DE LAS CAMINATAS ALEATORIAS A LA ECUACIÓN DE REACCIÓN DIFUSIÓN

HUGO ADOLFO RODRÍGUEZ ARARAT

Universidad del Cauca

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación

Departamento de Matemáticas

Popayán

2015

DE LAS CAMINATAS ALEATORIAS A LA ECUACIÓN DE REACCIÓN DIFUSIÓN

HUGO ADOLFO RODRÍGUEZ ARARAT

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título en Matemáticas otorgado por la Universidad del Cauca

Aida Patricia González
Directora

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Matemáticas
Popayán
2015

Nota de Aceptación

____

____

____

Aida Patricia González
Directora

Wilmer Molina
Comité seguimiento

Jaime Tobar
Comité de seguimiento

Popayán, junio 18 de 2015

Por su amor incondicional,
dedico este trabajo a mis padres.

Agradecimientos

Doy gracias mis padres por su orientación y apoyo incondicional. A mis hermanos que siempre me ha brindado su compañía en los momentos que más los he necesitado y a mi pequeña hija, Dulce María, que siempre la llevo en mi mente y corazón.

Mi directora la profesora Aida Patricia González, a quien quiero manifestar mi más sincero agradecimiento, por sus valiosas indicaciones y por todo el tiempo que ha empleado en enseñarme e instruirme para realizar este trabajo. Así mismo, deseo expresar mi gratitud hacia los profesores Willmer Molina y Jaime Tobar por su ayuda, esfuerzo y colaboración en el desarrollo del mismo.

A mis profesores, que con sus enseñanzas han mantenido vivo en mi, ese estímulo que se necesita para culminar este ideal.

A todas las personas que de una u otra forma contribuyeron a la realización de este trabajo.

HUGO ADOLFO RODRÍGUEZ ARARAT

Universidad del Cauca
junio de 2015

Tabla de Contenido

Introducción

Si bien es cierto que históricamente los sistemas dinámicos surgen de manera natural al tratar de explicar el movimiento, tanto de los astros como el de cualquier otro cuerpo, también es cierto que con el tiempo, estas ideas han sido ampliadas y aplicadas en una gran variedad de sistemas, no sólo de origen físico, sino también biológico, económico, químico, etc. Dependiendo de las particularidades del sistema, las herramientas matemáticas adecuadas para describirlo (teóricamente) pueden ser muy diversas: ecuaciones diferenciales, ya sea ordinarias, parciales o estocásticas; mapeos acoplados, etc. Otra forma de modelar ciertos tipos de sistemas dinámicos es a partir de las ecuaciones de reacción difusión sobre las cuales haremos un pequeño estudio. Nuestro problema consiste en mostrar como de las caminatas aleatorias (proceso discreto) obtenemos una ecuación de reacción difusión (proceso continuo) con ayuda de ecuaciones en diferencias las cuales a su vez nos permiten analizar el problema de la ruina de un apostador.

Un ejemplo en la aritmética de un sistema dinámico en tiempo discreto consiste en hallar el máximo común divisor, $mcd(a,b)$ entre dos enteros positivos a y b. Se sabe que $mcd(a,b) = mcd(r,b)$, donde r es el residuo de la división de a por b. Repitiendo el procedimiento terminamos con dos números, uno es el cero y el otro es el máximo común divisor.

Sea (x_n, y_n) un par de enteros con $x_n \geqslant y_n$, siendo $x_0 = \max\{a,b\}$ y $y_0 = \min\{a,b\}$, tal que

$$x_{n+1} = y_n, \qquad y_{n+1} = res(x_n, y_n), \qquad n = 0,1,2,3,\cdots \quad ,$$

donde $res(x_n, y_n)$ es el residuo que se obtiene al dividir x_n entre y_n. Esto es, hay una función F que asigna al par $(x_n, y_n) = X_n$ el par $(x_{n+1}, y_{n+1}) = X_{n+1}$, es decir, $X_{n+1} = F(X_n)$. La secuencia $X_0, X_1, X_2, ...$ tiene la propiedad que para cualquier entero n, el par futuro $X_{n+1}, X_{n+2}, ...$ depende solamente del par X_n.

Algunos sistemas dinámicos en física se obtienen considerando las leyes de Newton. Supongamos que una partícula de masa m es movida bajo la acción de una fuerza F en línea recta, por ejemplo un sistema masa resorte que satisface la ley de Hooke. La segunda ley de Newton establece que:

$$m\ddot{x} = F$$

donde, $x = x(t)$ denota la posición de la partcúla, $\ddot{x} = \ddot{x}(t)$ denota la segunda derivada respecto al tiempo. Se asume que la fuerza F depende solo de la posición y la velocidad, esto es, $F(x, \dot{x})$. El estado de la partícula en un tiempo t es descrito por el par, $X(t) = (x(t), \dot{x}(t))$. No es difícil ver que para cualquier t la futura trayectoria, $X(s)$ con $s \geqslant t$, puede ser especificada por $X(t)$. En otras palabras, los estados pasados no son necesarios.

Las cadenas de Markov generalizan este concepto de dependencia del futuro solo del presente y un ejemplo particular de estas son las llamadas caminatas aleatorias. El siguiente estudio tendrá como eje principal establecer una relación matemática entre la teoría de caminatas aleatorias, ecuaciones en diferencias y la ecuación de reacción difusión, para ello se hará una revisión bibliográfica de ésta teoría y se mostrarán algunos resultados importantes de los tópicos.

El primer capítulo daremos una breve introducción al estudio de ecuaciones en diferencias, veremos conceptos y definiciones básicas, nos centraremos en el estudio de las ecuaciones en diferencias de primer y segundo orden. En el segundo capítulo veremos lo que es una caminata aleatoria como proceso estocástico, veremos algunos ejemplos y aplicaciones. En el tercer y último capítulo nuestro propósito será el construir un modelo continuo (ecuación de reacción difusión) como un limite de una caminata aleatoria (proceso estocástico simple) el cual es un modelo discreto. Durante el proceso veremos como la ecuación de reacción difusión puede ser aproximada por medio de una ecuación en diferencias y hablaremos de la importancia de la ecuación de reacción difusión.

Capítulo 1

Ecuaciones en diferencias

En la vida cotidiana nos encontramos con algunos problemas en los cuales muchas veces usamos variables que toman valores discretos, ejemplo de esto es el tiempo ya que es común realizar mediciones regulares a la hora de controlar un experimento. Para este tipo de modelos discretos, una de las herramientas más adecuadas para analizarlos son las ecuaciones en diferencias.

El campo de las ecuaciones en diferencias tiene una gran variedad de aplicaciones. El moderno desarrollo de las ecuaciones en diferencias se origina con una biografía de Poincaré publicada en 1985. La teoría de ecuaciones en diferencias, los métodos usados y su amplia aplicación han progresado a tal punto que ocupan una posición privilegiada en el análisis aplicado. De hecho en los últimos años, centenas de artículos de investigación y varias monografrías han sido presentados en muchas conferencias internacionales. El estudio de las ecuaciones en diferencias a atraído el interés de los matemáticos, científicos, ingenieros y otros profesionales. Esto es quizás debido a la disponibilidad de computadoras de alta velocidad y las numerosas aplicaciones de las ecuaciones en diferencias a la ingeniería, la economía, las ciencias (tales como la física, la química, la biología, la probabilidad y estadística) y también debido a la analogía de la teoría con las ecuaciones diferenciales. Una diferencia principal entre ecuaciones en diferencias y ecuaciones diferenciales es que las ecuaciones en diferencias son ecuaciones que involucran cambios discretos de una función desconocida, mientras que las ecuaciones diferenciales involucran cambios de razones instantáneas de una función desconocida. Por lo tanto, la teoría y soluciones de ecuaciones en diferencias en muchos sentidos son paralelos a la teoría y soluciones de las ecuaciones diferenciales.

En este capítulo daremos una breve introducción a su estudio, veremos conceptos y definiciones básicas, y nos centraremos en el estudio de las ecuaciones en diferencias de primer y segundo orden.

En el desarrollo de este capítulo llamaremos t a la variable independiente. Generalmente t representa el numero de pasos (años, meses, días,...) que han transcurrido desde un momento inicial t_0. Del mismo modo $y = \{y_0, y_1, y_2, \ldots, y_t, \ldots\}$ es una sucesión donde y_t corresponde a un valor de t. Será un capítulo esencialmente expositivo, incluyendo solamente aquellas demostraciones que se consideran relevantes para el posterior desarrollo del trabajo.

1.1 Términos básicos

Definición 1.1.1 *Una **función de una variable** f, es una relación entre dos conjuntos, A y B, de tal manera que si x es un elemento del conjunto A, hay un elemento único en el conjunto B, llamado $f(x)$ el cual se dice que es la imagen de x. El conjunto A se llama el dominio de f y el conjunto formado por cada una de la imágenes de los elementos de A, es llamado el rango de f. Si un elemento del dominio de una función f se denota por x (variable independiente) y su elemento correspondiente en el rango se denota por y, se puede escribir:*

$$y = f(x)$$

Definición 1.1.2 *Una **sucesión** es una función cuyo dominio es el conjunto de los números enteros no negativos. En otra palabras, una sucesión es una función f, cuyo dominio es el conjunto $\mathbb{N}_0$ o un subconjunto de este, a un conjunto S, de objetos tales como $\{s_1, s_2, \ldots\}$ o $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ donde $n \in \mathbb{N}$; el resultado podría ser una sucesión infinita o finita.*

Definición 1.1.3 *Dos sucesiones $\{a_t\}$ y $\{b_t\}$, con $t \in \mathbb{N}_0$ son **linealmente dependientes** si existen constantes A y B distintas de cero, tales que*

$$Aa_t + Bb_t = 0,$$

*para todo $t \in \mathbb{N}_0$. De otra forma se dice que las sucesiones son **linealmente independientes**.*

Definición 1.1.4 *El **Casoratian** de dos sucesiones $\{a_t\}$ y $\{b_t\}$, con $t \in \mathbb{N}_0$ se denota como $C(a_t, b_t)$ y se define como el determinante*

$$C(a_t, b_t) = \begin{vmatrix} a_t & b_t \\ a_{t+1} & b_{t+1} \end{vmatrix} \tag{1.1}$$

Definición 1.1.5 *Dada una función f y un entero positivo n, llamamos* ***ecuación en diferencias*** *a una expresión del tipo*

$$f(t, y_t, y_{t+1}, \ldots, y_{t+n-1}, y_{t+n}) = 0 \tag{1.2}$$

Definición 1.1.6 *Una* ***solución de la ecuación en diferencias*** *(1.2) es toda sucesión $y = \{y_0, y_1, y_2, ...\}$ que la cumpla. El conjunto de todas las soluciones recibe el nombre de solución general. Esta solución general presenta cierto número de parámetros que pueden determinarse a partir de las condiciones iniciales, dando lugar a diferentes soluciones particulares.*

Ejemplo 1.1.7
La sucesión $y = \{3^t\}$, con $t \in \mathbb{N}_0$ es solución de la ecuación en diferencias

$$y_{t+1} - 3y_t = 0$$

ya que

$$y_{t+1} - 3y_t = 3^{t+1} - 3(3^t) = 3^{t+1} - 3^{t+1} = 0.$$

Definición 1.1.8 *Una ecuación en diferencias de la forma:*

$$f_0(t)y_{t+n} + f_1(t)y_{t+n-1} + \cdots + f_{n-1}(t)y_{t+1} + f_n(t)y_t = f(t) \tag{1.3}$$

donde f y f_i con $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, son funciones de t denominadas coeficientes de la ecuación en diferencias, es llamada lineal. Si una ecuación en diferencias no es lineal, se le llama no lineal.
La ecuación en diferencias lineal (1.3) es de orden n, si tanto $f_0(t)$ y $f_n(t)$ son diferentes de cero para todo t. En otras palabras, el orden de una ecuación en diferencias de la forma (1.3), es la diferencia entre el más alto y el más bajo de los índices que afectan a la sucesión y. Si $f(t)$ en el lado derecho de (1.3) es cero, entonces (1.3) es llamada ecuación en diferencias lineal homogénea de orden n; de otra manera es llamada no homogénea.

Ejemplos 1.1.9

- **a.** La expresión $2y_{t+3} + 3y_t = t + 1$ es una ecuación en diferencias de orden $t + 3 - t = 3$, es decir, de tercer orden.

- **b.** Supongamos que una población de insectos crece el triple en cada periodo de tiempo que transcurre entre dos mediciones, de lo que creció en el periodo inmediatamente anterior. Si llamamos y_t al número de individuos en el instante t del enunciado anterior se deduce:

$$y_{t+2} - y_{t+1} = 3(y_{t+1} - y_t),$$

esto es

$$y_{t+2} - 4y_{t+1} + 3y_t = 0.$$

La cual es una ecuación en diferencias de orden 2. Mas adelante resolveremos este tipo de ecuaciones.

Ejemplos 1.1.10

- $7y_{t+1} - 8y_t = 0$, es lineal y homogénea de orden 1.
- $y_{t+2} - 6y_t = 2t$, es lineal y no homogénea de orden 2.
- $5y_{t+2} - y_t^3 = 0$, es no lineal y homogénea de orden 2.
- $ty_{t+2} - 7y_{t+1} + 3y_t = 0$, es lineal y homogénea de orden 2.
- $y_{t+2} + 6y_{t+1}y_t = 2t + 5$, es no lineal y no homogénea de orden 2.

Consideremos ahora una ecuación en diferencias de orden n definida en (1.3). El siguiente teorema garantiza la existencia y unicidad de la solución de la ecuación en diferencias.

Teorema 1.1.11 *Dados n valores consecutivos $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$, la ecuación lineal en diferencias de orden n:*

$$f_0(t)y_{t+n} + f_1(t)y_{t+n-1} + \cdots + f_{n-1}(t)y_{t+1} + f_n(t)y_t = f(t) \tag{1.4}$$

tiene una única solución y.

Demostración.
Probaremos por inducción matemática que los valores de y en cada punto t de $S \subseteq \mathbb{N}_0$ están determinados de forma única, así demostraremos que hay una única solución. Mostremos que y_n esta determinado de forma única. Para $t = 0$ en (1.4) tenemos

$$f_0(0)y_n + f_1(0)y_{n-1} + \cdots + f_{n-1}(0)y_1 + f_n(0)y_0 = f(0).$$

Como $f_0(0) \neq 0$ podemos despejar y_n para obtener

$$y_n = \frac{f(0)}{f_0(0)} - \frac{f_1(0)}{f_0(0)}y_{n-1} - \cdots - \frac{f_{n-1}(0)}{f_0(0)}y_1 - \frac{f_n(0)}{f_0(0)}y_0.$$

Como $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ son conocidos entonces y_n esta determinado de forma única. Ahora supongamos que y es conocida para cada $t = 0, 1, \ldots, n, n+1, \ldots, j$ con $j \geq n$, completaremos la prueba mostrando que el valor y_{j+1} esta determinado de forma única. Escribiendo (1.4) con $t = t_0 = j + 1 - n$ obtenemos

$$f_0(t_0)y_{j+1} + f_1(t_0)y_j + \cdots + f_{n-1}(t_0)y_{j-n+2} + f_n(t_0)y_{j-n+1} = f(t_0).$$

Como $f_0(t_0) \neq 0$ despejando y_{j+1} tenemos

$$y_{j+1} = \frac{f(0)}{f_0(t_0)} - \frac{f_1(t_0)}{f_0(t_0)}y_j - \cdots - \frac{f_{n-1}(t_0)}{f_0(t_0)}y_{j-n+2} - \frac{f_n(t_0)}{f_0(t_0)}y_{j-n+1}.$$

Lo que demuestra que y esta determinado de forma única dados $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$.
Si los primeros n valores dados de la sucesión y son $y_m, y_{m+1}, \ldots, y_{m+n-1}$ con $m > n$, podemos de forma sucesiva determinar los valores $y_{m-1}, y_{m-2}, \ldots, y_1, y_0$ y luego mostrar que todos los demás valores de y también están determinados de forma única.

- **a.** Para $t = m - 1$ en (1.4) tenemos:

  $$f_0(m-1)y_{m+n-1} + f_1(m-1)y_{m+n-2} + \cdots + f_{n-1}(m-1)y_m + f_n(m-1)y_{m-1} = f(m-1).$$

  Como $f_n(m-1) \neq 0$ despejando y_{m-1} tenemos

  $$y_{m-1} = \frac{f(m-1)}{f_n(m-1)} - \frac{f_0(m-1)}{f_n(m-1)}y_{m+n-1} - \frac{f_1(m-1)}{f_n(m-1)}y_{m+n-2} - \cdots - \frac{f_{n-1}(m-1)}{f_n(m-1)}y_m.$$

  De forma análoga se prueba que $y_{m-2}, \ldots, y_1, y_0$ están determinados de forma única.

- **b.** Como $f_0(m) \neq 0$, para $t = m$ en (1.4)

  $$f_0(m)y_{m+n} + f_1(m)y_{m+n-1} + \cdots + f_{n-1}(m)y_{m+1} + f_n(m)y_m = f(m).$$

  $$y_{m+n} = \frac{f(0)}{f_0(m)} - \frac{f_1(m)}{f_0(m)}y_{m+n-1} - \cdots - \frac{f_{n-1}(m)}{f_0(m)}y_{m+1} - \frac{f_n(m)}{f_0(m)}y_m,$$

  esto prueba que y_{m+n} es único.

- **c.** Supongamos que y es conocida para todo $t \in S$ hasta e incluyendo y_{m+i} con $i \geq n$, determinemos el valor de y_{m+i+1}. Escribiendo (1.4) con $t = t_1 = m+i+1-n$ obtenemos

  $$f_0(t_1)y_{m+i+1} + f_1(t_1)y_{m+i} + \cdots + f_{n-1}(t_1)y_{m+i-n+2} + f_n(t_1)y_{m+i-n+1} = f(t_1).$$

  Luego

  $$y_{m+i+1} = \frac{f(t_1)}{f_0(t_1)} - \frac{f_1(t_1)}{f_0(t_1)}y_{m+i} - \cdots - \frac{f_{n-1}(t_1)}{f_0(t_1)}y_{m+i-n+2} - \frac{f_n(t_1)}{f_0(t_1)}y_{m+i-n+1}.$$

En cualquier caso, si S es un conjunto finito o infinito y sin importar cuales sean los n valores consecutivos dados de y, tenemos un único valor de y para cada $t \in S$ y por lo tanto, hay una única solución que satisface la ecuación en diferencias[1]. ■

Nota 1.1.12 *En adelante, supondremos que* t *tomará los valores en el conjunto* $\{0, 1, 2, \ldots\}$ *salvo se especifique lo contrario.*

A continuación presentaremos algunos ejemplos de ecuaciones en diferencias lineales.

Ejemplo 1.1.13
Resolvamos el problema valor inicial

$$\begin{gathered} y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 0, \\ y_0 = 1,\ y_1 = 2. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Solución
Se cumplen las hipótesis del Teorema (1.1.11), por lo tanto existe una única solución al problema de valor inicial. Para $t = 0, 1, 2, \ldots$ tenemos que:

$$\begin{gathered} t = 0,\ y_2 - 3y_1 + 2y_0 = 0 \Rightarrow y_2 = 3y_1 - 2y_0 = 6 - 2 = 4 = 2^2, \\ t = 1,\ y_3 - 3y_2 + 2y_1 = 0 \Rightarrow y_3 = 3y_2 - 2y_1 = 12 - 4 = 8 = 2^3, \\ t = 2,\ y_4 - 3y_3 + 2y_2 = 0 \Rightarrow y_4 = 3y_3 - 2y_2 = 24 - 8 = 16 = 2^4. \end{gathered}$$

Y así sucesivamente, podemos afirmar que la única solución de (1.5) es $y = 2^t$.
Demostremos que y satisface (1.5).

- **a.** Es solución ya que:

$$y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 2^{t+2} - 3(2^{t+1}) + 2(2^t) = 4(2^t) - 6(2^t) + 2(2^t) = 0.$$

- **b.** La sucesión y satisface las condiciones iniciales:

$$y_0 = 2^0 = 1\ y_1 = 2^1 = 2.$$

■

Ejemplo 1.1.14
El problema de valor inicial

$$\begin{gathered} ty_{t+2} - y_t = 0, \\ y_0 = 1,\ y_1 = 0. \end{gathered} \tag{1.6}$$

No tiene solución, puesto que si suponemos que tiene una solución, y, entonces para $t = 0$, tenemos:

$$0y_{0+2} - y_0 = 0,$$

esto es $y_0 = 0$, lo que contradice las condiciones iniciales dadas.

[1]La anterior demostración esta basada en una que se encuentra en el libro [Goldberg, pág 61] y se le hicieron algunos aportes.

Ejemplo 1.1.15
La ecuación en diferencias

$$ty_{t+1} - y_t = 0, \tag{1.7}$$

es lineal y de orden 1. Demostremos que:

- **a.** Para $t = 0$, si $y_0 = 0$, y_1 no esta determinado de forma única y existen infinitas soluciones.

- **b.** Si el valor de y, para cualquier valor de t diferente de 0 es conocido, existe una única solución.

Solución

- **a.** Si $y_0 = 0$, para $t = 0$ en (1.7), tenemos

$$0y_{0+1} - 0 = 0$$

$$0y_1 = 0,$$

luego, y_1 puede tomar cualquier valor, sea $y_1 = C$ con C una constante, usando (1.7) hallamos

$$y_2 = C,\ y_3 = \frac{C}{2},\ y_4 = \frac{C}{6},\ y_5 = \frac{C}{24}, \ldots,\ y_t = \frac{C}{(t-1)!}, \ldots.$$

Como C es una constantes arbitraria, existen infinitas soluciones de la forma $y = \{y_t\}$ donde $y_t = \frac{C}{(t-1)!}$, con $t = 1, 2, \ldots$ y $y_0 = 0$.

- **b.** Sean $a \in \{1, 2, \ldots\}$, A una constante arbitraria conocida y $t = 1, 2, \ldots$, entonces el problema asociado a (1.7) con condición inicial en $t = a$, se transforma en:

$$\begin{aligned} ty_{t+1} - y_t &= 0, \\ y_a &= A. \end{aligned} \tag{1.8}$$

el cual tiene una solución de la forma $y = \{y_t\}$ con

$$y_t = A\frac{(a-1)!}{(t-1)!}, \text{ con } t = 1, 2, \ldots,$$

la cual es única ya que se cumplen las hipótesis del Teorema (1.1.11).

  - **I.** Es solución ya que:

$$ty_{t+1} - y_t = At\frac{(a-1)!}{t!} - A\frac{(a-1)!}{(t-1)!} = A(a-1)!\left(\frac{t}{(t)!} - \frac{1}{(t-1)!}\right) = 0.$$

– **II.** La sucesión y satisface la condición inicial:

$$y_a = A\frac{(a-1)!}{(a-1)!} = A. \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 1.1.16
Consideremos la ecuación en diferencias de orden 2

$$y_{t+2} - ty_{t+1} - y_t = 0. \tag{1.9}$$

Demostremos que no existe una solución para la cual $y_0 = 0$ y $y_2 = 1$ y además que si los valores y_0 y y_2 son iguales (por ejemplo $y_0 = y_2 = 1$), existen infinitas soluciones para la ecuación en diferencias lo cual no contradice el Teorema (1.1.11) dado que los valores conocidos no son consecutivos.
Para demostrarlo supongamos que $y_0 = 0,\ y_2 = 1$ y existe una solución y para el problema de valor inicial (1.9), entonces para $t = 0$ tenemos:

$$y_{0+2} - 0y_1 - y_0 = 0,$$

esto es $y_2 = y_0$, lo que contradice las condiciones iniciales dadas. Por tanto no existe solución.
Si $y_0 = y_2 = 1$, y $y_1 = C$, con C una constante arbitraria, entonces el problema (1.9) tiene infinitas soluciones de la forma

$$y = \{1, C, 1, 1 + C, 3 + 2C, 10 + 7C, 50 + 35C, 350 + 245C, \ldots\}.$$

Con este ejemplo pretendemos ilustrar la importancia de las hipótesis del Teorema (1.1.11) donde se puede perder unicidad a causa de no tener valores consecutivos prescritos de la solución.

1.2 Ecuación en diferencias lineal de primer orden

En esta sección daremos una definición formal de ecuación en diferencias lineal de primer orden. Y además enunciaremos algunos teoremas relacionados con la solución para la ecuación homogénea y no homogénea.

Definición 1.2.1 *Una ecuación en diferencias lineal de primer orden es aquella que puede expresarse como*

$$f_0(t)y_{t+1} + f_1(t)y_t = f(t) \tag{1.10}$$

donde $f_0(t)$, $f_1(t)$ y $f(t)$ son funciones en la variable discreta t. Si la función $f(t)$ es nula, entonces la ecuación en diferencias lineal recibe el nombre de ecuación homogénea asociada a (1.10). Cuando $f_0(t)$ y $f_1(t)$ son constantes, se dice que la ecuación lineal es de coeficientes constantes.

Nota 1.2.2 *Este tipo de ecuaciones es interesante en el estudio de la dinámica de poblaciones; suelen aparecer así:*

$$y_{t+1} = f(t)y_t + g(t)$$

donde $f(t)y_t$ representa el crecimiento de la población en el tiempo t y $g(t)$ el número de individuos que en el tiempo t se incorporaron a la población como consecuencia de la migración.

Ejemplo 1.2.3
Supongamos que una determinada población de insectos con 100 individuos, duplica su número en cada generación y además, 10 nuevos individuos se incorporan en cada generación procedente de otro lugar.
Del enunciado anterior se deduce:

$$y_0 := y(0) = 100, \quad y_t = 2y_{t-1} + 10.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
y_1 &= 2(100) + 10, \\
y_2 &= 2^2(100) + 2(10) + 10, \\
y_3 &= 2^3(100) + 2^2(10) + 2(10) + 10, \ldots \\
y_t &= 2^t(100) + 2^{(t-1)}(10) + \ldots + 2(10) + 10 \\
&= 2^t(100) + 10\sum_{n=0}^{t-1} 2^n \\
&= 2^t(100) + 10(2^t - 1) \\
&= 2^t(110) - 10.
\end{aligned}$$

Luego la solución es $\boxed{y_t = 2^t(110) - 10}$.

Ejemplo 1.2.4
Resolvamos la ecuación lineal homogénea de primer orden con coeficientes constantes:

$$y_{t+1} - 5y_t = 0. \tag{1.11}$$

Solución Reescribimos (1.11) como:

$$y_{t+1} = 5y_t.$$

Los valores de y_{t+1} pueden ser hallados recursivamente así:

$$y_1 = 5y_0, \quad y_2 = 5y_1 = 5^2y_0, \quad y_3 = 5y_2 = 5^3y_0, \ldots$$

Por inducción matemática se puede demostrar que la solución es de la forma $y_t = 5^ty_0$. Si conocemos el valor de y_0 podemos determinar completamente la única solución.

1.2.1 La ecuación $y_{t+1} = Ay_t + B$

Si dividimos la ecuación en diferencias de primer orden (1.10) por $f_0(t)$ y despejamos y_{t+1}, obtenemos:

$$y_{t+1} = -\frac{f_1(t)}{f_0(t)} y_t + \frac{f(t)}{f_0(t)}$$

Si asumimos que f_0 y f_1 son constantes, podemos escribir la ecuación en la forma

$$y_{t+1} = Ay_t + B, \tag{1.12}$$

con A y B son constantes y $A \neq 0$.

A continuación enunciaremos el teorema que establece la expresión para la solución general de una ecuación en diferencias lineal de primer orden con coeficientes constantes dependiendo del dato inicial y_0.

Teorema 1.2.5 *La sucesión $y = \{y_t\}$ con*

$$y_t = \begin{cases} A^t y_0 + B\frac{1-A^t}{1-A}, & si\ A \neq 1; \\ y_0 + Bt, & si \quad A = 1, \end{cases} \tag{1.13}$$

es la única solución de la ecuación en diferencias (1.12) conocido y_0.

Demostración. Para ver un bosquejo de la prueba ver [Goldberg, pág. 64] ■

Corolario 1.2.6 *Si $y = \{y_t\}$ es una solución de la ecuación en diferencias (1.12), entonces existe una constante C tal que*

$$y_t = \begin{cases} CA^t + B\frac{1-A^t}{1-A}, & si \quad A \neq 1; \\ C + Bt, & si \quad A = 1. \end{cases} \tag{1.14}$$

Nota 1.2.7 *La fórmula (1.14) nos proporciona todas las soluciones de la ecuación en diferencias (1.12), una solución por cada valor arbitrario de C.*

Mostraremos ejemplos donde se usan las expresiones dadas en el teorema y el corolario, y observaremos la naturaleza de la solución.

Ejemplos 1.2.8

- **a.** Dada la siguiente ecuación en diferencias

$$y_{t+1} = 2y_t + 1,$$

con la condición inicial $y_0 = 5$, por (1.13) y con $A = 2, B = 1$, hallamos la única solución

$$y_t = 5(2^t) + 1\frac{1-2^t}{1-2} = 6(2^t) - 1.$$

Como podemos observar, y es la sucesión $\{5, 11, 23, 47, 95, \ldots\}$, la cual es creciente.

- **b.** Consideremos la ecuación en diferencias

$$2y_{t+1} - y_t = 4,$$

con la condición inicial $y_0 = 3$, si reescribimos la ecuación en la forma (1.12):

$$y_{t+1} = \frac{1}{2}y_t + 2,$$

por (1.13), con $A = \frac{1}{2}$ y $B = 2$, hallamos la solución

$$y_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t (3) + 2\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^t}{1-\frac{1}{2}} = 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^t.$$

En esta caso la solución es una sucesión cuyos valores crecen indefinidamente pero son menores que 4.

- **c.** Dada la ecuación en diferencias

$$y_{t+1} = -y_t + 1,$$

con la condición inicial $y_0 = 1$. Por (1.13), $A = -1$ y $B = 1$, hallamos

$$y_t = (-1)^t + \frac{1-(-1)^t}{1-(-1)} = \frac{1}{2}\left[1 + (-1)^t\right].$$

Es decir tenemos una solución y que toma valores en el conjunto $\{0, 1\}$.

- **d.** La ecuación en diferencias

$$y_{t+1} = 2y_t - 1,$$

con la condición inicial $y_3 = 9$, tiene la siguiente solución

$$y_t = C(2^3) - \frac{1-2^3}{1-2} = 8C - 7,$$

dada por (1.14) para $t = 3$, $A = 2$ y $B = -1$. Si escogemos $C = 2$ tenemos que la solución es de la forma:

$$y_t = 2(2^t) - \frac{1-2^t}{1-2} = 2^t + 1.$$

Esto nos muestra que no se requiere que el valor conocido (condición inicial) sea y_0 para poder determinar la solución de forma única. Además, es posible probar que una ecuación en diferencias puede ser definida para un conjunto diferente a $\mathbb{N}_0$.

Teorema 1.2.9 *La ecuación en diferencias de primer orden*

$$y_{t+1} = Ay_t + B, \quad \text{con } t = a, a+1, a+2, \ldots \tag{1.15}$$

donde A y B son constantes, $A \neq 0$ y a es un número entero no negativo, sobre el conjunto indicado para los valores de t tiene infinitas soluciones. Si y es una solución, existe una constante C tal que $y = \{y_t\}$ con

$$y_t = \begin{cases} CA^{t-a} + B\frac{1-A^{t-a}}{1-A}, & \text{si} \quad A \neq 1; \\ C + B(t-a), & \text{si} \quad A = 1, \end{cases} \tag{1.16}$$

para $t = a, a+1, a+2, \ldots$. Si un valor de y es conocido para alguno de los valores de t, entonces hay una única solución. En particular, si y_a es conocido la única solución de (1.15) es dada por (1.16) con $C = y_a$.

Demostración. Para ver un bosquejo de la prueba ver [Goldberg, pág. 67] ∎

Teorema 1.2.10 *Consideremos la ecuación en diferencias lineal de primer orden con coeficientes constantes*

$$y_{t+1} + a_1 y_t = f(t). \tag{1.17}$$

- ***a.*** *La sucesión $y^{(h)} = \{y_t^{(h)}\}$ donde $y_t^{(h)} = C(-a_1)^t$, con C una constante arbitraria, es la solución general de la ecuación homogénea asociada a (1.17).*

- ***b.*** *Si y^p es una solución particular de la ecuación (1.17), entonces $y^{(h)} + y^{(p)}$ es la solución general de (1.17). Esto es, si $y = \{y_t\}$ es la solución de (1.17), existe un valor de C para el cual*

$$y_t = C(-a)^t + y_t^{(p)}.$$

Demostración. Ver [Goldberg, pág. 125] ∎

1.3 Ecuación en diferencias lineales de segundo orden

Definición 1.3.1 *Una ecuación en diferencias lineal de segundo orden es aquella que puede expresarse como*

$$f_0(t)y_{t+2} + f_1(t)y_{t+1} + f_2(t)y_t = f(t), \tag{1.18}$$

donde $f_i(t)$ y $f(t)$ son funciones en la variable discreta t, $i = 0, 1, 2$. Si la función $f(t)$ es nula, entonces (1.18) es una ecuación lineal en diferencias homogénea. Si todas las $f_i(t)$ son constantes, entonces (1.18) es una ecuación en diferencias de segundo orden con coeficientes constantes.

Teorema 1.3.2 *Si $y^{(1)}, y^{(2)}$ son dos soluciones de la ecuación homogénea asociada a (1.18) entonces $Ay^{(1)}+By^{(2)}$, con A, B constantes es también solución de la homogénea.*

Demostración. La demostración se obtiene al reemplazar directamente el término $Ay_t^{(1)} + By_t^{(2)}$ en la ecuación. ■

Teorema 1.3.3 *Si $y^{(1)}, y^{(2)}$ son dos soluciones de*

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = 0, \tag{1.19}$$

con a_1 y a_2 constantes, entonces el Casoratian $C(y_t^{(1)}, y_t^{(2)})$ nunca es cero o es cero para todo t.

Demostración. Un bosquejo de la prueba se encuentra en [Finizio, pág. 360] ■

Teorema 1.3.4 *Dos soluciones $y^{(1)}$ y $y^{(2)}$ de la ecuación en diferencias (1.19) son linealmente independientes si y solo si el Casoratian*

$$C(y_t^{(1)}, y_t^{(2)}) = \begin{vmatrix} y_t^{(1)} & y_t^{(2)} \\ y_{t+1}^{(1)} & y_{t+1}^{(2)} \end{vmatrix}$$

es diferente de cero para todo t.

Demostración. Para ver un bosquejo de la prueba ver [Finizio, pág. 361] ■

Teorema 1.3.5 *Si $y^{(1)}, y^{(2)}$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (1.19), entonces la solución general de la ecuación es $C_1 y^{(1)} + C_2 y^{(2)}$, con C_1 y C_2 constantes arbitrarias.*

Demostración. Para ver un bosquejo de la prueba ver [Goldberg, pág. 131] ∎

Teorema 1.3.6 *Si $y^{(1)}$, $y^{(2)}$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación en diferencias homogénea de orden dos (1.19) y $y^{(p)}$ una solución particular de la ecuación no homogénea*

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = f(t), \tag{1.20}$$

entonces la solución general de la ecuación (1.20) es de la forma
$y_t = C_1 y_t^{(1)} + C_2 y_t^{(2)} + y_t^{(p)}$, *con C_1 y C_2 constantes arbitrarias.*

Demostración. Para ver un bosquejo de la prueba ver [Goldberg, pág. 132] ∎

Teorema 1.3.7 *Si $y^{(c)}$ es una solución de la ecuación en diferencias no homogénea (1.20) y $y^{(h)}$ es solución de la ecuación homogénea asociada, entonces $y_t^{(h)} + y_t^{(c)}$ es solución de (1.20).*

Demostración. Para ver un bosquejo de la prueba ver [Goldberg, pág. 124] ∎

Nota 1.3.8 *Dos soluciones, $y^{(1)}$ y $y^{(2)}$ de (1.19) que sean linealmente independientes se dice que forman un conjunto (o sistema) fundamental de soluciones de (1.19).*

Ejemplo 1.3.9
La ecuación en diferencias

$$y_{t+2} - 8y_{t+1} + 15y_t = 16, \tag{1.21}$$

tiene una solución particular dada por $y_t^{(p)} = 2$, que podemos verificar fácilmente. De forma similar, podemos demostrar que la ecuación en diferencias homogénea asociada a (1.21) tiene dos soluciones $y^{(1)}$ y $y^{(2)}$ dadas por

$$y_t^{(1)} = 3^t \text{ y } y_t^{(2)} = 5^t$$

Estas dos soluciones forman un conjunto fundamental ya que

$$C(3^t, 5^t) = \begin{vmatrix} 3^t & 5^t \\ 3^{t+1} & 5^{t+1} \end{vmatrix} = 3^t(5^{t+1}) - 5^t(3^{t+1}) = 5(3^t * 5^t) - 3(5^t * 3^t) = 2(3^t * 5^t),$$

es diferente de 0 para todo t. De aquí, por el Teorema (1.3.5) y (1.3.6)

$$y_t^{(h)} = C_1 3^t + C_2 5^t$$

es la solución de la ecuación homogénea asociada a (1.21) y

$$y_t = C_1 3^t + C_2 5^t + 2, \tag{1.22}$$

es la solución general de (1.21).
Si deseamos obtener una solución de (1.21) para la cual $y_0 = 0$ y $y_1 = 1$, determinamos los valores de C_1 y C_2 de la siguiente manera:
Para $t = 0$ y $t = 1$ en (1.22) y usando las condiciones iniciales, tenemos

$$0 = C_1 + C_2 + 2$$

$$1 = 3C_1 + 5C_2 + 2$$

Resolviendo el sistema 2×2, hallamos que $C_1 = \frac{-9}{2}$ y $C_2 = \frac{5}{2}$. Así la solución dada por $y_t = \frac{-9}{2}3^t + \frac{5}{2}5^t + 2$, satisface la ecuación en diferencias (1.21) y las condiciones iniciales $y_0 = 0$ y $y_1 = 1$.

1.3.1 Solución de la ecuación $y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = f(t)$

En vista del Teorema (1.3.5) el problema de hallar una solución general de la ecuación (1.19) se reduce a hallar dos soluciones que formen un conjunto fundamental.

Teorema 1.3.10 *Dada la ecuación de segundo orden*

$$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = 0, \tag{1.23}$$

donde a_1 y a_2 son constantes. Si m_1 y m_2 son las raíces de la ecuación auxiliar

$$m^2 + a_1 m + a_2 = 0, \tag{1.24}$$

entonces la solución general $y = \{y_t\}$ de la ecuación (1.23) esta dado por
Caso 1.

$$y_t = C_1 m_1^t + C_2 m_2^t, \tag{1.25}$$

cuando m_1 y m_2 son números reales distintos.
Caso 2.

$$y_t = (C_1 + C_2 t) m_1^t, \tag{1.26}$$

cuando m_1 y m_2 son iguales.
Caso 3.

$$y_t = A r^t \cos(t\theta + B), \tag{1.27}$$

cuando m_1 y m_2 son números complejos conjugados con forma polar

$$r(\cos\theta \pm i \sin\theta).$$

Ejemplo 1.3.11

Resolvamos la llamada ecuación en diferencias de Fibonacci:

$$y_{t+2} = y_{t+1} + y_t$$

Solución La ecuación característica de la anterior ecuación es $r^2 - r - 1 = 0$, que tiene dos raíces reales distintas:

$$r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ y } r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Por tanto, la solución general de la ecuación de Fibonacci es $y = \{y_t\}$, donde

$$y_t = c_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t + c_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t,$$

con c_1 y c_2 constantes arbitrarias. ■

Ejemplo 1.3.12
Hallemos la solución general de la ecuación en diferencias lineal de segundo orden con coeficientes constantes:

$$4y_{t+2} + 4y_{t+1} + y_t = 0.$$

Solución La ecuación característica de la anterior ecuación es $4r^2 + 4r + 1 = 0$, la cual tiene raíz real de multiplicidad dos $r = -\frac{1}{2}$. Por tanto, la solución general de la ecuación es de la forma:

$$y_t = (c_1 + c_2 t)\left(-\frac{1}{2}\right)^t,$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. ■

Ejemplo 1.3.13
Hallemos la solución general de la ecuación en diferencias lineal de segundo orden con coeficientes constantes:

$$4y_{t+2} + 4y_t = 0 \tag{1.28}$$

Solución La ecuación característica de la anterior ecuación es $r^2 + 4 = 0$, la cual tiene raíces complejas conjugadas $r_1 = 2i$ y $r_2 = -2i$. Aplicando coordenadas polares, sabemos que para un numero complejo $a + bi$, se puede escribir de de la forma:

$$a + bi = \rho(\cos\theta + i\sin\theta),$$

con $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$, $\theta = arctan(b/a)$, $-\pi < \theta < \pi$.
Luego, $r_1 = 2(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2))$ y $r_2 = 2(\cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2))$. Por consiguiente, la solución general de (1.28), es de la forma:

$$y_t = c_1 2^t \cos\left(\frac{t\pi}{2} + c_2\right),$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. ■

Existen diferentes métodos para encontrar una solución particular de una ecuación en diferencias no homogénea de segundo orden, entre ellos, el método de variación de parámetros, el de coeficientes indeterminados, entre otros. El más simple de estos, es el método de coeficientes indeterminados mediante el cual se deduce una solución particular a partir de la forma del término no homogéneo f.

El método de coeficientes indeterminados puede ser aplicado sucesivamente cuando la función f es una combinación lineal finita de sumas y productos de funciones con los siguientes valores:

$$a^t,\ \sin(bt),\ \cos(bt),\ t^n,$$

donde a y b son constantes arbitrarias y n es un entero no negativo. Si la función f, es la suma de diferentes funciones, cada función deberá ser abordada separadamente. Si la posible solución incluye una función que es también solución de la ecuación homogénea asociada, entonces multiplicamos por t y el resultado será nuestra nueva posible solución. Si ocurre lo mismo multiplicamos una segunda vez por t.

La siguiente tabla nos muestra la forma de la posible solución correspondiente a algunas funciones simples f.

$f(t)$	**Posible solución** $y_t^{(p)}$
a^t	Aa^t
$sin(bt)$ ó $cos(bt)$	$A\sin(bt)+B\cos(bt)$
t^n	$A_0+A_1t+\cdots+A_nt^n$
t^na^t	$a^t(A_0+A_1t+\cdots+A_nt^n)$
$a^t\sin(bt)$ ó $a^t\cos(bt)$	$a_t(A\sin(bt)+B\cos(bt))$

Table 1.1: Coeficientes indeterminados

Ejemplo 1.3.14
Hallemos una solución particular de la ecuación

$$4y_{t+2}-y_t=3cos\left(\frac{t\pi}{2}\right). \tag{1.29}$$

Como la ecuación característica $4m^2-1$ tiene raíces $m_1=\frac{1}{2}$ y $m_2=\frac{-1}{2}$, la solución de la ecuación homogénea asociada es

$$y_t^{(h)}=C_1\left(\frac{1}{2}\right)^t+C_2\left(\frac{-1}{2}\right)^t.$$

y como el término no homogéneo es $3cos\left(\frac{t\pi}{2}\right)$, la posible solución de (1.29) es

$$y_t^{(p)} = A_1 \cos\left(\frac{t\pi}{2}\right) + A_2 \sin\left(\frac{t\pi}{2}\right).$$

Sustituyendo $y_t^{(p)}$ en (1.29), hallamos $A_1 = \frac{-3}{5}$ y $A_2 = 0$. Esto es,

$$y_t^{(p)} = \frac{-3}{5} \cos\left(\frac{t\pi}{2}\right).$$

Ejemplo 1.3.15
Hallemos la solución general de

$$y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 3t + 2^t. \tag{1.30}$$

La ecuación auxiliar $m^2 - 4m + 4 = 0$ tiene las siguientes raíces $m_1 = m_2 = 2$, la solución general de la ecuación homogénea asociada será

$$y^{(h)} = (c_1 + c_2 t)2^t.$$

El primer término del lado derecho de (1.30), 3^t nos brinda una posible solución de la forma $A_0 + A_1 t$; y por el término 2^t obtenemos una posible solución de la forma $A2^t$. Como 2^t es una solución de la ecuación homogénea asociada a (1.30), multiplicamos por t y buscamos una posible solución de la forma $At2^t$, pero esta sigue siendo una solución de la ecuación homogénea asociada, así que volvemos a multiplicar por t y obtenemos $At^2 2^t$.
Combinando términos, probamos con una solución de la forma

$$y_t^{(p)} = A_0 + A_1 t + At^2 2^t.$$

Para determinar los coeficientes A_0, A_1 y A reemplazamos la posible solución en (1.30) para obtener

$$y_{t+2}^{(p)} - 4y_{t+1}^{(p)} + 4y_t^{(p)} = (A_0 - 2A_1) + A_1 t + 8A2^t.$$

Es decir,

$$A_0 - 2A_1 = 0, \quad A_1 = 3, \quad 8A = 1,$$

esto es, $A_0 = 6, A_1 = 3$ y $A = \frac{1}{8}$.

La solución general, y, de (1.30) esta dada por

$$y_t = (C_1 + C_2 t)2^t + 6 + 3t + \frac{1}{8}t^2 2^t.$$

donde $y = \{y_t\}$ y C_1, C_2 son constantes arbitrarias.

1.4 Ecuaciones en diferencias lineales y homogéneas con coeficientes constantes de orden n

En esta sección mostraremos como hallar la solución general de una ecuación en diferencias lineal homogénea con coeficientes constantes de orden n y presentaremos algunos ejemplos.

Una ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes es de la forma:

$$y_{t+n} + a_1 y_{t+n-1} + \cdots + a_{n-1} y_{t+1} + a_n y_t = f(t), \tag{1.31}$$

donde a_i son constantes dadas con $i = 1, 2, \ldots, n$ y $a_n \neq 0$. Su ecuación homogénea asociada es:

$$y_{t+n} + a_1 y_{t+n-1} + \cdots + a_{n-1} y_{t+1} + a_n y_t = 0. \tag{1.32}$$

Para resolver una ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes de orden n, usaremos un método llamado ecuación característica el cual estudiamos anteriormente para ecuaciones de segundo orden.

Definición 1.4.1 *Para la ecuación en diferencias lineal, homogénea y de orden n con coeficientes constantes dada por (1.32), la ecuación polinómica de grado n:*

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0, \tag{1.33}$$

es llamada ecuación característica o ecuación auxiliar.

Teorema 1.4.2 *Sean $r_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ las raíces de la ecuación característica (1.33).*

- ***a.*** *Entonces*

  $$y_t^{(i)} = r_i^t, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1.34}$$

  son soluciones de (1.32).

- ***b.*** *Si todas las n raíces de la ecuación característica (1.33) son números reales distintos, entonces la solución general de (1.32) es:*

  $$y_t = c_1 r_1^t + c_2 r_2^t + \cdots + c_n r_n^t, \tag{1.35}$$

  donde $c_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ son constantes arbitrarias.

- **c.** *Si las r_i raíces de la ecuación característica (1.33) son de multiplicidad m_i, $i = 1, 2, \ldots, l$, tales que:*

$$\sum_{i=1}^{l} m_i = n,$$

entonces la solución general de (1.32) es $y = \{y_t\}$ donde,

$$\begin{aligned} y_t = {} & r_1^t(c_1^{(1)} + c_2^{(1)}t + \cdots + c_{m_1}^{(1)}t^{m_1-1}) + r_2^t(c_1^{(2)} + c_2^{(2)}t + \cdots + c_{m_2}^{(2)}t^{m_2-1}) \\ & + \cdots + r_l^t(c_1^{(l)} + c_2^{(l)}t + \cdots + c_{m_l}^{(l)}t^{m_l-1}), \end{aligned} \tag{1.36}$$

donde $c_i^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, l$; $i = 1, 2, \ldots, m_j$ son constantes arbitrarias.

Demostración. Para ver una prueba consultar [Mickens, pág. 124] ■

Ejemplo 1.4.3
Dada la ecuación en diferencias

$$y_{t-5} - 3y_{t+4} + 4y_{t+3} - 2y_{t+2} + 3y_{t+1} + y_t = 0,$$

su ecuación característica es $m^5 - 3m^4 + 4m^3 - 2m^2 + 3m + 1 = 0$ ó $(m-1)^3(m^2+1) = 0$. Las raíces de la ecuación serán: $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, $m_{4,5} = \pm i$. Como $i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, la solución general de la ecuación en diferencias tiene la forma:

$$y_t = c_1 1^t + c_2 t 1^t + c_3 t^2 1^t + c_4 1^t \cos\frac{t\pi}{2} + c_5 1^t \sin\frac{t\pi}{2}$$

ó

$$y_t = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 \cos\frac{t\pi}{2} + c_5 \sin\frac{t\pi}{2}.$$

Teorema 1.4.4 *Si $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}$ son soluciones de (1.32), entonces*

$$C_1 y^{(1)} + C_2 y^{(2)} + \cdots + C_n y^{(n)},$$

con n un número natural y $C_1, C_2, \ldots, C_n$ constantes es solución de (1.31).

Demostración. La demostración es análoga a la demostración que se realiza para Teorema (1.3.2). ■

Teorema 1.4.5 *Si $y^{(c)}$ es una solución de la ecuación en diferencias no homogénea (1.31) y $y^{(h)}$ es solución de la ecuación homogénea asociada, entonces $y^{(h)} + y^{(c)}$ es solución de (1.31).*

Demostración. La demostración es análoga a la que se hace para ecuaciones lineales de segundo orden. ■

Ahora veremos un teorema que relaciona las ecuaciones en diferencias con las ecuaciones diferencial lineales ordinarias.

Teorema 1.4.6 *Dada la ecuación diferencial lineal de orden n*

$$\frac{d^n y(x)}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(x)}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy(x)}{dx} + a_n y(x) = 0, \tag{1.37}$$

y la ecuación característica:

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \tag{1.38}$$

con r_j raíces simples y r_i raíces con multiplicidad $n_i, i = 1, 2, \ldots, m$. Si $y = \{y_t\}$ es la solución general de la ecuación en diferencias:

$$y_{t+n} + a_1 y_{t+n-1} + \cdots + a_n y_t = 0 \tag{1.39}$$

entonces:

$$y_t = \left. \frac{d^t y(x)}{dx^t} \right|_{x=0} \tag{1.40}$$

donde $y(x)$ es la solución general de (1.37), esto es

$$y(x) = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=0}^{n_i - 1} c_{i,j+1} x^j) e^{r_i x} + \sum_{j=(n_1+\cdots+n_m)+1}^{n} c_j e^{r_j x} \tag{1.41}$$

con $n_i \geq 1, i = 1, 2, \ldots, m$ con $n_1 + n_2 + \cdots + n_m \leq n$.
Por lo tanto,

$$y_t = \sum_{i=1}^{m} (c_{i,1} + \sum_{l=1}^{n_i - 1} \gamma_{i,l} t^l) r_i^t + \sum_{j=(n_1+\cdot+n_m)+1}^{n} c_j r_j^t. \tag{1.42}$$

Demostración. Ver [Mickens, pág. 124] ■

Ejemplo 1.4.7
Consideremos la ecuación diferencial de segundo orden:

$$y'' - 4y' + 2y = 0 \tag{1.43}$$

su ecuación característica es:

$$r^2 - 4r + 2 = 0 \tag{1.44}$$

que tiene dos raíces reales 5/2 y 3/2. De aquí que la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y(x) = c_1 e^{\frac{5}{2}x} + c_2 e^{\frac{3}{2}x}, \tag{1.45}$$

con c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.
Por lo tanto, la ecuación en diferencias

$$y_{t+2} - 4y_{t+1} + 2y_t = 0, \tag{1.46}$$

por (1.40) tiene como solución general la sucesión $y = \{y_t\}$ donde

$$y_t = c_1 \left(\frac{5}{2}\right)^t + c_2 \left(\frac{3}{2}\right)^t, \tag{1.47}$$

Capítulo 2

Caminatas aleatorias

2.1 Introducción

La historia de las caminatas aleatorias se remonta a dos reconocimientos científicos clásicos. A mediados del siglo 16 las series irregulares y extrañas producidas por el juego de un apostador al lanzar una moneda o tirar un dado y que describían trayectorias aleatorias, que mas tarde fueron llamadas caminatas, captaron el interés de los matemáticos Pascal, Fermat y Bernoulli. En 1827, Robert Brown, el botánico Inglés publicó su observación acerca de el movimiento aleatorio e irregular de pequeños granos de polen en un líquido bajo su microscopio. Él no sólo describió el movimiento irregular llamado hoy en día movimiento browniano, también señaló que era causada por alguna propiedad inanimada de la naturaleza.

Los primeros resultados rigurosos sobre el movimiento browniano fueron dados por Einstein que, entre muchas otras cosas, demostró que el desplazamiento medio $< X_t >$ de algún movimiento X_t después de un tiempo t es

$$< X_t >= \sqrt{2Dt},$$

donde D es la llamada constante de difusión. Einstein también determinó la dependencia de la constante de difusión de otros parámetros físicos del líquido, es decir, él demostró que

$$D^{-1} = \frac{1}{RT} NS,$$

donde S es la resistencia debido a la viscosidad, N es el número de moléculas en una unidad de volumen, T es la temperatura y $R = 8,3 \times 10^{-7}$ es la constante de los gases. Estos resultados tienen una importancia universal. Durante más de la mitad de un siglo nuestras ideas sobre la difusión fueron determinados por estas leyes. El modelo más natural que describe este fenómeno de difusión son las caminatas aleatorias simétricas simples d-dimensionales (esta idea se ampliara en el siguiente capítulo). En este modelo la partícula (caminante) se mueve dando pasos de igual unidad de longitud en direcciones axiales con probabilidad $P(t,x) = \frac{1}{2d}$ (probabilidad de encontrar la partícula en la posición x en un tiempo t). El proceso se describe en tiempo discreto y los pasos se realizan en cada unidad de tiempo.

Este modelo es una fuente inagotable de preguntas bellas y observaciones que son útiles para las ciencias, como la física, la economía, la biología, entre otras. Es natural que nos hagamos las siguientes preguntas:
1. ¿ Qué tan lejos llega el caminante al cabo de N pasos?
2. ¿ Cuánto tiempo se tarda en cubrir una distancia R desde el punto de partida?
3. ¿ El caminante podría regresar a el punto de partida?
4. ¿ Cuál es la probabilidad de volver al punto de partida?
5. ¿ Cuál es la probabilidad de volver en N pasos?
6. ¿ Cuál es la probabilidad de llegar a un punto dado en N pasos?

Estas preguntas son el punto de partida de una numerosa serie de estudios sobre caminatas aleatorias. Hay numerosas generalizaciones acerca de estas.
Durante un largo período de tiempo todos los resultados se basaron en modelos en los que la respuesta a la primera pregunta continuaba siendo la misma; en N pasos el caminante cubre una distancia igual a, $\sqrt{N}$. La respuesta a la segunda pregunta en el caso de una caminata aleatoria simétrica simple sobre $\mathbb{Z}^d$ es la siguiente, a partir de un punto dado, un caminante se tarda en promedio R^2 pasos para dejar una bola centrada en el punto de partida con radio R.
Luego se demostró que una caminata aleatoria simétrica simple sobre $\mathbb{Z}^d$ regresa a la posición inicial con una probabilidad de 1 si y sólo si $d \leq 2$.
Los estudios acerca de caminatas aleatorias y sus aplicaciones son bastantes extensos así que en este capítulo haremos una pequeña revisión acerca de ellas.

2.2 Ideas preliminares

Consideremos un sistema que puede caracterizarse por estar en cualquier estado de un conjunto previamente especificado. Supongamos que el sistema evoluciona o cambia de un estado a otro a lo largo del tiempo de acuerdo con una cierta ley de movimiento, y sea X_t el estado del sistema al tiempo t. Si consideramos que la forma en la que el sistema evoluciona es provocada al azar, entonces puede considerarse que X_t es una variable aleatoria para cada valor del índice t. Esta colección de variables aleatorias es la definición de proceso estocástico, y sirve como modelo para representar la evolución aleatoria de un sistema a lo largo del tiempo. En general, las variables aleatorias que conforman un proceso no son independientes entre si, sino que están relacionadas unas con otras de alguna manera particular. Las distintas formas en que pueden darse estas dependencias es una de las características que distingue a unos procesos de otros. Mas precisamente, la definición de proceso estocástico que toma como base un espacio de probabilidad $(\Omega, \wp, P)$[1] puede enunciarse de la siguiente forma.

Definición 2.2.1 *Un proceso estocástico es una colección* $\{X_t : t\epsilon T\}$ *de variables aleatorias parametrizada por un conjunto* T*, llamado espacio parametral, las variables toman valores en un conjunto* S *llamado espacio de estados.*

En nuestro caso tomaremos en un principio como espacio parametral el conjunto discreto $T = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, donde los números los interpretaremos como tiempos, se dice entonces que el proceso es a tiempo discreto y los denotaremos por $\{X_n : n = 0, 1, \ldots\}$, o explícitamente,

$$X_0, X_1, X_2, \ldots,$$

así para cada n, X_n es el valor del proceso o estado del sistema al tiempo n.

Si tomamos el espacio parametral como el conjunto continuo $T = [0, \infty)$. Decimos que el proceso es a tiempo continuo y lo denotaremos como $\{X_t : t \geq 0\}$.

Nota 2.2.2 *Seguiremos la convención de que si el subíndice es* n*, entonces los tiempos son discretos, y si el subíndice es* t*, el tiempo se mide de manera continua. Para poder hablar de variables aleatorias con valores en el espacio de estados* S*, es necesario asociar a este conjunto una* σ*-álgebra.*

Considerando a S subconjunto de $\mathbb{R}$, puede tomarse la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ restringida a S, es decir $S \cap \beta(\mathbb{R})$[2]. Un proceso estocástico (aleatorio) puede considerarse como una función de dos variables

$$X : T \times \Omega \to S$$

tal que a la pareja (t, ω) se le asocia el valor $X(t, \omega) := X_t(\omega)$. Para cada valor de t en T, la aplicación $\omega \to X_t(\omega)$ es una variable aleatoria mientras que la función $t \to X_t(\omega)$ es llamada trayectoria del proceso.

[1] $\Omega = \{\omega_i\}_i$ (llamado espacio muestral) es el conjunto de los posibles resultados de un experimento. $\wp$ es la colección de todos los sucesos aleatorios y es una σ-álgebra sobre Ω. $(\Omega, \wp)$ se conoce como un espacio medible. P es una función de probabilidad, que asigna una probabilidad a cada suceso.

[2] $\beta(\mathbb{R})$ es la mínima σ-álgebra sobre $\mathbb{R}$ que contiene a los subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$

Una de tales trayectorias se muestra en la figura (2.1), esta corresponde a un movimiento que definiremos y estudiaremos mas adelante.

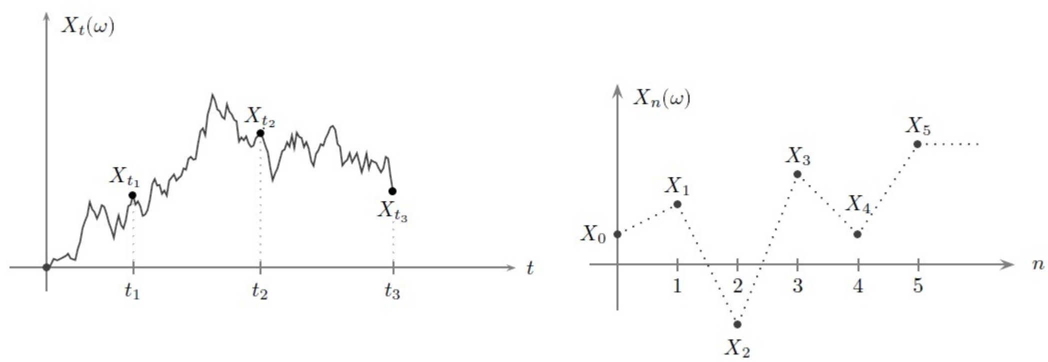

Figura 2.1: Ejemplos de la trayectoria de un proceso estocástico

Los diferentes tipos de procesos estocásticos se obtienen al considerar las distintas posibilidades para el espacio parametral, el espacio de estados, las características de las trayectorias y principalmente las relaciones de dependencia entre las variables aleatorias que conforman el proceso. Centraremos nuestro estudio en un ejemplo del siguiente tipo de proceso.

Definición 2.2.3 ***Procesos de Markov***
Es un modelo en donde, suponiendo conocido el estado presente del sistema, los estados anteriores no tienen influencia en los estados futuros del sistema. Esta condición se llama propiedad de Markov y puede expresarse de la siguiente forma: para cualquier de los estados $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ (pasado), x_n(presente), x_{n+1}(futuro), se cumple la igualdad

$$P(X_{n+1} = x_{n+1}|X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n).$$

De esta forma la probabilidad del evento futuro $(X_{n+1} = x_{n+1})$ solo depende del evento $(X_n = x_n)$, mientras que la información correspondiente a los eventos pasados $X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}$ es irrelevante.

El siguiente es un ejemplo sencillo de uno de estos procesos.
Imaginemos que colocamos una rata en la esquina inferior izquierda y un plato de comida en la esquina superior derecha. Para modelar la trayectoria que sigue la rata hasta encontrar la comida, supongamos que cuando se encuentra en un cuarto del laberinto, la rata va a cualquier otro con la misma probabilidad (figura (2.2)).

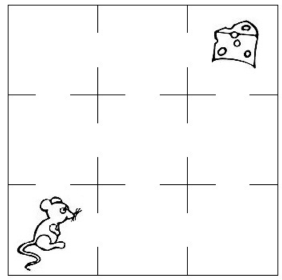

Figura 2.2: Esquema de un laberinto

Un modelo matemático para esta situación es el siguiente.
Enumeremos los cuartos del laberinto de izquierda a derecha, de abajo a arriba, por lo que la rata comienza en el cuarto 1 y encuentra la comida en el cuarto 9. Definamos $P_{i,j}$ como la probabilidad con que la rata pasa del cuarto i al cuarto j; por ejemplo, vemos que

$$P_{5,j} = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } j \in \{2,4,6,8\} \\ 0 & \text{if } j \in \{1,3,5,7,9\} \end{cases}.$$

Esta información la podemos organizar de forma matricial de la siguiente manera (i denota la fila y j la columna):

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que la rata siga la trayectoria $1; 4; 7; 8; 9$ para encontrar la comida es $P_{1,4}P_{4,7}P_{7,8}P_{8,9}$. Notemos que:
(**i**) $P_{i,j} \geq 0$ para todo i y j.
(**ii**) $\sum_j P_{i,j} = 1$ para toda i.

Si deseamos obtener la trayectoria que la rata realiza hasta que encuentre la comida, podríamos modificar la matriz P en el cual especificamos que una vez que la rata llegue al cuarto 9 se quede ahí.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De este ejemplo nos surgen algunas preguntas, como por ejemplo:

Cuánto tarda la rata en promedio en encontrar la comida si comienza en el cuarto i?.
Si quitamos la comida y nada más seguimos la trayectoria de la rata: Cuál es la probabilidad de que se encuentre en el cuarto j en el paso n si comienza en i?.
Si de nuevo seguimos solamente la trayectoria sin comida, estamos seguros de regresar al punto inicial?
Si agregamos la comida, cuántas veces regresaría la rata al cuarto inicial antes de encontrar la comida?.

En la siguiente sección daremos algunos aspectos teóricos que permiten abordar situaciones similares a la descrita en el ejemplo anterior.

2.3 Caminata aleatoria simple

Una caminata aleatoria simple es un proceso estocástico a tiempo discreto $X_n : n = 0, 1, \ldots$ que evoluciona como se muestra en la figura (2.3).

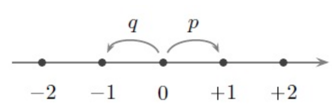

Figura 2.3: Caminata aleatoria simple

Esto es, que si el proceso inicio en el estado 0, al siguiente tiempo puede estar en la posición 1 con probabilidad p, o puede pasar a estar en la posición -1 con probabilidad

q, donde $p + q = 1$ y así sucesivamente para los siguientes tiempos. Por tanto la probabilidad de que $X_{n+1} = j$ dado que $X_n = i$ la podemos escribir así:

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = \begin{cases} p & \text{si } j = i + 1 \\ q & \text{si } j = i - 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Como estas probabilidades no dependen de n, se dice que son homogéneas en el tiempo, es decir, son las mismas para cualquier valor de n. A partir, de estas consideraciones, podemos ver que este proceso cumple la propiedad de Markov, es decir, el estado futuro del proceso depende únicamente del estado presente y no de los estados previamente visitados. Una posible trayectoria de este proceso se muestra en la figura (2.4). Una

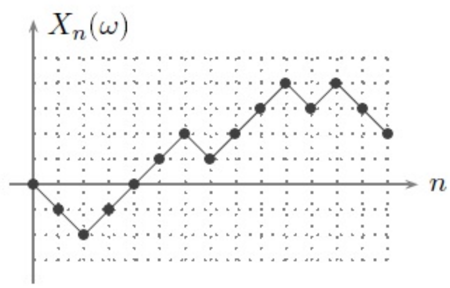

Figura 2.4: Ejemplo de una trayectoria de una caminata aleatoria simple

caminata aleatoria puede también definirse de la siguiente forma: sea $\xi_1, \xi_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Supondremos que $P(\xi_i = 1) = p$ y $P(\xi_i = -1) = q$ para $i = 1, 2, \ldots$ y donde, $p + q = 1$. Entonces para $n \geq 1$ se define

$$X_n := X_0 + \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n.$$

Sin pérdida de generalidad supondremos que $X_0 = 0$.

A continuación veremos algunas propiedades de la variable X_n y de su comportamiento como función de n.

Proposición 2.3.1 *Para cualquier entero $n \geq 0$, la esperanza, E, y la varianza, Var, de la variable, X_n, son:*

$$E(X_n) = n(p - q), \qquad Var(X_n) = 4npq.$$

Demostración.
Para la esperanza tenemos que:

$$E(X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(\xi_i) = nE(\xi_i) = n(p-q).$$

Por otro lado, como $E(\xi_i^2) = p + q = 1$ y $E(\xi_i) = p - q$, para cualquier $1 \leq i \leq n$, se tiene que

$$Var(\xi_i) = 1 - (p-q)^2 = 4pq.$$

Por lo tanto,

$$Var(X_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(\xi_i) = nVar(\xi_i) = 4npq.$$

Si $p > q$, es decir, si la caminata toma pasos a la derecha con mayor probabilidad, entonces el estado promedio después de n pasos es un número positivo, es decir, su comportamiento promedio es tender hacia la derecha. Análogamente, si $p < q$, entonces el estado final promedio de la caminata después de n pasos es un número negativo, es decir, en promedio la caminata tiende a moverse hacia la izquierda. En ambos casos la varianza crece conforme el número de pasos, n, crece, esto indica que mientras mayor es el número de pasos que se dan, mayor es la incertidumbre acerca de la posición final del proceso. ■

Proposición 2.3.2 *Para cualesquier par de número enteros x y n, tales que $-n \leq x \leq n$, si x y n son ambos pares o impares entonces,*

$$P(X_n = x | X_0 = 0) = \binom{n}{\frac{1}{2}(n+x)} p^{\frac{1}{2}(n+x)} q^{\frac{1}{2}(n-x)}. \tag{2.1}$$

Para los otros valores de x y n la probabilidad $P(X_n = x | X_0 = 0)$ es igual a cero.

Demostración.
Sea X_n la posición de la caminata después de efectuar n pasos y R_n, L_n el número de pasos realizados hacia la derecha y hacia la izquierda, respectivamente. Entonces $X_n = R_n - L_n$ y además $n = R_n + L_n$. Sumando estas ecuaciones y recordando que $X_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ obtenemos

$$R_n = \frac{1}{2}(n + X_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(1 + \xi_i)$$

Esta ecuación es la identidad clave para obtener el resultado buscado. Observemos que esta fórmula arroja un valor entero para R_n cuando n y X_n son ambos pares o ambos impares. Como las variables independientes ξ_i toman los valores 1 y -1 con probabilidades p y q respectivamente, entonces las variables independientes $\frac{1}{2}(1+\xi_i)$ toman valores 1 y 0 con probabilidades p y q. Esto nos lleva a la conclusión que la variable R_n tiene distribución binomial (n,p). Por lo tanto,

$$P(X_n = x | X_0 = 0) = P(R_n = \frac{1}{2}(n+x)) = \binom{n}{\frac{1}{2}(n+x)} p^{\frac{1}{2}(n+x)} q^{\frac{1}{2}(n-x)}. \qquad \blacksquare$$

La fórmula (2.1) puede extenderse al caso general de pasar de un estado cualquiera y a otro estado x en n pasos, como se muestra a continuación.

Proposición 2.3.3 *Si los números enteros n y $x-y$, son ambos pares o impares, entonces para $-n \leq x-y \leq n$*

$$P(X_n = x | X_0 = y) = \binom{n}{\frac{1}{2}(n+x-y)} p^{\frac{1}{2}(n+x-y)} q^{\frac{1}{2}(n-x+y)}. \tag{2.2}$$

Para los otros valores de $x-y$ y n la probabilidad $P(X_n = x | X_0 = y)$ es igual a cero.

Demostración.
Tenemos como hipótesis que $X_0 = y$. Consideremos el proceso $Z_n = X_n - y$, entonces $\{Z_n : n \neq 0\}$ es una caminata aleatoria que inicia en cero. Luego,

$$P(X_n = x | X_0 = y) = P(Z_n = x - y | Z_0 = 0).$$

Utilizando la proposición (2.3.2) obtenemos el resultado buscado. $\blacksquare$

Probabilidad de regreso a la posición de origen
Nos planteamos ahora el problema de encontrar la probabilidad de que una caminata aleatoria, que inicia en el origen, regrese eventualmente al punto de partida.

Proposición 2.3.4 *Para una caminata aleatoria sobre $\mathbb{Z}$, la probabilidad de un eventual regreso al punto de partida es*

$$1 - |p-q| = \begin{cases} 1 & si\ p = q \\ < 1 & si\ p \neq q \end{cases} \tag{2.3}$$

Es decir, sólo en el caso simétrico, $p = q$, se tiene la certeza de un eventual retorno, sin embargo, el tiempo promedio de regreso en tal caso es infinito.

Demostración.
Para realizar esta demostración utilizaremos los siguientes elementos:

- **a.** Para cada $n \geq 0$, P_n denotara la probabilidad de que el caminante se encuentre en el estado 0 al tiempo n, es decir, $P_n = P(X_n = 0|X_0 = 0)$, por lo visto anteriormente sabemos que esta probabilidad es distinta de cero sólo cuando n es un número par. Claramente $P_0 = 1$. Sea f_k la probabilidad de que el caminante visite el estado 0 por primera vez en el paso $k \geq 0$. Por conveniencia se define $f_0 = 0$. En términos de las probabilidades f_k, la probabilidad de que el caminante regrese al origen es $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ (esta serie converge ya que se trata de suma de probabilidades P). valores pares de k distintos de cero.

- **b.**
$$P_n = f_0P_k + f_1P_{n-1} + f_2P_{n-2} + \cdots + f_nP_0 = \sum_{k=0}^{n} f_kP_{n-k} \tag{2.4}$$

  En esta expresión simplemente se descompone la probabilidad de regreso al origen, P_n, en las distintas posibilidades en donde se efectúa el primer regreso al origen. Este primero regreso puede darse en el paso 1, o en el paso 2, ..., o en el último momento, el paso n. Después de efectuado el primer regreso se multiplica por la probabilidad de regresar al origen en el número de pasos restantes. Observemos que el primer sumando es cero. Usaremos (2.4) para encontrar la función generadora de probabilidad de la colección de números $f_0, f_1, f_2, \ldots$, es decir, encontraremos

$$G(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_kt^k.$$

  Multiplicando (2.4) por t^n, sumando y alternando el orden de las sumas obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_nt^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} f_kP_{n-k}\right)t^n = \sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{n=k}^{\infty} f_kP_{n-k}t^n = \sum_{k=0}^{\infty} f_kt^k \sum_{n=k}^{\infty} P_{n-k}t^{n-k} = G(t)\sum_{n=0}^{\infty} P_nt^n.$$

  Por lo tanto

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} P_nt^n\right) - 1 = G(t)\sum_{n=0}^{\infty} P_nt^n. \tag{2.5}$$

- **c.** Para cualquier número real a y para cualquier entero n, se tiene que

$$(1-t)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} t^n. \tag{2.6}$$

En particular tenemos que

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n} &= \frac{2n(2n-1)(2n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{n!n!} = \frac{2^n n!(2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}{n!n!} \\ &= \frac{2^n 2^n}{n!}\left(\frac{2n-1}{2}\right)\left(\frac{2n-3}{2}\right)\cdots\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2^n 2^n}{n!}(-1)^n\left(-n+\frac{1}{2}\right)\left(-n+\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= (-4)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}.\end{aligned} \tag{2.7}$$

- **d.** Usando (2.6) y (2.7) podemos encontrar una expresión para la función generadora de la colección de números $P_0, P_1, P_2, \ldots$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} P_n t^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n} p^n q^n t^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-4)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n} p^n q^n t^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-4pqt^2)^n \\ &= (1-4pqt^2)^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{2.8}$$

- **e.** Substituyendo (2.8) en (2.5) se llega a la igualdad

$$(1-4pqt^2)^{-\frac{1}{2}} - 1 = G(t)(1-4pqt^2)^{-\frac{1}{2}}$$

De donde obtenemos

$$G(t) = 1-(1-4pqt^2)^{\frac{1}{2}} \tag{2.9}$$

Usando esta expresión podemos ahora calcular la probabilidad del caminante de regresar al estado inicial. En efecto, por el lema de Abel,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = \lim_{t\to 1} G(t) = 1-(1-4pqt^2)^{\frac{1}{2}} = 1-|p-q|.$$

En el caso asimétrico, $p \neq \frac{1}{2}$, esta cantidad es estrictamente menor a uno y por lo tanto no hay seguridad de que el caminante sea capaz de regresar al origen. En cambio, en el caso simétrico, $p = \frac{1}{2}$, esta cantidad vale uno, es decir, con probabilidad uno el caminante regresa a su posición de origen. Además, el tiempo promedio de regreso se obtiene derivando la función generadora $G(t)$, es decir,

$$\sum_{n=0}^{\infty} n f_n = \lim_{t\to 1} G'(t) = \lim_{t\to 1}\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} = \infty. \qquad \blacksquare$$

Podemos también considerar el caso de una caminata aleatoria en donde sea posible permanecer en el mismo estado después de un paso (unidad) de tiempo. Esta situación se ilustra en la figura (2.5) en donde p, q y r son probabilidades tales que $p+q+r=1$. También podemos considerar caminatas en $\mathbb{Z}^2$ como las que se ilustran en la figura (2.6), en donde $p+q+r+s=1$ (ejemplo de la rata buscando comida) o en $\mathbb{Z}^n$.

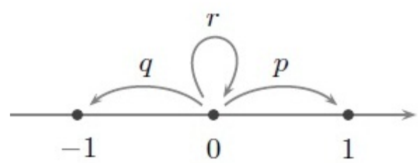

Figura 2.5: Caminata en $\mathbb{Z}$ con posibilidad de seguir en el mismo lugar.

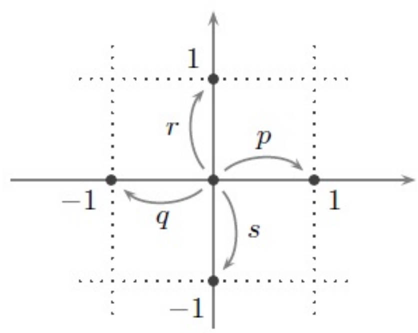

Figura 2.6: Caminata en $\mathbb{Z}^2$.

2.4 Caminata aleatoria simétrica y no simétrica

Supongamos que una partícula se mueve aleatoriamente hacia la derecha y hacia la izquierda a lo largo de una recta horizontal (eje x) dando un paso Δx (fijo) que se realiza en un momento determinado Δt. Si el movimiento es imparcial, para el siguiente paso es igualmente probable que la partícula se desplace un paso a la derecha o la izquierda. Si tomamos el punto de partida de la partícula como el origen ($x=0$) después de un tiempo $t=N\Delta t$ la partícula se encontrará en el punto $x=m\Delta x$ donde $N\geqslant 0$ y m son enteros, $-N\leq m\leq N$.

Se desea saber cual es la probabilidad $P(t,x)$ de hallar la partícula en el punto x en el tiempo t. Si se supone que para alcanzar la posición $x=m\Delta x$ la partícula se ha movido k pasos hacia la derecha y $N-k$ hacia la izquierda. Claramente se tiene que, $0 \leq k \leq N$ y además

$$m = k - (N-k) = 2k - N,$$

así que N y m son ambos pares o impares al tiempo ya que

$$k = \frac{1}{2}(N+m).$$

y k es un entero positivo. De aquí que $P(t,x) := P_k$ será

$$P_k = \frac{\text{número de caminos posibles con } k \text{ pasos a la derecha después de } N \text{ pasos de tiempo}}{\text{número total de caminos que la partícula puede recorrer al cabo de } N \text{ pasos de tiempo}}.$$

Ahora, el número de posibles caminos con k pasos a la derecha y $N-k$ a la izquierda esta dado por

$$\frac{N!}{k!(N-k)!} = \mathbf{C}_k^N.$$

Y el número total de caminos que la partícula puede recorrer al cabo de N pasos de tiempo es 2^N, así la probabilidad P_k es

$$P_k = \frac{1}{2^N}\mathbf{C}_k^N, \quad x = m\Delta x, \quad t = N\Delta t, \quad k = \frac{1}{2}(N+m). \tag{2.10}$$

Nota 2.4.1 *La suma de todas las probabilidades debe ser igual a 1, para este caso, es claro matemáticamente ya que:*

$$\sum_{k=0}^{N} P_k = \sum_{k=0}^{N} \mathbf{C}_k^N \left(\frac{1}{2}\right)^{N-k} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^{N} = 1.$$

Caminata aleatoria no simétrica

Consideremos una partícula que se mueve aleatoriamente sobre una recta horizontal (eje x), un paso $\Delta x > 0$, en un intervalo de tiempo de duración $\Delta t > 0$ de acuerdo a las siguientes reglas:
i. La partícula se encuentra inicialmente en el origen ($x = 0$).
ii. La partícula se mueve a la derecha con probabilidad $p \neq \frac{1}{2}$ y a la izquierda con probabilidad $q = 1 - p$, independientemente del anterior paso.

Sea $P = P(t,x)$ la probabilidad de encontrar la partícula en la posición $x = m\Delta x$ en un tiempo $t = N\Delta t$. De la formula de probabilidad total obtenemos

$$P(t+\Delta t, x) = pP(t, x-\Delta x) + qP(t, x+\Delta x), \tag{2.11}$$

con las condiciones iniciales usuales

$$P(0,0) = 1 \text{ y } P(0,x) = 0 \text{ si } x \neq 0.$$

Estas caminatas son descritas, por ejemplo, al pensar en el como una persona ebria al salir de un bar decide ir a su casa que se encuentra a cierta distancia, por las condiciones mentales en las que se encuentra el ebrio no sabe si en cada paso que da avanza o retrocede. Este es solo uno de los ejemplos en los que se describen caminatas aleatorias.
Ilustraremos mejor estas caminatas con el siguiente ejemplo

2.5 El problema del apostador

En esta sección consideraremos un ejemplo particular de una caminata aleatoria puesta en el contexto de un juego de apuestas.

Planteamiento del problema
Supongamos que un jugador A apuesta sucesivamente una unidad monetaria a un jugador B. Inicialmente el jugador A tiene k unidades y B tiene $N-k$, es decir, el capital conjunto entre los dos jugadores es de N unidades monetarias. En cada apuesta el jugador A tiene probabilidad de ganar p, y probabilidad de perder $q = 1-p$, supongamos además que no hay empates. Sea X_n la fortuna del jugador A al tiempo n. Entonces $\{X_n : n = 0, 1, \ldots\}$ es una caminata aleatoria que inicia en el estado k y eventualmente puede terminar en el estado 0 cuando el jugador A ha perdido todo su capital, o bien, puede terminar en el estado N donde el jugador A ha ganado todo el capital. Este proceso es entonces una caminata aleatoria sobre el conjunto $\{0, 1, \ldots, N\}$, en donde los estados 0 y N se dicen absorbentes (una vez en esta posición el juego se acaba).

Una de las preguntas que resolveremos para esta caminata es la siguiente: Cuál es la probabilidad de que el jugador A se arruine? Es decir, cuál es la probabilidad de que la caminata se absorba en el estado 0 y no en el estado N, u oscile entre estos dos estados? Este problema se conoce como el problema de la ruina del jugador, y encontraremos a continuación su solución. Como veremos, usando probabilidad condicional es posible transformar este problema en resolver una ecuación en diferencias.

Solución al problema
Sea τ el primer momento en el que la caminata visita alguno de los dos estados absorbentes, es decir, $\tau = \min\{n \geq 0 : X_n = 0 \text{ ó } X_n = N\}$. La pregunta planteada se traduce en encontrar la probabilidad

$$u_k = P(X_\tau = 0 | X_0 = k).$$

Por el teorema de la probabilidad total se obtiene la siguiente ecuación en diferencias

$$u_k = p u_{k+1} + q u_{k-1}, \tag{2.12}$$

para $k = 1, 2, \ldots, N-1$. La interpretación intuitiva de esta identidad la podríamos describir así: a partir del estado k se busca la probabilidad de ruina analizando lo que sucede en la siguiente apuesta. Se tienen dos casos: el jugador gana con probabilidad p y ahora se busca la probabilidad de ruina a partir del estado $k+1$, o bien el jugador pierde con probabilidad q y se busca la probabilidad de ruina ahora a partir del estado $k-1$. Notemos que si $k=0$, entonces A ya esta arruinado y si $k=N$, A habrá ganado todo el capital, esto nos da las condiciones de frontera $u_0=1$ y $u_N=0$. Esta ecuación es una ecuación en diferencias, lineal, de segundo orden y homogénea sobre las cuales dimos un breve estudio en el anterior capítulo, de acuerdo a ello sabemos que la solución de (2.12) es

$$u_k = \begin{cases} \frac{N-k}{N} & \text{si } p=\frac{1}{2} \\ \frac{(q/p)^k-(q/p)^N}{1-(q/p)^N} & \text{si } p\neq\frac{1}{2}. \end{cases} \tag{2.13}$$

Esta solución la hallamos usando el método de la ecuación característica.

La ecuación característica de (2.12) es:

$$pr^2 - r + q = 0. \tag{2.14}$$

Si $p \neq q$, la ecuación (2.14) tiene dos raíces reales distintas $r_1 = 1$ y $r_2 = \frac{q}{p}$. Lo que nos dice que la solución general de (2.12) es de la forma

$$u_k = C_1 + C_2\left(\frac{q}{p}\right)^k, \tag{2.15}$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias. Si usamos las condiciones de frontera ($k=0$ y $k=N$) en (2.15) obtenemos

$$C_1 = -\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^N}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N} \quad \text{y} \quad C_2 = \frac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}.$$

Por tanto,

$$u_k = \frac{(q/p)^k-(q/p)^N}{1-(q/p)^N}.$$

En el caso donde $p=q$, la ecuación (2.14) tiene una raíz $r=1$ de multiplicidad dos. De aquí que la solución es de la forma

$$u_k = C_1 + C_2 k, \tag{2.16}$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias. De nuevo, si usamos las condiciones de frontera obtenemos

$$C_1 = 1 \quad \text{y} \quad C_2 = \frac{-1}{N}.$$

Por tanto,

$$u_k = \frac{N-k}{N}.$$

En la figura (2.7) se muestra la gráfica de la probabilidad u_k como función del parámetro k para varios valores de p y con $N = 50$.
Cuando $p = \frac{1}{2}$ la solución es una linea que une la probabilidad 1 con la probabilidad 0. Podemos observar también que cuando el capital inicial k aumenta la probabilidad de ruina decrece.

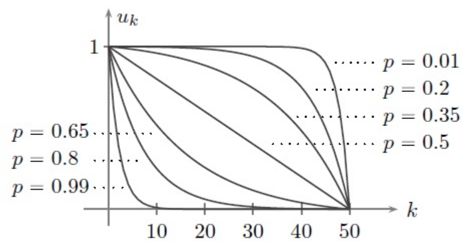

Figura 2.7: Comportamiento de u_k respecto a k.

Análisis de la solución
Es interesante analizar la fórmula (2.13) en sus varios aspectos. Por ejemplo, para el caso simétrico $p = \frac{1}{2}$, es decir, cuando el juego es justo, la probabilidad de ruina es muy cercana a 1 cuando k es muy pequeño comparado con N. Esto sugiere que no conviene jugar esta serie de apuestas contra adversarios demasiado ricos (por ejemplo un casino), aun cuando el juego sea justo. También es un tanto inesperado observar que la probabilidad u_k es muy sensible a los valores de p cercanos a $\frac{1}{2}$. Esto puede apreciarse en la figura (2.8).

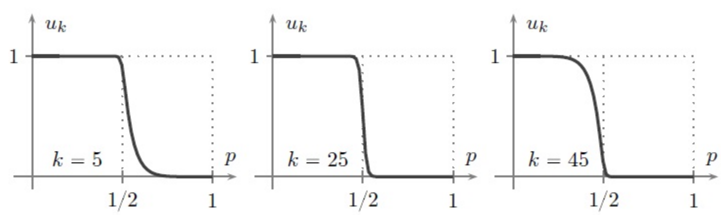

Figura 2.8: Comportamiento de u_k respecto a p ($N = 50$).

Cuando p no es un valor cercano a $\frac{1}{2}$ la probabilidad u_k es casi constante, pero para valores de p cercanos a $\frac{1}{2}$ la probabilidad cambia rápidamente de un extremo a otro.

Número esperado de apuestas antes de la ruina
Hemos comprobado en el ejercicio anterior que con probabilidad uno ocurre que eventualmente alguno de los dos jugadores se arruina. Es natural entonces plantearse el problema de encontrar el tiempo promedio que transcurre antes de observar la eventual ruina de alguna de las partes. Este número de apuestas promedio antes de la ruina puede encontrarse

explícitamente, y el método que usaremos para encontrarlo es nuevamente el planteamiento de una ecuación en diferencias. Sea entonces m_k el número esperado de apuestas antes de que termine el juego, en donde el jugador A tiene un capital inicial de k unidades, y B tiene $N-k$.

Proposición 2.5.1 *El número esperado de apuestas antes de la ruina es*

$$m_k = \begin{cases} k(N-k) & \text{si } p = q \\ \frac{1}{q-p}\left(k - N\frac{1-(q/p)^k}{1-(q/p)^N}\right) & \text{si } p \neq q. \end{cases} \tag{2.17}$$

Demostración.
Condicionando sobre el resultado de la primera apuesta se obtiene que m_k satisface la ecuación

$$m_k = 1 + pm_{k+1} + qm_{k-1}, \tag{2.18}$$

para $k = 1, 2, \ldots, N-1$. Esta última es una ecuación en diferencias de segundo orden, lineal y no homogénea con condiciones de frontera $m_0 = 0$ y $m_N = 0$ que podemos resolver con ayuda de la teoría vista sobre ecuaciones en diferencias y la cual nos lleva a la respuesta.

Para la ecuación en diferencias homogénea asociada a (2.18) tenemos:
Si $p \neq q$, la ecuación característica tiene dos raíces reales distintas $r_1 = 1$ y $r_2 = \frac{q}{p}$. Lo que nos dice que la solución general de la ecuación homogénea asociada a (2.18) es de la forma

$$m_k^{(h)} = C_1 + C_2\left(\frac{q}{p}\right)^k,$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias. Usando el método de coeficientes indeterminados hallamos una solución particular de (2.18). Como el término no homogéneo es 1 tomamos una solución de la forma S-constante, pero esta es solución de la ecuación homogénea asociada, por lo tanto, debemos multiplicar por k para obtener Sk, sustituyendo en (2.18) obtenemos que $S = \frac{1}{p-q}$, por lo cual, $m_k^{(p)} = \frac{1}{p-q}k$. Finalmente,

$$m_k = m_k^{(h)} + m_k^{(p)} = C_1 + C_2\left(\frac{q}{p}\right)^k + \frac{1}{p-q}k, \tag{2.19}$$

usamos las condiciones de frontera ($k = 0$ y $k = N$) en (2.19) y obtenemos

$$C_1 = \frac{-N}{(p-q)\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^N\right)} \quad \text{y} \quad C_2 = \frac{N}{(p-q)\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^N\right)}.$$

Por tanto, después de agrupar términos

$$m_k = \frac{1}{q-p}\left(k - N\frac{1-(q/p)^k}{1-(q/p)^N}\right).$$

En el caso donde $p = q$, la ecuación característica de la ecuación homogénea asociada a (2.18) tiene una raíz $r = 1$ de multiplicidad dos. De aquí que la solución es de la forma

$$m_k^{(h)} = C_1 + C_2 k, \tag{2.20}$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias. Usando el método de coeficientes indeterminados hallamos una solución particular de (2.18). Como el termino no homogéneo es 1 tomamos una solución de la forma S-constante, pero esta es solución de la ecuación homogénea asociada, por lo tanto, debemos multiplicar por k para obtener Sk, pero esta también es una solución de la homogénea, luego la solución es de la forma Sk^2, sustituyendo en (2.18) obtenemos que $S = 1$, por lo cual, $m_k^{(p)} = k^2$. Finalmente,

$$m_k = m_k^{(h)} + m_k^{(p)} = C_1 + C_2 k + k^2, \tag{2.21}$$

usamos las condiciones de frontera ($k = 0$ y $k = N$) en (2.21) y obtenemos

$$C_1 = 0 \quad \text{y} \quad C_2 = -N.$$

Por tanto,

$$m_k = -Nk + k^2 = k(k - N). \qquad \blacksquare$$

La forma en la que m_k cambia al variar el parámetro k se muestra en la figura (2.9) cuando $N = 50$. La duración máxima promedio del juego se obtiene cuando el juego es justo, es decir, $p = \frac{1}{2}$ y ambos jugadores tienen el mismo capital inicial, esto es, $k = \frac{N}{2}$. Esto arroja un promedio máximo de $\left(\frac{N}{2}\right)^2$ apuestas antes del fin del juego. En el caso ilustrado,la duración máxima promedio del juego es de 625 apuestas.

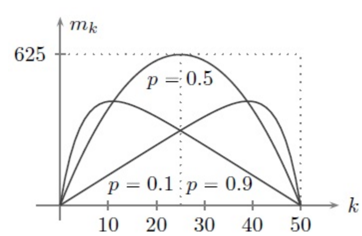

Figura 2.9: Comportamiento de m_k ($N = 50$).

Capítulo 3

Ecuacion de reaccion difusion

3.1 Introducción

La cuestión del origen de la forma de la mayoría de los objetos cotidianos que nos rodea es algo que ha intrigado a filósofos y científicos a lo largo de la historia. Desde el relieve de la arena de los desiertos hasta los patrones que caracterizan la piel de muchos animales los ejemplos son innumerables (figura (3.1)).

Figura 3.1: Diferentes patrones de la naturaleza

Muchos de dichos patrones, además, no son estáticos sino que están sujetos a modificaciones, ejemplo de ello la arena de los desiertos, cuyos relieves pueden cambiar de un día para otro por efecto del viento, la arena de las playas sujetas a los efectos de las mareas, los sistemas de nubes que cubren el cielo y cambian caprichosamente con las condiciones meteorológicas o simplemente las estructuras que se forman en nuestra taza de café con leche al agitarlo con la cuchara. Dichos estados cambian-evolucionan con el paso del tiempo y son denominados **sistemas dinámicos**.
Los avances de las últimas décadas en el estudio de los sistemas dinámicos que abarcan fenómenos desde la física a las matemáticas pasando por la biología, química entre otras, han permitido descubrir que la mayoría de los ejemplos anteriores están relacionados por el hecho de que podemos describirlos usando las mismas herramientas matemáticas, denominadas mo-

delos (representaciones de procesos dinámicos en el tiempo que se presuponen relevantes para explicar los patrones observados) los cuales describen, en lenguaje matemático, un objeto que existe en un universo no matemático y que generalmente son ecuaciones en derivadas parciales ejemplo de esto, la ecuación de reacción difusión.

Los modelos de reacción difusión proporcionan una manera de analizar diferentes tipos de datos, por ejemplo acerca de el movimiento, la mortalidad, y la reproducción de los individuos sobre la persistencia o la extinción de las poblaciones y la coexistencia de las especies que interactúan. Se pueden derivar mecánicamente a través de los modelos de movimiento individual que son basados en caminatas aleatorias. Los modelos de reacción difusión son espacialmente explícitos (se denominan así porque la evolución en el tiempo de alguna de sus variables de estado depende del espacio) y típicamente incorporan cantidades tales como tasas de dispersión, tasas de crecimiento locales y las capacidades de carga como parámetros que pueden variar con la ubicación o el tiempo.

Las ecuaciones de reacción difusión son ecuaciones en derivadas parciales que describen cómo una o más sustancias distribuidas en el espacio cambian bajo la influencia de dos procesos: reacciones locales en las que los objetos se transforman los unos en los otros, y difusión, que provoca que los objetos se expandan en el espacio. También proporcionan una manera de analizar datos, por ejemplo, acerca de el movimiento, la mortalidad, y la reproducción de los individuos, la persistencia o la extinción de las poblaciones y la coexistencia de las especies que interactúan. Por lo tanto, proporcionan un buen marco para el estudio de preguntas acerca de las formas en que el hábitat la geometría y el tamaño o la variación en los parámetros vitales influyen en la dinámica de poblaciones.

3.2 Modelos de reacción difusión

Los modelos de difusión pueden ser derivados como los límites a gran escala de los modelos de dispersión basados en caminatas aleatorias. También se pueden derivar de la ley de Fick (que describe el flujo de una sustancia difusiva en términos de su gradiente), o desde ecuaciones diferenciales estocásticas.

A continuación veremos como se realiza este proceso al partir de una caminata aleatoria.

3.2.1 Caso caminata aleatoria simétrica

Supongamos que una partícula se mueve aleatoriamente hacia la derecha y hacia la izquierda a lo largo de una recta horizontal dando un paso $\Delta x > 0$ (fijo) que se realiza en un momento determinado $\Delta t > 0$. Si el movimiento es imparcial, para el siguiente paso es igualmente probable que la partícula se desplace un paso a la derecha o la izquierda. Si tomamos el punto de partida de la partícula como el origen ($x = 0$) después de un tiempo $t = N\Delta t$ la partícula se encontrara en el punto $x = m\Delta x$ donde $m \geqslant 0$ y N son enteros, $-N \leq m \leq N$. Se desea saber cual es la probabilidad $P(t,x)$ de hallar la partícula en el punto x en el tiempo t.

Por lo visto en el capitulo II, sabemos que $P(t,x) := P_k$ será:

$$P_k = \frac{1}{2^N}\mathbf{C}_k^N, \quad x = m\Delta x, \quad t = N\Delta t, \quad k = \frac{1}{2}(N+m) \tag{3.1}$$

Comportamiento asintótico

Dado que

$$P_k = \frac{1}{2^N}\frac{N!}{k!(N-k)!} = \frac{1}{2^N}\frac{N!}{(\frac{1}{2}(N+m))!(\frac{1}{2}(N-m))!} \tag{3.2}$$

El comportamiento de esta expresión para $N \gg m$ (equivalente a $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{m}{N} = 0$, $m, N \to \infty$ podemos verlo usando la fórmula de Stirling[1]:

$$s! \sim (2\pi s)^{\frac{1}{2}}\, s^s e^{-s}, \qquad s \gg 1. \tag{3.3}$$

donde $f(s) \sim g(s)$ para $s \to \infty$ quiere decir que $\lim\limits_{s\to\infty}\frac{f(s)}{g(s)} = 1$. Usando esta aproximación obtenemos:

$$P_k \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} N^{N+\frac{1}{2}} \left(\frac{N-m}{N+m}\right)^{\frac{1}{2}})(N^2-m^2)^{-\frac{N+1}{2}}, \quad N \gg m, \quad k = \frac{1}{2}(N+m) \tag{3.4}$$

o de forma equivalente:

$$P_k \sim \sqrt{\frac{2}{\pi N}} \left(\frac{1-\frac{m}{N}}{1+\frac{m}{N}}\right)^{\frac{m}{2}} \left(1-\left(\frac{m}{N}\right)^2\right)^{-\frac{N+1}{2}}, \quad N \gg m, \quad k = \frac{1}{2}(N+m). \tag{3.5}$$

Por otra parte si $m \ll N$ tenemos también que: Sea $x = \frac{m}{N}$

$$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{m}{2}} = e^{\frac{m}{2}(-2x+O(x^2))} = e^{-mx+mO(x^2)},$$

de modo que

$$\left(\frac{1-\frac{m}{N}}{1+\frac{m}{N}}\right)^{\frac{m}{2}} = e^{\frac{-m^2}{N}\left(1+O\left(\frac{m}{N}\right)\right)},$$

además

$$(1-x^2)^{-\frac{N+1}{2}} = e^{-\frac{m+1}{2}\ln(1-x^2)} = e^{-\frac{m+1}{2}(-x^2+O(x^4))},$$

entonces

$$\left(1-\frac{m}{N}^2\right)^{-\frac{N+1}{2}} = e^{\frac{m^2}{2n}\left(1+O\left(\frac{m^2}{N^2}\right)\right)}$$

[1]Fulks, Watson. *Cálculo avanzado*, Editorial Limusa, 1973.

y reemplazando en (3.5), obtenemos la siguiente relación:

$$P_k \sim \sqrt{\frac{2}{\pi N}} e^{-\frac{m^2}{N}} e^{\frac{m^2}{2n}} = \sqrt{\frac{2}{\pi N}} e^{-\frac{m^2}{2N}}.$$

El comportamiento asintótico para $N \to \infty$, $N \gg m$, es:

$$P_k = \frac{1}{2^N} \frac{N!}{k!(N-k)!} = \frac{1}{2^N} \frac{N!}{(\frac{1}{2}(N+m))!(\frac{1}{2}(N-m))!} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi N}} e^{-\frac{m^2}{2n}}. \tag{3.6}$$

Es decir, P es asintoticamente una distribución de probabilidad normal. Podemos ver esto desde otro aspecto como se observa a continuación.

P en (3.6) es un tipo de distribución binomial. Esta distribución puede ser aproximada por la distribución normal para N y m muy grandes. Para determinar los coeficientes en el limite de la distribución gaussiana para $P(t, x)$, observamos que la posición del individuo en el tiempo $N\Delta t$ es la suma de N saltos a la derecha o hacia la izquierda, cada uno con una probabilidad de $1/2$, así podemos describir la posición del individuo en el tiempo $N\Delta t$ como el resultado de la suma $X_1 + \cdots + X_N$ de N independientes variables aleatorias, teniendo cada una el valor $-\Delta x$ con probabilidad $1/2$ o Δx con probabilidad $1/2$.

Por lo tanto, X_i tiene esperanza (media) 0 y varianza $(\sigma)^2 = \frac{1}{2}(-\Delta x)^2 + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 = (\Delta x)^2$. Sea $Y_N = (X_1 + \cdots + X_N)/\sigma\sqrt{N} = (X_1 + \cdots + X_N)/\Delta x\sqrt{N}$, y si $P(X \le z)$ denota la probabilidad de que $X \le z$, donde X es cualquier variable aleatoria. Por el teorema del límite central (y utilizando el hecho de que la media de X_i es 0 para cada i) tenemos

$$\lim_{N\to\infty} P(Y_N \le z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{\frac{-r^2}{2}} dr. \tag{3.7}$$

Como $t = N\Delta t$ es el tiempo total después de N pasos

$$P(X_1 + \cdots + X_N \le x) = P\left(Y_N \le \frac{x}{\Delta x\sqrt{\frac{t}{\Delta t}}}\right) = P\left(Y_N \le \frac{x}{\sqrt{2Dt}}\right). \tag{3.8}$$

donde hemos utilizado la escala $(\Delta x)^2/\Delta t = 2D$, como antes. De este modo, obtenemos a partir de (3.7) y (3.8),

$$\lim_{N\to\infty} P(X_1 + \cdots + X_N \le x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x/\sqrt{2Dt}} e^{\frac{-r^2}{2}} dr. \tag{3.9}$$

Haciendo la sustitución $y = (\sqrt{2Dt})r$ en (3.8) llegamos a

$$\lim_{N\to\infty} P(X_1 + \cdots + X_N \le x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-y^2}{4Dt}} dy. \tag{3.10}$$

La expresión $(1/\sqrt{4\pi Dt})e^{-y^2/4Dt}$ en el lado derecho de (3.10) es la solución fundamental de la ecuación de difusión (3.24) en el caso $v = 0$, es decir, en el caso donde no hay preferencia en la dirección del movimiento. Si usamos eso como un modelo para la distribución de probabilidad $P(t,y)$ para la posición de un individuo en el tiempo t, entonces $P(0,y) = \delta(y)$, esto es, $P(0,y)$ es un punto de masa o distribución delta en cero. Además, $P_t(t,x) = DP_{xx}(t,x)$. Si una partícula inicia su movimiento en un punto z entonces la distribución después del tiempo t debe ser $\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\right) e^{\frac{-(y-z)^2}{4Dt}}$. Si comenzamos con un conjunto de partículas con una densidad dada por $u_0(x)$ en el tiempo cero, entonces en el momento t la densidad esta dada por

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(y-x)^2}{4Dt}} u_0(y)dy. \tag{3.11}$$

que es equivalente a

$$u_t(t,x) = Du_{xx}(t,x),$$

donde $u(0,x) = u_0(x)$.

La noción de caminata aleatoria puede extenderse a más dimensiones espaciales y otros tipos de movimientos mas complejos. No vamos a explorar esas extensiones más aquí, excepto para tener en cuenta que si la diferentes direcciones de la caminata son tomadas con igual probabilidad y no hay correlación entre pasos sucesivos, la distribución para un individuo que se encuentra en el origen en $\mathbb{R}^n$ después de un tiempo t es bien aproximada por

$$\left(\frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{N}{2}}}\right) e^{\frac{-r^2}{4Dt}},$$

donde $r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$; esta forma es la solución fundamental a la ecuación

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_N^2}\right) = D\nabla.\nabla u(t,x)$$

que es la ecuación de difusión n-dimensional. En cualquier dimensión, $D = \sigma^2/2$ donde σ^2 es la varianza de la distribución $(1/(4\pi Dt))^{\frac{N}{2}} e^{-r^2/4Dt}$ cuando $t = 1$.

Nuestro objetivo siguiente es permitir que Δt y Δx tiendan a cero para obtener una caminata continua que incorpore las principales características de una caminata aleatoria discreta.

Transición al límite de la probabilidad

Cada movimiento de la partícula es independiente del anterior. Si la partícula se encontraba en la posición x en el tiempo $t + \Delta t$, significa que al tiempo t la partícula se encontraba en $x - \Delta x$ o en $x + \Delta x$ con igual probabilidad. De aquí que

$$P(t+\Delta t, x) = \frac{1}{2}P(t, x-\Delta x) + \frac{1}{2}P(t, x+\Delta x) \tag{3.12}$$

con las condiciones iniciales

$$P(0,0) = 1, \quad P(0,x) = 0 \quad \text{si} \quad x \neq 0.$$

Manteniendo x y t fijos, observemos que pasa cuando $\Delta t \to 0$, $\Delta x \to 0$. Supongamos además que $P(t, x)$ es una función suave, definida en $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ y no solo en los puntos discretos $(N\Delta t, m\Delta x)$ (pasando al límite hallaremos una distribución de probabilidad continua tal que $P(t, x)$ siendo la probabilidad de encontrar la partícula en (t, x) será cero. Si interpretamos $P(t, x)$ como una densidad de probabilidad, este inconveniente desaparecer). Usando la fórmula de Taylor podemos escribir

$$\begin{aligned} P(t + \Delta t, x) &= P(t, x) + P_t(t, x)\Delta t + o(\Delta t) \\ P(t, x \pm \Delta x) &= P(t, x)\Delta x \pm P_x(t, x)\Delta x + \frac{1}{2}P_{xx}(t, x)(\Delta x)^2 + o((\Delta x)^2) \end{aligned}$$

Sustituyendo en (3.12), después de algunas simplificaciones, hallamos

$$P_t\Delta t + o(\Delta t) = \frac{1}{2}P_{xx}\Delta x^2 + o((\Delta x)^2).$$

Dividiendo por Δt,

$$P_t + o(1) = \frac{1}{2}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}P_{xx} + o\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right). \tag{3.13}$$

Este es un momento importante, en la última ecuación nos encontramos de nuevo con la combinación $\frac{\Delta x}{\Delta t}$. Si deseamos obtener algo no trivial cuando $\Delta x, \Delta t \to 0$, requerimos que $\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}$ sea constante así

$$\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = 2D$$

para algún número $D \neq 0$ (el número dos esta por razones estéticas). Pasando al límite en (3.13) obtenemos la siguiente ecuación para P

$$P_t = DP_{xx} \tag{3.14}$$

y la condición inicial se convierte en

$$\lim_{t \to 0} P(t, x) = \delta(x) \tag{3.15}$$

3.2.2 Caso caminata aleatoria no simétrica

Como en el anterior capítulo consideremos una partícula que se mueve aleatoriamente sobre una recta horizontal, un paso $\Delta x > 0$, en un intervalo de tiempo de duración $\Delta t > 0$ de tal forma que ella se encuentra inicialmente en el origen $(x = 0)$ y se mueve (independientemente) a la derecha con probabilidad $p \neq \frac{1}{2}$ y a la izquierda con probabilidad $q = 1 - p$.

Sabemos que la probabilidad, $P(t + \Delta t, x)$, que el individuo se encuentra en la ubicación x en el tiempo $t + \Delta t$ podemos calcularla al observar que para llegar a la posición x en el tiempo $t + \Delta t$ el individuo debe estar o bien en la posición $x - \Delta x$ en el tiempo t y moverse hacia la derecha o estar en la posición $x + \Delta x$ en el tiempo t y moverse a la izquierda:

$$P(t + \Delta t, x) = pP(t, x - \Delta x) + qP(t, x + \Delta x) \tag{3.16}$$

con las condiciones iniciales usuales

$$P(0,0) = 1 \text{ y } P(0,x) = 0 \text{ si } x \neq 0$$

Como en el caso simétrico, mantendremos x y t fijos y examinaremos que pasa cuando $\Delta x, \Delta t \to 0$.
Por la fórmula de Taylor tenemos

$$P(t+\Delta t, x) = P(t,x) + P_t(t,x)\Delta t + o(\Delta t)$$
$$P(t, x \pm \Delta x) = P(t,x) \pm P_x(t,x)\Delta x + \frac{1}{2}P_{xx}(t,x)(\Delta x)^2 + o((\Delta x)^2).$$

Sustituyendo en (3.16) obtenemos

$$P_t(t,x)\Delta t + o(\Delta t) = \frac{1}{2}P_{xx}(t,x)(\Delta x)^2 + P_x(t,x)(q-p)\Delta x + o((\Delta x)^2) \tag{3.17}$$

Dividiendo por Δt, obtenemos

$$P_t(t,x) + o(1) = \frac{1}{2}P_{xx}(t,x)\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} + P_x(t,x)\frac{(q-p)\Delta x}{\Delta t} + o\left(\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}\right). \tag{3.18}$$

Este es un punto importante, nos damos cuenta que si dejamos $\Delta t, \Delta x \to 0$, y si asumimos que

$$\frac{\Delta x^2}{\Delta t} = 2D \tag{3.19}$$

ya no es suficiente para obtener algo no trivial de (3.18), es mas si mantenemos p y q constantes, tenemos

$$\frac{(q-p)\Delta x}{\Delta t} \to \infty$$

y de (3.18) tenemos una contradicción. Viendo que

$$\frac{(q-p)\Delta x}{\Delta t} = \frac{(q-p)}{\Delta x}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}$$

vemos que además de (3.19) necesitamos que

$$\frac{(q-p)}{\Delta x} = \beta$$

con β finito.

De aquí que

$$\frac{(q-p)}{\Delta x}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \to 2D\beta := -v$$

y aplicando límite cuando $\Delta t, \Delta x \to 0$ en (3.18) obtenemos

$$P_t(t,x) = DP_{xx}(t,x) - vP_x(t,x) \tag{3.20}$$

DP_{xx} modela un fenómeno de difusión. Examinemos que sucede con el término vP_x. Las dimensiones de v al ser $q-p$ adimensional son las mismas que las de $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, las cuales son dimensiones de velocidad. Es decir v codifica la tendencia de la partícula de moverse en determinada dirección con velocidad $|v|$; a la derecha si $v < 0$, a la izquierda si $v > 0$.

3.2.3 Usando la definición de derivada

Partiendo de la ecuación en diferencias obtenida para una caminata aleatoria no simétrica

$$P(t+\Delta t, x) = pP(t, x-\Delta x) + qP(t, x+\Delta x), \tag{3.21}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{P(t+\Delta t, x) - P(t,x)}{\Delta t} &= \frac{1}{2\Delta t}\left[P(t, x+\Delta x) - 2P(t,x) + P(t, x-\Delta x)\right] \\ &+ \frac{\beta}{\Delta t}\left[P(t, x+\Delta x) - P(t, x-\Delta x)\right], \end{aligned} \tag{3.22}$$

donde $\beta = \frac{1}{2} - p$. Para obtener una ecuación de difusión a partir de (3.22) debemos relacionar $\frac{1}{2\Delta t}$ y $\frac{\beta}{\Delta t}$ con Δx a través de escalamiento. Si dejamos que $D = \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}$ y sea $v = \frac{-2\beta\Delta x}{\Delta t}$ entonces $\frac{1}{2\Delta t} = \frac{D}{(\Delta x)^2}$ y $\frac{\beta}{\Delta t} = \frac{-v}{2\Delta x}$ de manera que (3.22) se convierte en

$$\begin{aligned} \frac{P(t+\Delta t, x) - P(t,x)}{\Delta t} &= D\left[\frac{P(t, x+\Delta x) - 2P(t,x) + P(t, x-\Delta x)}{(\Delta x)^2}\right] \\ &- v\left[\frac{P(t, x+\Delta x) - P(t, x-\Delta x)}{2\Delta x}\right]. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Ahora podemos pasar al límite cuando Δt y Δx tienden a cero para obtener

$$P_t(t,x) = DP_{xx}(t,x) - vP_x(t,x). \tag{3.24}$$

Si $p = q$ (ir a derecha o izquierda es igualmente probable) entonces $\beta = 0$, por lo que $v = 0$. Por lo tanto, el término $DP_{xx}(t,x)$ describe el aspecto del movimiento que viene de una caminata aleatoria simétrica, es decir, el aspecto debido a la difusión. Si volvemos a la ecuación (3.21) y dejamos que $p = 1$ obtenemos $P(t+\Delta t, x) = P(t, x-\Delta x)$ que refleja un movimiento estrictamente a la derecha. Podemos reescribir esta última relación como

$$\left[\frac{P(t+\Delta t, x) - P(t,x)}{\Delta t}\right] = -v\left[\frac{P(t,x) - P(t, x-\Delta x)}{\Delta x}\right].$$

Cuando $p = 1$, $\beta = -1/2$, por lo que la escala $-2\beta\Delta x/\Delta t = v$ así que (3.22) se convierte en $\frac{P(t+\Delta t,x)-P(t,x)}{\Delta t} = -v\left[\frac{P(t,x)-P(t,x-\Delta x)}{\Delta x}\right]$ que pasando al límite cuando Δt y Δx tienden a cero se transforma en

$$P_t(t,x) = -vP_x(t,x). \tag{3.25}$$

Esta última ecuación tiene solución $P(t,x) = P_0(x - vt)$. Donde $P(0,x) = P_0(x)$. Por lo tanto, describe el movimiento hacia la derecha con velocidad $\frac{\Delta x}{\Delta t} = v$. La interpretación del coeficiente D en (3.24) es más sutil, pero la relación $\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}$ sugiere que D puede ser visto como la mitad del cuadrado de la distancia que atraviesa un individuo en una unidad de tiempo por movimientos al azar a la izquierda o la derecha.

Apéndice

- **Teorema del binomio de Newton**
  Usando la fórmula para calcular el valor de $\binom{n}{k}$ (representado como $C(n,k)$, o C_k^n)este teorema afirma lo siguiente:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k,$$

  donde $\binom{n}{k}$ recibe el nombre de coeficiente binomial, $n \in \mathbb{R}$. En general,

$$(x+y)^t = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{t}{k} x^{t-k} y^k, \qquad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

- **Teorema de probabilidad total**
  Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una partición sobre el espacio muestral tal que los sucesos A_i forman un sistema completo, es decir, la suma de sus probabilidades es 1 y sea B un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B|A_i)$, entonces la probabilidad del suceso B viene dada por la expresión:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) P(A_i).$$

  Ejemplo
  Al tirar una moneda, el suceso "salir cara" y el "salir cruz" forman un sistema completo, no hay más alternativas: la suma de sus probabilidades es 1.

- **Ley de Fick**
  La densidad de flujo de partículas J es proporcional al gradiente de concentración de las partículas. Esto es, en una dimensión

$$J \propto \frac{-\partial C}{\partial x} \Rightarrow J = -D \frac{\partial C}{\partial x} \tag{3.26}$$

  donde $C(t,x)$ es la concentración de las partículas y D es la difusividad. El signo menos simplemente significa que las partículas se transportan de una alta a una baja

concentración.
Se puede escribir una ecuación de conservación general que nos dice que el cambio de una cantidad de material en una región es igual al flujo cerca de la frontera. Si la región es $x_0 < x < x_1$ y ningún material es creado, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{x_0}^{x_1} C(t,x)\,\mathrm{d}x = J(t,x_0) - J(t,x_1).$$

Si $x_1 = x_0 + \Delta x$, se toma límite cuando $\Delta x \to 0$ y se asume (3.26) obtenemos la *ecuación de reacción difusión clásica* en una dimensión:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}.$$

Si liberamos una cantidad Q de partículas por unidad de área en $x = 0$ en un tiempo $t = 0$, es decir,

$$C(0,x) = Q\delta(x)$$

donde $\delta(x)$ es la "función" delta de Dirac, entonces la solución de la ecuación de reacción de difusión clásica se convierte en

$$C(t,x) = \frac{Q}{(4\pi Dt)^{\frac{1}{2}}} exp\left(\frac{-x^2}{4Dt}\right), \qquad t > 0.$$

- **Teorema del límite central** o **teorema central del límite**
  Indica que, en condiciones muy generales, si S_n es la suma de n variables aleatorias independientes y de varianza no nula pero finita, entonces la función de distribución de probabilidad S_n se aproxima bien a una distribución normal (también llamada distribución gaussiana, curva de Gauss o campana de Gauss). Así, el teorema asegura que esto ocurre cuando la suma de estas variables aleatorias e independientes es lo suficientemente grande.

  Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un conjunto de variables aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas con media μ y varianza $0 < \sigma^2 < \infty$. Sea $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le z\right) = \Phi(z),$$

  donde $\Phi(z)$ es la función de distribución de una distribución normal y P es la probabilidad.

Bibliografía

[Basu] BASU, A. K. *Introduction to stochastic processes*. Alpha Science International Ltd., 2003.

[Brzézniak Z. y Zastawniak T.] Brzézniak Z. y Zastawniak T. *Basic stochastic processes*. Springer, 1999.

[Cantrell] CANTRELL, Robert Stephen. *Spatial Ecology via Reaction-Diffusion Equations*. Inglaterra, John Wiley and Sons, Ltd., 2003. 421 p. ISBN 0-471-49301-5.

[Elaydi] ELAYDI, Saber. *An Introduction to Difference Equations*. Texas, Springer. 2005. 563 p. ISBN 0-387-23059-9.

[Finizio] FINIZIO, N. *An Introduction to Differential Equations with Difference Equations, Fourier Series and Partial Differential Equations*. California, Wadsworth, Inc. 1982. 484 p. ISBN 0-534-00960-3.

[Goldberg] GOLDBERG, Samuel. *Introduction to Difference Equations*. New York, Jhon Wiley and sons, inc, 1968.

[Mickens] R. E., Mickens. *Difference Equations: Theory and Applications*. New York, Van Nostrand Reinhold, 2nd edition 1987.

[Miller] MILLER, Kenneth S. *the calculus of finite Differences and Difference Equations*. New York, Dover Publications, Inc. 1960. 174 p.

[Montazer] MONTAZER, Aliakbar. *DIFFERENCE AND DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH APPLICATIONS IN QUEUEING THEORY*. Texas, John Wiley and sons, Inc. 2013. 417 p. ISBN 978-1-118-39324-6.

[Murray] MURRAY, James Dickson. *Mathematical biology: I. An introduction*. Tercera edición. Springer, 1993. 551 p. ISBN 0-387-95223-3.

[Neuhaser] NEUHAUSER, Claudia. *Matemáticas para ciencias*. Madrid, Pearson Prentice Hall, 2004. ISBN 84-205-4253-9.

[Restrepo] RESTREPO, Carlos Julio. *Teoría del caos: Sistemas dinámicos y series del tiempo*. Popayán, Restrepo Savedra Carlos Julio, 2007. ISBN 978-958-44-1527-1.

[Salsa] SALSA, Sandro. *Partial differential equations in action from modelling to theory*. Italia, Milano, 2007. 556 p. ISBN 978-88-470-0751-2.

[Spitzer] SPITZER, Frank. *Principles of random walk*. New York, Springer, 1964. 418 p. ISBN 978-1-4757-4231-2.

[Padilla] PADILLA LONGORIA, Pablo. Autor del capítulo 1; Sistemas dinámicos. En ROHANI, Pehman. *Biología matemática: Un enfoque desde los sistemas dinámicos*. Agosto 26 de 2011. p. 1-56.

[Sanchez] SANCHEZ GARDUÑO, Faustino. PADILLA LONGORIA, Pablo. Autores del capítulo 6; Emergencia y formación de patrones en biología: Un enfoque matemático. En ROHANI, Pehman. *Biología matemática: Un enfoque desde los sistemas dinámicos*. Agosto 26 de 2011. p. 125-149.

[Navarrete] NAVARRETE MOLANO, Genny Alexandra. *Introducción a las ecuaciones en diferencias*. Bogotá, diciembre de 2003. 42 p. Trabajo de grado (Matemático). Fundación Universitaria Konrad Lorenz.