S^2$ dada por

$$[z : w] \mapsto \frac{1}{|z|^2 + |w|^2} (2\operatorname{Re}(w\bar{z}), 2\operatorname{Im}(w\bar{z}), |w|^2 - |z|^2)$$

es un isomorfismo entre estas superficies. Para verificar esto debemos tener en cuenta que φ_0 y φ_1 dadas como en el ejemplo anterior forman un atlas complejo sobre \mathbb{CP}^1 , mientras que Φ_1 y Φ_2 como en el **Ejemplo 1.1.4** forman un atlas complejo sobre S^2 .

Ahora, dado $p = [z_0 : w_0] \in \mathbb{CP}^1$, si $z_0 \neq 0$ ($p \in U_0$), φ_0 es una carta en un entorno de p ,

$F(p) \neq (0, 0, 1)$ y Φ_1 es una carta en un entorno de $F(p)$. Además

$$\begin{aligned}\Phi_1 \circ F \circ \varphi_0^{-1}(w) &= \Phi_1(F[1 : w]) \\ &= \Phi_1\left(\frac{2\operatorname{Re}(w)}{1 + |w|^2}, \frac{2\operatorname{Im}(w)}{1 + |w|^2}, \frac{|w|^2 - 1}{1 + |w|^2}\right) \\ &= \operatorname{Re}(w) + i\operatorname{Im}(w) \\ &= w.\end{aligned}$$

Si $z_0 = 0$, $p = [0 : 1]$, φ_1 es una carta en un entorno de p y $F(p) = (0, 0, 1)$. Luego Φ_2 es una carta en un entorno de $F(p)$ y

$$\begin{aligned}\Phi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1}(w) &= \Phi_2(F[w : 1]) \\ &= \Phi_2\left(\frac{2\operatorname{Re}(\bar{w})}{1 + |w|^2}, \frac{2\operatorname{Im}(\bar{w})}{1 + |w|^2}, \frac{1 - |w|^2}{1 + |w|^2}\right) \\ &= \operatorname{Re}(\bar{w}) - i\operatorname{Im}(\bar{w}) \\ &= w.\end{aligned}$$

Así, F es holomorfa en \mathbb{CP}^1 . Notemos además que la función inversa de F esta dada por

$$F^{-1}(x, y, z) = \begin{cases} \left[\frac{x}{1+z} - i\frac{y}{1+z} : 1 \right] & , (x, y, z) \neq (0, 0, -1) \\ [1 : 0] & , (x, y, z) = (0, 0, -1) \end{cases}$$

En conclusión tenemos que \mathbb{CP}^1 , S^2 y $\hat{\mathbb{C}}$ son superficies de Riemann isomorfas.

Observación 1.2.3. Al conjunto de automorfismos de una superficie de Riemann X lo denotaremos por $\operatorname{Aut}(X)$. Este conjunto tiene estructura de grupo con la composición de funciones.

Ejemplo 1.2.3. Los automorfismos de \mathbb{C} como superficie de Riemann, son de la forma

$$F(z) = az + b \quad a, b \in \mathbb{C} \text{ con } a \neq 0.$$

Ejemplo 1.2.4. Los automorfismos de $\hat{\mathbb{C}}$ estan dados por

$$F(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{donde } ad - bc \neq 0.$$

Estas funciones son las transformaciones de Möbius.

Las funciones entre superficies de Riemann tienen propiedades análogas a las que tienen las funciones de variable compleja. Revisemos algunos resultados importantes.

Teorema 1.2.1. (Teorema de la función abierta) Sea $F : X \rightarrow Y$ una función holomorfa no constante entre superficies de Riemann. Entonces F es una función abierta.

Demostración. Sean A un abierto en X , $p \in A$, $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ una carta en X con $p \in U$ y $\varphi : V \rightarrow \mathbb{C}$ una carta en Y con $q = F(p) \in V$. Por la continuidad de F existe un entorno $U_1 \subset U$ de p tal que $F(U_1) \subset V$.

Ahora, si consideramos el abierto conexo $W = U_1 \cap A$, tenemos que $\phi(W)$ es un abierto conexo. Así, podemos usar el teorema de la aplicación abierta para una función de variable compleja

$$\varphi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(W) \rightarrow \mathbb{C}$$

y se sigue que $\varphi(F(\phi^{-1}(\phi(W)))) = \varphi(F(W))$ es un abierto del plano complejo, lo cual implica que $\varphi^{-1}(\varphi(F(W))) = F(W)$ es un entorno de q contenido en $F(A)$ y por tanto $F(A)$ es un abierto en Y . ■

Teorema 1.2.2. (Teorema de la Identidad) Sean $F, G : X \rightarrow Y$ funciones holomorfas entre superficies de Riemann. Si $F = G$ en un subconjunto S de X con un punto de acumulación en X , entonces $F = G$.

Demostración. Consideremos el conjunto

$$A = \{x \in X : F = G \text{ en un entorno de } x\}.$$

Como F y G son continuas y Y es Hausdorff, entonces A es cerrado.

Por otro lado, de la definición de A se sigue que dado $p \in A$, entonces existe un entorno U de p donde F y G coinciden. Luego, $U \subset A$ y por tanto A es abierto en X . Así, por la conexidad de X es suficiente probar que $A \neq \emptyset$ para obtener el resultado que buscamos.

Por hipótesis S tiene un punto de acumulación $p \in X$, es decir, existe una sucesión $\{x_n\} \subset S$ de puntos distintos tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$. Luego, por la continuidad de F y G

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (F - G)(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} G(x_n) = F(p) - G(p)$$

Así, $F(p) = G(p) = q$.

Ahora, sean $\phi_1 : U \rightarrow \mathbb{C}$ y $\phi_2 : V \rightarrow \mathbb{C}$ cartas en X y Y respectivamente con $p \in U$ y $q \in V$. De

nuevo por la continuidad de F y G , existe un entorno $U_1 \subset U$ de p tal que $F(U_1), G(U_1) \subset V$.
Luego

$$\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1} : \phi_1^{-1}(U_1) \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{y} \quad \phi_2 \circ G \circ \phi_1^{-1} : \phi_1^{-1}(U_1) \rightarrow \mathbb{C}$$

son funciones holomorfas. Además $\phi_1(p)$ es un punto de acumulación de

$$B = \{z \in \phi_1(U_1) : \phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}(z) = \phi_2 \circ G \circ \phi_1^{-1}(z)\}$$

ya que $\{\phi_1(x_n)\} \subset B$ converge a $\phi_1(p)$.

Por el teorema de la identidad para funciones de variable compleja tenemos que

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(z) = \psi \circ G \circ \varphi^{-1}(z) \text{ para todo } z \in \phi(U_1),$$

es decir, $F(x) = G(x)$ para todo $x \in U_1$. Por tanto $p \in A$ y así $A \neq \emptyset$. ■

Teorema 1.2.3. *Sea X una superficie de Riemann compacta y sea $F : X \rightarrow Y$ una función holomorfa no constante. Entonces Y es compacto y F es sobreyectiva.*

Demostración. Dado que X es compacto y abierto, entonces por la continuidad de F y el **Teorema 1.2.1**, $F(X)$ es también compacto y abierto. Luego $F(X)$ es cerrado por ser compacto en un espacio topológico Hausdorff y de la conexidad de Y se sigue que $F(X) = Y$. ■

Teorema 1.2.4. (Carácter Discreto de las Imágenes Inversas) *Sea $F : X \rightarrow Y$ una función holomorfa no constante entre superficies de Riemann. Entonces para cada $q \in Y$, el conjunto $F^{-1}(\{q\})$ es un subconjunto discreto de X .*

Demostración. Sea $q \in Y$. Suponemos que existe $p \in X$ tal que $F(p) = q$ ya que en caso contrario $F^{-1}(q) = \emptyset$ y el resultado se tiene trivialmente.

Ahora, sean $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ una carta centrada en p y $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ una carta centrada en q . Entonces $h(z) = \phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}(z)$ es una función holomorfa en cero. Luego existe un entorno B de cero tal que $h(z) \neq 0$ para $z \in B \setminus \{0\}$. Entonces para cualquier $x \in \phi_1^{-1}(B)$ tal que $x \neq p$ tenemos $F(x) \neq q$ por la inyectividad de las cartas. Por tanto el conjunto $F^{-1}(\{q\})$ es discreto. ■

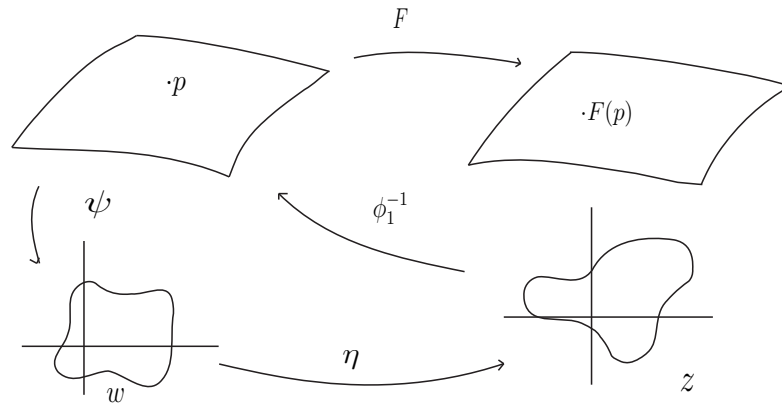
Corolario 1.2.1. *Sea $F : X \rightarrow Y$ una función holomorfa no constante entre superficies de Riemann con X compacto. Entonces para cada $q \in Y$, el conjunto $F^{-1}(\{q\})$ es finito.*

Teorema 1.2.5. (Teorema de la Forma Local) Sea $f : X \rightarrow Y$ una función holomorfa no constante definida en un punto $p \in X$. Entonces existe un único entero $m \geq 1$ tal que para toda carta $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ en Y centrada en $F(p)$, existe una carta $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ en X centrada en p tal que $\phi_2(F(\phi_1^{-1}(z))) = z^m$.

Demostración. Dada una carta $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ centrada en $q = F(p)$, existe una carta $\psi : U_1 \rightarrow V_1$ centrada en p tal que $T(w) = \phi_2 \circ F \circ \psi^{-1}$ es holomorfa y su desarrollo en serie de Taylor en un entorno de cero es de la forma

$$T(w) = \sum_{i=m}^{\infty} c_i w^i$$

con $c_m \neq 0$ y $m \geq 1$ ya que $T(0) = 0$. Así $T(w) = w^m h(w)$ donde h es una función holomorfa en un entorno de cero y $h(0) \neq 0$. Ahora, por teorema de la existencia de la raíz n -ésima, existe un entorno de cero y una función holomorfa g en dicho entorno tal que $h(w) = g(w)^m$ y así tenemos que $T(w) = \eta(w)^m$ donde $\eta(w) = wg(w)$ es una función holomorfa tal que $\eta'(0) \neq 0$. Entonces por el teorema de la función inversa, existe un entorno U_1 de cero tal que $\eta(w)$ es invertible y así la función $\phi_1 = \eta \circ \psi$ es una carta centrada en p .



Definiendo $z = \eta(w)$ como nueva coordenada tenemos que

$$\begin{aligned} \phi_2(F(\phi_1^{-1}(z))) &= \phi_2(F(\psi^{-1}(\eta^{-1}(z)))) \\ &= T(\eta^{-1}(z)) \\ &= T(w) \\ &= \eta(w)^m \\ &= z^m. \end{aligned}$$



Definición 1.2.3. Sea $F : X \rightarrow Y$ una función holomorfa no constante entre superficies de Riemann y $p \in X$. La multiplicidad o índice de ramificación de F en p es el entero m tal que existen cartas en entornos de p y $F(p)$ tales que F es localmente de la forma $z \mapsto z^m$. Notaremos la multiplicidad como $\text{Mult}_p(F)$.

Ejemplo 1.2.5. Sea $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ definida por

$$f(z) = \begin{cases} z^2 & \text{si } z \neq \infty \\ \infty & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

Dado $p \in \mathbb{C}$, veamos cual es la multiplicidad de f en p .

Como $p \neq \infty$, $f(p) = p^2 \neq \infty$ y las aplicaciones $\psi_1(z) = z - p$ y $\psi_2(z) = z - p^2$ son cartas centradas en p y $f(p)$ respectivamente. Así

$$\begin{aligned} \psi_2 \circ f \circ \psi_1^{-1}(z) &= \psi_2(f(z + p)) \\ &= (z + p)^2 - p^2 \\ &= z^2 + 2zp. \end{aligned}$$

de donde, $\text{Mult}_p(f) = 2$ si $p = 0$ y $\text{Mult}_p(f) = 1$ si $p \neq 0$.

En el caso $p = \infty$ una carta es $\phi_2(z) = \frac{1}{z}$ y tenemos

$$\phi_2 \circ f \circ \phi_2^{-1}(z) = \phi_2 \left(f \left(\frac{1}{z} \right) \right) = \phi_2 \left(\frac{1}{z^2} \right) = z^2.$$

Esto implica que $\text{Mult}_p(f) = 2$ si $p = \infty$.

Notemos que si una función holomorfa no constante entre superficies de Riemann tiene multiplicidad uno en un punto p , esta será inyectiva en un entorno de p . Serán de nuestro interés los puntos donde la multiplicidad de la función es mayor a uno, los cuales definiremos a continuación.

Definición 1.2.4. Sean $F : X \rightarrow Y$ una función holomorfa entre superficies de Riemann y $p \in X$. Llamaremos a p un punto de ramificación de F si $\text{Mult}_p(F) \geq 2$ y las imágenes por F de estos puntos se denominarán puntos rama de F .

Proposición 1.2.1. El conjunto de puntos de ramificación de una función holomorfa no constante entre superficies de Riemann es discreto.

Demostración. Sean $F : X \rightarrow Y$ una función holomorfa no constante entre superficies de Riemann y $p \in X$ un punto de ramificación de F . Por **Teorema** 1.2.5, existen cartas $\phi_1 : U_1 \rightarrow D$ y $\phi_2 : U_2 \rightarrow D$, con $D = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| < 1\}$ centradas en p y $F(p)$ respectivamente, tales que

$$T(z) = \phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}(z) = z^m \quad \text{para algún } m \geq 2.$$

Veamos que p es el único punto de ramificación de F en $\phi_1^{-1}(D) = U_1$.

Sea $t \in \phi_1^{-1}(D) \setminus \{p\}$. Al centrar las cartas en t y $F(t)$ haciendo uso de las traslaciones $\rho(z) = z - r_0$ y $\tau(z) = z - r_0^m$, con $r_0 = \phi_1(t)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \tau \circ T \circ \rho^{-1}(z) &= \tau(T(z + r_0)) \\ &= \tau((z + r_0)^m) \\ &= (z + r_0)^m - r_0^m \\ &= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} z^{m-j} r_0^j - r_0^m \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j} z^{m-j} r_0^j \\ &= z \left(\sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j} z^{m-j-1} r_0^j \right). \end{aligned}$$

Luego $Mult_t(F) = 1$ para todo $t \in \phi_1^{-1}(D)$ con $t \neq p$. ■

Una consecuencia importante de la proposición anterior es que en una superficie de Riemann compacta X el conjunto de puntos de ramificación de una función holomorfa definida en X es finito.

La siguiente proposición muestra que la suma de las multiplicidades de una función holomorfa en los puntos de una fibra es constante.

Proposición 1.2.2. *Sea $F : X \rightarrow Y$ una función holomorfa no constante entre superficies de Riemann compactas. Entonces la suma*

$$d_y(F) = \sum_{p \in F^{-1}(\{y\})} Mult_p(F).$$

es igual para cada $y \in Y$.

Demostración. Veamos que la aplicación

$$\begin{aligned} g : Y &\rightarrow \mathbb{Z}^+ \\ y &\mapsto d_y(F) \end{aligned}$$

es localmente constante.

Dado $y \in Y$, el conjunto de preimágenes de y es discreto y finito por la compacidad de X .

Sean $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ tales que $F^{-1}(\{y\}) = \{x_1, \dots, x_n\}$ y W un entorno de y tal que

$$F^{-1}(W) = \bigcup_{i=1}^n U_i$$

donde los U_i son disjuntos y $x_i \in U_i$.

Ahora, por **Teorema 1.2.5** existe una carta $\psi : W \rightarrow \Omega$ centrada en y y existen cartas ϕ_i centradas en x_i , para $i = 1, \dots, n$ tales que

$$T_i(z) = \psi \circ F \circ \phi_i^{-1}(z) = z^{e_i}$$

para algunos $e_i \in \mathbb{Z}^+$. Luego

$$d_y(F) = \sum_{p \in F^{-1}(\{y\})} \text{Mult}_p(F) = \sum_{i=1}^n e_i.$$

Mostremos que $d_y(F) = d_t(F)$ para t en un entorno de y . Sea $t \in W \setminus \{y\}$. Entonces

$$F^{-1}(\{t\}) \subset \bigcup_{i=1}^n U_i.$$

Por otra parte, podemos asumir que U_i está contenido en el dominio de ϕ_i y así el único posible punto de ramificación de F en U_i es x_i con multiplicidad e_i . Luego en U_i hay e_i preimágenes de t con multiplicidad uno y se sigue que

$$d_t(F) = \sum_{q \in F^{-1}(\{t\})} \text{Mult}_q(F) = \sum_{i=1}^n e_i = d_y(F).$$

Por tanto g es localmente constante y de la conexidad de Y se sigue que g es constante. ■

Esta proposición nos muestra una característica de la aplicación F , lo cual motiva la siguiente definición.

Definición 1.2.5. Sea $F : X \rightarrow Y$ una función holomorfa no constante entre superficies de Riemann compactas. El grado de F , denotado por $\deg(F)$, es el entero $d_y(F)$ para $y \in Y$.

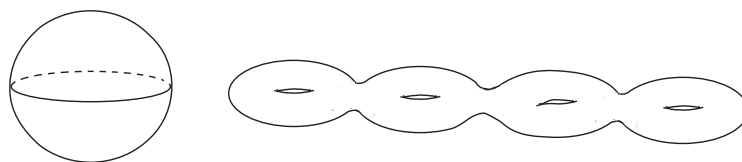
Observación 1.2.4. *Una función holomorfa entre superficies de Riemann compactas tiene grado uno si y solo si es inyectiva.*

1.3. Clasificación Topológica

Teorema 1.3.1. *Toda superficie compacta es homeomorfa a una esfera, a la suma conexa de toros o a la suma conexa de planos proyectivos.*

Demostración. Ver [5, p. 9].

Como las superficies de Riemann son orientables, el teorema anterior nos indica que toda superficie de Riemann compacta es homeomorfa a una esfera o a una suma conexa de toros. Así, identificamos las superficies de Riemann compactas por el número g de huecos que presenten y definimos este número $g \geq 0$ como el género de la superficie.



Por otra parte, el género de una superficie de Riemann compacta puede definirse también, en términos de su característica de Euler. Para definir esta última debemos considerar el concepto de triangulación.

Una triangulación de una superficie compacta X es una descomposición de X en subconjuntos cerrados, cada uno homeomorfo a un triángulo de \mathbb{R}^2 . Precisemos este concepto.

Definición 1.3.1. *Sea X una superficie compacta. Una triangulación de X está dada por*

- *Una familia finita $T = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ de subconjuntos que cubren a X .*
- *Una familia finita $S = \{\varphi_i : \Delta \rightarrow T_i, i : 1, 2, \dots, n\}$ de homeomorfismos donde*

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}.$$

Las imágenes de los vértices y lados de Δ bajo las aplicaciones φ_i se denominan vértices y lados respectivamente y cada $\varphi_i(\Delta) = T_i$ es un triángulo de X . Además cada par de triángulos T_i, T_j con $i \neq j$ son disjuntos o se intersectan en un vértice o un lado.

En adelante nos apoyaremos en un resultado importante por el cual se garantiza que toda superficie compacta tiene una triangulación. En [9, p. 239] podemos encontrar una demostración de este hecho.

Definición 1.3.2. Sean X una superficie de Riemann compacta y T una triangulación de X con v vértices, e lados y t triángulos. La característica de Euler de X se define como el entero

$$\chi(X) = v - e + t.$$

Si bien, la característica de Euler se establece a partir de una triangulación de la superficie, cabe aclarar que la característica de Euler de una superficie no depende de la triangulación, esto es un invariante (numérico) de la superficie.

Teorema 1.3.2. El número de Euler de una superficie de Riemann X es independiente de la escogencia de la triangulación de X .

Demostración. Ver [6, pag 51].

Definición 1.3.3. El género de una superficie de Riemann compacta X se define como

$$g(X) = \frac{2 - \chi(X)}{2}$$

el cual también es un invariante de la superficie.

1.4. Fórmula de Hurwitz

Terminaremos este capítulo con la presentación de la fórmula de Hurwitz, la cual proporciona una importante relación entre el grado de una función holomorfa entre superficies de Riemann compactas $F : X \rightarrow Y$ y los géneros de las superficies X y Y . Para ello consideremos la siguiente proposición.

Proposición 1.4.1. Sean $F : X \rightarrow Y$ una función holomorfa no constante entre superficies de Riemann compactas con $d = \deg(F)$, una triangulación de Y

$$T = \{T_1, \dots, T_t\}, \quad S = \{\varphi_i : \Delta \rightarrow T_i; \quad \varphi_i \text{ homomorfismo } i = 1, \dots, t\}$$

con t triángulos y e lados tal que los vértices en Y son los puntos rama de F . Entonces existe una triangulación en X con $d \cdot e$ lados y $d \cdot t$ triángulos.

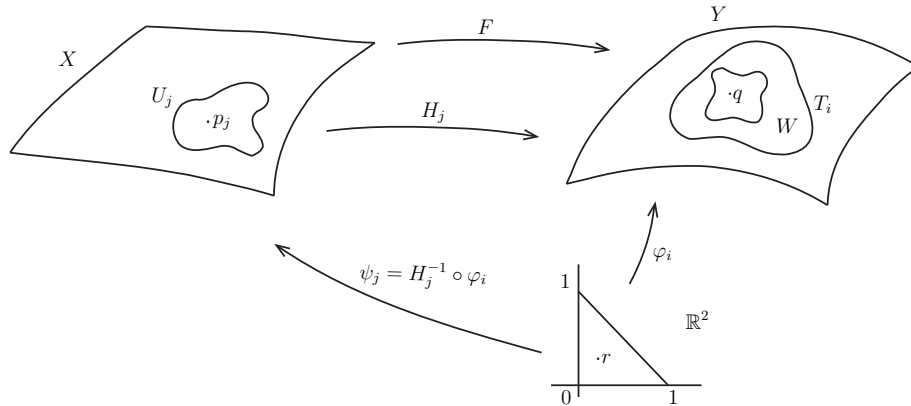
Demostración. Sea $q \in Y$ tal que q no es un punto rama de F . Entonces $q \in T_i$ para algún $i = 1, \dots, t$ y $q = \varphi_i(r)$ para algún $r \in \Delta^*$ donde

$$\Delta^* = \Delta \setminus \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\} \text{ y } \varphi_i : \Delta \rightarrow T_i.$$

Ahora, como q no es un punto rama, tiene d preimágenes de multiplicidad uno, es decir, $F^{-1}(\{q\}) = \{p_1, p_2, \dots, p_d\}$. Además, existe un entorno W de q tal que $F^{-1}(W) = \bigcup U_j$, donde los U_j son abiertos disjuntos tales que $p_j \in U_j$, $j = 1, \dots, d$ y $H_j = F|_{U_j}$ es inyectiva. Luego

$$\psi_j = H_j^{-1} \circ \varphi_i : \Delta \rightarrow X$$

es un homeomorfismo y $\psi_j(\Delta)$ es un triángulo de X . Así, por cada triángulo en Y , hay $\deg(F)$ triángulos en X . Análogamente, por cada lado en Y hay $\deg(F)$ lados en X .



Sean $\tilde{T} = \{\tilde{T}_1, \dots, \tilde{T}_{td}\}$ el conjunto de triángulos en X y $\tilde{S} = \{\psi_k : \Delta \rightarrow \tilde{T}_k; k = 1, \dots, td\}$ el conjunto de homomorfismos obtenidos a partir de la triangulación en Y . Veamos que en efecto los triángulos \tilde{T}_k , $k = 1, \dots, td$ cubren a X . Si \tilde{V} es el conjunto de puntos de ramificación en X , tenemos que

$$X \setminus \tilde{V} \subseteq \bigcup_{k=1}^{td} \tilde{T}_k = H$$

y como \tilde{V} es finito por la compacidad de X , $X \setminus \tilde{V}$ es denso en X . Luego H es denso y cerrado en X por ser unión finita de compactos, lo cual implica que $X = H$ y así los triángulos \tilde{T}_k cubren a X . ■

Teorema 1.4.1. (Fórmula de Hurwitz)

Sea $F : X \rightarrow Y$ una función holomorfa no constante entre superficies de Riemann compactas.

Entonces

$$2g(X) - 2 = \deg(F)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} [Mult_p(F) - 1].$$

Demostración. Como la superficie X es compacta, los puntos de ramificación forman un conjunto finito V' . Entonces

$$\sum_{p \in X} [Mult_p(F) - 1] = \sum_{p \in V'} [Mult_p(F) - 1].$$

Ahora, sea T una triangulación de Y con t triángulos, e lados y v vértices, tal que estos últimos son los puntos rama de F . Por la proposición anterior tenemos que a través de F obtenemos una triangulación de X con $e' = e \cdot \deg(F)$ lados, $t' = t \cdot \deg(F)$ triángulos y donde los vértices son las preimágenes de los vértices en Y .

Sea V el conjunto de vértices en Y y $q \in V$.

$$\begin{aligned} |F^{-1}(\{q\})| &= \sum_{p \in F^{-1}(\{q\})} 1 \\ &= \deg(F) + \sum_{p \in F^{-1}(\{q\})} [1 - Mult_p(F)]. \end{aligned}$$

Luego el número de vértices v' en X es

$$\begin{aligned} v' &= \sum_{q \in V} \left(\deg(F) + \sum_{p \in F^{-1}(\{q\})} [1 - Mult_p(F)] \right) \\ &= \sum_{q \in V} \deg(F) + \sum_{q \in V} \sum_{p \in F^{-1}(\{q\})} [1 - Mult_p(F)] \\ &= v \cdot \deg(F) - \sum_{p \in V'} [Mult_p(F) - 1] \end{aligned}$$

y como $\chi(X) = 2 - 2g(X)$ y $\chi(X) = v' - e' + t'$ se sigue que

$$\begin{aligned}
2g(X) - 2 &= -v' + e' - t' \\
&= -v \deg(F) + \sum_{p \in V'} [Mul_p(F) - 1] + e \cdot \deg(F) - t \cdot \deg(F) \\
&= \deg(F)[-v + e - t] + \sum_{p \in V'} [Mul_p(F) - 1] \\
&= \deg(F)[- \chi(Y)] \sum_{p \in V'} [Mul_p(F) - 1] \\
&= \deg(F)[2g(Y) - 2] + \sum_{p \in V'} [Mul_p(F) - 1] \\
&= \deg(F)[2g(Y) - 2] + \sum_{p \in X} [Mul_p(F) - 1].
\end{aligned}$$

■

Capítulo 2

Acciones de grupo

Ahora desarrollaremos el concepto de acciones de grupo sobre un conjunto, el cual es fundamental para nuestro trabajo. Aunque nuestro interés está especialmente en las acciones de grupo sobre superficies de Riemann, enunciaremos algunos conceptos en forma general.

2.1. Acciones de Grupo en Superficies de Riemann

Definición 2.1.1. *Sea X un conjunto y G un grupo. Decimos que G actúa en un conjunto X si existe una aplicación*

$$\begin{aligned} G \times X &\rightarrow X \\ (g, p) &\mapsto g \cdot p \end{aligned}$$

tal que

- $e \cdot p = p$ para todo $p \in X$, donde e es el elemento neutro de G .
- $(gh) \cdot p = g \cdot (h \cdot p)$ para todo $g, h \in G$, $p \in X$.

Esta aplicación es llamada una acción (izquierda) de G en X .

Estas condiciones implican que para cada elemento $g \in G$, la aplicación

$$\begin{aligned} g : X &\rightarrow X \\ p &\mapsto g \cdot p \end{aligned}$$

es una función biyectiva.

Asociados a una acción de un grupo G existen dos subgrupos importantes, que definimos a continuación.

Definición 2.1.2. *El estabilizador de un punto $p \in X$ es el subgrupo de G*

$$G_p = \{g \in G : g \cdot p = p\}$$

también llamado subgrupo de isotropía de p .

Definición 2.1.3. *El núcleo o kernel de la acción de un grupo G en un conjunto X es el subgrupo normal*

$$K = \{g \in G : g \cdot p = p \text{ para todo } p \in X\} = \bigcap_{p \in X} G_p \subset G.$$

*Cuando el núcleo es trivial, la acción se denomina **efectiva**.*

Toda acción induce una relación de equivalencia \sim en X definida como sigue.

$p_1 \sim p_2$ si y solo si existe $g \in G$ tal que $g \cdot p_1 = p_2$. Así, se tiene una partición de X y definimos el siguiente conjunto.

Definición 2.1.4. *Sea G un grupo que actúa en un conjunto X . La órbita de un punto $p \in X$ es la clase de equivalencia*

$$pG = \{g \cdot p : g \in G\} \subset X.$$

Algunos resultados importantes sobre acciones de grupo se enuncian y demuestran a continuación.

Lema 2.1.1. *Sea G un grupo que actúa sobre un conjunto X .*

i) Los estabilizadores de puntos en una misma órbita son subgrupos conjugados. Es decir, si $q = g \cdot p$ para algún $g \in G$, entonces $G_q = gG_pg^{-1}$.

ii) Si G es un grupo finito $|G| = |G_p||pG|$.

Demostración.

i) Sean $p, q \in X$ tales que $q = g \cdot p$ para algún $g \in G$ y $h \in G_q$. Entonces

$$\begin{aligned} q &= h \cdot q \\ g \cdot p &= h \cdot (g \cdot p) \\ p &= (g^{-1}hg) \cdot p. \end{aligned}$$

Así $g^{-1}hg = t \in G_p$, esto es $h = gtg^{-1} \in gG_p g^{-1}$ y en consecuencia $G_q \subset gG_p g^{-1}$. La otra contención se obtiene de modo similar.

ii) Sea $\phi : pG \rightarrow G/G_p$, dada por $\phi(g \cdot p) = gG_p$ con $p \in X$.

- Veamos que la aplicación está bien definida.

Sean $g_1, g_2 \in G$ tales que $g_1 \cdot p = g_2 \cdot p$. Entonces $g_1^{-1}g_2 \in G_p$ y se sigue que $g_1G_p = g_2G_p$.

- La aplicación ϕ es inyectiva. En efecto, sean $g_1 \cdot p, g_2 \cdot p \in pG$ tales que

$$\begin{aligned} \phi(g_1 \cdot p) &= \phi(g_2 \cdot p) \\ g_1G_p &= g_2G_p. \end{aligned}$$

Entonces $g_2 = g_1g$ para algún $g \in G_p$ y

$$g_2 \cdot p = (g_1g) \cdot p = g_1 \cdot (g \cdot p) = g_1 \cdot p.$$

Así, tenemos una biyección entre pG y G/G_p , lo cual implica $|pG| = \frac{|G|}{|G_p|}$ ya que G es finito.

■

Proposición 2.1.1. *Sea G un grupo que actúa en un conjunto X con núcleo K . Entonces el grupo cociente G/K actúa en X con núcleo trivial y las órbitas son iguales a las dadas por la acción de G en X .*

Demostración. La acción de G/K en X está definida como $gK \cdot p = g \cdot p$ y no depende del representante g . En efecto, sean $g_1, g_2 \in G$ tales que $g_1K = g_2K$, entonces $g_1^{-1}g_2 \in K$ y

$$g_2K \cdot p = g_2 \cdot p = (g_1g_1^{-1}g_2) \cdot p = g_1 \cdot ((g_1^{-1}g_2) \cdot p) = g_1 \cdot p = g_1K \cdot p.$$

Ahora, sea gK en el núcleo de la acción de G/K en X . Entonces $gK \cdot p = g \cdot p = p$ para todo $p \in X$, luego $g \in K$, esto es $gK = eK$ y por tanto el núcleo de la acción es trivial.

Por último tenemos que

$$pG/K = \{q \in X : gK \cdot p = g \cdot p = q \text{ para algún } gK \in G/K\} = pG.$$

■

Gracias a esta proposición, podemos obtener una acción efectiva a partir de otra sin alterar las órbitas generadas por la acción inicial. Por ello, en adelante supondremos que las acciones son efectivas.

Definición 2.1.5. *Decimos que la acción de un grupo G en una superficie de Riemann X es **holomorfa** o **continua** si para todo $g \in G$, la biyección $g : X \rightarrow X$ dada por $g(p) = g \cdot p$ es holomorfa o continua respectivamente.*

En consecuencia, si la acción de un grupo G en una superficie de Riemann X es holomorfa, la aplicación $g(p) = g \cdot p$ con $p \in X$ es automorfismo para cada $g \in G$. Luego G es isomorfo a algún subgrupo de $Aut(X)$.

2.2. Espacio Cociente

El conjunto de órbitas generadas por la acción de G en una superficie de Riemann X que en adelante denominaremos espacio cociente X/G , puede dotarse de una topología haciendo uso de la proyección natural

$$\begin{aligned} \pi : X &\rightarrow X/G \\ p &\mapsto pG \end{aligned}$$

y de la siguiente definición de abierto.

$U \subset X/G$ es abierto si y solo si $\pi^{-1}(U)$ es abierto en X . Esta definición hace de π una aplicación continua.

Lema 2.2.1. *Si la acción de un grupo G en una superficie de Riemann X es continua, entonces la aplicación natural $\pi : X \rightarrow X/G$ es abierta.*

Demostración. Sea $U \subset X$ un abierto. Como la acción es continua, $g^{-1}(p) = g^{-1} \cdot p$ es continua para todo $g \in G$. Es decir, $g(p) = g \cdot p$ es abierta para cada $g \in G$ y por tanto

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} g(U)$$

es abierto y esto implica que $\pi(U)$ es un abierto de X/G . ■

Veremos que bajo ciertas condiciones el espacio cociente X/G tiene estructura de superficie de Riemann. Para ello consideramos algunos resultados que nos ayudarán a establecer un atlas complejo sobre X/G .

Proposición 2.2.1. *Sea G un grupo actuando holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann X y p un punto fijo en X . Si el estabilizador G_p es finito entonces es cíclico.*

Demostración. Sea z una coordenada local centrada en $p \in X$. Entonces para todo $g \in G_p$ podemos escribir

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(g)z^n.$$

Como g es un automorfismo de X , $a_1 \neq 0$ y $a_0 = 0$ ya que $g(p) = p$.

Consideremos ahora la aplicación

$$\begin{aligned} a_1 : G_p &\rightarrow \mathbb{C}^* \\ g &\mapsto a_1(g) \end{aligned}$$

y veamos que es un homomorfismo de grupos.

Si $g, h \in G_p$, tenemos que

$$\begin{aligned} g(h(z)) &= g\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(h)z^n\right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} a_m(g)\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n(h)z^n\right]^m \\ &= a_1(g)a_1(h)z + \text{términos de orden superior} \end{aligned}$$

y por otro lado

$$g(h(z)) = g \circ h(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(g \circ h)z^j,$$

de donde $a_1(gh) = a_1(g)a_1(h)$. Si mostramos que el homomorfismo a_1 es inyectivo, tendremos que G_p es isomorfo a un subgrupo finito de \mathbb{C}^* y por tanto debe ser cíclico.

Supongamos que el núcleo del homomorfismo a_1 no es trivial. Sean $g \neq e$ en el núcleo de a_1 y $m \geq 2$ el exponente del primero de los términos de orden mayor que es distinto de cero en $g(z)$.

Entonces

$$g(z) = z + bz^m + \text{términos de orden superior} \quad \text{donde } b \neq 0$$

y por inducción tenemos que $g(z)^k = z + kbz^m + \text{términos de orden superior}$.

Ahora, por la finitud de G_p tenemos que $g^k(z)$ es la función identidad para algún $k \in \mathbb{Z}^+$. Es decir $kb = 0$, lo que lleva a la contradicción $b = 0$, de donde $g = e$ y concluimos que a_1 es un homomorfismo inyectivo de grupos. ■

Como consecuencia de la proposición anterior, todo subgrupo estabilizador en una acción efectiva y holomorfa de un grupo finito G en una superficie de Riemann X es finito y cíclico.

Proposición 2.2.2. *Sea G un grupo finito actuando holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann X . Entonces los puntos de X con estabilizador no trivial forman un conjunto discreto.*

Demostración. Supongamos por contradicción que existe una sucesión $\{p_n\}$ en X que converge a $p \in X$ tal que para cada p_i existe $g_i \neq e$ en G_{p_i} .

Como G es finito, por proposición anterior cada G_{p_i} es finito y podemos encontrar una subsucesión $\{p_{k_n}\}$ de $\{p_n\}$ donde cada elemento queda fijo por la acción del mismo $g \neq e \in G$. Ahora, por la continuidad de g

$$g(p) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(p_{k_n}) = \lim_{k \rightarrow \infty} p_{k_n} = p$$

y como g es un automorfismo de X , el teorema de la identidad garantiza que g es la función identidad, lo cual es una contradicción. Por tanto el conjunto de puntos con grupo estabilizador no trivial no puede tener un punto de acumulación. ■

De modo que, si G es un grupo finito actuando holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann compacta X , entonces X tendrá un conjunto finito de puntos con estabilizador no trivial.

Proposición 2.2.3. *Sean G un grupo finito que actúa holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann X y $p \in X$. Entonces existe un entorno U de p tal que*

- a) U es invariante bajo el estabilizador G_p . Es decir, $g \cdot u \in U$ para todo $g \in G_p$ y $u \in U$.
- b) $U \cap (g \cdot U) = \emptyset$ para todo $g \notin G_p$.
- c) La aplicación natural $\alpha : U/G_p \rightarrow X/G$ inducida por la que envía un punto de U a su órbita, es un homeomorfismo sobre un subconjunto abierto X/G .
- d) Ningún punto de U excepto p queda fijo bajo la acción de todo elemento de G_p .

Demostración.

- a) Sea $A = G - G_p = \{g_1, \dots, g_n\}$. Como X es Hausdorff, para cada $i = 1, \dots, n$ existen entornos V_i de p y W_i de $q_i = g_i \cdot p$ con $V_i \cap W_i = \emptyset$. Además $g_i^{-1}(W_i)$ es un entorno abierto para cada i , ya que la acción de G en X es holomorfa y por ende continua. Ahora, sean

$$R_i = V_i \cap (g_i^{-1} \cdot W_i), \quad R = \bigcap_{i=1}^n R_i \quad \text{y} \quad U = \bigcap_{g \in G_p} g \cdot R.$$

Los R_i son entornos abiertos de p al igual que R y U ya que g es abierta (la acción es continua). Así, $g \cdot U = U$ para todo $g \in G_p$.

- b) Observemos que $R_i \cap (g_i \cdot R_i) \subset V_i \cap W_i = \emptyset$, de donde

$$R \cap (g_i \cdot R) = \emptyset \quad \text{y} \quad U \cap (g_i \cdot U) = \emptyset \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n.$$

- c) El conjunto U/G_p está bien definido ya que U es G_p invariante. Veamos ahora que

- La aplicación $\alpha : U/G_p \rightarrow X/G$ está bien definida.

Sean $q_1, q_2 \in U$ tales que $q_1 G_p = q_2 G_p$. Entonces $q_1 = h \cdot q_2$ con $h \in G_p$ y así

$$\begin{aligned} q_1 G &= (h \cdot q_2) G \\ &= \{y \in X : y = g \cdot (h \cdot q_2), g \in G\} \\ &= \{y \in X : y = g_1 \cdot q_2, g_1 \in G\} \\ &= q_2 G. \end{aligned}$$

- La aplicación α es uno a uno.

Supongamos $q_1 G = q_2 G$ con $q_1, q_2 \in U$. Luego

$$q_1 G = \{g \cdot q_1 : g \in G_p\} \cup \{h \cdot q_1 : h \notin G_p\} = q_1 G_p \cup q_1 A$$

y de la misma manera

$$q_2 G = q_2 G_p \cup q_2 A.$$

Por (a) y (b) tenemos que $q_1 G$ y $q_2 G$ son uniones disjuntas donde el primer conjunto está contenido en U y el segundo en el complemento de U , de donde $q_1 G_p = q_2 G_p$.

- α es continua y abierta.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\beta} & U/G_p \\ & \searrow \pi|_U & \swarrow \alpha \\ & & X/G \end{array}$$

Sean W y V abiertos en X/G y U/G_p respectivamente y β la proyección natural de U en U/G_p . Entonces

$$\alpha^{-1}(W) = \beta(\pi|_U^{-1}(W)) \quad \text{y} \quad \alpha(V) = \pi|_U(\beta^{-1}(V))$$

son conjuntos abiertos ya que β y $\pi|_U$ son aplicaciones abiertas y continuas. Por tanto α es un homeomorfismo sobre su imagen.

- d) Basta con reducir U de modo que no contenga puntos con estabilizador no trivial, excepto p . Esto es posible por **Proposición 2.2.2**.

■

Este resultado es determinante para establecer las cartas en el espacio cociente X/G .

Sea $\bar{p} \in X/G$ la órbita de $p \in X$. Por la **Proposición 2.2.3** existe un entorno U de p invariante por la acción de G_p y el homeomorfismo $\alpha : U/G_p \rightarrow X/G$.

- Si $|G_p| = 1$ entonces $qG_p = \{q\}$ para cada $q \in U$ y

$$\alpha = \pi|_U : U \rightarrow W \subset X/G \text{ donde } W \text{ es un entorno de } \bar{p}.$$

Reduciendo U si es necesario, podemos suponer que U es el dominio de una carta $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{C}$ en X y así la composición

$$\phi : \varphi \circ \alpha^{-1} : W \rightarrow V$$

es una carta en X/G ya que φ y $\pi|_U$ son homeomorfismos.

- $|G_p| = m \geq 2$.

Consideremos $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{C}$ una carta centrada en p y la aplicación $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$h(q) = \prod_{g \in G_p} \varphi(g \cdot q).$$

Luego

$$T(z) = h(\varphi^{-1}(z)) = \prod_{g \in G_p} \varphi \circ g \circ \varphi^{-1}(z)$$

es una función holomorfa por ser producto de funciones holomorfas, lo que implica que h es holomorfa en p y $Mult_p(h) = m = |G_p|$ ya que la multiplicidad de cada $g \in G_p$ en p es uno. Además h es G_p invariante. Esto significa que al componer con un elemento de G_p , h no cambia. En efecto

$$h(g_k(q)) = \prod_{g \in G_p} \varphi \circ g(g_k(q)) = \prod_{g \in G_p} \varphi(g(q)) = h(q), \quad g_k \in G_p.$$

Ahora, sea $\bar{h} : U/G_p \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $\bar{h}(qG_p) = h(q)$, entonces tenemos que $h = \bar{h} \circ \beta$ y como h y β son abiertas y continuas, \bar{h} es también abierta y continua.

$$\begin{array}{ccc}
 U/G_p & \xrightarrow{\bar{h}} & \mathbb{C} \\
 \beta \uparrow & \nearrow h & \\
 U & &
 \end{array}$$

Veamos ahora que \bar{h} es inyectiva. Sean $q_1, q_2 \in U$ tales que

$$\bar{h}(q_1 G_p) = \bar{h}(q_2 G_p)$$

$$h(q_1) = h(q_2)$$

$$z_1 = z_2.$$

Como h es G_p invariante, $h^{-1}(\{z_1\}) = \{g \cdot q_1 : g \in G_p\}$ y $|h^{-1}(\{z_1\})| = m$. Luego, $q_2 = g \cdot q_1$ para algún $g \in G_p$, es decir, $q_1 G = q_2 G$ y por tanto \bar{h} es un homeomorfismo sobre su imagen.

Por último tenemos que $\phi = \bar{h} \circ \alpha^{-1}$ es una carta en $W \subset X/G$.

$$\begin{array}{ccc}
 W & \xrightarrow{\alpha^{-1}} & U/G_p \\
 \searrow \phi & & \downarrow \bar{h} \\
 & & \mathbb{C}
 \end{array}$$

De esta manera podemos establecer cartas complejas en X/G .

Teorema 2.2.1. *Sea G un grupo finito actuando holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann X . Entonces la construcción de cartas dada anteriormente dota a X/G de estructura de superficie de Riemann. Además si X es compacto, la aplicación cociente $\pi : X \rightarrow X/G$ es una función holomorfa de grado $|G|$ y $\text{mult}_p(\pi) = |G_p|$ para cada $p \in X$.*

Demostración. Las cartas dadas por la construcción anterior cubren a X/G . Debemos probar que esta colección de cartas en un atlas complejo sobre X/G .

Como los puntos con estabilizadores no triviales forman un conjunto discreto, podemos suponer que los dominios de las cartas contruidas en el caso $m \geq 2$ no se intersectan y así cualquier par de ellas son compatibles.

Si tomamos dos cartas $\phi_i : \bar{U}_i \rightarrow V_i$, $i = 1, 2$ construidas para el caso $m = 1$ con $\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2 \neq \emptyset$ tenemos que

$$\phi_i = \varphi_i \circ \alpha^{-1} : \bar{U}_i \rightarrow V_i \text{ con } \varphi_i \text{ cartas en } X$$

y la función de transición

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(z) = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z)$$

es holomorfa.

Ahora, supongamos que $\phi_1 : \bar{U}_1 \rightarrow V_1$ es una carta del caso $m = 1$ y $\phi_2 : \bar{U}_2 \rightarrow V_2$ es una carta del caso $m \geq 2$ con $\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2 \neq \emptyset$. Sean U_1 y U_2 los abiertos usados en la construcción de las cartas y $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, 2$ cartas centradas en p_1 y $p_2 \in X$.

Si U_1 y U_2 no se intersectan, consideramos una traslación de U_1 tal que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Así

$$\phi_1^{-1}(z) = \left(\varphi_1 \circ \pi|_{\bar{U}_1}^{-1} \right)^{-1}(z) = \varphi_1^{-1}(z)G$$

y

$$\phi_2(qG) = \bar{h} \circ \alpha^{-1}(qG) = \bar{h}(qG_{p_2}) = h(q) = \prod_{g \in G_{p_2}} \varphi_2(g(q)),$$

de donde

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(z) = \phi_2(\varphi_1^{-1}(z)G) = \prod_{g \in G_{p_2}} \varphi_2 \circ g \circ \varphi_1^{-1}(z)$$

es holomorfa por ser producto de funciones holomorfas.

Por otra parte, tenemos que X/G es Hausdorff ya que X es Hausdorff y G es finito.

La conexidad de X/G se tiene pues X es conexo y $\pi : X \rightarrow X/G$ es continua y sobreyectiva.

Además X/G es compacto siempre que X lo sea y la aplicación π es holomorfa debido a la construcción de las cartas

- $\phi_1 \circ \pi \circ \varphi_1^{-1}(z) = z$ para $m = 1$.
- $\phi_2 \circ \pi \circ \varphi_2^{-1}(z) = h \circ \varphi_2^{-1}(z)$ para $m \geq 2$.

En ambos casos la función es holomorfa y vemos que $Mult_p(\pi) = 1$ cuando se tiene una carta en un entorno de p que corresponde al caso $m = 1$ y $Mult_p(\pi) = Mult_p(h) = |G_p|$ cuando $m \geq 2$.

Es decir, $Mult_p(\pi) = |G_p|$ para todo $p \in X$.

Finalmente

$$\begin{aligned}
 \deg(\pi) &= \sum_{p \in \pi^{-1}(\{qG\})} \text{Mult}_p(\pi) \\
 &= \sum_{p \in qG} |G_p| \\
 &= |G_p| \sum_{p \in qG} 1 \\
 &= |G_p| |pG| \\
 &= |G|.
 \end{aligned}$$

■

Lema 2.2.2. *Sea G un grupo finito actuando holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann compacta X con aplicación cociente $\pi : X \rightarrow Y = X/G$. Entonces para cada punto rama $y \in Y$ existe un entero $r \geq 2$ tal que $\pi^{-1}(\{y\})$ tiene exactamente $|G|/r$ puntos de X y cada preimagen tiene multiplicidad r .*

Demostración. Sea $y \in Y$ un punto rama y $\pi^{-1}(\{y\}) = \{x_1, \dots, x_s\} \subset X$. Como los x_i están en la misma órbita tienen grupos estabilizadores conjugados, con el mismo cardinal

$$r = |G_{x_i}| = \text{Mult}_{x_i}(\pi) \geq 2.$$

Luego

$$s = |\pi^{-1}(y)| = |x_i G| = \frac{|G|}{|G_{x_i}|} = \frac{|G|}{r} \quad \text{para todo } i = 1, \dots, s.$$

■

Así, al aplicar la fórmula de Hurwitz a $\pi : X \rightarrow X/G$ obtenemos el siguiente resultado.

Lema 2.2.3. *Fórmula de Riemann-Hurwitz.*

Sea G un grupo finito actuando holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann compacta X con aplicación cociente $\pi : X \rightarrow Y = X/G$ y $\{y_1, \dots, y_k\}$ los puntos rama en Y donde r_i es la multiplicidad de los $\frac{|G|}{r_i}$ puntos que viven en $\pi^{-1}(\{y_i\})$. Entonces

$$2g(X) - 2 = |G| \left[2g(X/G) - 2 + \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{r_i}\right) \right].$$

Lema 2.2.4. Ver[6, p.80].

Sean k enteros r_1, r_2, \dots, r_k con $r_i \geq 2$ para cada i y $R = \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{r_i}\right)$. Entonces

a)

$$R < 2 \Leftrightarrow k, \{r_i\} = \begin{cases} k = 1 & \text{cualquier } r_1 \\ k = 2 & \text{cualquier } r_1, r_2 \\ k = 3 & \{r_i\} = \{2, 2, r_3\} \text{ cualquier } r_3 \\ k = 3 & \{r_i\} = \{2, 3, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\} \end{cases}$$

b)

$$R = 2 \Leftrightarrow k, \{r_i\} = \begin{cases} k = 3 & \{r_i\} = \{2, 3, 6\}, \{2, 4, 4\}, \{3, 3, 3\} \\ k = 4 & \{r_i\} = \{2, 2, 2, 2\} \end{cases}$$

c) Si $R > 2$ entonces $R \geq 2\frac{1}{42}$

Definición 2.2.1. Sea $\pi : X \rightarrow Y = X/G$ la proyección canónica. El vector $(g(Y); r_1, r_2, \dots, r_k)$ donde r_i es la multiplicidad de los puntos que pertenecen a $\pi^{-1}(\{y_i\})$, con y_i un punto rama, se denomina **vector de datos de ramificación de G en X** .

Definición 2.2.2. Un arreglo $(a_1, a_2, \dots, a_{g(Y)}, b_1, b_2, \dots, b_{g(Y)}, c_1, c_2, \dots, c_k)$ de elementos de G es llamado un vector generador de tipo $(g(Y); r_1, r_2, \dots, r_k)$ si se satisface

a) G es generado por los elementos $(a_1, \dots, a_{g(Y)}, b_1, \dots, b_{g(Y)}, c_1, \dots, c_k)$

b) $|\langle c_i \rangle| = r_i$

c) $\prod_{i=1}^k [a_i, b_i] \prod_{j=1}^k c_j = 1$

donde $[a_i, b_i] = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$.

Cuando $g(Y) = 0$ el vector generador es simplemente (c_1, \dots, c_k) .

Ahora un teorema que garantiza la existencia de una superficie de Riemann con acción de un grupo finito G bajo ciertas condiciones. Este resultado puede ser consultado en [2, p.239].

Teorema 2.2.2. Teorema de la Existencia de Riemann

Un grupo finito G actúa en la superficie X de género g , con vector de datos de ramificación $(g(Y); r_1, \dots, r_k)$ si y solo si se satisface la fórmula de Riemann Hurwitz y G tiene vector generador $(a_1, \dots, a_{g(Y)}, b_1, \dots, b_{g(Y)}, c_1, \dots, c_k)$.

Terminaremos este capítulo con un resultado importante debido a Hurwitz. Este resultado nos permite acotar el orden de un grupo finito que actúa holomorfa y efectivamente sobre una superficie de Riemann compacta con género mayor o igual que dos.

Teorema 2.2.3. (Teorema de Hurwitz)

Sea G un grupo finito actuando holomorfa y efectivamente sobre una superficie de Riemann compacta X de género $g \geq 2$. Entonces

$$|G| \leq 84(g - 1).$$

Demostración. A partir del **Lema 2.2.3** tenemos

$$2(g - 1) = |G| [2g(X/G) - 2 + R], \text{ donde } R = \sum_i \left(1 - \frac{1}{r_i}\right).$$

- Caso $g(X/G) \geq 1$

Si $R = 0$, entonces $(g - 1) = |G| [g(X/G) - 1]$ y tenemos que $g(X/G)$ debe ser mayor o igual a dos ya que $g \geq 2$. Así

$$g - 1 = |G| [g(X/G) - 1] \geq |G|.$$

Si $R \neq 0$, entonces $R \geq \frac{1}{2}$ y $[2g(X/G) - 2 + R] \geq \frac{1}{2}$, de donde

$$2(g - 1) = |G| [2g(X/G) - 2 + R]$$

$$2(g - 1) \geq \frac{1}{2}|G|$$

$$4(g - 1) \geq |G|.$$

- Caso $g(X/G) = 0$.

Tenemos entonces que $2(g - 1) = |G| [-2 + R]$ y como $g \geq 2$, R debe ser mayor que dos.

Luego por Lema anterior

$$R \geq 2\frac{1}{42}$$

$$R - 2 \geq \frac{1}{42}$$

$$\text{y así } 2(g - 1) \geq \frac{|G|}{42}.$$

De aquí que $|G| \leq 84(g - 1)$ en cualquier caso. ■

Capítulo 3

Curvas Projectivas de Fermat

La familia de curvas projectivas de Fermat es el conjunto de curvas projectivas suaves asociadas a un polinomio homogéneo de la forma $F(x, y, z) = x^n + y^n + z^n \in \mathbb{C}[x, y, z]$.

3.1. Estructura Compleja

Sea $F(n)$ la curva projectiva de Fermat de grado n

$$F(n) = \{[x : y : z] \in \mathbb{CP}^2 : F([x : y : z]) = x^n + y^n + z^n = 0\}.$$

Recordemos que \mathbb{CP}^2 es la unión de los abiertos:

$$U_0 = \{[x : y : z] \mid x \neq 0\}, \quad U_1 = \{[x : y : z] \mid y \neq 0\}, \quad U_2 = \{[x : y : z] \mid z \neq 0\}$$

y consideremos las curvas afines $X_i = X \cap U_i$ como en el **Ejemplo 1.1.7**. Así

$$X_0 \cong \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 : f(a, b) = 1 + a^n + b^n = 0\}$$

y por la simetría de F , X_0, X_1 y X_2 están asociadas al mismo polinomio f . Además, los homeomorfismos de U_i en \mathbb{C}^2 están dados por:

- $\phi_0([x : y : z]) = \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$, con inversa $\phi_0^{-1}(a, b) = [1 : a : b]$ en U_0 .
- $\phi_1([x : y : z]) = \left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right)$, con inversa $\phi_1^{-1}(a, b) = [a : 1 : b]$ en U_1 .
- $\phi_2([x : y : z]) = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$, con inversa $\phi_2^{-1}(a, b) = [a : b : 1]$ en U_2 .

Así, establecemos cartas en un entorno de $[x_0 : y_0 : z_0] \in X_i$ como sigue:

Sea $(a_i, b_i) = \phi_i([x_0 : y_0 : z_0])$. Entonces si $b_i \neq 0$, $b_i = \sqrt[n]{-1 - a_i^n}$ en un entorno de a_i y si $b_i = 0$, $a_i = \sqrt[n]{-1} \neq 0$ y $a_i = \sqrt[n]{-1 - b_i^n}$ en un entorno de b_i .

Así, una carta en un entorno de $[x_0 : y_0 : z_0]$ está dada por:

- $\psi_1 \left[1 : \frac{y}{x} : \frac{z}{x} \right] = \frac{y}{x}$ con inversa $\psi_1^{-1}(w) = [1 : w : \sqrt[n]{-1 - w^n}]$ si $b_0 \neq 0$.
- $\psi_2 \left[1 : \frac{y}{x} : \frac{z}{x} \right] = \frac{z}{x}$ con inversa $\psi_2^{-1}(w) = [1 : \sqrt[n]{-1 - w^n} : w]$ si $b_0 = 0$.
- $\psi_3 \left[\frac{x}{y} : 1 : \frac{z}{y} \right] = \frac{x}{y}$ con inversa $\psi_3^{-1}(w) = [w : 1 : \sqrt[n]{-1 - w^n}]$ si $b_1 \neq 0$.
- $\psi_4 \left[\frac{x}{y} : 1 : \frac{z}{y} \right] = \frac{z}{y}$ con inversa $\psi_4^{-1}(w) = [\sqrt[n]{-1 - w^n} : 1 : w]$ si $b_1 = 0$.
- $\psi_5 \left[\frac{x}{z} : \frac{y}{z} : 1 \right] = \frac{x}{z}$ con inversa $\psi_5^{-1}(w) = [w : \sqrt[n]{-1 - w^n} : 1]$ si $b_2 \neq 0$.
- $\psi_6 \left[\frac{x}{z} : \frac{y}{z} : 1 \right] = \frac{y}{z}$ con inversa $\psi_6^{-1}(w) = [\sqrt[n]{-1 - w^n} : w : 1]$ si $b_2 = 0$.

Como vimos en el **Ejemplo** 1.1.7 estas cartas son compatibles dos a dos. De ahí que

$A = \{\psi_i, i = 1, \dots, 6\}$ es un atlas complejo sobre $F(n)$.

Para determinar el género de $F(n)$, haremos uso de la fórmula de Hurwitz y de la aplicación

$\pi : F(n) \rightarrow \mathbb{CP}^1$ definida por $\pi([x : y : z]) = [x : z]$.

Veamos que

- π está bien definida.

Sean $(x, y, z) = \lambda(x', y', z')$ con $[x : y : z] \in F(n)$, entonces

$$\pi([x : y : z]) = [x : z] = [x' : z'] = \pi[x' : y' : z'].$$

Además $[0 : 1 : 0] \notin F(n)$.

- π es holomorfa.

Sea $p = [x_0 : y_0 : z_0] \in X_0 \subset F(n)$. Entonces $\varphi_0([x : z]) = \frac{z}{x}$ es una carta en un entorno

$\pi(p) = [x_0 : z_0]$ está dada por . Si ψ_1 una carta en p , tenemos que

$$\varphi_0 \circ \pi \circ \psi_1^{-1}(w) = \varphi_0 \circ \pi([1 : w : \sqrt[n]{-1 - w^n}]) = \varphi_0([1 : \sqrt[n]{-1 - w^n}]) = \sqrt[n]{-1 - w^n},$$

la cual es una función holomorfa en un entorno de $\psi_1(p)$ y si ψ_2 es una carta en un entorno de p , entonces

$$\varphi_0 \circ \pi \circ \psi_2^{-1}(w) = \varphi_0 \circ \pi([1 : \sqrt[n]{-1 - w^n} : w]) = \varphi_0([1 : w]) = w$$

que es holomorfa. De la misma manera se verifica que π es holomorfa en X_1 y X_2 .

- $\text{grad}(\pi) = n$

Consideremos antes un resultado útil que caracteriza los puntos de ramificación de π .

Proposición 3.1.1. *Sea X una curva proyectiva suave asociada a un polinomio homogéneo $F(x, y, z) \in \mathbb{C}[x, y, z]$ tal que $[0 : 1 : 0] \notin X$ y*

$\pi : X \mapsto \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ la aplicación definida por $\pi([x : y : z]) = [x : z]$. Entonces $p = [x_0 : y_0 : z_0] \in X$ es un punto de ramificación de π si y solo si $\frac{\partial F}{\partial y}(p) = 0$.

Demostración. Como $\pi(p) = [x_0 : z_0] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ entonces $x_0 \neq 0$ o $z_0 \neq 0$. Supongamos $z_0 \neq 0$ y

$$\phi_2(p) = \left(\frac{x_0}{z_0}, \frac{y_0}{z_0} \right) = (a_2, b_2).$$

Así, $p \in X_2 = X \cap U_2$ (una curva suave afín asociada a $f(a, b) = F[a : b : 1]$) y $\hat{\varphi}_1([x : z]) = \frac{x}{z} - a_2$ es una carta centrada en $\pi(p)$.

Ahora, si

$$\frac{\partial f}{\partial b}(a_2, b_2) \neq 0 \text{ (equivalentemente } \frac{\partial F}{\partial y}(p) \neq 0 \text{),}$$

existe una función holomorfa $g_1(a)$ tal que $g_1(a) = b$ en un entorno de a_2 y

$$\hat{\psi}_5[x : y : z] = \frac{x}{z} - a_2 \text{ con inversa } \hat{\psi}_5^{-1}(w) = [w + a_2 : g_1(w + a_2) : 1].$$

es una carta centrada en p . Luego

$$\hat{\varphi}_1 \circ \pi \circ \hat{\psi}_5^{-1}(w) = \hat{\varphi}_1 \circ \pi([w + a_2 : g_1(w + a_2) : 1]) = \hat{\varphi}_1([w + a_2 : 1]) = w,$$

de donde p no es un punto de ramificación de π .

Si $\frac{\partial f}{\partial b}(a_2, b_2) = 0$, existe una función holomorfa g_2 tal que $g_2(b) = a$ en un entorno de b_2 y

$$\hat{\psi}_6[x : y : z] = \frac{y}{z} - b_2 \text{ con inversa } \hat{\psi}_6^{-1}(w) = [g_2(w + b_2) : w + b_2 : 1].$$

es una carta centrada en p . De modo que

$$\begin{aligned} h(w) &= \hat{\varphi}_1 \circ \pi \circ \hat{\psi}_6^{-1}(w) \\ &= \hat{\varphi}_1 \circ \pi([g_2(w + b_2) : w + b_2 : 1]) \\ &= \hat{\varphi}_1([g_2(w + b_2) : 1]) \\ &= g_2(w + b_2) - a_2 \end{aligned}$$

y usando el teorema 1.1.1 (de la función implícita)

$$\begin{aligned} h'(w) &= -\frac{\partial f}{\partial b} / \frac{\partial f}{\partial a}(g_2(w + b_2), w + b_2) \\ h'(0) &= -\frac{\partial f}{\partial b} / \frac{\partial f}{\partial a}(g_2(b_2), b_2) \\ &= -\frac{\partial f}{\partial b} / \frac{\partial f}{\partial a}(a_2, b_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

entonces p es un punto de ramificación de π .

El caso $x_0 \neq 0$ se verifica de manera análoga. ■

Por tanto, los puntos de ramificación de π en nuestro caso ($X = F(n)$) son de la forma $[1 : 0 : w_k]$ con $w_k = e^{\frac{i\pi(1+2k)}{n}}$, $k = 0, \dots, n-1$ y $[1 : w_k]$ son los puntos rama.

Sea $p = [a : b : c] \in X_1$, entonces $\pi(p) = [a : c]$ y p no es un punto de ramificación. Luego

$$\pi^{-1}[a : c] = \{(a, b_k, c) : b_k^n = -a^n - c^n, k = 0, \dots, n-1\}$$

y

$$\sum_{x \in \pi^{-1}[a:c]} \text{Mult}_x(\pi) = \sum_{x \in \pi^{-1}[a:c]} 1 = n.$$

Por lo cual $\text{grad}(\pi) = n$.

Notemos que n es la multiplicidad en los puntos de ramificación de π .

Ahora, de la fórmula de Hurwitz tenemos

$$\begin{aligned}
 2g(X) - 2 &= n[2g(\mathbb{CP}^1) - 2] + \sum_{p \in X} [Mult_p(\pi) - 1] \\
 2g(X) - 2 &= -2n + \sum_{k=0}^{n-1} [Mult_{[1:0:w_k]}(\pi) - 1] \\
 2g(X) - 2 &= -2n + \sum_{k=0}^{n-1} [n - 1] \\
 2g(X) - 2 &= -2n + n(n - 1) \\
 2g(X) &= n^2 - 3n + 2 \\
 g(X) &= \frac{(n - 2)(n - 1)}{2}.
 \end{aligned}$$

Así, cuando $n \geq 4$ tenemos que $g(F(n)) \geq 2$ y por el **Teorema de Hurwitz 2.2.3**, si G es un grupo finito que actúa holomorfa y efectivamente en $F(n)$, entonces

$$\begin{aligned}
 |G| &\leq 84 \left(\frac{(n - 2)(n - 1)}{2} - 1 \right) \\
 |G| &\leq 42n(n - 3).
 \end{aligned}$$

En particular, esta desigualdad se tiene cuando $G = Aut(F(n))$ ya que si $g(F(n)) \geq 2$ el grupo de automorfismos de $F(n)$ es finito (Ver [6, p.243]).

3.2. Grupo de Automorfismos de las Curvas Projectivas de Fermat.

En esta sección estudiaremos el grupo de automorfismos de una curva projectiva de Fermat $F(n)$ de grado $n \geq 4$ y mostraremos que dicho grupo de automorfismos es isomorfo a $(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n) \rtimes S_3$. Consideremos los siguientes ejemplos de automorfismos de $F(n)$

Ejemplo 3.2.1. *La aplicación*

$$\begin{aligned}
 \rho_1 : F(n) &\rightarrow F(n) \\
 [X : Y : Z] &\mapsto [Y : X : Z]
 \end{aligned}$$

es un automorfismo de $F(n)$. En efecto, sea $p \in F(n)$, si $p \in X_0$, entonces una carta en p es ψ_1 o ψ_2 , con ψ_j , $j = 1, \dots, 6$ como en 3.1. Si ψ_1 es una carta en p , ψ_3 es una carta en $\rho_1(p)$ y la función

$$\psi_3 \circ \rho_1 \circ \psi_1^{-1}(w) = \psi_3 \circ \rho_1([1 : w : \sqrt[n]{-1 - w^n}]) = \psi_3([w : 1 : \sqrt[n]{-1 - w^n}]) = w$$

es holomorfa.

Si ψ_2 es una carta en p , entonces ψ_4 es una carta en $\rho_1(p)$ y

$$\psi_4 \circ \rho_1 \circ \psi_2^{-1}(w) = \psi_4 \circ \rho_1([1 : \sqrt[n]{-1 - w^n} : w]) = \psi_4([\sqrt[n]{-1 - w^n} : 1 : w]) = w$$

es holomorfa.

Ahora, si $p \notin X_0$, $p = [0 : e^{\frac{1+2k}{n}\pi i} : 1]$ para algún $k = 0, \dots, n-1$. Así $p \in X_1 \cap X_2$ y una carta en un entorno de p puede ser ψ_3 , ψ_4 , ψ_5 o ψ_6 . Considerando la carta ψ_3 en un entorno de p , tenemos que ψ_1 es una carta en $\rho_1(p)$ y la función de transición

$$\psi_1 \circ \rho_1 \circ \psi_3^{-1}(w) = \psi_1 \circ \rho_1([w : 1 : \sqrt[n]{-1 - w^n}]) = \psi_1([1 : w : \sqrt[n]{-1 - w^n}]) = w$$

es holomorfa. De la misma manera se verifica que la función de transición es holomorfa en los casos restantes. Además $\rho_1 = \rho_1^{-1}$.

Ejemplo 3.2.2. La aplicación

$$\rho_2 : F(n) \rightarrow F(n)$$

$$[X : Y : Z] \mapsto [Z : X : Y]$$

es un automorfismo de $F(n)$. En efecto, sea $p \in F(n)$, si $p \in X_0 \subset F(n)$ entonces ψ_1 y ψ_2 son posibles cartas en un entorno de p . Si ψ_1 es una carta en un entorno de p , entonces ψ_4 es una carta en un entorno de $\rho_2(p)$ y tenemos que

$$\psi_4 \circ \rho_2 \circ \psi_1^{-1}(w) = \psi_4 \circ \rho_2([1 : w : \sqrt[n]{-1 - w^n}]) = \psi_4([\sqrt[n]{-1 - w^n} : 1 : w]) = w.$$

Si ψ_2 es una carta en un entorno de p entonces ψ_3 es una carta en un entorno de $\rho_2(p)$ y

$$\psi_3 \circ \rho_2 \circ \psi_2^{-1}(w) = \psi_3 \circ \rho_2([1 : \sqrt[n]{-1 - w^n} : w]) = \psi_3([w : 1 : \sqrt[n]{-1 - w^n}]) = w.$$

En ambos casos la función es holomorfa.

Si $p \notin X_0$ entonces $p \in X_1 \cap X_2$, de donde $\rho_2(p) \in X_0 \cap X_2$ y una carta en p puede ser ψ_3 , ψ_4 , ψ_5 o ψ_6 .

Considerando ψ_3 en un entorno de p , tenemos que la función de transición

$$\psi_6 \circ \rho_2 \circ \psi_3^{-1}(w) = \psi_6 \circ \rho_2([w : 1 : \sqrt[n]{-1 - w^n}]) = \psi_6([\sqrt[n]{-1 - w^n} : w : 1]) = w$$

es holomorfa. De manera análoga se verifica que la función de transición es holomorfa en los otros casos posibles. Luego ρ_2 es holomorfa en $F(n)$ al igual que

$$\begin{aligned} \rho_2^{-1} : F(n) &\longrightarrow F(n) \\ [X : Y : Z] &\mapsto [Y : Z : X]. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.2.3. Sea $\mu(n)$ el grupo de raíces n -ésimas de la unidad en \mathbb{C} con ξ una raíz n -ésima primitiva de la unidad. Entonces

$$\begin{aligned} \sigma_{kj} : F(n) &\rightarrow F(n) \\ [X : Y : Z] &\mapsto [\xi^k X : \xi^j Y : Z] \end{aligned}$$

es un un automorfismo de $F(n)$ para $0 \leq k, j \leq n - 1$.

De hecho, sea $p \in X_i \subset F(n)$ entonces $\sigma_{kj}(p) \in X_i$ con $i = 0, 1, 2$ y tomamos la misma carta en un entorno de p y $\sigma_{kj}(p)$. De este modo tenemos

- $\psi_1 \circ \sigma_{kj} \circ \psi_1^{-1}(w) = \psi_1 \circ \sigma_{kj}([1 : w : \sqrt[n]{-1 - w^n}]) = \psi_1([\xi^k : \xi^j w : \sqrt[n]{-1 - w^n}]) = \xi^{j-k} w.$
- $\psi_2 \circ \sigma_{kj} \circ \psi_2^{-1}(w) = \psi_2 \circ \sigma_{kj}([1 : \sqrt[n]{-1 - w^n} : w]) = \psi_2([\xi^k : \xi^j \sqrt[n]{-1 - w^n} : w]) = \xi^{-k} w.$
- $\psi_3 \circ \sigma_{kj} \circ \psi_3^{-1}(w) = \psi_3 \circ \sigma_{kj}([w : 1 : \sqrt[n]{-1 - w^n}]) = \psi_3([\xi^k w : \xi^j : \sqrt[n]{-1 - w^n}]) = \xi^{k-j} w.$
- $\psi_4 \circ \sigma_{kj} \circ \psi_4^{-1}(w) = \psi_4 \circ \sigma_{kj}([\sqrt[n]{-1 - w^n} : 1 : w]) = \psi_4([\xi^k \sqrt[n]{-1 - w^n} : \xi^j : w]) = \xi^{-j} w.$
- $\psi_5 \circ \sigma_{kj} \circ \psi_5^{-1}(w) = \psi_5 \circ \sigma_{kj}([w : \sqrt[n]{-1 - w^n} : 1]) = \psi_5([\xi^k w : \xi^j \sqrt[n]{-1 - w^n} : 1]) = \xi^k w.$
- $\psi_6 \circ \sigma_{kj} \circ \psi_6^{-1}(w) = \psi_6 \circ \sigma_{kj}([\sqrt[n]{-1 - w^n} : w : 1]) = \psi_6([\xi^k \sqrt[n]{-1 - w^n} : \xi^j w : 1]) = \xi^j w.$

Como en cada caso obtenemos una función holomorfa y $\sigma_{kj}^{-1} = \sigma_{ml}$ con $m = n - k$, $l = n - j$, concluimos que los σ_{kj} con $0 \leq k, j \leq n - 1$ son automorfismos de $F(n)$.

Notemos que el grupo de automorfismos generado por ρ_1 y ρ_2 de los **Ejemplos** 3.2.1 y 3.2.2 es isomorfo a S_3 .

Además el conjunto de automorfismos σ_{kj} es un grupo generado por

$$\sigma_{10}([X : Y : Z]) = [\xi X : Y : Z] \quad \text{y} \quad \sigma_{01}([X : Y : Z]) = [X : \xi Y : Z]$$

y es isomorfo a $(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n)$. Por ello en adelante identificaremos a $\langle \rho_1, \rho_2 \rangle$ y $\langle \sigma_{10}, \sigma_{01} \rangle$ por S_3 y $(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n)$ respectivamente.

Ahora, sea $H(n)$ el grupo generado por $(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n)$ y S_3 . Entonces

i) $(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n) \trianglelefteq H(n)$. Esto es $\rho(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n)\rho^{-1} \subseteq (\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n)$ para cualquier $\rho \in H(n)$. En efecto,

$$\text{si } \rho = \rho_i, \quad i = 1, 2$$

$$\rho_1 \circ \sigma_{kj} \circ \rho_1^{-1}([X : Y : Z]) = \rho_1 \circ \sigma_{kj}([Y : X : Z]) = \rho_1([\xi^k Y : \xi^j X : Z]) = ([\xi^j X : \xi^k Y : Z])$$

$$\rho_2 \circ \sigma_{kj} \circ \rho_2^{-1}([X : Y : Z]) = \rho_2([\xi^k Y : \xi^j Z : X]) = ([X : \xi^k Y : \xi^j Z]) = ([\xi^m X : \xi^l Y : Z])$$

con $m = n - j$, $l \cong k - j \pmod{n}$, $0 \leq l \leq n - 1$, de donde

$$\rho_1 \circ \sigma_{kj} \circ \rho_1^{-1}, \rho_2 \circ \sigma_{kj} \circ \rho_2^{-1} \in (\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n)$$

para cualquier $\sigma_{kj} \in (\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n)$, lo cual implica que $\rho(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n)\rho^{-1} \subseteq (\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n)$ cuando $\rho \in S_3$ y para $\rho \in (\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n)$ el resultado se tiene claramente.

ii) $(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n) \cap S_3 = \{e\}$ donde e es la función identidad.

iii) $|H(n)| = 6n^2$.

De ahí que $H(n) = (\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n) \rtimes S_3$.

Nuestro trabajo ahora consiste en probar que $H(n)$ es el grupo de automorfismos de la curva proyectiva de Fermat $F(n)$.

Teorema 3.2.1. *Sea $F(n)$ la curva proyectiva de Fermat de grado $n \geq 4$ y $G(n)$ el grupo de automorfismos de $F(n)$. Entonces*

$$G(n) = H(n).$$

En adelante notaremos a $G(n)$ y $H(n)$ simplemente como G y H respectivamente.

Demostración. Como H es un subgrupo del grupo finito G , $|G| = 6n^2m$ para algún entero positivo m .

Sea $Y = F(n)/G$, la superficie cociente. Entonces considerando la aplicación cociente

$\pi : F(n) \rightarrow Y$ y el **Lema 2.2.3** tenemos

$$2 \left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} \right) - 2 = |G| \left[2g(Y) - 2 + \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{r_i} \right) \right]$$

$$n(n-3) = 6n^2m \left[2g(Y) - 2 + \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{r_i} \right) \right],$$

donde r_i es la multiplicidad de π en un elemento de la fibra del punto rama $y_i \in Y$. Notemos que $g(Y) = 0$. En efecto, si $g(Y) \geq 1$, dado que $R = \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{r_i}\right) \geq \frac{1}{2}$,

$$n(n-3) \geq 6n^2m \left[\sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{r_i}\right) \right] \geq 3n^2m.$$

Esto es $n^2 - 3n \geq 3n^2m$, lo cual es una contradicción. De aquí que $n - 3 = 6nDm$ donde

$$D = \left[-2 + \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{r_i}\right) \right] > 0 \text{ ya que } n \geq 4.$$

Luego $R > 2$ y se sigue que $k > 2$ y $D \geq \frac{1}{42}$ por **Lema 2.2.4**. Además si $D \geq \frac{1}{12}$ entonces $m = 1$ y obtenemos $G = H$. Teniendo en cuenta el **Teorema de Existencia de Riemann 2.2.2**, veamos para que vectores generadores del tipo (r_1, \dots, r_k) (definición 2.2.2) se tiene

$$\frac{1}{42} \leq D < \frac{1}{12}. \tag{3.1}$$

Es decir, para que vectores generadores es posible que la afirmación $G = H$ sea falsa.

- Si $k \geq 5$, $R \geq \frac{5}{2}$ y se sigue que $D \geq \frac{1}{2} > \frac{1}{12}$.
- Si $k = 4$, no es posible el vector $(2, 2, 2, 2)$ ya que $R > 2$ y considerando el vector $(2, 2, 2, r_4)$ con $r_4 \geq 3$ tenemos $D = \frac{1}{2} - \frac{1}{r} \geq \frac{1}{6} > \frac{1}{12}$.

Luego $D \geq \frac{1}{6} > \frac{1}{12}$ para un vector con cuatro entradas.

- Si $k = 3$, los vectores $(2, 2, r_3)$ con $r_3 \geq 2$ no son posibles ya que $R > 2$. Luego no son posibles vectores con mas de una entrada igual a dos.

Por ello y dado que $D = 1 - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}$ consideremos los siguientes casos

- Si $(2, 3, r_3)$, $D = \frac{1}{6} - \frac{1}{r_3}$ y se satisface la desigualdad (3.1) siempre que $7 \leq r < 12$. Así los posibles vectores permitidos son $(2, 3, 7)$, $(2, 3, 8)$, $(2, 3, 9)$, $(2, 3, 10)$, $(2, 3, 11)$.
- Si $(2, 4, r_3)$, entonces $D = \frac{1}{4} - \frac{1}{r_3}$ satisface la desigualdad (3.1) si $4 < r_3 < 6$. Luego $(2, 4, 5)$ es un posible vector generador.
- Para $(2, 5, r_3)$ con $r_3 \geq 5$, $D = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{r_3} \geq \frac{1}{10} > \frac{1}{12}$.
- Si $(2, r_2, r_3)$ con $r_2 \geq 6$ y $r_3 \geq 4$ (esta última condición excluye los casos anteriores: $(2, 3, 7)$, $(2, 3, 8)$, etc.), $D = \frac{1}{2} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \geq \frac{1}{12}$.

Consideremos los casos (r_1, r_2, r_3) con $r_i \neq 2$, $i = 1, 2, 3$.

- Para $(3, 3, 3)$, $D = 0$ lo cual no es posible ya que $D > 0$.
- Si (r_1, r_2, r_3) con $r_1 \geq 3$, $r_2 \geq 3$ y $r_3 \geq 4$, $D \geq 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

Ahora, usando la igualdad $n - 3 = 6nDm$ obtenemos valores de n y m para cada vector. Para $(2, 3, 7)$ por ejemplo, $D = \frac{1}{42}$ y así

$$n - 3 = \frac{6nm}{42}$$

$$7(n - 3) = nm$$

$$n(7 - m) = 21$$

de donde $(n, m) = (7, 4)$ o $(n, m) = (21, 6)$. De esta manera, obtenemos la siguiente tabla.

Vector	D	(n,m)	$ G(n) $
(2,3,7)	$\frac{1}{42}$	(7,4), (21,6)	1176, 15876
(2,3,8)	$\frac{1}{24}$	(4,1),(6,2),(12,3)	96, 432, 2592
(2,3,9)	$\frac{1}{18}$	(9,2)	972
(2,3,10)	$\frac{1}{15}$	(5,1),(15,2)	150, 2700
(2,3,11)	$\frac{5}{66}$	(33,2)	13068
(2,4,5)	$\frac{1}{20}$	(30,3)	16200

Es claro que en los casos con $m = 1$, $G = H$.

Observación 3.2.1.

- Por **Teorema de Existencia de Riemann 2.2.2**, dado un vector generador (r_1, r_2, r_3) existen elementos $a, b, c \in G$ tales que $a^{r_1} = b^{r_2} = c^{r_3} = 1$, $abc = 1$ y $G = \langle a, b, c \rangle$ ya que en este caso $g(Y) = 0$.
- Dado un grupo G , $H \leq G$ y el conjunto $\Omega = \{xH : x \in G\}$, con $|\Omega| = [G : H] = m$, tenemos que el homomorfismo de representación permutacional de G en las clases laterales izquierdas de H está dado por

$$\phi : G \rightarrow S_m$$

$$g \mapsto \phi_g : \Omega \rightarrow \Omega$$

$$xH \mapsto gxH$$

donde $K = \ker(\phi) \leq H$ y G/K es isomorfo a algún subgrupo de S_m .

iii) Dados dos subgrupos A y B de un grupo finito G , si alguno es normal en G , $AB \leq G$ y además

$$|AB| = \frac{|A||B|}{|A \cap B|}$$

Teniendo en cuenta lo anterior estudiaremos cada caso de la tabla con $m \neq 1$ y verificaremos que no son posibles.

- $(2, 3, 9), (n, m) = (9, 2)$.

Por la observación 3.2.1, ítem i, $G = \langle a, b, c \in G : a^2 = b^3 = c^9 = 1, abc = 1 \rangle$ y como $[G : H] = 2$, $H \trianglelefteq G$. Luego $H < c > \leq G$, $H < b > \leq G$ y por la observación 3.2.1, ítem iii $|H < c >| = 9$, $|H \cap \langle b \rangle| = 3$. Esto implica que $a, b, c \in H$, lo cual no es posible.

- $(2, 3, 11), (n, m) = (33, 2)$.

Por la observación 3.2.1, $G = \langle a, b, c \in G : a^2 = b^3 = c^{11} = 1, abc = 1 \rangle$ y $[G : H] = 2$ Luego $H < c > \leq G$, $H < b > \leq G$, de donde $|H \cap \langle b \rangle| = 3$ y $|H < c >| = 11$ y esto lleva a la contradicción $a, b, c \in H$.

- $(2, 3, 10), (n, m) = (15, 2)$, $|G| = 2^2 3^3 5^2$, $|H| = 3^3 5^2 2$.

En este caso $G = \langle a, b, c \in G : a^2 = b^3 = c^{10} = 1, abc = 1 \rangle$ y $H \trianglelefteq G$.

Sea S un 5-subgrupo de Sylow de G , $|S| = 5^2$. Como $H \trianglelefteq G$, $HS \leq G$ y por la observación 3.2.1, ítem iii, tenemos que $|H \cap S| = 5^2$. Entonces $S \leq H \cong (\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{15}) \rtimes S_3$ y de la misma manera tenemos que $S \leq \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{15} \trianglelefteq H$. Luego $(\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{15})$ contiene todos los 5-subgrupos de Sylow de G , y sabemos por el tercer teorema de Sylow que $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{15}$ solo posee un 5-subgrupo de Sylow. Por tanto, $S \trianglelefteq G$, $|G/S| = 2^2 3^3$, $[G/S : H/S] = 2$ y $H/S \trianglelefteq G/S$.

Ahora, dado que el número de 3-subgrupo de Sylow es igual en H/S y G/S , hay un único 3-subgrupo de Sylow en G/S y por el teorema de correspondencia existe $M \trianglelefteq G$ tal que $S \subseteq M$ y $|M| = 3^3 5^2$. Entonces $M \langle a \rangle \leq G$ y $a, b, c \in M \langle a \rangle$, lo cual es una contradicción.

- $(2, 3, 8), (n, m) = (6, 2)$, $|G| = 3^3 2^4$, $|H| = 3^3 2^3$.

En este caso $G = \langle a, b, c \in G : a^2 = b^3 = c^8 = 1, abc = 1 \rangle$ y dado que $[G : H] = 2$, $H \trianglelefteq G$ y todos los 3-subgrupos de Sylow están contenidos en H .

Sea P un 3-subgrupo de Sylow de G . Si $P \trianglelefteq G$ entonces $b \in P$ y $P\langle a \rangle \leq G$ con $a, b, c \in P\langle a \rangle$ lo cual es una contradicción. Luego P no es normal en G .

Por otro lado, $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \trianglelefteq (\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6) \trianglelefteq L$ y $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$ es un subgrupo característico de $(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6)$, entonces $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \trianglelefteq H$. Además, $P(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \leq H$, de donde $|P \cap (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)| = 3^2$ y así $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \subseteq P$, donde P es un 3-subgrupo de Sylow de G cualquiera. Por tanto $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$ es la intersección de los 3-subgrupos de Sylow de G y $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \trianglelefteq G$.

Ahora, como $(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6)$ es abeliano, $(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6) \subseteq C_G(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \trianglelefteq G$ y $(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6) \subseteq (C_G(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \cap H)$ pero $H \cong (\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6) \rtimes S_3$, lo cual implica que $(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6) = (C_G(K) \cap H)$ y así $(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6) \trianglelefteq G$. De modo que $|G/(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6)| = 2^2 \cdot 3$ y $G/(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6)$ tiene un subgrupo normal de orden 3 o de orden 4. Es decir, G tiene un subgrupo normal N de orden $3^3 \cdot 2^2$ o de orden $3^2 \cdot 2^4$. En el primer caso $b \in N$ y así $G = N\langle a \rangle$, en el segundo caso $a, b \in N$ y así $N = G$. En ambos casos llegamos a una contradicción.

- $(2, 4, 5)$, $(n, m) = (30, 3)$, $|G| = 3^4 \cdot 2^3 \cdot 5^2$, $|H| = 3^3 \cdot 2^3 \cdot 5^2$.

En este caso $G = \langle a, b, c \in G : a^2 = b^4 = c^5 = 1, abc = 1 \rangle$ y considerando la representación permutacional de G en las clases laterales izquierdas de H , como en observación 3.2.1, G/K debe ser isomorfo a algún subgrupo de S_3 . Luego $|G/K|$ es igual a 1, 2, 3 o 6 pero descartamos $|G/K| = 1, 2$ ya que $|K|$ debe dividir a $|H|$.

Si $|G/K| = 3$, $H = K \trianglelefteq G$. Luego $H\langle b \rangle \leq G$, $H\langle c \rangle \leq G(n)$ y dado que $|H \cap \langle c \rangle| = 5$ y $|H \cap \langle b \rangle| = 4$ tenemos que $b, c \in H$, lo cual es una contradicción.

Si $|G/K| = 6$, $|K| = 3^3 \cdot 2^2 \cdot 5^2$ y $|K \cap \langle c \rangle| = 5$. Luego $K\langle a \rangle \leq G$ y $a, b, c \in K\langle a \rangle$, lo cual no es posible.

- $(2, 3, 7)$, $(n, m) = (7, 4)$, $|G| = 2^3 \cdot 7^2 \cdot 3$, $|H| = 7^2 \cdot 3 \cdot 2$.

Por la observación 3.2.1, $G = \langle a, b, c \in G : a^2 = b^3 = c^7 = 1, abc = 1 \rangle$ y considerando la representación permutacional de G en las clases laterales izquierdas de H , como en la observación 3.2.1, tenemos que G/K es isomorfo a algún subgrupo de S_4 , los cuales tienen ordenes 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24, pero solo son posibles $|G/K| = 4, 8, 12, 24$, ya que $K \leq H$. Si $|G/K| = 4$, $H = K \trianglelefteq G$. Luego $H\langle b \rangle, H\langle c \rangle \leq G$ y se sigue que $a, b, c \in H(n)$, (observación 3.2.1, ítem iii) lo cual es una contradicción.

Si $|G/K| = 8$, $|K| = 3 \cdot 7^2$. Así, $|K \cap \langle b \rangle| = 3$ y $|K \cap \langle c \rangle| = 7$, de donde $a, b, c \in K \leq H$ y esto no es posible.

Si $|G/K| = 12$, $|K| = 27^2$ y así $c \in K$. Luego $a, b, c \in K\langle a \rangle$, lo cual no es posible .

Si $|G/K| = 24$, $|K| = 7^2$ y tenemos que $c \in K$. Así, $a, b, c \in K\langle a \rangle \leq G$ y esto es una contradicción.

- $(2, 3, 7)$, $(n, m) = (21, 6)$, $|G| = 2^2 3^4 7^2$, $|H| = 3^3 7^2 2$.

$G = \langle a, b, c \in G : a^2 = b^3 = c^7 = 1, abc = 1 \rangle$ y considerando la representación permutacional de G en las clases laterales izquierdas de H , como en observación 3.2.1, G/K es isomorfo a algún subgrupo de S_6 , los cuales tienen ordenes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 16, 18, 20, 24, 36, 48, 60, 72, 120, 360 y 720. Luego, estos son los valores que puede tomar $|G/K|$ pero solo son posibles 6, 12, 18 y 36 puesto que $K \leq H$.

Si $|G/K| = 6$, $K = H$. Luego $H\langle c \rangle \leq G$ y por tanto $|H \cap \langle c \rangle| = 7$. Esto es $c \in H(n)$ y así $a, b, c \in H\langle a \rangle \leq G$, lo cual no es posible.

Si $|G/K| = 12$, $|K| = 3^3 7^2$ y $c \in K$. De ahí tenemos la contradicción $a, b, c \in K\langle a \rangle$.

Si $|G/K| = 18$, $|K| = 3^2 7^2 2$ y $c \in K$. Luego $K\langle a \rangle \leq G$ tal que $a, b, c \in K\langle a \rangle$, lo cual no es posible.

Si $|G/K| = 36$, $|K| = 3^2 7^2$ y $c \in K$. Así $K\langle a \rangle \leq G$ y $a, b, c \in K\langle a \rangle$, lo cual es una contradicción.

- $(2, 3, 8)$, $(n, m) = (12, 3)$, $|G| = 3^4 2^5$, $|H| = 3^3 2^5$.

En este caso $G = \langle a, b, c \in G : a^2 = b^3 = c^7 = 1, abc = 1 \rangle$ y considerando la representación permutacional de G en las clases laterales izquierdas de H , como en observación 3.2.1, G/K es isomorfo a algún subgrupo de S_3 . Así, los posibles valores de $|G/K|$ son 1, 2, 3 y 6, de los cuales descartamos $|G/K| = 1, 2$ ya que $K \leq H$.

Si $|G/K| = 3$ entonces $H = K \trianglelefteq G$, $H\langle a \rangle$ y $H\langle c \rangle$, de donde $|H \cap \langle a \rangle| = 2$ y $|H \cap \langle c \rangle| = 8$. Es decir $a, b, c \in H$, lo cual es una contradicción. Entonces $|G/K| = 6$, de donde $|K| = 3^3 2^4$, $G/K \cong S_3$ y por teorema de correspondencia existe $L \trianglelefteq G$ tal que $L/K \cong \mathbb{Z}_3$, $|L| = 3^4 2^4$ y $K \trianglelefteq L$.

Por otra parte, como $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$ es un subgrupo característico de $(\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12}) \trianglelefteq H$, entonces $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \trianglelefteq H$ y $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \trianglelefteq K$.

Si P es un 3-subgrupo de Sylow de G entonces $|P \cap (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)| = 3^2$ y así $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \subseteq I$, donde I es la intersección de los 3-subgrupos de Sylow de G . Luego $|I| = 3^3$ o $|I| = 3^2$ ya que los subgrupos de Sylow de G $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \trianglelefteq H$ no son normales.

Si $|I| = 3^3$ entonces $|G/I| = 2^5 3$ y así G/I tiene 1 o 3 2-subgrupos de Sylow. Si solo hay un 2-subgrupo de Sylow de G/I , existe $N \trianglelefteq G$ tal que $I \subset N$ y $|N| = 3^3 2^5$, de donde $a, c \in N$. Esto es $a, b, c \in N$, lo cual es una contradicción. Entonces deben ser 3 los 2-subgrupos de Sylow de G/I .

Ahora, sea T un 2-subgrupo de Sylow de G/I y Ω_T el conjunto de clases laterales izquierdas de T en G/I . Entonces considerando el homomorfismo de representación permutacional de G/I en las clases laterales izquierdas de T .

$$\begin{aligned} \psi : G/I &\rightarrow S_3 \\ g &\mapsto \psi_g : \Omega_T \rightarrow \Omega_T \\ xT &\mapsto gxT \end{aligned}$$

tenemos que $(G/I)/\ker(\psi)$ es isomorfo a algún subgrupo de S_3 , pero la única posibilidad es $|\ker(\psi)| = 2^4$ ya que $\ker(\psi) \leq T$. Así, por teorema de correspondencia, existe $M \trianglelefteq G$ tal que $I \leq M$ y $|M| = 2^4 3^3$. Además

- i) $M \leq L$. En efecto, dado que $(M \cap L) \trianglelefteq G$, $|M \cap L| = 3^3 2^3$ o $|M \cap L| = 3^3 2^4$. En el primer caso $|G/(M \cap L)| = 12$ y como $L/(M \cap L) \trianglelefteq G/(M \cap L)$ con $|L/(M \cap L)| = 6$, entonces $G/(M \cap L) \not\cong A_4$. Es decir, $G/(M \cap L)$ es abeliano y existe $S \trianglelefteq G$ tal que $(M \cap L) \leq S$, $|S| = 3^4 2^3$ y $|G/S| = 4$. Luego $b \in S$ y así $a, b, c \in S \langle a \rangle$, lo cual no es posible. Por tanto $|M \cap L| = 3^3 2^3$ y $M \leq L$.
- ii) $M = K$. En efecto, sea $W = (M \cap K)$. Entonces dado que $W \trianglelefteq G$ y $M, K \leq L$, $|W| = 3^2 2^4$ o $|W| = 3^3 2^4$. Si $|W| = 3^3 2^3$ entonces $|G/W| = 18$ pero

$$G/W = \langle bW, cW : (bW)^3 = (cW)^2 = 1, cWbWcW = cbcW = (bW)^{-1} \rangle \cong S_3$$

y esto no es posible. Luego $|W| = 3^3 2^4$ y así $|W| = |K| = |M|$.

De i) y ii) tenemos que $I \leq M = K \trianglelefteq H$. Además $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4) \trianglelefteq H$ por ser normal característico en $(\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12}) \trianglelefteq H$. De ahí que $K = I(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)$ y $K \subseteq C_H(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)$, lo cual es una contradicción y concluimos que $|I| = 3^2$.

Por lo anterior $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) = I \trianglelefteq G$. Además $(\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12}) \subseteq C_G(I) \trianglelefteq G$ y $C_G(I) \cap H = (\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12})$, de donde $|C_G(I)| = 3^2 2^4$ o $|C_G(I)| = 3^3 2^4$ ya que $|G/H| = 3$.

Si $|C_G(I)| = 3^2 2^4$, $|G/C_G(I)| = 18$ lo cual no es posible para ningún subgrupo de G como

vimos en (ii). Luego $|C_G(I)| = 3^2 2^4$ y así $|C_G(I) \cap L| = 2^3 3^3$ o $|C_G(I) \cap L| = 2^4 3^3$. En el primer caso $|G/(C_G(I) \cap L)| = 12$ y ya vimos en (i) que este hecho no es posible para ningún subgrupo de G , entonces $|C_G(I) \cap L| = 2^4 3^3$ y $C_G(I) \leq L$, lo cual implica que $|C_G(I) \cap K| = 2^4 3^2$ y así $|G/(C_G(I) \cap K)| = 18$, pero esto es una contradicción. Por tanto este caso no es posible.

Como los casos con $m \neq 1$ nos llevan a una contradicción, tenemos que ninguno es posible. Con lo cual queda demostrado el teorema. ■

Bibliografía

- [1] AGARWAL, R. P., PERERA, K., AND PINELAS, S. *An introduction to complex analysis*. Springer, 2011.
- [2] BROUGHTON, S. A. Classifying finite group actions on surfaces of low genus. *Journal of Pure and Applied Algebra* 69, 3 (1991), 233–270.
- [3] FARKAS, H. M., AND KRA, I. *Riemann surfaces*, vol. 71 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1980.
- [4] FRALEIGH, J. B. *Abstract algebra*, 1987.
- [5] MASSEY, W. S. *A basic course in algebraic topology*, vol. 127. 1991.
- [6] MIRANDA, R. *Algebraic curves and Riemann surfaces*, vol. 5 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.
- [7] ROMERO ROJAS, M. J. Realization of group actions on compact Riemann surfaces of genus 2 and 3. *Mat. Enseñ. Univ. (N. S.)* 17, 1 (2009), 35–56.
- [8] SHAFAREVICH, I. R., AND HIRSCH, K. A. *Basic algebraic geometry*, vol. 1. Springer, 1977.
- [9] SPRINGER, G. *Introduction to Riemann surfaces*, vol. 473. Addison-Wesley Reading, Mass., 1957.
- [10] TZERMIAS, P. The group of automorphisms of the Fermat curve. *J. Number Theory* 53, 1 (1995), 173–178.