CONEXIONES DE GALOIS

Ruby Johana Cuero Zúñiga

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Matemáticas
Popayán

2015

CONEXIONES DE GALOIS

Ruby Johana Cuero Zúñiga

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título en Matemáticas otorgado por la Universidad del Cauca

Director
Freddy William Bustos Rengifo

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Matemáticas
Popayán

2015

Tabla de Contenido

Introducción

Uno de los aportes más importantes a la historia del álgebra es el de *Evariste Galois* (1811-1832) quien trabajó en la teoría de ecuaciones y redactó varios artículos los cuales fueron conocidos por la Academia Francesa de Matemáticas en el año de 1846. En uno de los tantos trabajos de *Galois* se encontró una solución al siguiente problema:

Dada una ecuación irreducible de grado primo, decidir si es o no resoluble por radicales.

La teoría que permite resolver este problema es la que hoy se conoce como la *Teoría de Galois.*

Galois descubrió que el problema de decidir si las soluciones de una ecuación se pueden expresar en términos de sumas, productos y raíces n-ésimas de los coeficientes de la ecuación, se podía resolver comparando el campo generado por los coeficientes con el campo generado por las soluciones de la ecuación. Concretamente, el **teorema fundamental de la teoría de Galois** expresa que:

Dada una extensión de campo K/F, algebraica, normal y separable, y Gal(K/F) su grupo de Galois, existe una correspondencia (que invierte el orden de las inclusiones) entre el conjunto de subcampos de K/F y el conjunto de subgrupos de Gal(K/F).

La correspondencia entre subgrupos y subcampos del Teorema Fundamental de la Teoría de Galois determina el surgimiento del concepto de *Conexiones de Galois*. En el siglo XX se abre el camino hacia la visión moderna de las *Conexiones de Galois* con los aportes de *Garrett Birkhoff* quien fue el primero en señalar la construcción fundamental de las *Conexiones de Galois* denominándolas *polaridades.* La publicación inicial que contiene un tratamiento sistemático de estas ideas es la edición de 1940, titulada *Lattice Theory.* [2]. En 1944 el matemático *Oystein Ore* estableció explícitamente la noción de *Conexiones de Galois* en el artículo *Galois Connexions* [7].

El objetivo del presente trabajo es mostrar el concepto de conexiones de Galois y el vínculo de estas con las relaciones binarias, específicamente mostraremos que a partir de una relación binaria con ciertas propiedades podemos definir una conexión de Galois y si tenemos una conexión de Galois encontrar la relación binaria que la define. Para tal propósito presentamos algunos aspectos de la teoría del orden, presentamos un teorema que nos permite obtener a partir de un isomorfismo dual una conexión de Galois, algunas propiedades de relaciones binarias y finalmente realizamos la demostración del teorema que vincula las relaciones binarias con las conexiones de Galois.
Además, complementamos este trabajo con las propiedades que deben satisfacer las relaciones binarias para obtener conexiones de Galois perfectas e involutorias y por último presentamos algunas aplicaciones en diferentes campos de la matemática.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Relaciones binarias

En matemáticas las relaciones binarias tienen gran importancia debido a que una gran parte de las asociaciones entre elementos de conjuntos, tanto numéricos como no numéricos, las hacemos de dos en dos elementos, tanto si son elementos de un único conjunto o de dos conjuntos distintos. A continuación presentaremos algunas definiciones de este tipo de relaciones.

Definición 1.1.1 *El producto cartesiano de dos conjuntos S y T lo definimos como el conjunto de pares ordenados:*

$$S \times T = \{ \ (s, t) \mid s \in S, \ t \in T \ \}.$$

Definición 1.1.2 *Sean A y B conjuntos no vacíos. Una Relación binaria de A en B es un subconjunto R del producto cartesiano $A \times B$. Si $A = B$ decimos que la relación R es una relación en A. Si R es una relación binaria y $(x, y) \in R$ entonces escribimos xRy.*

Una relación binaria en un conjunto A es:

(a) **Reflexiva:** Si para todo $a \in A$, aRa.

(b) **Simétrica:** Si para todo $a, b \in A$, aRb implica que bRa.

(c) **Antisimétrica:** Si para todo $a, b \in A$ aRb, bRa implica que $a = b$.

(d) **Transitiva:** Si para todo $a, b, c \in A$, aRb, bRc implica que aRc.

Definición 1.1.3 *Una relación de equivalencia en un conjunto no vacío A, es una relación binaria en A que es reflexiva, simétrica y transitiva.*

1.2. Conjuntos Parcialmente Ordenados

El orden aparece por todas partes, especialmente si nos referimos a matemática y áreas relacionadas como la informática. El primer orden que encontramos en la educación matemática es el orden $\leq$ de los números naturales. Este concepto intuitivo es fácilmente extendido a otros conjuntos de números, tal como los enteros y reales.
Este tipo de orden tiene una propiedad especial: cada elemento lo podemos comparar con cualquier otro elemento, es decir es o mayor, o menor, o igual. Sin embargo, esto no siempre es un requisito deseable. Un ejemplo de ello es el orden de los subconjuntos de un conjunto, si un conjunto contiene los elementos de otro conjunto, entonces podemos decir que es mayor o igual. Pero hay conjuntos que pueden no ser comparables de este modo, puesto que cada uno puede contener algún elemento que no esté presente en el otro. Por lo tanto, la inclusión de subconjuntos es un orden parcial, en comparación con el orden total dado antes.
Ahora definiremos este tipo de orden ya que es uno de los principales objetos de estudio en este trabajo.

Definición 1.2.1 *Un orden parcial en un conjunto no vacío P es una relación binaria $\leq$ en P que es reflexiva, antisimétrica y transitiva. La pareja $(P, \leq)$ es llamada **conjunto parcialmente ordenado** o **COPO**.*

Los elementos maximal y minimal pueden ser definidos en conjuntos parcialmente ordenados.

Definición 1.2.2 *Sea $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado:*

1. *Un elemento* ***maximal*** *es un elemento $m \in P$ tal que:*
   si $m \leq p$, para algún $p \in P$ entonces $m = p$.

2. *Un elemento* ***minimal*** *es un elemento $n \in P$ tal que:*
   si $p \leq n$, para algún $p \in P$ entonces $n = p$.

Cotas superiores e inferiores

Las cotas superiores e inferiores pueden ser definidas en un conjunto parcialmente ordenado.

Definición 1.2.3 *Sean $(P,\leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $S \subseteq P$.*

- *Una* ***cota superior*** *para S es un elemento $x \in P$ para el cual $S \leq x$, es decir $y \leq x$ para todo $y \in S$.*
  El conjunto de todas las cotas superiores de S lo denotaremos por S^u.

- *Una* ***cota inferior*** *de S es un elemento $x \in P$ para el cual $x \leq S$, esto es $x \leq y$ para todo $y \in S$.*
  El conjunto de todas las cotas inferiores de S lo denotaremos por S^l.

- *Sea $b \in P$. Decimos que b es el* ***supremo*** *de S si*

  1. *b es una cota superior de S.*
  2. *$b \leq x$, para todo $x \in S^u$.*

- *Sea $b \in P$. Decimos que b es el* ***ínfimo*** *de S si*

  1. *b es una cota inferior de S.*
  2. *$x \leq b$, para todo $x \in S^l$.*

A continuación definiremos dos elementos en un conjunto parcialmente ordenado, los cuales nos permitirán establecer una nueva característica en dicho conjunto.

Definición 1.2.4 *Sea* $(P,\leq)$ *un conjunto parcialmente ordenado:*

1. *Un elemento* ***máximo*** *es un elemento* $m \in P$ *tal que:*
   $p \leq m$*, para todo* $p \in P$.
   Generalmente denotaremos el elemento máximo por ***1*** *y lo llamaremos* ***elemento unidad****.*

2. *Un elemento* ***mínimo*** *es un elemento* $n \in P$ *tal que:*
   $n \leq p$*, para todo* $p \in P$.
   Denotaremos al elemento mínimo por ***0*** *y lo llamaremos* ***elemento cero****.*

1.3. Retículos

En la siguiente sección trataremos conjuntos parcialmente ordenados con características especiales, que nos permitirá obtener nuevas propiedades de gran importancia en el desarrolo de este trabajo.

Definición 1.3.1 *Un conjunto parcialmente ordenado* P *es un* ***retículo*** *si cada par de elementos tiene un ínfimo y un supremo.*

Ejemplos

Ejemplo 1.3.1 *El conjunto* $\mathbb{Z}^+$ *de los enteros positivos ordenados por divisibilidad* [1] *es un retículo, ya que para cualquier* $a, b \in \mathbb{Z}^+$ *el supremo viene dado por el m.c.m* (a, b) *y el ínfimo por el m.c.d* (a, b).

Ejemplo 1.3.2 *Si* S *es un conjunto no vacío entonces el conjunto potencia* $\mathcal{P}(S)$ *ordenado por inclusión es un retículo, el supremo está dado por la unión de los conjuntos y el ínfimo por la intersección de los conjuntos.*

Ejemplo 1.3.3 *Si* V *es un* K*-espacio vectorial, el conjunto de los subespacios vectoriales de* V *ordenados por inclusión es un retículo. Dado dos subespacios vectoriales* V_1 *y* V_2 *tenemos que* $sup(\{V_1, V_2\}) = V_1 + V_2$ *mientras que* $\text{ínf}(\{V_1, V_2\}) = V_1 \cap V_2$.

[1] Para $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $a \leq b$ si y sólo si $a \mid b$.

Definición 1.3.2 *Un conjunto parcialmente ordenado P es un **retículo completo**, si cualquier subconjunto de P tiene un ínfimo y un supremo.*

Ejemplo 1.3.4 *El conjunto potencia de un conjunto no vacío S, $(\mathcal{P}(S),\subseteq)$ es un retículo completo. Este conjunto es un modelo para los retículos completos y por esto en algunas ocasiones nos referiremos al ínfimo o al supremo de un subconjunto de un retículo llamándolos intersección o unión respectivamente.*

Ejemplo 1.3.5 *El intervalo $[0,1]$ con el orden usual es un retículo completo.*

Ejemplo 1.3.6 *El conjunto de los enteros no negativos ordenados por divisibilidad, tomando como elemento mínimo de este conjunto al número 1 y como elemento máximo al número 0, es un retículo completo. El supremo de subconjuntos finitos está dado por el m.c.m y el ínfimo por el m.c.d, para los subconjuntos infinitos el supremo será el número 0 mientras que el ínfimo puede ser un número mayor que 1.*

Ejemplo 1.3.7 *Si K es un campo que contiene como subcampo al campo F, nos referimos al primero como la extensión K/F. Los subcampos de K que contienen a F conforman un retículo con la inclusión; el supremo de una familia de subcampos es el menor subcampo que contiene a la unión y el ínfimo es la intersección. Este es un retículo completo.*

Ejemplo 1.3.8 *Si G es un grupo entonces la familia $S(G)$ de subgrupos de G ordenados por inclusión es un retículo completo, donde el ínfimo de cualquier subconjunto T de $S(G)$ es la intersección y el supremo es el menor subgrupo de G que contiene a los elementos de T.*

Este es un caso particular del ejemplo anterior.

Ejemplo 1.3.9 *Si K es un campo que contiene como subcampo al campo F, $Gal(K/F)$ representa el grupo de todos los automorfismos de K que dejan fijo a F. Este se conoce como "el grupo de Galois de K sobre F" y es según el ejemplo anterior un retículo completo.*

No todo retículo es completo, por ejemplo el conjunto $\mathbb{Z}$ de los enteros bajo el orden natural es un retículo, dados $x, y \in \mathbb{Z}$ tenemos que $\sup(\{x, y\}) = \max(\{x, y\})$ mientras que $\inf(\{x, y\}) = \min(\{x, y\})$. Pero no es un retículo completo ya que si tomamos un subconjunto infinito $S = \{$..., -3, -2, -1, 0$\}$, este no tiene ínfimo.

Definición 1.3.3 *Un subretículo de un retículo P es un subconjunto X de P tal que si $a, b \in X$ entonces ínf$(\{a, b\}) \in X$ y el sup$(\{a, b\}) \in X$.*

De lo anterior tenemos que un subretículo es un retículo por sí mismo con las mismas operaciones de supremo e ínfimo. Por definición el subconjunto vacío es un subretículo. Un subconjunto de un retículo P puede ser por sí mismo un retículo bajo el mismo orden de P sin ser un subretículo, un ejemplo de ello lo presentamos a continuación:

Ejemplo 1.3.10 *Sea $S(G)$ el conjunto de todos los subgrupos de cualquier grupo G ordenados por inclusión el cual es un retículo completo tomando como ínfimo de cualquier subconjunto H de $S(G)$ la intersección de los subgrupos en H y el supremo como el menor subgrupo de G que contiene a los elementos de H. Como la unión de subgrupos no necesariamente es un subgrupo este ejemplo no es un subretículo del retículo de todos los subconjuntos de G.*

En los retículos podemos definir otra clase de subretículos como veremos enseguida:

Definición 1.3.4 *Sea P un retículo, P_1 es un* ***subretículo de*** *P* ***con respecto a la intersección*** *cuando la operación intersección en P_1 coincide con la operación intersección en P.*

Según el ejemplo 1.3.10, S (G) es un subretículo del grupo G con respecto a la intersección.

Definición 1.3.5 *Un retículo $(Q,\leq)$ está* ***contenido en orden*** *en otro retículo $(P,\preceq)$, cuando $Q \subseteq P$ y para $a, b \in Q$, si $a \leq b$ entonces $a \preceq b$ en P.*
Además, Q está ***contenido en orden sobre*** *P, si el elemento unidad y el elemento cero de P y Q son iguales.*

Capítulo 2

Conexiones de Galois

2.1. Operadores de Clausura

El tema central de este trabajo necesita del concepto de operador de clausura, puesto que nos permite clasificar algunos elementos en un nuevo conjunto, que satisface ciertas propiedades como veremos a continuación.

Definición 2.1.1 *Un operador de clausura en un conjunto parcialmente ordenado* $(P,\leq)$ *es un operador unario* ***cl*** *en* P *con las siguientes propiedades:*

1. $p \leq cl(p)$ *para todo* $p \in P$. (***Extensividad***)

2. *Si* $p \leq q$ *entonces* $cl(p) \leq cl(q)$ *para todos* $p, q \in P$. (***Monotonía***)

3. $cl(cl(p)) = cl(p)$ *para todo* $p \in P$. (***Idempotencia***)

El elemento $\boldsymbol{cl(p)}$ *lo nombraremos clausura de* $\boldsymbol{p}$*.*

Observación 2.1 *Sea* X *un conjunto, si* $P = \mathcal{P}(X)$ *entonces las propiedades del operador unario* ***cl*** *en* $(P,\subseteq)$ *serán de la siguiente manera:*

1. $A \subseteq cl(A)$ *para todo* $A \in P$.

2. *Si* $A \subseteq B$ *entonces* $cl(A) \subseteq cl(B)$ *para todos* $A, B \in P$.

3. *$cl(cl(A)) = cl(A)$ para todo $A \in P$.*

Cuando al operador de clausura lo definimos sobre un conjunto potencia $\mathcal{P}(X)$ a este lo llamamos un operador de clausura en X.

Ejemplo 2.1.1 *Sea $A \neq \emptyset$, si $A \subseteq B$ entonces la función en el conjunto potencia $\mathcal{P}(B)$*

$$\mu_A : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(B)$$

definida por

$$\mu_A(X) = A \cup X,$$

es un operador de clausura en el conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}(B),\subseteq)$.

Demostremos que cumple las propiedades:
Sean $X, Y \in \mathcal{P}(B)$ tenemos que:

1. $X \subseteq A \cup X = \mu_A(X)$.
2. Si $X \subseteq Y$ entonces $A \cup X \subseteq A \cup Y$, luego $\mu_A(X) \subseteq \mu_A(Y)$.
3. $\mu_A(\mu_A(X)) = \mu_A(A \cup X) = A \cup (A \cup X) = (A \cup A) \cup X = A \cup X = \mu_A(X)$.

Luego μ_A es un operador de clausura en $(\mathcal{P}(B),\subseteq)$.

Definición 2.1.2 *Sea $(P,\leq)$ un conjunto parcialmente ordenado, un elemento $p \in P$ lo llamaremos **cerrado** si él es igual a su propia clausura, es decir si $p = cl(p)$.*

En el caso en que $P = \mathcal{P}(X)$, todo elemento $A \in P$ donde $cl(A) = A$ lo designaremos como un elemento o conjunto cerrado en P.
El conjunto de los elementos cerrados en P bajo el operador clausura **cl** lo denotaremos por **CL(P)**.

Teorema 2.1.1 *El conjunto parcialmente ordenado $(P,\leq)$ con un operador de clausura cl cumple las siguientes propiedades:*

1. *Si $p \in P$ entonces $cl(p)$ es el menor elemento cerrado de P mayor o igual que p.*

2. *Si el elemento máximo* $\mathbf{1}$ *está en* P *entonces* $\mathbf{1}$ *es cerrado.*

Demostración.

1. Sean $p, r \in P$ tales que r es un elemento cerrado de P y $p \leq r$, por la propiedad del operador de clausura tenemos que $cl(p) \leq cl(r)$ ahora, como r es un elemento cerrado $cl(r) = r$ y de este modo $cl(p) \leq r$. Por ser r un elemento cerrado arbitrario obtenemos que $cl(p) \leq r$, para todo $r \in CL(P)$. Por lo tanto, $cl(p)$ es el menor elemento cerrado de P mayor o igual que p.

2. Si $\mathbf{1} \in P$ entonces por propiedades de clausura $\mathbf{1} \leq cl(\mathbf{1})$; además $\mathbf{1}$ es el elemento máximo de P luego $p \leq \mathbf{1}$ para todo $p \in P$, en particular $cl(\mathbf{1}) \leq \mathbf{1}$. Por lo tanto $cl(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ de lo cual conseguimos que $\mathbf{1}$ es un elemento cerrado de P.

Observación 2.2 *Si además* P *es un retículo con un elemento* $\mathbf{0}$*, la definición de un operador de clausura en* P *no implica que* $\mathbf{0}$ *sea cerrado como tenemos en el ejemplo 2.1.1; allí* μ_A *es un operador de clausura en* $(\mathcal{P}(B),\subseteq)$*, el elemento* $\mathbf{0}$ *de* $\mathcal{P}(B)$ *es el* $\emptyset$ *y* $\mu_A(\emptyset) = A \cup \emptyset = A$ *por lo cual* $\emptyset$ *no es un elemento cerrado de* $\mathcal{P}(B)$*.*

Lema 2.1.1 *Sean* X *un conjunto,* $P = (\mathcal{P}(X),\subseteq)$ *y* $\boldsymbol{cl}$ *un operador clausura sobre* P*. El conjunto de los elementos cerrados de* P *es un retículo completo.*

Demostración.

El conjunto de los elementos cerrados de P que hemos denominado $CL(P)$ es un conjunto parcialmente ordenado ya que hereda el orden del conjunto $\mathcal{P}(X)$. Sean $\mathcal{I}$ un conjunto arbitrario de índices y $S \subseteq CL(P)$ donde $S = \{X_i\}_{i\in\mathcal{I}}$, tenemos que

$$\bigcap_{i\in\mathcal{I}} X_i \subseteq X_i \text{ para todo } i \in \mathcal{I},$$

luego, $\bigcap\limits_{i\in\mathcal{I}} X_i$ es una cota inferior de S.

Sea L una cota inferior de S, entonces $L \subseteq X_i$ para todo $i \in \mathcal{I}$ y por propiedades de clausura tenemos que $cl(L) \subseteq cl(X_i)$ para todo $i \in \mathcal{I}$, pero recordemos que $X_i = cl(X_i)$ para cada $i \in \mathcal{I}$ así,

$cl(L) \subseteq \bigcap_{i\in\mathcal{I}} cl(X_i) = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} X_i$ y como $L \subseteq cl(L)$ entonces $L \subseteq \bigcap_{i\in\mathcal{I}} X_i$. Como L es una cota inferior de S arbitraria obtenemos que $L \subseteq \bigcap_{i\in\mathcal{I}} X_i$ para todo $L \in S^l$, por tanto $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} X_i = \text{ínf}(S)$.

Por otro lado sabemos que $X_i \subseteq \bigcup_{i\in\mathcal{I}} X_i$ para todo $i \in \mathcal{I}$, aplicando la operación de clausura obtenemos que

$$cl(X_i) \subseteq cl(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} X_i) \text{ para todo } i \in \mathcal{I}$$

entonces $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} cl(X_i) \subseteq cl(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} X_i)$. Además S contiene elementos cerrados de P entonces para cada $i \in \mathcal{I}$ tenemos que $X_i = cl(X_i)$, así $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} X_i = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} cl(X_i)$ y con esto llegamos a que

$$X_i \subseteq \bigcup_{i\in\mathcal{I}} cl(X_i) \subseteq cl(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} X_i), \text{ para todo } i \in \mathcal{I}.$$

Así que $cl(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} X_i)$ es una cota superior de S. Ahora verifiquemos que es la menor de las cotas superiores de S. Sea $M \in CL(P)$ cualquier cota superior de S entonces $X_i \subseteq M$ para todo $i \in \mathcal{I}$, luego tenemos que $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} X_i \subseteq M$. Como M es un conjunto cerrado, por propiedades de clausura $cl(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} X_i) \subseteq cl(M) = M$. Además M es una cota superior de S arbitraria, con lo cual obtenemos que $cl(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} X_i) \subseteq M$ para todo $M \in S^u$.

Por lo tanto, $cl(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} X_i) = \sup(S)$. De este modo obtenemos que $CL(P)$ es un retículo completo.

Teorema 2.1.2 *Sean X un conjunto y $P = (\mathcal{P}(X),\subseteq)$. Se puede definir un operador de clausura en P si y sólo si existe un subretículo con respecto a la intersección en P.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea cl un operador de clausura en un conjunto potencia $\mathcal{P}(X)$ ordenado por $\subseteq$ y

$CL(P)$ la familia de conjuntos cerrados en P.
Mostraremos que $CL(P)$ es un subretículo con respecto a la intersección en P; por el lema anterior sabemos que $CL(P)$ es un retículo completo, además si $\{X_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ es una familia de elementos en $CL(P)$ y $S = \{X_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ entonces $\bigcap\limits_{i\in\mathcal{I}} X_i = \text{ínf}(S)$. Notemos que

$$\bigcap_{i\in\mathcal{I}} cl(X_i) \subseteq cl(\bigcap_{i\in\mathcal{I}} cl(X_i)).$$

Por otra parte, sabemos que $\bigcap\limits_{i\in\mathcal{I}} cl(X_i) \subseteq cl(X_i)$ para cada $i \in \mathcal{I}$.
Si aplicamos clausura en ambos lados obtenemos que:

$$cl(\bigcap_{i\in\mathcal{I}} cl(X_i)) \subseteq cl(cl(X_i)) = cl(X_i) \text{ para cada } i \in \mathcal{I}$$

esto lo obtenemos por la propiedad de idempotencia de cl. Luego,

$$cl(\bigcap_{i\in\mathcal{I}} cl(X_i)) \subseteq \bigcap_{i\in\mathcal{I}} cl(X_i)$$

Por lo tanto, $cl(\bigcap\limits_{i\in\mathcal{I}} cl(X_i)) = \bigcap\limits_{i\in\mathcal{I}} cl(X_i)$
y como $cl(X_i) = X_i$, para todo $i \in \mathcal{I}$ por ser conjuntos cerrados en P tenemos que: $\bigcap\limits_{i\in\mathcal{I}} X_i$ es un conjunto cerrado en P y así $\bigcap\limits_{i\in\mathcal{I}} X_i \in CL(P)$.
En consecuencia $CL(P)$ es un subretículo con respecto a la intersección sobre P.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\mathcal{Q}$ es un subretículo con respecto a la intersección sobre P, entonces definimos el operador

$$\theta : P \to P$$

mediante

$$\theta(R) = \text{mín}\{A \in \mathcal{Q} \mid R \subseteq A\} \text{ para cada } R \in P.$$

Demostremos que θ es un operador de clausura. En efecto,

i. Sea $R \in P$, entonces $R \subseteq \text{mín}\{A \in \mathcal{Q} \mid R \subseteq A\} = \theta(R)$.

ii. Sean R, $S \in P$ y supongamos que $R \subseteq S$, entonces tenemos que:

$$\{T \in \mathcal{Q} \mid S \subseteq T\} \subseteq \{A \in \mathcal{Q} \mid R \subseteq A\}.$$

Entonces, $\text{mín}\{A \in \mathcal{Q} \mid R \subseteq A\} \subseteq \text{mín}\{T \in \mathcal{Q} \mid S \subseteq T\}$ y por lo tanto, $\theta(R) \subseteq \theta(S)$.

iii. Sea $R \in P$, y supongamos que $\theta(R) = Q_1$, entonces $Q_1 \in \mathcal{Q}$ así que

$$\theta(Q_1) = \text{mín}\{A \in \mathcal{Q} \mid Q_1 \subseteq A\} = Q_1.$$

Luego $\theta(\theta(R)) = \theta(R)$.
De ***i***, ***ii*** y ***iii*** obtenemos que θ es un operador de clausura en P.

2.2. Conexión de Galois

En matemáticas es muy utilizada la acción de comparar entes según sus cualidades conjuntistas, algebraicas, analíticas o topológicas. Dichas cualidades nos permiten clasificar objetos matemáticos de tal forma que se le asigna un nombre y un trato especial.
En este trabajo trataremos comparaciones de objetos matemáticos, ahora a través de las llamadas conexiones de Galois.

Definición 2.2.1 *Sean $(P,\leq)$ y $(Q,\preceq)$ conjuntos parcialmente ordenados. Una Conexión de Galois se define en (P,Q) como una pareja de funciones*

$$\Pi : P \to Q \qquad y \qquad \Omega : Q \to P$$

con las siguientes propiedades:

1. *Cuando $p,q \in P$ o $r,s \in Q$ entonces*

   $p \leq q$ *implica* $\Pi(p) \geq \Pi(q)$ *y* $r \preceq s$ *implica* $\Omega(r) \succeq \Omega(s)$

2. *Para todo $p \in P$, $q \in Q$,*

$$p \leq \Omega(\Pi(p)) \qquad y \qquad q \preceq \Pi(\Omega(q))$$

Ejemplo 2.2.1 *Sean F y K campos con $F \subseteq K$. El conjunto $G = G(K/F)$, el grupo de todos los automorfismos de K que fijan cada elemento de F. El ejemplo más famoso de una conexión de Galois es la correspondencia entre el conjunto de campos intermedios E tales que $F \subseteq E \subseteq K$, que denominaremos P, y el conjunto de subgrupos H del grupo de Galois G que llamaremos Q. Consideramos a P y Q ordenados por inclusión. Esta correspondencia está dada por:*

$$\Pi : P \to Q$$

definida por

$$\Pi(E) = G(K/E) = \{\sigma \in G \mid \sigma(x) = x \textit{ para todo } x \in E\}$$

y

$$\Omega : Q \to P$$

dada por

$$\Omega(H) = \{x \in K \mid \tau(x) = x \textit{ para todo } \tau \in H\}$$

Verifiquemos que la pareja (Π,Ω) es una conexión de Galois en (P,Q)

a) Sean E_1, $E_2 \in P$ tales que $E_1 \subseteq E_2$ entonces

$$\{\sigma \in G \mid \sigma(x) = x \text{ para todo } x \in E_2\} \subseteq \{\alpha \in G \mid \alpha(y) = y \text{ para todo } y \in E_1\}.$$

Por tanto, $\Pi(E_2) \subseteq \Pi(E_1)$.

Ahora sean H_1, $H_2 \in Q$ tales que $H_1 \subseteq H_2$, entonces

$$\{x \in K \mid \tau(x) = x \text{ para todo } \tau \in H_2\} \subseteq \{y \in K \mid \beta(y) = y \text{ para todo } \beta \in H_1\}$$

y así, $\Omega(H_2) \subseteq \Omega(H_1)$.

b) Sean $E \in P$, $H \in Q$

$$\Pi(E) = G(K/E),$$

luego

$$\Omega(G(K/E)) = \{x \in K \mid \tau(x) = x \text{ para todo } \tau \in G(K/E)\}.$$

Entonces, $E \subseteq \Omega(G(K/E)) = \Omega(\Pi(E))$.

Además, $\Omega(H) = \{x \in K \mid \tau(x) = x \text{ para todo } \tau \in H\} = A$. Entonces $\Pi(A) = G(K/A)$ y $H \subseteq \Pi(A)$ ya que los automorfismos de H dejan fijos al conjunto A.
Por tanto, $H \subseteq \Pi(\Omega(H))$.

De **a)** y **b)** obtenemos que la pareja (Π,Ω) es una conexión de Galois en (P,Q).

Ejemplo 2.2.2 *Si Q es un conjunto parcialmente ordenado entonces las funciones*

$$\mu,\ \lambda : \mathcal{P}(Q) \to \mathcal{P}(Q)$$

definidas por

$$\mu(A) = A^u \quad y \quad \lambda(A) = A^l \text{ para cada } A \subseteq Q,$$

determinan una conexión de Galois en $(\mathcal{P}(Q),\mathcal{P}(Q))$.

Observemos que:
Si A, $B \in \mathcal{P}(Q)$ tales que $A \subseteq B$ entonces $B^u \subseteq A^u$ pues si $x \in B^u$ tenemos que $B \leq x$, como $A \subseteq B$, en particular $A \leq x$, luego $x \in A^u$.
Además, $B^l \subseteq A^l$ porque si $y \in B^l$ entonces $y \leq B$ y por hipótesis $y \leq A$, por tanto $y \in A^l$.

Por lo anterior tenemos que $\mu(B) \subseteq \mu(A)$ y $\lambda(B) \subseteq \lambda(A)$, luego la primera propiedad de conexión de Galois se cumple.

Por otra parte, si $A \in \mathcal{P}(Q)$ tenemos que $A \subseteq \lambda(\mu(A))$ ya que si $x \in A$, $x \leq y$ para todo $y \in A^u$, luego $x \in (A^u)^l = \lambda(A^u) = \lambda(\mu(A))$.
También, $A \subseteq \mu(\lambda(A))$ porque si $y \in A$, $z \leq y$ para todo $z \in A^l$ así,

$$y \in (A^l)^u = \mu(\lambda(A)).$$

Por consiguiente, la propiedad 2 de conexión de Galois se cumple y podemos decir que la pareja (μ,λ) es una conexión de Galois para $(\mathcal{P}(Q),\mathcal{P}(Q))$.

Por medio de una combinación de las dos propiedades que cumple la conexión de Galois obtenemos el siguiente resultado.

Lema 2.2.1 *Sea* (Π,Ω) *una Conexión de Galois en* (P,Q) *entonces*

$$\Pi(\Omega(\Pi(p))) = \Pi(p) \quad y \quad \Omega(\Pi(\Omega(q))) = \Omega(q)$$

para todo $p \in P$ *y* $q \in Q$.

Demostración.
Sean $\Pi : P \to Q$ y $\Omega : Q \to P$ las funciones que representan la conexión de Galois en la pareja (P, Q) y p en P.
Por propiedad (*2*) de la Conexión de Galois tenemos que:

$$p \leq \Omega(\Pi(p),$$

luego por propiedad (*1*) obtenemos

$$\Pi(\Omega(\Pi(p))) \leq \Pi(p)$$

Además, $\Pi(p) \leq \Pi(\Omega(\Pi(p)))$ nuevamente por propiedad (*2*) ya que $\Pi(p) \in Q$.
Por tanto, $\Pi(\Omega(\Pi(p))) = \Pi(p)$, para todo $p \in P$.

Similarmente tenemos $\Omega(\Pi(\Omega(q))) = \Omega(q)$, para todo $q \in Q$.

Las funciones $\Omega \circ \Pi : P \to P$ y $\Pi \circ \Omega : Q \to Q$ tienen como rangos un subconjunto P_1 de P y un subconjunto Q_1 de Q respectivamente. De las propiedades de conexión de Galois y el lema anterior podemos demostrar el siguiente teorema.

Teorema 2.2.1 *Sea* (Π,Ω) *una Conexión de Galois en* (P,Q) *entonces las composiciones* $\Omega \circ \Pi$ *y* $\Pi \circ \Omega$ *son operadores de clausura en* P *y* Q *respectivamente. Además, para todo* $p \in P$ *y* $q \in Q$ *se tiene que* $\Pi(p)$ *y* $\Omega(q)$ *son elementos cerrados en* Q *y* P *respectivamente.*

Demostración.
Comprobemos que la correspondencia $\Pi \circ \Omega$ tiene las propiedades de operador de clausura en Q.

1. Sea $q \in Q$, por propiedad (*2*) de la conexión de Galois obtenemos $q \leq \Pi(\Omega(q))$.

2. Sean q_1, $q_2 \in Q$ tales que $q_1 \leq q_2$, por propiedad (*1*) en la función Ω tenemos que

$$\Omega(q_1) \geq \Omega(q_2)$$

Como $\Omega(q_1)$, $\Omega(q_2) \in P$ por propiedad (*1*) en la función Π adquirimos

$$\Pi(\Omega(q_1)) \leq \Pi(\Omega(q_2))$$

3. Sea $q \in Q$, por el lema anterior y teniendo en cuenta que $\Omega(q) \in P$ tenemos que

$$\Pi(\Omega(\Pi(\Omega(q)))) = \Pi(\Omega(q))$$

En consecuencia de 1, 2 y 3 se tiene que $\Pi \circ \Omega$ es un operador de clausura en Q. De la misma manera obtenemos que $\Omega \circ \Pi$ es un operador de clausura en P.

Ahora, comprobemos que $\Pi(p)$ y $\Omega(q)$ son elementos cerrados en Q y P respectivamente para todo $p \in P$ y $q \in Q$.

Sea $p \in P$, donde $cl_1 = \Pi \circ \Omega : P \to P$

$$cl_1(\Pi(p)) = \Pi(\Omega(\Pi(p))) = \Pi(p).$$

Sea $q \in Q$, donde $cl_2 = \Omega \circ \Pi : Q \to Q$

$$cl_2(\Omega(q)) = \Omega(\Pi(\Omega(q))) = \Omega(q).$$

Por tanto, $\Pi(p)$ y $\Omega(q)$ son elementos cerrados.

Observación 2.3 *Los operadores de clausura $\Omega \circ \Pi$ y $\Pi \circ \Omega$ que definimos en el teorema anterior los denotaremos por cl_1 y cl_2 respectivamente. A los conjuntos de elementos cerrados en P y Q bajo dichos operadores los denotaremos por $CL_1(P)$ y $CL_2(Q)$ respectivamente. Además por el lema 2.2.1 tenemos que*

$$\Pi(cl_1(p)) = \Pi(\Omega(\Pi(p))) = \Pi(p) \text{ para } p \in P$$

y

$$\Omega(cl_2(q)) = \Omega(\Pi(\Omega(q))) = \Omega(q) \text{ para } q \in Q.$$

Teorema 2.2.2 *Si* (Π,Ω) *es una Conexión de Galois en* (P,Q) *entonces las funciones restringidas*

$$\Pi : CL_1(P) \to CL_2(Q) \quad y \quad \Omega : CL_2(Q) \to CL_1(P)$$

son biyecciones inversas una de la otra y establecen un isomorfismo dual entre los conjuntos $CL_1(P)$ *y* $CL_2(Q)$.

Demostración.
Verifiquemos que $\Pi : CL_1(P) \to CL_2(Q)$ es una función biyectiva.
a) Sean $p_1, p_2 \in CL_1(P)$, supongamos que $\Pi(p_1) = \Pi(p_2)$ entonces $\Omega(\Pi(p_1)) = \Omega(\Pi(p_2))$ ya que $\Pi(p_1)$ y $\Pi(p_2)$ son elementos de Q y Ω es una función, además p_1 y p_2 son elementos cerrados de P con el operador de clausura cl_1, luego tenemos que $p_1 = p_2$ y así $\Pi \restriction CL_1(P)$ es una función inyectiva.

b) Sea $q \in CL_2(Q)$ entonces q es un elemento cerrado de Q con el operador de clausura cl_2, luego tenemos que $cl_2(q) = \Pi(\Omega(q)) = q$ y con ello podemos garantizar la existencia de $p = \Omega(q)$ en P tal que $\Pi(p) = q$, por tanto $\Pi \restriction CL_1(P)$ es una función sobreyectiva.

c) Veamos que la función $\Omega \restriction CL_2(Q)$ es la función inversa de $\Pi \restriction CL_1(P)$.
Sean $q \in CL_2(Q)$ y $p \in CL_1(P)$ entonces

$$cl_2(q) = \Pi(\Omega(q)) = q \text{ y } cl_1(p) = \Omega(\Pi(p)) = p.$$

Luego obtenemos el resultado deseado.

De lo anterior tenemos que $\Pi : CL_1(P) \to CL_2(Q)$ es una función biyectiva, además por la propiedad (*1*) de la Conexión de Galois obtenemos que si $p_1, p_2 \in CL_1(P)$ son tales que $p_1 \leq p_2$ entonces $\Pi(p_1) \geq \Pi(p_2)$ y con esto concluimos que $\Pi \restriction CL_1(P)$ y $\Omega \restriction CL_2(Q)$ establecen un isomorfismo dual entre los conjuntos $CL_1(P)$ y $CL_2(Q)$.

El isomorfismo establecido en el teorema anterior entre el conjunto $CL_1(P)$ y el conjunto $CL_2(Q)$ lo denotaremos por α, esto es, $\alpha = \Pi \restriction CL_1(P)$ y así tendremos que $\alpha^{-1} = \Omega \restriction CL_2(Q)$.

Teorema 2.2.3 *Sean* X, Y *conjuntos,* $P = (\mathcal{P}(X),\subseteq)$, $Q = (\mathcal{P}(Y),\subseteq)$. *Existe una conexión de Galois entre los conjuntos* P *y* Q *si y sólo si existen* P_1 *en* P *y* Q_1 *en* Q, *subretículos con respecto a la intersección, tales que* P_1, Q_1 *son dualmente isomorfos.*

Demostración.
$\Rightarrow$) Supongamos que existe una conexión de Galois (Π,Ω) entre los conjuntos P y Q, entonces las composiciones $\Omega \circ \Pi$ y $\Pi \circ \Omega$ son operadores de clausura en P y Q respectivamente, además las imágenes $\Pi(p)$ y $\Omega(q)$ para $p{\in}P$ y $q{\in}Q$ son elementos cerrados. Definimos como P_1 al rango de Ω y Q_1 al rango de Π, vamos a probar que los conjuntos P_1 y Q_1 son subretículos con respecto a la intersección en sus respectivos conjuntos.
Sea $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ una familia de elementos en P_1, entonces para cada $i{\in}\mathcal{I}$ tenemos que $A_i = \Omega(B_i)$ para algún $B_i{\in}Q$, luego

$$\bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \Omega(B_i) = \Omega(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} B_i),$$

como $\bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} B_i{\in}Q$ tenemos que $\bigcap\limits_{i\in\mathcal{I}} A_i{\in}P_1$.

De igual manera si $\{B_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ es una familia de elementos en Q_1 entonces para cada $i{\in}\mathcal{I}$ tenemos que $B_i = \Pi(C_i)$ para algún $C_i{\in}P$, luego

$$\bigcap_{i\in\mathcal{I}} B_i = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \Pi(C_i) = \Pi(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} C_i),$$

por tanto $\bigcap\limits_{i\in\mathcal{I}} B_i{\in}Q_1$. Además la conexión de Galois establece un isomorfismo dual entre P_1 y Q_1, en consecuencia P_1 y Q_1 son dualmente isomorfos.

$\Leftarrow$) Supongamos que existen un par de subretículos con respecto a la intersección P_1 y Q_1 a través de P y Q respectivamente, estos conjuntos son dualmente isomorfos, entonces existe una función biyectiva α de P_1 en Q_1 con su inversa α^{-1} de Q_1 en P_1, además por teorema 2.1.2 podemos definir los siguientes operadores de clausura

$$\tilde{\mathrm{cl}}(A) = \text{mín}\{B \in P_1 \mid A \subseteq B\} \text{ para } A{\in}P,$$

similarmente

$$\hat{\mathrm{cl}}(D) = \text{mín}\{F \in Q_1 \mid D \subseteq F\} \text{ para } D{\in}Q.$$

Los operadores $\tilde{\mathrm{cl}}$ y $\hat{\mathrm{cl}}$ son operadores de clausura en P y Q respectivamente.
La conexión de Galois (Π,Ω) entre los conjuntos P y Q podemos definirla como sigue

$$\Pi(A) = \alpha(\tilde{\text{cl}}(A)) \text{ para todo } A\in P \quad \text{y} \quad \Omega(D) = \alpha^{-1}(\hat{\text{cl}}(D)) \text{ para todo } D\in Q.$$

Verifiquemos que (Π,Ω) satisfacen las condiciones

i. Π y Ω son funciones ya que α y α^{-1} lo son.
ii. Sean A_1, A_2 elementos de P supongamos que $A_1 \subseteq A_2$, por propiedades de clausura tenemos que $\tilde{\text{cl}}(A_1) \subseteq \tilde{\text{cl}}(A_2)$ además $\tilde{\text{cl}}(A_1)$, $\tilde{\text{cl}}(A_2)$ son elementos de P_1 y α es un isomorfismo dual luego $\alpha(\tilde{\text{cl}}(A_2)) \subseteq \alpha(\tilde{\text{cl}}(A_1))$ y así $\Pi(A_2) \subseteq \Pi(A_1)$.
Análogamente tenemos que si D_1, D_2 son elementos de Q y $D_1 \subseteq D_2$ entonces

$$\Omega(D_2) \subseteq \Omega(D_1).$$

iii. Sea $A\in P$

$$\hat{\text{cl}}(\alpha(\tilde{\text{cl}}(A))) = \alpha(\tilde{\text{cl}}(A)) \text{ ya que } \alpha(\tilde{\text{cl}}(A))\in Q_1.$$

Como α^{-1} es una función, si aplicamos α^{-1} en la igualdad anterior tendremos que

$$\alpha^{-1}(\hat{\text{cl}}(\alpha(\tilde{\text{cl}}(A)))) = \alpha^{-1}(\alpha(\tilde{\text{cl}}(A))) = \tilde{\text{cl}}(A).$$

Además, $A \subseteq \tilde{\text{cl}}(A)$ luego tenemos que

$$A \subseteq \alpha^{-1}(\hat{\text{cl}}(\alpha(\tilde{\text{cl}}(A)))) = \Omega(\alpha(\tilde{\text{cl}}(A))) = \Omega(\Pi(A)),$$

por lo tanto, $A \subseteq \Omega(\Pi(A))$.
De igual modo, si $D\in Q$ tenemos que

$$\tilde{\text{cl}}(\alpha^{-1}(\hat{\text{cl}}(D))) = \alpha^{-1}(\hat{\text{cl}}(D)) \text{ debido a que } \alpha^{-1}(\hat{\text{cl}}(D))\in P_1.$$

Si aplicamos α obtenemos que

$$\alpha(\tilde{\text{cl}}(\alpha^{-1}(\hat{\text{cl}}(D)))) = \alpha(\alpha^{-1}(\hat{\text{cl}}(D))) = \hat{\text{cl}}(D),$$

como $D \subseteq \hat{\text{cl}}(D)$ entonces

$$D \subseteq \alpha(\tilde{\text{cl}}(\alpha^{-1}(\hat{\text{cl}}(D)))) = \Pi(\alpha^{-1}(\hat{\text{cl}}(D))) = \Pi(\Omega(D))$$

por consiguiente, $D \subseteq \Pi(\Omega(D))$
De ***i.***, ***ii.*** y ***iii.*** conseguimos demostrar que la pareja (Π,Ω) es una conexión de Galois entre los conjuntos P y Q.

Ahora, si asumimos que los conjuntos parcialmente ordenados P y Q son retículos completos los elementos **unidad** en P y Q se denotarán por 1_P y 1_Q respectivamente y los elementos **cero** por 0_P y 0_Q. Posteriormente, tendremos en cuenta también la siguiente condición adicional para las conexiones de Galois:

$$0_Q = \Pi(1_P) \quad \text{y} \quad 0_P = \Omega(1_Q).$$

Esto asegurará que en las operaciones de clausura correspondientes los elementos cero sean elementos cerrados, ya que

$$\begin{aligned}\Pi(\Omega(0_Q)) = \Pi(\Omega(\Pi(1_P))) = \Pi(1_P) = 0_Q,\\ \Omega(\Pi(0_P)) = \Omega(\Pi(\Omega(1_Q))) = \Omega(1_Q) = 0_P.\end{aligned}$$

Debemos establecer la condición anterior porque no toda Conexión de Galois la satisface, como lo presentamos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.3 *Sean Q un conjunto parcialmente ordenado y (μ,λ) definidas por*

$$\mu(A) = A^u \text{ y } \lambda(A) = A^l, \text{ para cada } A \subseteq Q,$$

la conexión de Galois para $(\mathcal{P}(Q),\mathcal{P}(Q))$ como lo presentamos en el ejemplo (2.2.2) donde $0_{\mathcal{P}(Q)} = \emptyset$ y $1_{\mathcal{P}(Q)} = Q$, entonces

$$\mu(1_{\mathcal{P}(Q)}) = \mu(Q) = Q^u = \{1_Q\},$$

y

$$\lambda(1_{\mathcal{P}(Q)}) = \lambda(Q) = Q^l = \{0_Q\},$$

siempre que Q tenga a los elementos 0_Q y 1_Q. Como $\{1_Q\} \neq \emptyset$ y $\{0_Q\} \neq \emptyset$ obtenemos que $\mu(1_{\mathcal{P}(Q)}) \neq \emptyset$ y $\lambda(1_{\mathcal{P}(Q)}) \neq \emptyset$.

Los conjuntos de elementos cerrados en P y Q, $CL_1(P)$ y $CL_2(Q)$ forman retículos completos los cuales son subretículos con respecto a la intersección sobre P y Q respectivamente como ya lo hemos demostrado en el lema 2.1.1. Deacuerdo al teorema 2.2.2 existe un isomorfismo dual entre estos retículos y consecuentemente este isomorfismo toma uniones de $CL_1(P)$ en intersecciones de $CL_2(Q)$ e intersecciones de $CL_1(P)$ en uniones de $CL_2(Q)$, como veremos en el siguiente teorema:

Teorema 2.2.4 *Sean X, Y conjuntos no vacíos, $P = (\mathcal{P}(X),\subseteq)$ y $Q = (\mathcal{P}(Y),\subseteq)$. Si (Π,Ω) es una conexión de Galois en (P,Q) y $\{P_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq P$, entonces*

(a) $\Pi(\bigcap_{i\in\mathcal{I}} cl_1(P_i)) = cl_2(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} \Pi(cl_1(P_i)))$.

(b) $\Pi(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} cl_1(P_i)) = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \Pi(cl_1(P_i))$.

Demostración.

Sean $\mathcal{I}$ un conjunto arbitrario de índices y $\{P_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq P$.

(a) Por definición de intersección $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} cl_1(P_i) \subseteq cl_1(P_i)$ para todo $i \in \mathcal{I}$, si aplicamos Π a la inclusión anterior obtenemos que

$$\Pi(cl_1(P_i)) \subseteq \Pi(\bigcap_{i\in\mathcal{I}} cl_1(P_i)) \text{ para todo } i \in \mathcal{I},$$

así $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} \Pi(cl_1(P_i)) \subseteq \Pi(\bigcap_{i\in\mathcal{I}} cl_1(P_i))$. Por la propiedad de monotonía del operador de clausura cl_2 tenemos que $cl_2(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} \Pi(cl_1(P_i))) \subseteq cl_2(\Pi(\bigcap_{i\in\mathcal{I}} cl_1(P_i)))$, por teorema 2.2.1 $cl_2(\Pi(\bigcap_{i\in\mathcal{I}} cl_1(P_i))) = \Pi(\bigcap_{i\in\mathcal{I}} cl_1(P_i))$.

Luego, $cl_2(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} \Pi(cl_1(P_i))) \subseteq \Pi(\bigcap_{i\in\mathcal{I}} cl_1(P_i))$.

Por otro lado, $\Pi(cl_1(P_i)) \subseteq \bigcup_{i\in\mathcal{I}} \Pi(cl_1(P_i))$ para todo $i \in \mathcal{I}$, si aplicamos Ω tenemos que $\Omega(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} \Pi(cl_1(P_i))) \subseteq \Omega(\Pi(cl_1(P_i))) = cl_1(P_i)$ para todo $i \in \mathcal{I}$, entonces $\Omega(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} \Pi(cl_1(P_i))) \subseteq cl_1(P_i)$ para todo $i \in \mathcal{I}$. Por tanto

$$\Omega(\bigcup_{i\in\mathcal{I}}\Pi(cl_1(P_i))) \subseteq \bigcap_{i\in\mathcal{I}} cl_1(P_i),$$

ahora si aplicamos Π a la inclusión anterior obtenemos que

$$\Pi(\bigcap_{i\in\mathcal{I}} cl_1(P_i)) \subseteq \Pi(\Omega(\bigcup_{i\in\mathcal{I}}\Pi(cl_1(P_i)))) = cl_2(\bigcup_{i\in\mathcal{I}}\Pi(cl_1(P_i)))$$

y así

$$\Pi(\bigcap_{i\in\mathcal{I}} cl_1(P_i)) \subseteq cl_2(\bigcup_{i\in\mathcal{I}}\Pi(cl_1(P_i))).$$

En consecuencia, $\Pi(\bigcap_{i\in\mathcal{I}} cl_1(P_i)) = cl_2(\bigcup_{i\in\mathcal{I}}\Pi(cl_1(P_i)))$.

(b) Por definición de unión tenemos que $cl_1(P_i) \subseteq \bigcup_{i\in\mathcal{I}} cl_1(P_i)$ para todo $i \in \mathcal{I}$, entonces

$$\Pi(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} cl_1(P_i)) \subseteq \Pi(cl_1(P_i)) \text{ para todo } i \in \mathcal{I}$$

y así obtenemos que $\Pi(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} cl_1(P_i)) \subseteq \bigcap_{i\in\mathcal{I}}\Pi(cl_1(P_i))$.

Por otro lado $\bigcap_{i\in\mathcal{I}}\Pi(cl_1(P_i)) \subseteq \Pi(cl_1(P_i))$ para todo $i \in \mathcal{I}$, aplicando Ω obtenemos

$$\Omega(\Pi(cl_1(P_i))) \subseteq \Omega(\bigcap_{i\in\mathcal{I}}\Pi(cl_1(P_i))) \text{ para todo } i \in \mathcal{I},$$

así $cl_1(cl_1(P_i)) \subseteq \Omega(\bigcap_{i\in\mathcal{I}}\Pi(cl_1(P_i)))$ para todo $i \in \mathcal{I}$, luego por la propiedad de idempotencia $cl_1(P_i) \subseteq \Omega(\bigcap_{i\in\mathcal{I}}\Pi(cl_1(P_i)))$ para todo $i \in \mathcal{I}$ con lo cual obtenemos que $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} cl_1(P_i) \subseteq \Omega(\bigcap_{i\in\mathcal{I}}\Pi(cl_1(P_i)))$, si aplicamos Π en la inclusión anterior tenemos que

$$\Pi(\Omega(\bigcap_{i\in\mathcal{I}}\Pi(cl_1(P_i)))) \subseteq \Pi(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} cl_1(P_i)),$$

así $cl_2(\bigcap_{i\in\mathcal{I}}\Pi(cl_1(P_i))) \subseteq \Pi(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} cl_1(P_i))$ luego

$$\bigcap_{i\in\mathcal{I}}\Pi(cl_1(P_i)) \subseteq \Pi(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} cl_1(P_i)).$$

En consecuencia $\Pi(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} cl_1(P_i)) = \bigcap_{i\in\mathcal{I}}\Pi(cl_1(P_i))$.

Análogamente podemos demostrar que para una familia $\{Q_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq Q$ tenemos

(a) $\Omega(\bigcap_{i\in\mathcal{I}} cl_2(Q_i)) = cl_1(\bigcup_{i\in\mathcal{I}}\Omega(cl_2(Q_i)))$.

(b) $\Omega(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} cl_2(Q_i)) = \bigcap_{i\in\mathcal{I}}\Omega(cl_2(Q_i))$.

Observación 2.4 *Si nos referimos a elementos arbitrarios Q_1, $Q_2 \in Q$ el teorema anterior lo podemos expresar en la siguiente forma*
$\Pi(\Omega(Q_1) \cap \Omega(Q_2)) = \Pi(\Omega(Q_1 \cup Q_2))$,
$\Pi(\Omega(Q_1) \cup \Omega(Q_2)) = \Pi(\Omega(Q_1)) \cap \Pi(\Omega(Q_2))$,
y análogamente para elementos arbitrarios P_1, $P_2 \in P$.

Definición 2.2.2 *Sean P y Q dos conjuntos parcialmente ordenados, la pareja (Π,Ω) la conexión de Galois entre ellos y los conjuntos de los elementos cerrados de P y Q que hemos denominado como $CL_1(P)$ y $CL_2(Q)$ respectivamente. La conexión de Galois (Π,Ω) la llamaremos* ***perfecta en*** *P cuando cada elemento de P sea un elemento cerrado, es decir, $cl_1(p) = p$ para todo $p \in P$.*
Similarmente la conexión de Galois (Π,Ω) es ***perfecta en*** *Q, cuando cada elemento de Q sea un elemento cerrado, esto es, $cl_2(q) = q$ para todo $q \in Q$.*

Definición 2.2.3 *Una conexión de Galois (Π,Ω) de los conjuntos parcialmente ordenados P y Q la llamaremos* ***perfecta*** *cuando sea perfecta tanto en P como en Q.*

En la aplicación de la teoría de conexiones de Galois es fundamental determinar cuando una conexión de Galois dada es perfecta, esto representa el principal contenido de la teoría ordinaria de Galois de ecuaciones.

En el siguiente teorema presentamos el criterio para que una conexión de Galois sea perfecta.

Teorema 2.2.5 *Sea* (Π,Ω) *una conexión de Galois entre dos retículos* P *y* Q*. La conexión* (Π,Ω) *es perfecta en* P *si y sólo si para cualquier par de elementos* P_1*,* $P_2 \in P$ *tales que* $P_1 \subset P_2$*, siempre tenemos imágenes distintas,* $\Pi(P_2) \subset \Pi(P_1)$*.*

Demostración.
$\Rightarrow$) Supongamos que (Π,Ω) es una conexión de Galois perfecta en P, además sean P_1, P_2 elementos distintos de P tales que $P_1 \subset P_2$, por propiedad (1) de la conexión de Galois tenemos que $\Pi(P_2) \subseteq \Pi(P_1)$.
Probemos que $\Pi(P_2) \neq \Pi(P_1)$. Por hipótesis sabemos que (Π,Ω) es una conexión perfecta en P, luego P_1, $P_2 \in CL_1(P)$, como existe un isomorfismo dual α entre los conjuntos $CL_1(P)$ y $CL_2(Q)$ por la inyectividad de α tenemos que

$$\alpha(P_1) \neq \alpha(P_2).$$

Pero sabemos que $\alpha = \Pi \restriction CL_1(P)$, por lo tanto

$$\Pi(P_1) \neq \Pi(P_2).$$

En consecuencia, $\Pi(P_2) \subset \Pi(P_1)$.

$\Leftarrow$) Supongamos que la conexión de Galois (Π,Ω), no es perfecta en P entonces existe un elemento $R \in P$ tal que $R \neq cl_1(R)$, luego $R \subset cl_1(R)$.
Además sabemos que $cl_1(R) = \Omega(\Pi(R))$, si aplicamos la función Π a la clausura de R obtenemos por propiedad de conexión de Galois que $\Pi(\Omega(\Pi(R))) = \Pi(R)$ y así tendremos un par de elementos distintos en P cuyas imágenes son iguales.

2.3. Relaciones binarias

Definición 2.3.1 *Si* $\mathbf{R}$ *es una relación de* S *en* S' *y* $a \in S$ *llamaremos* $\mathbf{R}(a)$ *al conjunto de elementos* $a' \in S'$ *tales que* $a\mathbf{R}a'$ *esto es,*

$$\mathbf{R}(a) = \{a' \in S' \mid a\mathbf{R}a'\}.$$

Cuando $a' \in \mathbf{R}(a)$ escribiremos que $a\mathbf{R}a'$ y diremos que a está en relación mediante $\mathbf{R}$ con a'.
Los conjuntos $\mathbf{R}(a)$ los llamaremos **conjuntos básicos para R**.

En adelante asumiremos que los conjuntos $\mathbf{R}(a)$ cubren al conjunto S', es decir, si $b \in S'$ entonces existe al menos un elemento $a \in S$ talque $b \in \mathbf{R}(a)$. De este modo podremos definir una relación inversa para la relación binaria $\mathbf{R}$ como veremos a continuación.

Definición 2.3.2 *Sean S y S' conjuntos no vacíos. Si $\mathbf{R}$ es una relación binaria de S a S', la relación inversa de $\mathbf{R}$ que definimos de S' a S la denotaremos como $\mathbf{R}^{-1}$ y la definiremos así,*

$$\mathbf{R}^{-1} = \{(b, a) \mid a\mathbf{R}b\}.$$

Los conjuntos básicos $\mathbf{R}^{-1}(a')$ para la relación binaria $\mathbf{R}^{-1}$ están formados de todos los elementos $a \in S$ para los cuales $a\mathbf{R}a'$ para el elemento fijo a'.

La notación relacional anterior la podemos extender a subconjuntos arbitrarios. Si $A \subseteq S$ y $B \subseteq S'$ entonces escribiremos $A\mathbf{R}B$, cuando cada elemento $b \in B$ cumpla la condición $a\mathbf{R}b$ para cada $a \in A$.

Definición 2.3.3 *Si tenemos una relación binaria $\mathbf{R}$ de S a S' podemos definir un conjunto $\mathbf{R}(A)$ para todo $A \subseteq S$, el cual consiste de todos los elementos $a' \in S'$ para los cuales $A\mathbf{R}\{a'\}$.*
En adelante denotaremos $A\mathbf{R}\{a'\}$ como $A\mathbf{R}a'$.

Teorema 2.3.1 *Sean S y S' conjuntos no vacíos. Si $\mathbf{R}$ es una relación binaria de S a S' y $A \subseteq S$ entonces*

$$\mathbf{R}(A) = \bigcap_{a \in A} \mathbf{R}(a).$$

Demostración.
Sea $a' \in \mathbf{R}(A)$ entonces $A\mathbf{R}\{a'\}$, con lo cual tenemos que $a\mathbf{R}a'$ para todo $a \in A$ y de esta manera $a' \in \mathbf{R}(a)$ para todo $a \in A$ por lo tanto $a' \in \bigcap_{a \in A} \mathbf{R}(a)$.

En consecuencia $\mathbf{R}(A) \subseteq \bigcap_{a\in A} \mathbf{R}(a)$.

Ahora supongamos que $b \in \bigcap_{a\in A} \mathbf{R}(a)$, entonces $b \in \mathbf{R}(a)$ para todo $a \in A$, luego $a\mathbf{R}b$ para todo $a \in A$ por lo tanto $b \in \mathbf{R}(A)$ y así $\bigcap_{a\in A} \mathbf{R}(a) \subseteq \mathbf{R}(A)$.

Definición 2.3.4 *Sea X un conjunto no vacío. Un subconjunto T del conjunto potencia $\mathcal{P}(X)$ lo llamaremos* ***estructura de intersección en*** *X si T contiene la intersección de cualquier subfamilia de sus conjuntos es decir,*

$$\text{si } \{T_i \mid i \in \mathcal{I}\} \subseteq T \text{ entonces } \bigcap_{i\in\mathcal{I}} T_i \in T.$$

Teorema 2.3.2 *Si $\mathbf{R}$ es una relación binaria de S en S' entonces el conjunto*

$$V_{\mathbf{R}} = \{\mathbf{R}(A) |\ A \subseteq S\}$$

es una estructura de intersección en S'.

Demostración.
Sean $\mathcal{I}$ un conjunto arbitrario de índices y $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{P}(S)$. Si $x \in \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathbf{R}(A_i)$ entonces $x \in \mathbf{R}(A_i)$ para todo $i \in \mathcal{I}$, en particular $x \in \mathbf{R}(A_k)$ para algún $k \in \mathcal{I}$ luego tenemos que $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathbf{R}(A_i) \subseteq \mathbf{R}(A_k)$ para algún $k \in \mathcal{I}$ y por tanto $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathbf{R}(A_i) \in V_{\mathbf{R}}$.

Teorema 2.3.3 *Sean S y S' conjuntos no vacíos, si $\mathbf{R}$ es una relación binaria de S a S' entonces*

$$\mathbf{R}(A\cup B) = \mathbf{R}(A)\cap R(B) \text{ para todo } A,B \in \mathcal{P}(S).$$

Demostración.
Sea $x \in \mathbf{R}(A\cup B)$. Entonces tenemos que $(A\cup B)\mathbf{R}x$, esto es $t\mathbf{R}x$ para todo $t \in A\cup B$, en particular obtenemos que $a\mathbf{R}x$ para todo $a \in A$ y $b\mathbf{R}x$ para todo $b \in B$ luego $x \in \mathbf{R}(A)$ y $x \in \mathbf{R}(B)$, por lo tanto $x \in \mathbf{R}(A)\cap\mathbf{R}(B)$.
Por otro lado, si $y \in \mathbf{R}(A)\cap\mathbf{R}(B)$ entonces $y \in \mathbf{R}(A)$ y $y \in \mathbf{R}(B)$ lo cual significa que $a\mathbf{R}y$ para todo $a \in A$ y $b\mathbf{R}y$ para todo $b \in B$, luego $w\mathbf{R}y$ para todo $w \in A\cup B$ y así obtenemos que $y \in \mathbf{R}(A\cup B)$.
En consecuencia, $\mathbf{R}(A)\cap\mathbf{R}(B) \subseteq \mathbf{R}(A\cup B)$.

2.4. Relaciones binarias y conexiones de Galois

El objetivo principal de este trabajo es el vínculo que existe entre relaciones binarias y conexiones de Galois, dicho vínculo lo presentamos en dos teoremas fundamentales tomando como herramientas las propiedades tanto de las conexiones de Galois como de la relaciones binarias.

Teorema 2.4.1 *Sean S y S' conjuntos no vacíos, $\mathbf{R}$ una relación binaria de S a S' y*

$$V_{\mathbf{R}} = \{\mathbf{R}(A)|\ A \subseteq S\}.$$

El conjunto $\emptyset \in V_{\mathbf{R}}$ si y sólo si no existe elemento $a' \in S'$ tal que $a\mathbf{R}a'$ para todo $a \in S$.

Demostración.
$\Rightarrow$) Supongamos que $\emptyset \in V_{\mathbf{R}}$ entonces existe un subconjunto A de S tal que $\mathbf{R}(A) = \emptyset$, es decir, no existe un elemento $a' \in S'$ tal que $A\mathbf{R}a'$.
Como $A \subseteq S$ tenemos que $S = A \cup (S\text{-}A)$ luego $\mathbf{R}(S) = \mathbf{R}(A \cup (S\text{-}A))$, por teorema 1.4.2

$$\mathbf{R}(S) = \mathbf{R}(A \cup (S\text{-}A)) = \mathbf{R}(A) \cap \mathbf{R}(S\text{-}A) = \emptyset \cap \mathbf{R}(S\text{-}A) = \emptyset.$$

Por lo tanto, $\mathbf{R}(S) = \emptyset$ y así no existe un elemento $a' \in S'$ tal que $a\mathbf{R}a'$ para todo $a \in S$.
$\Leftarrow$) Ahora supongamos que no existe un elemento $a' \in S'$ tal que $a\mathbf{R}a'$ para todo $a \in S$, entonces $\mathbf{R}(S) = \emptyset$, luego $\emptyset \in V_{\mathbf{R}}$.

Observación 2.5 *Si adjuntamos el conjunto S' y el conjunto $\emptyset$ a la familia de conjuntos $\mathbf{R}(A)$ obtenemos un operador de clausura en S', asociando a cada conjunto $A' \subseteq S'$ el conjunto más pequeño de la familia de conjuntos $\mathbf{R}(A)$ que contiene a A'. De igual forma si adjuntamos el conjunto S y el conjunto $\emptyset$ a la familia de conjuntos $\mathbf{R^{-1}}(A')$ obtenemos un operador de clausura en S, asociando a cada conjunto $A \subseteq S$ el menor conjunto de la familia de conjuntos $\mathbf{R^{-1}}(A')$ que contiene a A. Llamaremos $\Gamma_{\mathbf{R^{-1}}}$ al conjunto $V_{\mathbf{R^{-1}}} \bigcup \{\emptyset, S\}$ y $\Gamma_{\mathbf{R}}$ al conjunto $V_{\mathbf{R}} \bigcup \{\emptyset, S'\}$.*

Ejemplo 2.4.1 *Sean* $S = \{1,2,3,4\}$ *y* $S' = \{2,4,6,9\}$ *definimos la relación binaria de* S *a* S' *de la siguiente manera*

$$\mathbf{R} = \{(a,b) \mid a \in S,\ b \in S' \ y\ a \ divide\ a\ b\}$$

luego $\mathbf{R} = \{(1,2),(1,4),(1,6),(1,9),(2,2),(2,4),(2,6),(3,6),(3,9),(4,4)\}$.
Los conjuntos básicos para $\mathbf{R}$ *son los siguientes:*

$\mathbf{R}(\emptyset) = \emptyset$	$\mathbf{R}(\{2,3\}) = \{6\}$
$\mathbf{R}(\{1\}) = \{2,4,6,9\}$	$\mathbf{R}(\{2,4\}) = \{4\}$
$\mathbf{R}(\{2\}) = \{2,4,6\}$	$\mathbf{R}(\{3,4\}) = \emptyset$
$\mathbf{R}(\{3\}) = \{6,9\}$	$\mathbf{R}(\{1,2,3\}) = \{6\}$
$\mathbf{R}(\{4\}) = \{4\}$	$\mathbf{R}(\{1,3,4\}) = \emptyset$
$\mathbf{R}(\{1,2\}) = \{2,4,6\}$	$\mathbf{R}(\{1,2,4\}) = \{4\}$
$\mathbf{R}(\{1,3\}) = \{6,9\}$	$\mathbf{R}(\{2,3,4\}) = \emptyset$
$\mathbf{R}(\{1,4\}) = \{4\}$	$\mathbf{R}(\{1,2,3,4\}) = \emptyset$

entonces el conjunto $V_{\mathbf{R}} = \{\emptyset,\{4\},\{6\},\{6,9\},\{2,4,6\},\{2,4,6,9\}\}$ es una estructura de intersección en S'.

Las observaciones que hemos hecho se presentan de manera análoga para la relación inversa $\mathbf{R}^{-1}$, es decir para cada $A' \subseteq S'$ existe un conjunto $\mathbf{R}^{-1}(A')$ el cual consiste de todos los elementos $a \in S$ tales que $A'\mathbf{R}^{-1}a$.
Además $\mathbf{R}^{-1}(A')$ satisface el teorema 2.3.1 donde obtenemos

$$\mathbf{R}^{-1}(A') = \bigcap_{a' \in A'} \mathbf{R}^{-1}(a'),$$

de igual manera la familia de conjuntos $\mathbf{R}^{-1}(A')$ forman una estructura de intersección en S por tanto ellos inducen un operador de clausura en S.

Teorema 2.4.2 *Sean* $\mathbf{R}$ *y* $\mathbf{R}^{-1}$ *una relación binaria y su inversa definidas entre los conjuntos* S *y* S'. *Si* $\emptyset \in V_{\mathbf{R}}$ *y* $\emptyset \in V_{\mathbf{R}^{-1}}$ *entonces las funciones*

$$\Pi : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S') \qquad y \qquad \Omega : \mathcal{P}(S') \longrightarrow \mathcal{P}(S)$$

definidas por

$$\Pi(A) = \mathbf{R}(A) \qquad y \qquad \Omega(A') = \mathbf{R}^{-1}(A'),$$

con $\quad \Pi(\emptyset) = S' \qquad y \qquad \Omega(\emptyset) = S,$

definen una conexión de Galois entre los conjuntos $\mathcal{P}(S)$ *y* $\mathcal{P}(S')$*.*

Demostración.
Sean $\mathbf{R}$ una relación binaria de S en S' y $\mathbf{R}^{-1}$ la relación inversa de $\mathbf{R}$, si las funciones

$$\Pi : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S') \qquad \text{y} \qquad \Omega : \mathcal{P}(S') \longrightarrow \mathcal{P}(S),$$

son tales que

$$\Pi(A) = \mathbf{R}(A) \qquad \text{y} \qquad \Omega(A') = \mathbf{R}^{-1}(A')$$

con la condición de que $\quad \Pi(\emptyset) = S' \qquad \text{y} \qquad \Omega(\emptyset) = S.$
Veamos que la pareja (Π,Ω) es una conexión de Galois en los conjuntos $\mathcal{P}(S)$ y $\mathcal{P}(S')$.

1. Sean A_1, $A_2 \in \mathcal{P}(S)$ supongamos que $A_1 \subseteq A_2$ por teorema 2.3.1 tenemos que

   $$\mathbf{R}(A_2) = \bigcap_{a_2 \in A_2} \mathbf{R}(a_2) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{R}(A_1) = \bigcap_{a_1 \in A_1} \mathbf{R}(a_1),$$

   mostremos que

   $$\bigcap_{a_2 \in A_2} \mathbf{R}(a_2) \subseteq \bigcap_{a_1 \in A_1} \mathbf{R}(a_1).$$

   Sea $x \in \bigcap_{a_2 \in A_2} \mathbf{R}(a_2)$ entonces $x \in \mathbf{R}(a_2)$ para todo $a_2 \in A_2$, luego $a_2\mathbf{R}x$ para todo $a_2 \in A_2$ por hipótesis $A_1 \subseteq A_2$ así que $a_1\mathbf{R}x$ para todo $a_1 \in A_1$, con lo cual $x \in \mathbf{R}(a_1)$ para todo $a_1 \in A_1$.
   Por lo tanto $x \in \bigcap_{a_1 \in A_1} \mathbf{R}(a_1)$ y en consecuencia, $\mathbf{R}(A_2) \subseteq \mathbf{R}(A_1)$.

   De igual manera si A_1', $A_2' \in \mathcal{P}(S')$ y $A_1' \subseteq A_2'$ tenemos que $\mathbf{R}^{-1}(A_2') \subseteq \mathbf{R}^{-1}(A_1')$.

2. Sea $A \in \mathcal{P}(S)$, si $a \in A$ y $x \in \mathbf{R}(A)$ entonces como todo elemento de A está relacionado con x, tenemos en particular $a\mathbf{R}x$. Así que $a\mathbf{R}x$ para todo $x \in \mathbf{R}(A)$, por definición $x\mathbf{R}^{-1}a$ para todo $x \in \mathbf{R}(A)$ y por tanto $a \in \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{R}(A))$.

Teorema 2.4.3 *Sean S y S' conjuntos no vacíos. Cualquier conexión de Galois entre los retículos completos $\mathcal{P}(S)$ y $\mathcal{P}(S')$ puede ser definida por medio de una relación binaria $\mathbf{R}$ entre S y S'.*

Demostración.
Sea (Π,Ω) una conexión de Galois en $(\mathcal{P}(S), \mathcal{P}(S'))$ llamaremos

$$cl_1(A) = \Omega(\Pi(A)) \text{ para todo } A \subseteq S \quad \text{y} \quad cl_2(A') = \Pi(\Omega(A')) \text{ para todo } A' \subseteq S'$$

a los dos operadores de clausura que se obtienen de la conexión, por teorema 2.2.2 existe un isomorfismo dual α entre los retículos $CL_1(\mathcal{P}(S))$ y $CL_2(\mathcal{P}(S'))$ y con ello definimos las relaciones binarias como sigue

$$a\mathbf{R}a' \text{ si y sólo si } a' \in \alpha(\{a\}) = \alpha(cl_1(\{a\}))$$

y

$$a'\mathbf{R}_1 a \text{ si y sólo si } a \in \alpha^{-1}(\{a'\}) = \alpha^{-1}(cl_2(\{a'\}))$$

Veamos que $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}^{-1}$.
Sean $a \in S$ y $a' \in S'$ si $a\mathbf{R}a'$ entonces $a' \in \alpha(cl_1(\{a\}))$ que está en $CL_2(\mathcal{P}(S'))$ y es por lo tanto un cerrado que contiene a a'. Así

$$cl_2(\{a'\}) \subseteq \alpha(cl_1(\{a\})) \quad \text{y} \quad \alpha^{-1}(\alpha(cl_1(\{a\}))) \subseteq \alpha^{-1}(cl_2(\{a'\}))$$

de donde $cl_1(\{a\}) \subseteq \alpha^{-1}(cl_2(\{a'\}))$, entonces $a'\mathbf{R}_1 a$.
Ahora si $a'\mathbf{R}_1 a$ tenemos que $a \in \alpha^{-1}(cl_2(\{a'\}))$ como $\alpha^{-1}(cl_2(\{a'\}))$ es un cerrado que contiene al elemento a entonces

$$cl_1(\{a\}) \subseteq \alpha^{-1}(cl_2(\{a'\})) \quad \text{y} \quad \alpha(\alpha^{-1}(cl_2(\{a'\}))) \subseteq \alpha(cl_1(\{a\}))$$

luego $cl_2(\{a'\}) \subseteq \alpha(cl_1(\{a\}))$ de donde $a\mathbf{R}a'$.

Por otro lado, sabemos que $\mathbf{R}(A) = \bigcap_{a \in A} \mathbf{R}(a)$ por la definición de la relación $\mathbf{R}$ obtenemos que $\mathbf{R}(A) = \bigcap_{a \in A} \alpha(cl_1(\{a\}))$.
Además como α es un isomorfismo dual por teorema 2.2.2 y teorema 2.2.4 tenemos que

$\bigcap\limits_{a\in A} \alpha(cl_1(\{a\})) = \alpha(\bigcup\limits_{a\in A} cl_1(\{a\}))$ y así $\mathbf{R}(A) = \alpha(\bigcup\limits_{a\in A} cl_1(\{a\}))$.

Verifiquemos que $\alpha(\bigcup\limits_{a\in A} cl_1(\{a\})) = \alpha(cl_1(A))$.

Por lema 2.1.1 $\bigcup\limits_{a\in A} cl_1(\{a\}) \subseteq cl_1(\bigcup\limits_{a\in A} \{a\}) = cl_1(A)$ y por tanto

$$\alpha(cl_1(A)) \subseteq \alpha(\bigcup_{a\in A} cl_1(\{a\})).$$

Si $y \in \alpha(\bigcup\limits_{a\in A} cl_1(\{a\}))$ entonces $y = \alpha(x)$ para algún $x \in \bigcup\limits_{a\in A} cl_1(\{a\})$, como $\bigcup\limits_{a\in A} cl_1(\{a\}) \subseteq cl_1(A)$ tenemos que $x \in cl_1(A)$ así $y = \alpha(x)$ para algún $x \in cl_1(A)$ y por lo tanto $y \in \alpha(cl_1(A))$ con ello $\alpha(\bigcup\limits_{a\in A} cl_1(\{a\})) \subseteq \alpha(cl_1(A))$.

De lo anterior concluímos que $\mathbf{R}(A) = \alpha(cl_1(A))$ por observación 2.3 y teorema 2.2.2 obtenemos que $\mathbf{R}(A) = \Pi(A)$, analógamente $\mathbf{R}^{-1}(A') = \Omega(A')$.

En consecuencia la conexión de Galois (Π,Ω) puede definirse por medio de la relación binaria $\mathbf{R}$.

2.5. Conexiones de Galois perfectas

Conocer el vínculo que existe entre relaciones binarias y conexiones de Galois nos lleva a pensar en el tipo de relación que obtendremos de una conexión de Galois perfecta, para ello presentamos el siguiente teorema.

Teorema 2.5.1 *Sea* (Π,Ω) *una conexión de Galois entre* $\mathcal{P}(S)$ *y* $\mathcal{P}(S')$ *ordenados por inclusión, dicha conexión definida por una relación binaria* $\mathbf{R}$. (Π,Ω) *es una conexión perfecta en* $\mathcal{P}(S')$ *si y sólo si* $\mathbf{R}$ *puede construirse como sigue:*

Sea β *una correspondencia uno a uno de un subconjunto* S_1 *de* S *a* S'*, Si* $a \in S_1$ *tenemos la relación*

$$a\mathbf{R}a' \textit{ si y sólo si } \beta(a) \neq a'$$

y si $a \in S$ - S_1*, la relación* $\mathbf{R}$ *se define arbitrariamente.*

Demostración.
$\Rightarrow$) Sean S y S' conjuntos no vacíos y la pareja (Π,Ω) la conexión de Galois entre $\mathcal{P}(S)$ y $\mathcal{P}(S')$ definida por una relación binaria $\mathbf{R}$. Supongamos que la conexión es perfecta en $\mathcal{P}(S')$.
Sean $a^* \in S'$ y $M_{a^*} = S'$ - $\{a^*\}$ el conjunto maximal de S'. Como la conexión (Π,Ω) es perfecta en $\mathcal{P}(S')$ tenemos que el conjunto $M_{a^*} \subseteq S'$ es un elemento cerrado de $\mathcal{P}(S')$, luego existe un isomorfismo dual $\alpha : CL_1(\mathcal{P}(S)) \longrightarrow \mathcal{P}\ (S')$ tal que para M_{a^*} existe un conjunto $A \in CL_1(\mathcal{P}(S))$ donde $\alpha(A) = M_{a^*}$.
Como $\{a\} \subseteq A$ para cada $a \in A$ y $A \in CL_1(\mathcal{P}(S))$ tenemos que $cl_1(\{a\}) \subseteq A$ para cada $a \in A$ luego $\alpha(A) \subseteq \alpha(cl_1(\{a\}))$ y así $M_{a^*} \subseteq \alpha(cl_1(\{a\}))$ para cada $a \in A$ y como $\alpha(cl_1(\{a\})) \neq S'$ ya que si sucediera lo contrario, es decir $\alpha(cl_1(\{a\})) = S'$ tendríamos que $\alpha^{-1}(\alpha(cl_1(\{a\}))) = \alpha^{-1}(S') = \emptyset$ esto es, $cl_1(\{a\}) = \emptyset$ para cada $a \in A$ lo cual es una contradicción, por lo tanto

$$\alpha(cl_1(\{a\})) = M_{a^*} = S' \text{ - } \{a^*\}.$$

Seleccionando un elemento a_1 en S para cada elemento $a^* \in S'$ tal que

$$\alpha(cl_1(\{a_1\})) = M_{a^*},$$

definimos S_1 como el conjunto de los elementos $a_1 \in S$ que le corresponde a cada uno de los elementos $a^* \in S'$ y una correspondencia uno a uno del conjunto S_1 a S' dado por:

$$\begin{aligned} \beta : S_1 &\longrightarrow S' \\ a_1 &\longrightarrow a^* \end{aligned}$$

para definir la conexión de Galois (Π,Ω) se introduce la relación binaria

$$a\mathbf{R}a' \text{ si y sólo si } a' \in \alpha(\{a\}) = \alpha(cl_1(\{a\}))$$

para los elementos $a \in S_1$ tenemos que

$$a\mathbf{R}a' \text{ si y sólo si } a' \in \alpha(\{a\}) = \alpha(cl_1(\{a\})) = S' \text{ - } \{a^*\},$$

luego $a' \neq a^* = \beta(a)$ por lo tanto, $a\mathbf{R}a'$ si y sólo si $a' \neq \beta(a)$ y para los elementos $a \in S$ - S_1, definimos mediante la relación $\mathbf{R}$ arbitrariamente.

$\Leftarrow$) Sean α una correspondencia uno a uno de un subconjunto S_1 de S a S' y $\mathbf{R}$ la relación dada por: para $a \in S_1$, $a\mathbf{R}a'$ si y sólo si $\beta(a) \neq a'$ y para $a \in S$ - S_1, la relación $\mathbf{R}$ se define arbitrariamente.
Sea (Π,Ω) la conexión de Galois definida por la relación binaria $\mathbf{R}$, esto es

$$\begin{aligned} \Pi : \mathcal{P}(S) &\longrightarrow \mathcal{P}(S') \\ A &\longrightarrow \mathbf{R}(A) \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} \Omega : \mathcal{P}(S') &\longrightarrow \mathcal{P}(S) \\ B &\longrightarrow \mathbf{R^{-1}}(B) \end{aligned}$$

Mostremos que (Π,Ω) es una conexión perfecta en $\mathcal{P}(S')$, para ello debemos mostrar que cualquier subconjunto B de S' es un elemento cerrado de $\mathcal{P}(S')$, veamos.
Sea $B \subseteq S'$, $\mathbf{R^{-1}}(B) = (S_1 \text{ - } \alpha^{-1}(B)) \cup W$ donde $W = \{x \in S \text{ - } S_1 \mid x\mathbf{R}B\}$, luego

$$\mathbf{R}(\mathbf{R^{-1}}(B)) = \mathbf{R}((S_1 \text{ - } \alpha^{-1}(B)) \cup W) = \mathbf{R}(S_1 \text{ - } \alpha^{-1}(B)) \cap \mathbf{R}(W)$$

además

$$\mathbf{R}(S_1 \text{ - } \alpha^{-1}(B)) = \alpha(\alpha^{-1}(B))$$

ya que si $y \in \mathbf{R}(S_1 \text{ - } \alpha^{-1}(B))$ entonces $x\mathbf{R}y$ para todo $x \in (S_1 \text{ - } \alpha^{-1}(B))$, así $y \neq \alpha(x)$ para todo $x \in (S_1 \text{ - } \alpha^{-1}(B))$ y al ser $y = \alpha(u)$ entonces

$$u \in S_1 \text{ - } (S_1 \text{ - } \alpha^{-1}(B)) = \alpha^{-1}(B)$$

con lo cual $y \in \alpha(\alpha^{-1}(B)) = B$.
Por lo tanto $\mathbf{R}(\mathbf{R^{-1}}(B)) = \alpha(\alpha^{-1}(B)) \cap \mathbf{R}(W) = B \cap \mathbf{R}(W)$ pero $B \subseteq \mathbf{R}(W)$ debido a que si $b \in B$ entonces x $\mathbf{R}$ b para todo $x \in W$ luego, $b \in \mathbf{R}(W)$. En consecuencia, $\mathbf{R}(\mathbf{R^{-1}}(B)) = B$ esto es $\Pi(\Omega(B)) = B$ y de este modo B es un elemento cerrado de $\mathcal{P}(S')$.

Definición 2.5.1 *Sea* $\mathbf{R}$ *una relación binaria entre los conjuntos* S *y* S'*, una relación* $\mathbf{R^c}$ *la llamaremos* ***complementaria*** *a* $\mathbf{R}$ *cuando se cumpla*

$$a\mathbf{R^c}a' \textit{ si y sólo si la relación } a\mathbf{R}a' \textit{ no se satisface.}$$

Teorema 2.5.2 *Sea* (Π,Ω) *una conexión de Galois entre* $\mathcal{P}(S)$ *y* $\mathcal{P}(S')$ *ordenados por inclusión, dicha conexión definida por una relación binaria* $\mathbf{R}$*.* (Π,Ω) *es una conexión perfecta si y sólo si* $\mathbf{R}$ *es la relación complementaria para una correspondencia uno a uno entre* S *y* S'*.*

Demostración.
$\Rightarrow$) Sean S y S' conjuntos no vacíos tales que $|S|$[1] $= |S'|$ y la pareja (Π,Ω) la conexión de Galois entre $\mathcal{P}(S)$ y $\mathcal{P}(S')$ definida por una relación binaria $\mathbf{R}$. Supongamos que la conexión de Galois es perfecta, es decir la conexión es perfecta en $\mathcal{P}(S)$ y $\mathcal{P}(S')$, por el teorema anterior tenemos que $\mathbf{R}$ podemos construirla de la siguiente manera:
Sea β una correspondencia uno a uno de S a S', la relación $a\mathbf{R}a'$ se cumple si y sólo si $\beta(a) \neq a'$ esto es, $a\mathbf{R}a'$ si y sólo si $a\beta a'$ no se cumple.
Luego $\mathbf{R}$ es la relación complementaria para la relación β.
$\Leftarrow$) Sean β una correspondencia uno a uno de S a S' y (Π,Ω) la conexión de Galois en $(\mathcal{P}(S),\mathcal{P}(S'))$ definida por la relación binaria $\mathbf{R}$ entre S y S', supongamos que $\mathbf{R}$ es la relación complementaria para la relación β, es decir

$$a\mathbf{R}a' \text{ si y sólo si } a\beta a' \text{ no se cumple}$$

luego $a\mathbf{R}a'$ se cumple si y sólo si $\beta(a) \neq a'$ entonces por teorema anterior, la conexión de Galois es perfecta en $\mathcal{P}(S')$, además si $a\mathbf{R}a'$ tenemos que $a'\mathbf{R^{-1}}a$ y $\beta(a) \neq a'$ como β es

[1] $|S|$ es el cardinal del conjunto S

una función biyectiva existe la función inversa β^{-1} así $\beta^{-1}(\beta(a)) \neq \beta^{-1}(a')$ por lo tanto $a \neq \beta^{-1}(a')$ y nuevamente el teorema anterior nos garantiza que la conexión de Galois es perfecta en $\mathcal{P}(S)$ ya que la relación $\mathbf{R^{-1}}$ está definida de S' a S. En consecuencia (Π,Ω) es una conexión de Galois perfecta.

2.6. Conexiones de Galois en un retículo

En esta sección discutiremos un caso especial de las conexiones de Galois, el cual consiste en la definición de correspondencias de Galois entre un retículo P y sí mismo. Para este tipo de conexiones dentro de un retículo P, deduciremos inmediatamente del teorema 2.2.3, el siguiente teorema:

Teorema 2.6.1 *Sea P un retículo completo. Existe una conexión de Galois entre el conjunto P y sí mismo si y sólo si existe una pareja P_1 y Q_1 en P, subretículos con respecto a la intersección, tales que P_1 y Q_1 son dualmente isomorfos.*

Definición 2.6.1 *Sean P un retículo completo y (Π,Ω) una conexión de Galois dentro de P. La conexión de Galois es* ***estructura auto-dual*** *cuando los dos subretículos definidos $CL_1(P)$ y $CL_2(P)$ sean idénticos.*

Definición 2.6.2 *Sean X un conjunto y $P = (\mathcal{P}(X),\subseteq)$. Una función $\alpha : P \longrightarrow P$ la llamaremos un* ***automorfismo dual*** *cuando α sea un isomorfismo dual de P en sí mismo y cumpla las siguientes propiedades*

$$\alpha(A \cup B) = \alpha(A) \cap \alpha(B),\ \alpha(A \cap B) = \alpha(A) \cup \alpha(B).$$

Corolario 2.6.1 *Sea P un retículo completo. Cualquier conexión de Galois que sea una estructura auto-dual dentro de P, está definida por algún subretículo P_1 con respecto a la intersección a través de P, esta conexión genera un automorfismo dual α. La conexión de Galois dentro de P es de la forma*

$$\Pi(p) = \alpha(cl(p)) \qquad \Omega(p) = \alpha^{-1}(cl(p)) \quad \textit{para todo } p \in P$$

donde $cl(p)$ es el menor elemento en P_1 que es mayor o igual que p.

Definición 2.6.3 *Una conexión de Galois* (Π,Ω) *dentro de un retículo* P *la llamaremos* ***auto-dual*** *cuando las funciones* α *y* α^{-1} *que se inducen de dicha conexión sean idénticas, es decir* $\alpha = \alpha^{-1}$.

Ejemplo 2.6.1 *Si tenemos el siguiente retículo* $P = (X,|)$ *donde el conjunto* $X = \{1, 2, 4, 6, 12, 24\}$

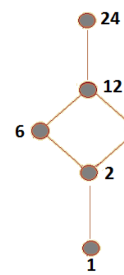

Figura 2.1: Estructura auto-dual

y definimos las funciones Π, Ω *como sigue*

$$\Pi = \{(1, 24), (2, 12), (6, 4), (4, 6), (12, 2), (24, 1)\}$$

$$\Omega = \{(1, 24), (2, 12), (6, 4), (4, 6), (12, 2), (24, 1)\}$$

la pareja (Π,Ω) *es una conexión de Galois en* P, *veamos*

i)

$$\begin{array}{llll}
1 < 2 \;\; y \;\; \Pi(1) = 24 > \Pi(2) = 12, & 1 < 6 \;\; y \;\; \Pi(1) = 24 > \Pi(6) = 4 \\
1 < 4 \;\; y \;\; \Pi(1) = 24 > \Pi(4) = 6, & 1 < 12 \;\; y \;\; \Pi(1) = 24 > \Pi(12) = 2 \\
1 < 24 \;\; y \;\; \Pi(1) = 24 > \Pi(24) = 1, & 2 < 6 \;\; y \;\; \Pi(2) = 12 > \Pi(6) = 4 \\
2 < 4 \;\; y \;\; \Pi(2) = 12 > \Pi(4) = 6, & 2 < 12 \;\; y \;\; \Pi(2) = 12 > \Pi(12) = 2 \\
2 < 24 \;\; y \;\; \Pi(2) = 12 > \Pi(24) = 1 & 6 < 12 \;\; y \;\; \Pi(6) = 4 > \Pi(12) = 2 \\
6 < 24 \;\; y \;\; \Pi(6) = 4 > \Pi(24) = 1 & 4 < 12 \;\; y \;\; \Pi(4) = 6 > \Pi(12) = 2 \\
4 < 24 \;\; y \;\; \Pi(4) = 6 > \Pi(24) = 1 & 12 < 24 \;\; y \;\; \Pi(12) = 2 > \Pi(24) = 1
\end{array}$$

Igualmente i) se cumple para Ω ya que $\Pi = \Omega$.

ii)

$$\begin{array}{ll} \Pi(\Omega(1))) = \Pi(24) = 1 & \Omega(\Pi(1))) = \Omega(24) = 1 \\ \Pi(\Omega(2))) = \Pi(12) = 2 & \Omega(\Pi(2))) = \Omega(12) = 2 \\ \Pi(\Omega(4))) = \Pi(6) = 4 & \Omega(\Pi(4))) = \Omega(6) = 4 \\ \Pi(\Omega(6))) = \Pi(4) = 6 & \Omega(\Pi(6))) = \Omega(4) = 6 \\ \Pi(\Omega(12))) = \Pi(2) = 12 & \Omega(\Pi(12))) = \Omega(2) = 12 \\ \Pi(\Omega(24))) = \Pi(1) = 24 & \Omega(\Pi(24))) = \Omega(1) = 24 \end{array}$$

Por ***i)*** *y* ***ii)*** *tenemos que (Π,Ω) es una conexión de Galois en P donde el conjunto $CL_1(P) = \{1, 2, 4, 6, 12, 24\} = CL_2(P)$, por lo tanto (Π,Ω) es una* ***estructura auto-dual****. Además como $\Pi = \Omega$, el automorfismo dual $\alpha = \Pi$ y $\alpha^{-1} = \Omega$ tenemos que $\alpha = \alpha^{-1}$, luego (Π,Ω) es* ***auto-dual****.*

Teorema 2.6.2 *Sea P un retículo. Si (Π,Ω) es una conexión de Galois auto-dual entonces (Π,Ω) es una estructura auto-dual.*

Demostración.
Sean (Π,Ω) una conexión de Galois auto-dual, α el isomorfismo que genera la conexión, esto es

$$\alpha : CL_1(P) \to CL_2(P).$$

Dado que α es un isomorfismo existe la función inversa $\alpha^{-1} : CL_2(P) \to CL_1(P)$, además la conexión de Galois es auto-dual lo cual significa que $\alpha = \alpha^{-1}$, luego tenemos que el $\mathrm{Dom}(\alpha) = \mathrm{Dom}(\alpha^{-1})$ por lo tanto $CL_1(P) = CL_2(P)$ y así obtenemos que (Π,Ω) es una estructura auto-dual.

Corolario 2.6.2 *Sea P un retículo completo. Cada conexión de Galois auto-dual dentro de P está definida por algún subretículo P_1 con respecto a la intersección sobre P, el cual posee un automorfismo dual α tal que*

$$\alpha = \alpha^{-1}.$$

Por el teorema anterior toda conexión auto-dual es una estructura dual pero no podemos garantizar su recíproco, como veremos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.6.2 *Sean* $A = \{a\}$, $B = \{a,b\}$, $C = \{a,c\}$, $D = \{a,d\}$, $E = \{a,b,c,d\}$ *y* $F = \{a,b,c,d,e,f\}$ *definimos un retículo* $Q = \{\emptyset, A, B, C, D, E, F\}$ *ordenado por inclusión como se muestra en la figura 2.2 y la conexión de Galois* (Π,Ω) *en* Q *dada por*

$$\Pi = \{(F,\emptyset),(E,A),(B,C),\ (C,D),(D,B),(A,E),(\emptyset,F)\},$$

$$\Omega = \{(F,\emptyset),(E,A),(B,D),(D,C),(C,B),(A,E),(\emptyset,F)\},$$

donde el conjunto $CL_1(Q) = \{\emptyset, A, B, C, D, E, F\} = CL_2(Q)$ *pero el automorfismo dual* α *es distinto de* α^{-1} *debido a que* $\alpha = \Pi$ *y su función inversa* $\alpha^{-1} = \Omega$ *además tenemos que* $\Pi \neq \Omega$ *ya que* $\Pi(D) = B$ *mientras que* $\Omega(D) = C$, *por tanto* (Π,Ω) *es una estructura* ***auto-dual*** *pero no es una conexión* ***auto-dual***.

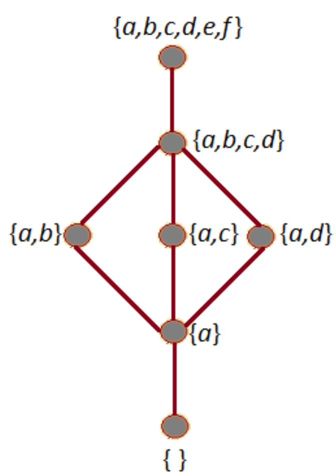

Figura 2.2:

Definición 2.6.4 *Un automorfismo dual* α *en un conjunto* X *lo llamaremos* ***involución*** *cuando* $\alpha = \alpha^{-1}$.

2.7. Topologías duales y relaciones binarias

Como las relaciones binarias definen conexiones de Galois y éstas se representan mediante un isomorfismo dual entre los elementos cerrados de un conjunto, en esta sección presentamos algunos conceptos utilizados en topología, pero adaptados a la teoría vista en conexiones de Galois.

Definición 2.7.1 *Sean S y S' dos espacios con la familia de conjuntos $\Gamma_{\mathbf{R}^{-1}}$ y $\Gamma_{\mathbf{R}}$* [2] *respectivamente. Diremos que S y S' son* ***espacios duales*** *cuando el retículo de todos los conjuntos cerrados en S sea dualmente isomorfo al retículo de todos los conjuntos cerrados en S'. En este caso diremos que $\Gamma_{\mathbf{R}^{-1}}$ y $\Gamma_{\mathbf{R}}$ son topologías duales de S y S' respectivamente.*

Siguiendo la definición anterior los teoremas 2.4.2 y 2.4.3 los presentamos de la siguiente manera:

Teorema 2.7.1 *Sean S y S' conjuntos no vacíos. Cualquier relación binaria $\mathbf{R}$ entre los conjuntos S y S' tales que $\emptyset \in V_{\mathbf{R}}$ y $\emptyset \in V_{\mathbf{R}^{-1}}$, define topologías duales en los dos conjuntos por medio de la conexión de Galois que induce.*

Demostración.
Por teorema 2.4.2 las funciones

$$\Pi : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S') \qquad \text{y} \qquad \Omega : \mathcal{P}(S') \longrightarrow \mathcal{P}(S),$$

definidas por

$$\Pi(A) = \mathbf{R}(A) \qquad \text{y} \qquad \Omega(A') = \mathbf{R}^{-1}(A')$$

con $\quad \Pi(\emptyset) = S' \qquad$ y $\qquad \Omega(\emptyset) = S,$

definen una conexión de Galois entre los conjuntos $\mathcal{P}(S)$ y $\mathcal{P}(S')$, entonces existe un isomorfismo dual entre los conjuntos $CL_1(\mathcal{P}(S))$ y $CL_2(\mathcal{P}(S'))$.

Mostremos que $CL_1(\mathcal{P}(S)) = \Gamma_{\mathbf{R}^{-1}} \quad$ y $\quad CL_2(\mathcal{P}(S')) = \Gamma_{\mathbf{R}}$.

[2] $\Gamma_{\mathbf{R}^{-1}} = V_{\mathbf{R}^{-1}} \bigcup \{\emptyset, S\}$ $\Gamma_{\mathbf{R}} = V_{\mathbf{R}} \bigcup \{\emptyset, S'\}$

Por teorema 2.2.1 sabemos que $\Omega[\mathcal{P}(S')] \subseteq CL_1(\mathcal{P}(S))$. Por otro lado si $B \in CL_1(\mathcal{P}(S))$ entonces $\Omega(\Pi(B)) = B$ como $\Pi(B) \in \mathcal{P}(S')$ tenemos que $B \in \Omega[\mathcal{P}(S')]$, por lo tanto $CL_1(\mathcal{P}(S)) = \Omega[\mathcal{P}(S')]$.

Además $V_{\mathbf{R}^{-1}} = \Omega[\mathcal{P}(S')]$ ya que si $C \in V_{\mathbf{R}^{-1}}$ entonces $C = \mathbf{R^{-1}}(A_1)$ para algún $A_1 \subseteq S'$, luego $C = \Omega(A_1)$ para algún $A_1 \subseteq S'$ con lo cual $C \in \Omega[\mathcal{P}(S')]$.
Si $A \in \Omega[\mathcal{P}(S')]$ entonces $A = \Omega(B)$ para algún $B \in \mathcal{P}(S')$, así $A = \mathbf{R^{-1}}(B)$ para algún $B \in \mathcal{P}(S')$ con lo cual $A \in V_{\mathbf{R}^{-1}}$. Por hipótesis $\emptyset \in V_{\mathbf{R}^{-1}}$ y $\Omega(\emptyset) = S$, luego tenemos que $V_{\mathbf{R}^{-1}} = \Gamma_{\mathbf{R}^{-1}}$ y en consecuencia $CL_1(\mathcal{P}(S)) = \Gamma_{\mathbf{R}^{-1}}$.
Análogamente podemos obtener $CL_2(\mathcal{P}(S')) = \Gamma_{\mathbf{R}}$ y con ello definimos las topologías duales $\Gamma_{\mathbf{R}^{-1}}$ y $\Gamma_{\mathbf{R}}$ entre los conjuntos S y S' respectivamente.

Por el teorema anterior tenemos que un espacio S lo podemos topologizar por dos topologías $\Gamma_{\mathbf{R}^{-1}}$ y $\Gamma_{\mathbf{R}}$ las cuales son duales como veremos en el siguiente corolario.

Corolario 2.7.1 *Sean S un conjunto no vacío y $\mathbf{R}$ una relación binaria en S tales que $\emptyset \in V_{\mathbf{R}}$ y $\emptyset \in V_{\mathbf{R}^{-1}}$ entonces $\mathbf{R}$ induce la conexión de Galois en $\mathcal{P}(S)$ y dos topologías duales en S.*

Definición 2.7.2 *Un espacio S es* ***auto-dual*** *cuando exista para el retículo de conjuntos cerrados de S un automorfismo dual α.*

Definición 2.7.3 *Como un caso especial, un espacio S lo llamaremos* ***involutorio*** *cuando exista una involución en el retículo de conjuntos cerrados de S, también es llamada* ***topología involutoria****.*

Definición 2.7.4 *Sea $\mathbf{R}$ una relación binaria, llamaremos a $\mathbf{R}$ una* ***relación simétrica*** *cuando $\mathbf{R}$ y $\mathbf{R^{-1}}$ sean idénticas, esto es $\mathbf{R} = \mathbf{R^{-1}}$.*

Teorema 2.7.2 *Sea S un conjunto no vacío. Cualquier relación simétrica $\mathbf{R}$ en un conjunto S tal que $\emptyset \in V_{\mathbf{R}}$ y $\emptyset \in V_{\mathbf{R}^{-1}}$ define una conexión de Galois y una topología involutoria en el retículo de $\mathcal{P}(S)$.*

Demostración.
Sea $\mathbf{R}$ una relación simétrica en un conjunto S, por teorema 2.4.2 definimos la conexión de Galois en $\mathcal{P}(S)$ como la pareja de funciones (Π,Ω) dadas por

$$\Pi(A) = \mathbf{R}(A) \text{ y } \Omega(A) = \mathbf{R^{-1}}(A) \text{ para } A \subseteq S.$$

Como $\mathbf{R} = \mathbf{R^{-1}}$ tenemos que $\Pi(A) = \Omega(A)$, además existe un isomorfismo dual α entre $CL_1(\mathcal{P}(S))$ y $CL_2(\mathcal{P}(S))$. Mostremos que $CL_1(\mathcal{P}(S)) = CL_2(\mathcal{P}(S))$.
Sea $B \in CL_1(\mathcal{P}(S))$ entonces $cl_1(B) = B$, es decir $\Omega(\Pi(B)) = B$. Si $\Pi(B) = D$ para algún $D \subseteq S$ tendremos que $\Omega(D) = B$, además $\Omega(B) = D$ ya que $\Omega = \Pi$ luego $\Pi(\Omega(B)) = \Pi(D) = \Omega(D) = B$, por tanto $B \in CL_2(\mathcal{P}(S))$.
Por otro lado si $A \in CL_2(\mathcal{P}(S))$ entonces $cl_2(A) = A$, es decir $\Pi(\Omega(A)) = A$ y si $\Omega(A) = F$ para algún $F \subseteq S$ tendremos que $\Pi(F) = A$, como $\Pi(A) = \Omega\ (A)$ obtenemos que $\Pi(A) = F$ y así $\Omega(\Pi(A)) = \Omega(F) = \Pi(F) = A$, por tanto $A \in CL_1(\mathcal{P}(S))$.
En consecuencia $CL_1(\mathcal{P}(S)) = CL_2(\mathcal{P}(S))$ con lo cual $Dom\alpha = Dom\alpha^{-1}$ y así α es un automorfismo dual, además $\alpha(A) = \alpha^{-1}(A)$ para todo $A \subseteq S$ debido a que $\alpha = \Pi \restriction CL_1(\mathcal{P}(S))$, $\alpha^{-1} = \Omega \restriction CL_2(\mathcal{P}(S))$ y $\Pi = \Omega$ tenemos que $\alpha = \alpha^{-1}$, por lo tanto el automorfismo dual α es una involución y define una topología involutoria en el retículo $\mathcal{P}(S)$.

Teorema 2.7.3 *Sean S un conjunto no vacío y (Π,Ω) una conexión de Galois en $\mathcal{P}(S)$ tal que el automorfismo dual que induce dicha conexión es una involución, entonces la conexión (Π,Ω) puede ser definida por medio de una relación simétrica* $\mathbf{R}$.

Demostración.
Sea (Π,Ω) una conexión de Galois en $\mathcal{P}(S)$ y α el automorfismo dual que induce, por teorema 2.4.3 la conexión (Π,Ω) podemos definirla por la relación binaria $\mathbf{R}$ en S dada por

$$a\mathbf{R}b \text{ si y sólo si } b \in \alpha(\{a\}) = \alpha(cl_1(\{a\})),$$

y

$$b\mathbf{R}^{-1}a \text{ si y sólo si } a \in \alpha^{-1}(\{b\}) = \alpha^{-1}(cl_2(\{b\})),$$

para todo a, b $\in S$.
Mostremos que $a\mathbf{R}b$ si y sólo si $a\mathbf{R^{-1}}b$.
$\Rightarrow$) Sean a, $b \in S$ y supongamos que $a\mathbf{R}b$ entonces $b \in \alpha(\{a\}) = \alpha(cl_1(\{a\}))$, como $\alpha = \alpha^{-1}$ tenemos que $CL_1(\mathcal{P}(S)) = CL_2(\mathcal{P}(S))$ luego

$cl_1(\{a\}) = \text{mín}\{B \subseteq CL_1(\mathcal{P}(S)) \mid \{a\} \subseteq B\} = \text{mín}\{B \subseteq CL_2(\mathcal{P}(S)) \mid \{a\} \subseteq B\}$, además $\text{mín}\{B \subseteq CL_2(\mathcal{P}(S)) \mid \{a\} \subseteq B\} = cl_2(\{a\})$.
Luego $\alpha(cl_1(\{a\})) = \alpha(cl_2(\{a\})) = \alpha^{-1}(cl_2(\{a\}))$ con lo cual si $b \in \alpha(cl_1(\{a\}))$ entonces $b \in \alpha^{-1}(cl_2(\{a\}))$ por tanto $a\mathbf{R^{-1}}b$.

$\Leftarrow$) Si $a\mathbf{R^{-1}}b$ entonces $b \in \alpha^{-1}(\{a\}) = \alpha^{-1}(cl_2(\{a\})) = \alpha(cl_1(\{a\}))$ y así $a\mathbf{R}b$.
En consecuencia, $a\mathbf{R}b$ si y sólo si $a\mathbf{R^{-1}}b$ y con ello tenemos que $\mathbf{R} = \mathbf{R^{-1}}$, es decir $\mathbf{R}$ es una relación simétrica.

2.8. Aplicaciones de las conexiones de Galois

2.8.1. Teorema fundamental de la teoría de Galois

Complementamos la introducción con una breve reseña histórica acerca de las bases teóricas de las conexiones de Galois. En 1831 *Evariste Galois* descubrió un criterio universal de solubilidad por radicales para ecuaciones polinómicas de cualquier grado n; este hecho fue muy importante para los avances que ha tenido el álgebra ya que entre otras cosas sentó las bases de la teoría de grupos.

El problema de decidir si una ecuación $f(x) = 0$ (siendo $f(x)$ un polinomio con coeficientes racionales) se puede resolver por radicales, es decir, si la solución se puede obtener a partir de operaciones de suma, producto y radicación de racionales, es equivalente a decidir si el campo de raíces de $f(x)$ se puede obtener a partir de $\mathbb{Q}$ a través de una sucesión de extensiones que se obtienen adjuntando raíces de polinomios
x^n - a. El problema general para un polinomio $f(x)$ con coeficientes en un campo F que se puede factorizar completamente en el campo K, requiere involucrar el grupo de Galois $\text{Gal}(K/F)$ y conocer la relación que existe entre los campos que viven entre F y K y los subgrupos de $\text{Gal}(K/F)$. Presentamos esta relación en el siguiente teorema.

Teorema 2.8.1 (***Teorema fundamental de la teoría de Galois***) *Sea K/F una extensión finita de Galois (normal y separable). Si $G = Gal(K/F)$ entonces existe una biyección ψ que invierte las inclusiones, entre el conjunto de campos intermedios E tales que $F \subseteq E \subseteq K$ que denominaremos P, y el conjunto de subgrupos H del grupo* *de Galois G que llamaremos Q. Esta correspondencia está dada por*

$$\psi : P \to Q$$

definida por

$$\psi(E) = G(K/E)$$

y

$$\psi^{-1} : Q \to P$$

dada por

$$\psi^{-1}(H) = \{x \in K \mid \tau(x) = x \text{ para todo } \tau \in H\}.$$

Observación 2.6 *El teorema anterior garantiza que existe un isomorfismo dual ψ entre P y Q y la conexión de Galois está dada en el ejemplo 2.2.1.*

En esta sección vamos a presentar un ejemplo particular de la aplicación del teorema anterior.

Consideremos el polinomio $p(x) = x^3$ - $2 \in \mathbb{Q}[x]$.
Como $\sqrt[3]{2}$ es irracional, p no tiene raíces en $\mathbb{Q}$ luego p es irreducible. Hallemos el grupo de Galois del campo de descomposición.
Las raíces de p son: $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2}\omega$, $\sqrt[3]{2}\omega^2$ donde $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, por tanto el campo de descomposición es $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\omega)$.
El mínimo polinomio en $\mathbb{Q}[x]$ para el que $\sqrt[3]{2}$ es un cero es x^3 - 2 y el polinomio mínimo para ω sobre $\mathbb{Q}$ es x^2+x+1 y sobre $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ es el mismo.
En el grupo de Galois $G(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\omega)/\mathbb{Q})$ tenemos dos automorfismos principales que llamaremos τ y σ los cuales actúan de la siguiente manera: $\tau(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}$, $\tau(\omega) = \omega^2$, $\sigma(\sqrt[3]{2}) = \omega\sqrt[3]{2}$ y $\sigma(\omega) = \omega$ o ω^2, donde τ es de orden 2 y σ tiene orden 3.
Los automorfismos Id, σ, σ^2, τ, $\sigma\tau$ y $\sigma^2\tau$ son distintos, su acción sobre ω se recoge en la siguiente tabla.

	Id	σ	σ^2	τ	$\sigma^2\tau$	$\sigma\tau$
$\sqrt[3]{2}\to$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2}\omega$	$\sqrt[3]{2}\omega^2$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2}\omega$	$\sqrt[3]{2}\omega^2$
$\omega\to$	ω	ω	ω	ω^2	ω^2	ω^2
Orden	1	3	3	2	2	2

El grupo de Galois tiene orden 6, así pues obtenemos que

$$G(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\omega)/\mathbb{Q}) = \{\mathrm{Id},\sigma,\sigma^2,\tau,\sigma\tau,\sigma^2\tau\} \cong S_3.$$

Como $|G(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\omega)/\mathbb{Q})| = |S_3| = 6$, los órdenes de sus subgrupos propios sólo puede ser 2 o 3. Los de orden 2 están generados por un elemento del mismo orden y hay tres de ellos, $\langle\tau\rangle$, $\langle\sigma\tau\rangle$ y $\langle\sigma^2\tau\rangle$ y hay un sólo subgrupo de orden 3, $\langle\sigma\rangle$.
Por el teorema fundamental de la teoría de Galois el isomorfismo dual entre los subgrupos propios de $G(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\omega)/\mathbb{Q})$ y los subcampos L tales que $\mathbb{Q} \subseteq L \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\omega)$ están dados por lo siguiente :
Como τ fija a $\sqrt[3]{2}$ entonces a $\langle\tau\rangle$ le corresponde el campo $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $\sigma\tau$ fija a $\sqrt[3]{2}\omega$ entonces a $\langle\sigma\tau\rangle$ le corresponde el campo $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\omega)$, $\sigma^2\tau$ fija a $\sqrt[3]{2}\omega^2$ entonces a $\langle\sigma^2\tau\rangle$ le corresponde el campo $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\omega^2)$, σ fija a ω entonces a $\langle\sigma\rangle$ le corresponde el campo $\mathbb{Q}(\omega)$, Id fija a todos los elementos de $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\omega)$ luego le corresponde el campo $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\omega)$ y al grupo de Galois $G(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\omega)/\mathbb{Q})$ que fija a todo $\mathbb{Q}$ le corresponde el campo $\mathbb{Q}$.
Dado que encontramos todos los subgrupos y los subcampos fijos correspondientes podemos asegurar que encontramos todos los subcampos posibles de $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\omega)$. El isomorfismo dado podemos ilustrarlo como sigue en la figura 2.3 donde los conjuntos los definimos por

$$\begin{aligned}
&G_1 = \langle\sigma\tau\rangle \longrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\omega) = F_1\\
&G_2 = \langle\sigma\rangle \longrightarrow \mathbb{Q}(\omega) = F_2\\
&G_3 = \langle\tau\rangle \longrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = F_3\\
&G_4 = \langle\sigma^2\tau\rangle \longrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\omega^2) = F_4\\
&\mathrm{Id} \longrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\omega) = K\\
&G = G(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\omega)/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{Id}
\end{aligned}$$

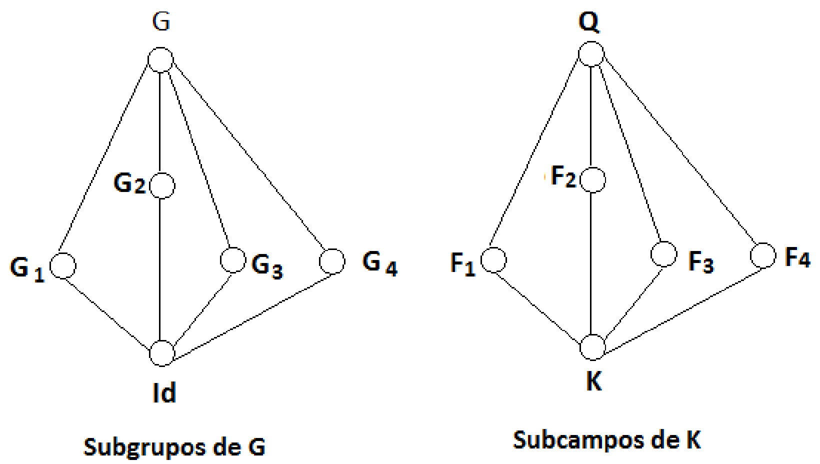

Figura 2.3:

2.8.2. Conexiones de Galois entre ideales y variedades

En este ejemplo describiremos la geometría algebraica clásica, un área donde el objeto principal de estudio es una variedad.

Definición 2.8.1 *En geometría algebraica, una* ***variedad algebraica*** *es esencialmente un conjunto de puntos (finito o infinito) en los cuales un polinomio (de una o más variables) toma un valor cero, o en el cual un conjunto de tales polinomios toma un valor cero.*

La correspondencia entre el álgebra y la geometría que trataremos, es el centro de una importante área de la matemática llamada geometría algebraica, que utiliza por un lado la intuición geométrica y por el otro el formalismo algebraico. Los cálculos en los anillos de polinomios impulsan a métodos efectivos en geometría algebraica, por esta razón es interesante que mostremos el siguiente ejemplo:
Consideremos el anillo de polinomios $X = \mathbb{C}[x_1,...,x_n]$ sobre un campo *algebraicamente cerrado* $\mathbb{C}$, es decir un campo tal que cada polinomio univariable con coeficientes en $\mathbb{C}$ tiene sus raíces en $\mathbb{C}$, el campo $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado debido al teorema

fundamental del álgebra.
Sean $X = \mathbb{C}^n$ y $Y = \mathbb{C}[x_1,...,x_n]$ definimos una relación binaria $\mathbf{R}$ de X en Y como sigue

$$x\mathbf{R}p \text{ si y sólo si } p(x) = 0.$$

Esta relación nos induce a la conexión de Galois (Π,Ω) dada por

$$\begin{gathered} \Pi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Y) \\ A \longmapsto \Pi(A) = \{\ p \in \mathbb{C}[x_1,...,x_n] \mid p(x) = 0 \text{ para todo } x \in A\} \end{gathered}$$

y

$$\begin{gathered} \Omega : \mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X) \\ B \longmapsto \Omega(B) = \{\ x \in \mathbb{C}^n \mid p(x) = 0 \text{ para todo } p \in B\ \} \end{gathered}$$

donde cada elemento cerrado en $\mathcal{P}(X)$ es una variedad algebraica y cada elemento cerrado en $\mathcal{P}(Y)$ resulta ser un ideal. De esta manera el isomorfismo que existe entre $CL_1(\mathcal{P}(X))$ y $CL_2(\mathcal{P}(Y))$ relaciona el álgebra con la geometría.

2.8.3. Completamiento de Dedekind - MacNeille

El completamiento de Dedekind - MacNeille fue originalmente propuesto por H. M. MacNeille en 1937 como una generalización de la famosa construcción de los números reales a partir de los racionales. Dicho completamiento consiste en tomar cualquier conjunto ordenado y obtener a partir de sus cortaduras, un retículo completo que contiene una copia isomorfa del conjunto inicial, y es aquí donde presentamos la conexión de Galois.

Definición 2.8.2 *Sean $(P,\leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y x, y elementos de P. Un subconjunto S de P lo llamaremos conjunto inferior si para $x \in S$ y $y \leq x$ tenemos que $y \in S$.*

Observación 2.7 *Entre los conjuntos inferiores se destacan los llamados ideales principales y uno de ellos es el siguiente conjunto*

$$\textit{para } x \in P, \quad \downarrow x = \{y \in P \mid y \leq x\} \textit{ es el ideal principal generado por } x.$$

Existen maneras diferentes, aunque equivalentes de definir el completamiento de Dedekind - MacNeille en un conjunto ordenado $(P,\leq)$ el cual denotaremos como $DM(P)$. En este trabajo utilizaremos la definición por cortaduras como veremos a continuación.

Definición 2.8.3 *Una cortadura de un conjunto parcialmente ordenado P es una pareja (A,B) de subconjuntos A y B de P tales que $A^u = B$ y $B^l = A$.*

Definición 2.8.4 *El completamiento de Dedekind - MacNeille en un conjunto ordenado $(P,\leq)$ es el siguiente conjunto*

$$DM(P) = \{A \subseteq P \mid (A,B) \textit{ es una cortadura de } P \textit{ para algún } B \subseteq P\}$$

El conjunto $DM(P)$ lo denominamos completamiento de Dedekind - MacNeille de P o completamiento normal de P. De hecho este es un retículo completo que contiene un subretículo isomorfo a P.

Teorema 2.8.2 *Toda cortadura de un conjunto parcialmente ordenado $(P,\leq)$ es de la forma $(\Delta A, A^u)$ con $A \subseteq P$, donde $\Delta A = \bigcap\{\downarrow y \mid y \in A^u\}$.*

Demostración.
Sea (A,B) una cortadura de P, entonces $A = B^l$ y $B = A^u$ luego tenemos que
$A = B^l = (A^u)^l$.
Probemos que $(A^u)^l = \Delta A$.
Sea $z \in (A^u)^l$ entonces z es cota inferior de A^u, luego $z \leq y$ para todo $y \in A^u$, así
$z \in \downarrow y$ para todo $y \in A^u$, por lo tanto $z \in \bigcap\{\downarrow y \mid y \in A^u\}$.
Por otro lado, si $z \in \Delta A$ entonces $z \in \bigcap\{\downarrow y \mid y \in A^u\}$, luego $z \in \downarrow y$ para cada $y \in A^u$ y así obtenemos que $z \leq y$ para todo $y \in A^u$ con lo cual z es cota inferior de A^u, por lo tanto $z \in (A^u)^l$.
En consecuencia tenemos que $A = \Delta A$, es decir $(A,B) = (\Delta A, A^u)$.

Según el teorema anterior, $DM(P) = \{\Delta A \mid A \subseteq P\}$.

Definición 2.8.5 *Consideremos un conjunto P y una relación binaria $\leq$ en P, entonces $\leq$ es un **preorden** o un **cuasiorden** si satisface las siguientes propiedades.*

1. *$a \leq a$ para todo $a \in P$* ***(Reflexividad)***

2. *Si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \leq c$* ***(Transitividad)***

Ejemplo 2.8.1 *Sean P un conjunto cuasiordenado por una relación $\leq$ y $DM(P)$ el completamiento de Dedekind - MacNeille en P, existe un isomorfismo dual α entre $DM(P)$ y el conjunto*

$$T = \{B \subseteq P \mid (A,B) \text{ es una cortadura de } P \text{ para algún } A \subseteq P\}$$

dicho isomorfismo está dado por

$$\begin{aligned} \alpha : DM(P) &\longrightarrow T \\ A &\longrightarrow \alpha\ (A) = A^u \end{aligned}$$

y la función inversa

$$\begin{aligned} \alpha^{-1} : T &\longrightarrow DM(P) \\ B &\longrightarrow \alpha^{-1}\ (B) = B^l \end{aligned}$$

Si tenemos el siguiente conjunto ordenado $(P,|)$ donde $P = \{2,3,6,9,18,27\}$ como podemos observar en la figura 2.4

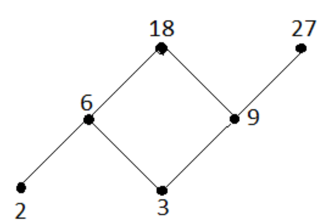

Figura 2.4: $(P,|)$

Definimos las cortaduras de P según el teorema 2.8.2 de la siguiente manera

$$\begin{array}{ll}
\Delta\emptyset = \bigcap\limits_{x\in P} \downarrow x = \emptyset & \emptyset^u = P \\
\Delta\{2\} = \{2\} & \{2\}^u = \{2,6,18\} \\
\Delta\{6\} = \{2,3,6\} & \{6\}^u = \{6,18\} \\
\Delta\{18\} = \{2,3,6,9,18\} & \{18\}^u = \{18\} \\
\Delta\{3\} = \{3\} & \{3\}^u = \{3,6,9,18,27\} \\
\Delta\{9\} = \{3,9\} & \{9\}^u = \{9,18,27\} \\
\Delta\{27\} = \{3,9,27\} & \{27\}^u = \{27\} \\
\Delta\{2,27\} = \cap\emptyset = P & \{2,27\}^u = \emptyset
\end{array}$$

Para todos los demás subconjuntos $A \subseteq P$, ΔA coincide con alguno de los anteriores. Por consiguiente, $DM(P)$ es el siguiente retículo completo:

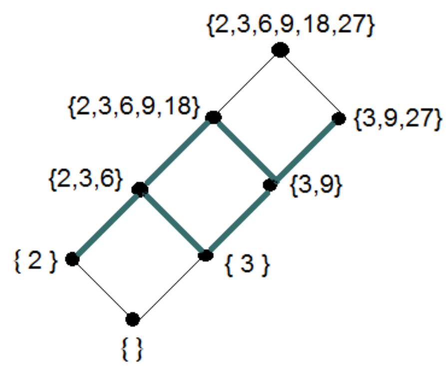

Figura 2.5: $(DM(P),\subseteq)$

El cual es dualmente isomorfo al conjunto $T = \{A^u \mid A \subseteq P\}$. El conjunto T forma el siguiente retículo completo

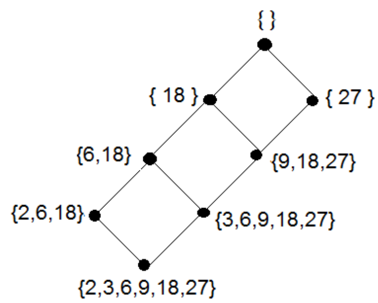

Figura 2.6: $(T,\supseteq)$

y el isomorfismo α está dado de la siguiente manera:
$\alpha(\emptyset) = P$
$\alpha(\{2\}) = \{2,6,18\}$
$\alpha(\{2,3,6\}) = \{6,18\}$
$\alpha(\{2,3,6,9,18\}) = \{18\}$
$\alpha(\{3\}) = \{3,6,9,18,27\}$
$\alpha(\{3,9\}) = \{9,18,27\}$
$\alpha(\{3,9,27\}) = \{27\}$
$\alpha(P) = \emptyset$
Este isomorfismo genera la pareja de funciones (Π,Ω) dada por

$$\Pi,\, \Omega : \mathcal{P}(P) \longrightarrow \mathcal{P}(P)$$

donde

$$\Pi(A) = A^u \qquad \text{y} \qquad \Omega(A) = A^l$$

La pareja (Π,Ω) es una conexión de Galois en $\mathcal{P}(P)$ como quedó demostrado en el ejemplo 2.2.2, además los conjuntos $CL_1(\mathcal{P}(P))$ y $CL_2(\mathcal{P}(P))$ son $DM(P)$ y T respectivamente.

Comentarios finales

1. Una de las motivaciones para la realización de este trabajo es la importancia que tienen las conexiones de Galois en distintos campos de la matemática, y el reconocimiento que algunos matemáticos le han dado en este siglo para buscar posicionar las relaciones de orden al mismo nivel de las relaciones de equivalencia.

2. En el trabajo presentamos el vínculo que existe entre relaciones binarias y conexiones de Galois, además el tipo de conexión que se define de una relación binaria simétrica. Como existen varias clases de relaciones binarias sería de gran interés para futuros trabajos presentar las conexiones que se definen de otro tipo de relaciones binarias como lo son las reflexivas, las antisimétricas y las transitivas.

3. Con la elaboración y presentación de este trabajo espero hacer un aporte significativo a la divulgación de las *conexiones de Galois* en la Universidad e invitar a los estudiantes de matemáticas a acercarse al estudio de éstas, ya que son una herramienta útil en muchas áreas de la matemática e incluso en áreas como la lingüística.

Bibliografía

[1] Bewersdorff, J. *Galois Theory for Beginners*. American Mathematical Society, (2006), 144-146.

[2] Birkhoff, G. *Lattice Theory*. American Mathematical Society Colloquium Publications, Volume XXV. Third Edition, Second Printing, (1940) 1973.

[3] Castro, R. y Rubiano, G. *Una revisión del completamiento de Dedekind - MacNeille*. Miscelánea Matemática, 37, Bogotá, (2003), 65-76.

[4] Erné, M., Denecke, K. and Wismath S.L. *Galois Connections and Applications*. Series: Mathematics and Its Applications, Vol.565, 2004.

[5] Erné, M., Koslowski, J., Melton, A. and Strecker, G.E. *A primer on Galois connections*. Annals of the New York Academy of Sciences, 704: (1993), 103-125.

[6] Lezama, C.H. *Conexiones de Galois*. Revista Integración. *Universidad Industrial de Santander*. Vol. 14 No. 1 (1996), 1-8.

[7] ORE, O. *Galois Connexions*. American Mathematical Society, No. 55 (1944), 493-513.

[8] Redondo, M.J. *Extensiones de Cuerpos y Teoría de Galois*. Publicación docente, Instituto de Matemática Universidad Nacional del Sur, Argentina. http://inmabb.criba.edu.ar/gente/mredondo/galois.pdf.

[9] Roman, S. *Lattice and Ordered Sets*. Springer Science Business Media, New York, 2008.