

**ANÁLISIS DE DESEMPEÑO DE UN ENLACE DE  
COMUNICACIÓN DE ÚNICA PORTADORA CON  
ECUALIZACIÓN CON REALIMENTACIÓN DE DECISIÓN  
BASADA EN EL CRITERIO DE MÍNIMO ERROR  
CUADRÁTICO MEDIO (DFE-MMSE)**



Trabajo de grado presentado como requisito para optar por el título de  
Ingeniero en Electrónica y Telecomunicaciones

**Ricar Donaldo Patiño Delgado  
Juan Camilo Sánchez Lugo**

Director: MSc. Jesús Mauricio Ramírez Viáfara

*Universidad del Cauca*

Facultad de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones  
Departamento de Telecomunicaciones  
Señales y Sistemas de Telecomunicaciones  
Popayán, 2023



## TABLA DE CONTENIDO

<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>1</b>
<b>1. ECUALIZACIÓN DFE-MMSE</b> .....	<b>3</b>
1.1. CANAL DISPERSIVO GAUSSIANO.....	3
1.1.1. Proceso de Modulación Digital .....	5
1.1.2. Canal Discreto Equivalente.....	9
1.2. ECUALIZACIÓN DE CANAL .....	11
1.2.1. Ecuación Lineal MMSE .....	12
1.2.2. Ecuación No Lineal DFE .....	16
<b>2. DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN</b> .....	<b>24</b>
2.1. ETAPA 1. ENLACE DE COMUNICACIÓN DIGITAL SOBRE UN CANAL AWGN.....	25
2.1.1. Requerimientos .....	25
2.1.2. Diseño e Implementación .....	26
2.1.3. Pruebas de Validación.....	30
2.2. ETAPA 2. ENLACE DE COMUNICACIÓN DIGITAL SOBRE UN CANAL DISPERSIVO GAUSSIANO SIN ECUALIZACIÓN.....	33
2.2.1. Requerimientos .....	33
2.2.2. Diseño e Implementación .....	33
2.2.3. Pruebas de Validación.....	35
2.3. ETAPA 3. ENLACE DE COMUNICACIÓN DIGITAL SOBRE UN CANAL DISPERSIVO GAUSSIANO CON ECUALIZACIÓN.....	37
2.3.1. Requerimientos .....	37
2.3.2. Diseño e Implementación .....	37
2.3.3. Pruebas de Validación.....	46
<b>3. ANÁLISIS Y RESULTADOS</b> .....	<b>51</b>
3.1. COMPARACIÓN DE DESEMPEÑO PARA DIFERENTES CANALES DISPERSIVOS GAUSSIANOS.....	51
3.1.1. Comportamiento del Enlace de Comunicación Digital .....	54
3.1.2. Diseño del Ecuador DFE-MMSE .....	58
3.1.3. Desempeño del Ecuador DFE-MMSE .....	61
3.2. COMPARACIÓN DE DESEMPEÑO PARA DIFERENTES LONGITUDES DEL ECUADOR .....	67
3.2.1. Desempeño del Ecuador DFE-MMSE .....	68
<b>4. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS</b> .....	<b>73</b>
4.1. CONCLUSIONES.....	73
4.2. TRABAJOS FUTUROS .....	74
<b>BIBLIOGRAFÍA</b> .....	<b>75</b>

## LISTA DE TABLAS

Tabla 3.1. Escenarios y respuesta de canal. ....	51
Tabla 3.2. Diagramas de constelación sin ecualización al variar los parámetros del rayo secundario. ....	57
Tabla 3.3. Respuesta global al impulso del enlace de comunicación digital. ....	59
Tabla 3.4. Diagramas de constelación antes y después de la ecualización al variar los parámetros del rayo secundario. ....	62
Tabla 3.5. Curvas de desempeño BER vs $E_b/N_0$ . ....	64
Tabla 3.6. Impacto del ecualizador al variar los parámetros del rayo secundario. ....	66
Tabla 3.7. Escenarios de ecualización definidos por la longitud del ecualizador. ....	67
Tabla 3.8. Diagramas de constelación al variar la longitud del ecualizador. ....	68
Tabla 3.9. Impacto del ecualizador al variar la longitud del ecualizador. ....	71

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1. Modelo de canal dispersivo Gaussiano. ....	3
Figura 1.2. Representación de canales dispersivos. ....	4
Figura 1.3. Fenómeno de multitrayecto. ....	4
Figura 1.4. Transmisor de un enlace de comunicación digital con modulación M-QAM. ....	5
Figura 1.5. Mapeo del esquema de modulación digital 4-QAM. ....	6
Figura 1.6. Respuesta de un pulso de coseno alzado en el dominio del tiempo. ....	6
Figura 1.7. Receptor de un enlace de comunicación digital con demodulación M-QAM. ....	7
Figura 1.8. Canal discreto equivalente. ....	10
Figura 1.9. Enlace equivalente en tiempo discreto. ....	11
Figura 1.10. Enlace equivalente en tiempo discreto con ecualización. ....	11
Figura 1.11. Diagrama de bloques en el ejemplo MMSE-LE. ....	13
Figura 1.12. SINR antes y después del ecualizador en el ejemplo MMSE-LE. ....	16
Figura 1.13. Diagrama de bloques de un DFE. ....	16
Figura 1.14. Diagrama de bloques de un ZF-DFE. ....	17

Figura 1.15. Diagrama de bloques en el ejemplo ZF-DFE. ....	18
Figura 1.16. Diagrama de bloques de un MMSE-DFE. ....	19
Figura 1.17. Diagrama de bloques en el ejemplo MMSE-DFE. ....	21
Figura 1.18. SINR antes y después del ecualizador en el ejemplo MMSE-DFE. .....	23
Figura 2.1. El modelo incremental. ....	24
Figura 2.2. Modelo de proceso concurrente para una actividad. ....	25
Figura 2.3. Enlace de comunicación digital sobre canal AWGN. ....	27
Figura 2.4. Diagrama de constelación de 4-QAM. ....	27
Figura 2.5. Respuesta al impulso de los filtros de transmisión y recepción (raíz de coseno alzado). ....	28
Figura 2.6. Respuesta al impulso conjunta de los filtros de transmisión y recepción (coseno alzado completo). ....	29
Figura 2.7. SER obtenido en simulaciones en la prueba de validación 1. ....	31
Figura 2.8. Diagrama de constelación en la prueba de validación 1. ....	31
Figura 2.9. Curva de desempeño BER vs $E_b/N_0$ en la prueba de validación 2. ....	32
Figura 2.10. Enlace de comunicación digital sobre canal dispersivo Gaussiano. .....	34
Figura 2.11. Magnitud del espectro de la respuesta al impulso del canal dispersivo Gaussiano. ....	35
Figura 2.12. Espectro de señales sobre Canal dispersivo Gaussiano en la prueba de validación 3 (escenario 1). ....	36
Figura 2.13. Espectro de señales sobre Canal dispersivo Gaussiano en la prueba de validación 3 (escenario 2). ....	36
Figura 2.14. Espectro de señales sobre Canal dispersivo Gaussiano en la prueba de validación 3 (escenario 3). ....	37
Figura 2.15. Enlace de comunicación digital sobre canal dispersivo Gaussiano con ecualización DFE-MMSE. ....	38
Figura 2.16. Impacto del ecualizador. ....	39
Figura 2.17. Diseño del ecualizador para $n=2$ . ....	42
Figura 2.18. Magnitud $r_k$ normalizado en la prueba de validación 4 (escenario 1). ....	47
Figura 2.19. Constelaciones para (a) $u_k$ (b) $\theta_k$ en la prueba de validación 4 (escenario 1). ....	48
Figura 2.20. Magnitud $r_k$ normalizado en la prueba de validación 4 (escenario 2). ....	48

Figura 2.21. Constelaciones para (a) $u_k$ (b) $\theta_k$ en la prueba de validación 4 (escenario 2). .....	49
Figura 2.22. Magnitud $r_k$ normalizado en la prueba de validación 4 (escenario 3). .....	49
Figura 2.23. Constelaciones para (a) $u_k$ (b) $\theta_k$ en la prueba de validación 4 (escenario 3). .....	50
Figura 3.1. Señales transmitida y recibida sobre el canal dispersivo Gaussiano al variar los parámetros del rayo secundario. ....	55
Figura 3.2. Espectros de señales sobre el canal dispersivo Gaussiano al variar los parámetros del rayo secundario. ....	56
Figura 3.3. Curvas (a) SINR vs SNR y (b) Ganancia de ecualización vs SNR. ....	63
Figura 3.4. SINR vs SNR variando la longitud del ecualizador. ....	69
Figura 3.5. Ganancia de ecualización variando la longitud del ecualizador. ....	70
Figura 3.6. BER vs $E_b/N_0$ variando la longitud del ecualizador. ....	71
Figura I.1. Señales transmitida y recibida sobre el canal sin ruido. ....	77
Figura I.2. Diagrama de constelación para $u_k$ sobre el canal sin ruido. ....	77
Figura I.3. Respuesta global al impulso del enlace de comunicación sobre el canal sin ruido. ....	78
Figura I.4. Señales transmitida y recibida sobre el canal AWGN. ....	78
Figura I.5. Diagrama de constelación para $u_k$ sobre el canal AWGN. ....	79
Figura I.6. Respuesta global al impulso del enlace de comunicación sobre el canal AWGN. ....	79
Figura II.1. SINR vs SNR de unos enlaces de comunicación digital sobre un canal dispersivo Gaussiano. ....	80

## LISTA DE ANEXOS

Anexo I: Comportamiento de enlaces de comunicación previos.....	77
Anexo II: SINR vs SNR en enlaces de comunicación digital sobre un canal dispersivo Gaussiano sin ecualización .....	80

## LISTA DE ACRÓNIMOS

AWGN	<i>Additive White Gaussian Noise</i> , Ruido Gaussiano Blanco Aditivo.
BER	<i>Bit Error Rate</i> , Tasa de Error de Bit.
CIR	<i>Channel Impulse Response</i> , Respuesta al Impulso del Canal.
MD	<i>Minimum Euclidean Distance</i> , Distancia Euclidiana Mínima.
DFE	<i>Decision Feedback Equalizer</i> , Ecuador con Realimentación de Decisión.
DFT	<i>Discrete Fourier Transform</i> , Transformada Discreta de Fourier.
FBF	<i>FeedBack Filter</i> , Filtro de Realimentación.
FFF	<i>FeedForward Filter</i> , Filtro Alimentado hacia Adelante.
FIR	<i>Finite Impulse Response</i> , Respuesta finita al impulso.
ISI	<i>InterSymbol Interference</i> , Interferencia InterSímbolo.
LE	<i>Linear Equalizer</i> , Ecuador Lineal.
LTI	<i>Lineal Time-Invariant</i> , Lineal e Invariante en el Tiempo.
MMSE	<i>Minimum Mean-Square Error</i> , Mínimo Error Cuadrático Medio.
MSE	<i>Mean-Square Error</i> , Error Cuadrático Medio.
QAM	<i>Quadrature Amplitude Modulation</i> , Modulación de Amplitud en Cuadratura.
RC	<i>Raised Cosine</i> , Coseno Alzado.
SER	<i>Symbol Error Rate</i> , Tasa de Error de Símbolo.
SINR	<i>Signal-to-Interference-plus-Noise Ratio</i> , Relación de Señal a Interferencia más Ruido.
SNR	<i>Signal-to-Noise Ratio</i> , Relación de Señal a Ruido.
SRRC	<i>Square Root Raised Cosine</i> , Raíz de Coseno Alzado.
ZF	<i>Zero-Forcing</i> , Forzado a Cero.

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\{b_i\}$	Secuencia de bits en transmisión.
$\{\hat{b}_i\}$	Secuencia de bits estimados en recepción.
BER	Tasa de error de bit.
$E_b/N_o$	Relación energía de bit a densidad de potencia de ruido.
$E_s$	Energía de símbolo.
$c_i$	Coefficiente del filtro ecualizador DFE-MMSE.
$f_c$	Frecuencia portadora.
$g(t)$	Respuesta del filtro de coseno alzado.
$h(t)$	Respuesta al impulso del canal dispersivo Gaussiano.
$H(f)$	Respuesta en frecuencia del canal $h(t)$ .
$\tilde{h}(t)$	Respuesta al impulso equivalente banda base de $h(t)$ .
$\tilde{H}(f)$	Respuesta en frecuencia del canal $\tilde{h}(t)$ .
$M$	Orden del esquema de modulación.
MSE	Error Cuadrático Medio.
$N_o$	Densidad espectral de potencia de ruido.
$p(t)$	Filtro conformador.
$p(-t)$	Filtro acoplado.
$r(t)$	Respuesta global al impulso del enlace de comunicación.
$r_k$	Coefficiente del canal discreto equivalente en el instante k-ésimo.
$\{r_k\}$	Coefficientes del canal discreto equivalente.
SER	Tasa de error de símbolo.
SINR	Relación de Señal a Interferencia más Ruido.
SNR	Relación de Señal a Ruido.
$s_k$	Símbolo en transmisión en el instante k-ésimo.
$\hat{s}_k$	Símbolo estimado en recepción en el instante k-ésimo.
$\{s_k\}$	Secuencia de símbolos en transmisión.
$\{\hat{s}_k\}$	Secuencia de símbolos estimados en recepción.
$\theta_k$	Variable de decisión en el instante k-ésimo.
$\{\theta_k\}$	Secuencia de variables de decisión.
$\phi_i$	Opción de ventana deslizante para conformar $\theta_k$ .



$T$	Periodo de símbolo.
$T_b$	Periodo de bit.
$u(t)$	Señal continua a muestrear en recepción.
$u_k$	Observación en el instante k-ésimo.
$\{u_k\}$	Secuencia de observaciones en recepción.
$w(t)$	Ruido AWGN filtrado.
$w_k$	Ruido AWGN filtrado en el instante k-ésimo.
$\{w_k\}$	Secuencia de ruido AWGN filtrado presente en $\{u_k\}$ .
$x(t)$	Señal transmitida.
$X(f)$	Espectro de la señal $x(t)$ .
$x_b(t)$	Señal de información continua en transmisión.
$y(t)$	Señal recibida.
$Y(f)$	Espectro de la señal $y(t)$ .
$y'(t)$	Señal de información continua recuperada en recepción.
$z(t)$	Ruido AWGN.
$Z^{-1}$	Retardo en el dominio Z.
$\alpha$	Ganancia de amplitud del rayo secundario.
$\delta(t)$	Función delta de Dirac.
$\varepsilon_k$	Error en la estimación de $\theta_k$ .
$\sigma^2$	Varianza de ruido.
$\tau$	Retardo del rayo secundario.
$\mathbb{E}[\cdot]$	Operador de valor esperado.
$\mathcal{F}\{\cdot\}$	Operador transformada de Fourier.
$\mathcal{F}^{-1}\{\cdot\}$	Operador transformada de Fourier inversa.
$Re[\cdot]$	Operador parte real.
$*$	Operador de convolución





## INTRODUCCIÓN

En el ámbito de las comunicaciones digitales, el propósito fundamental de un enlace de comunicación es asegurar la eficiencia y la confiabilidad en la transmisión de información desde el transmisor al receptor, haciendo uso eficiente de los recursos. Sin embargo, diversos fenómenos, como la presencia de ruido y limitaciones de ancho de banda, pueden afectar la calidad de la transmisión [1].

Uno de los modelos de canal más comunes es el canal dispersivo Gaussiano, que distorsiona y agrega ruido a la señal de información. Un tipo de distorsión es la Interferencia Intersímbolo (ISI, *InterSymbol Interference*), fenómeno que consiste en la superposición de símbolos adyacentes en el momento de decisión del símbolo actual. La presencia de ISI, en conjunto con el ruido, aumenta la probabilidad de error o Tasa de Error de Bit (BER, *Bit Error Rate*), lo que ha llevado a investigaciones orientadas a mejorar el desempeño de la BER en enlaces sobre este tipo de canales [2].

Una de las técnicas empleadas para disminuir la BER en enlaces de comunicación sobre un canal dispersivo Gaussiano es la ecualización, la cual se define como un método que compensa la distorsión incurrida en la señal transmitida. Este proceso puede ser asociado desde la implementación de un simple filtro lineal hasta la utilización de un sofisticado algoritmo de procesamiento de señales, y puede llevarse a cabo tanto en el transmisor como en el receptor.

La técnica de Ecualización con Realimentación de Decisión de Mínimo Error Cuadrático Medio (DFE-MMSE, *Decision Feedback Equalization – Minimum Mean-Square Error*) ha mostrado excelentes resultados en la reducción de la BER en enlaces sobre un canal dispersivo Gaussiano [3]–[8]. Esta técnica combina lo mejor de los ecualizadores lineales MMSE y los ecualizadores no lineales DFE [9], [10], lo que le permite mitigar de manera eficiente los efectos del canal dispersivo, mejorando así el desempeño general de un enlace de comunicación digital.

El objetivo de este trabajo de grado es llevar a cabo un análisis comparativo del desempeño de un enlace de comunicación digital en términos de BER, al emplear la técnica de ecualización DFE-MMSE en contraste con un enlace que posee las mismas características, pero que no hace uso de dicha técnica. Los resultados obtenidos respaldan la implementación de esta técnica en enlaces de comunicación digital que operen en entornos dispersivos, contribuyendo así a una transmisión más eficiente y confiable de la información entre el transmisor y el receptor.

El presente documento se organiza de la siguiente manera: En el Capítulo 1 se presenta el marco teórico compuesto por el proceso de modulación digital, el canal de comunicación dispersivo y la ecualización de canal, enfatizando en las técnicas y modelos a desarrollar en el presente trabajo: 4-QAM (*Quadrature Amplitude Modulation*), canal dispersivo Gaussiano, y DFE-MMSE; en el Capítulo 2 se



presenta el diseño y el proceso de implementación de los dos enlaces de comunicación a comparar, incluyendo el canal dispersivo Gaussiano y el ecualizador DFE-MMSE; en el Capítulo 3 se presenta los resultados obtenidos y el análisis correspondiente de comparación en cuanto al desempeño de la probabilidad de error en función de la relación energía de bit a densidad de potencia de ruido,  $E_b/N_0$ , para diferentes escenarios de canal dispersivo Gaussiano y diferentes longitudes del ecualizador; finalmente, en el Capítulo 4 se presentan las conclusiones obtenidas del trabajo de investigación y algunas sugerencias para trabajos futuros.



# CAPÍTULO 1

## 1. ECUALIZACIÓN DFE-MMSE

Este capítulo presenta las bases teóricas de un enlace de comunicación de única portadora con ecualización DFE-MMSE. Primero, se describe el canal de comunicación dispersivo y el proceso de modulación digital, para representar el canal discreto equivalente junto con las señales que caracterizan su comportamiento. Luego, se introduce la ecualización de canal como una técnica para mejorar el desempeño del enlace en términos de la BER, presentando el caso específico de la ecualización no lineal DFE (*Decision Feedback Equalization*), junto con sus variantes ZF (*Zero-Forcing*) y MMSE (*Minimum Mean-Square Error*).

### 1.1. CANAL DISPERSIVO GAUSSIANO

Un canal dispersivo Gaussiano se puede modelar como un filtro Lineal e Invariante en el Tiempo (LTI, *Linear Time-Invariant*) que introduce distorsión y Ruido Gaussiano Blanco Aditivo (AWGN, *Additive White Gaussian Noise*). La distorsión se debe a que la respuesta en frecuencia de dicho canal no es necesariamente constante, alterando la señal transmitida [2]. En la Figura 1.1 se presenta el modelo de canal dispersivo Gaussiano.

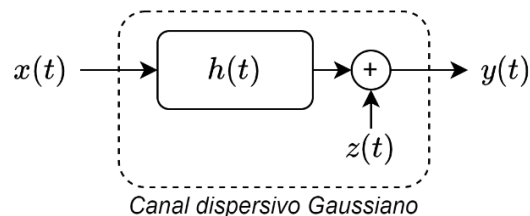


Figura 1.1. Modelo de canal dispersivo Gaussiano. Por los autores.

La señal de salida de canal dispersivo está dada por:

$$y(t) = x(t) * h(t) + z(t), \quad (1.1)$$

donde,  $x(t)$  es la señal transmitida;  $h(t)$  es la respuesta al impulso del canal, la cual contiene las características dispersivas; y  $z(t)$  representa el ruido AWGN, con densidad espectral de potencia bilateral  $\sigma^2 = N_o/2$ .

Cuando una señal se transmite a través de un canal dispersivo ocurre un fenómeno no deseado: la Interferencia Intersimbolo (ISI). La ISI provoca que la señal de un símbolo interfiera con la señal de los símbolos adyacentes, lo que aumenta la BER.



En el canal dispersivo Gaussiano, a diferencia del canal AWGN, la Respuesta al Impulso del Canal (CIR, *Channel Impulse Response*) es diferente a la función delta de Dirac  $\delta(t)$ , esto es:

$$h(t) \neq \delta(t). \quad (1.2)$$

Un canal multitrayecto, por su parte, es un tipo especial de canal dispersivo donde la señal recibida es una superposición de múltiples réplicas de la señal transmitida, debido a fenómenos de reflexión, refracción o difracción que pueden ocurrir en un entorno inalámbrico, lo que hace que,  $h(t) \neq \delta(t)$ . En la Figura 1.2 se muestra una representación que revela que todo canal multitrayecto es dispersivo, pero no necesariamente todo canal dispersivo es multitrayecto [1], [2].

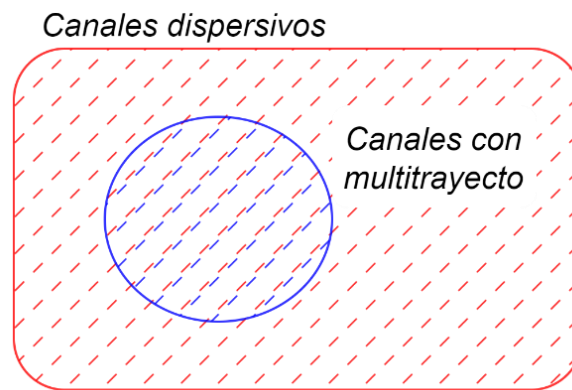


Figura 1.2. Representación de canales dispersivos. Por los autores.

En la Figura 1.3 se representa el fenómeno de multitrayecto, con un rayo principal y un rayo secundario que tiene una ganancia de amplitud ( $\alpha$ ) y un retardo ( $\tau$ ) respecto al principal.

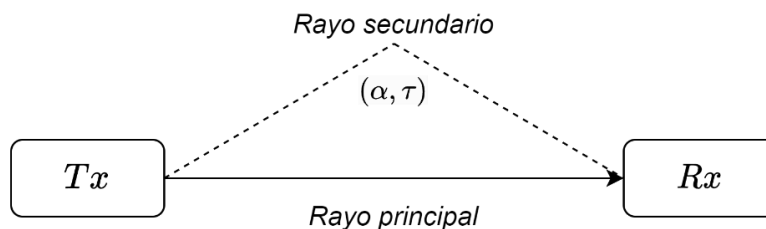


Figura 1.3. Fenómeno de multitrayecto. Por los autores.

La respuesta del canal multitrayecto de 2 rayos se puede expresar en el dominio del tiempo y la frecuencia respectivamente como:

$$h(t) = \delta(t) + \alpha \delta(t - \tau), \quad (1.3)$$

$$H(f) = 1 + \alpha e^{-j2\pi f\tau}. \quad (1.4)$$



### 1.1.1. Proceso de Modulación Digital

El diseño de un enlace de comunicación digital se caracteriza por la técnica de modulación digital utilizada, considerando varios factores en su elección, tales como las características del canal, la tolerancia al ruido y la eficiencia espectral requerida [11], [12].

En el transmisor, el proceso de modulación digital permite la transformación de la información binaria en una señal analógica para su transmisión a través de un canal de comunicación; mientras que, en el receptor, se realiza la demodulación digital, proceso inverso que permite reconstruir la información digital original, y junto con la aplicación de técnicas de procesamiento de señales, eliminar o minimizar los efectos de la distorsión y el ruido introducidos, para mejorar la calidad y confiabilidad de la transmisión [13], [14].

- Modulador digital

En la Figura 1.4 se presenta el transmisor de un enlace de comunicación digital que emplea modulación por amplitud en cuadratura de  $M$  estados (M-QAM).

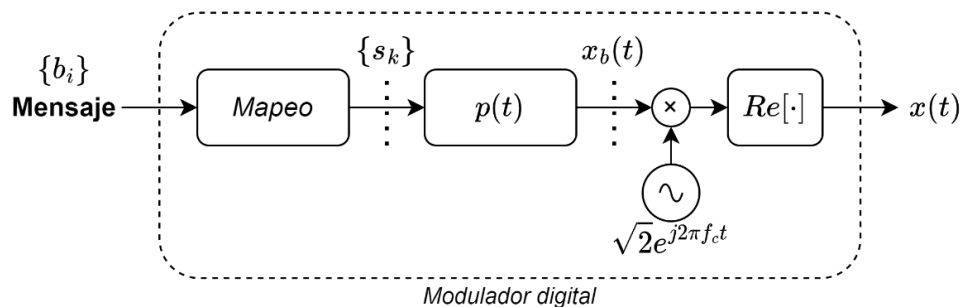


Figura 1.4. Transmisor de un enlace de comunicación digital con modulación M-QAM. Por los autores.

La primera función del modulador digital es mapear la secuencia de bits,  $\{b_i, i \in \mathbb{Z}\}$ , en una secuencia de símbolos,  $\{s_k, k \in \mathbb{Z}\}$ , pertenecientes a un alfabeto finito discreto  $\mathcal{A}$ . En la modulación M-QAM, los símbolos del alfabeto  $\mathcal{A}$  corresponden a  $M$  puntos específicos en el plano complejo, representando dos componentes ortogonales en una combinación de amplitud y fase. Cada símbolo representa  $\log_2 M$  bits de información, con un periodo de símbolo  $T = T_b \log_2 M$ , donde  $T_b$  es el periodo de bit. En la Figura 1.5 se presenta un proceso de mapeo del esquema de modulación digital 4-QAM.

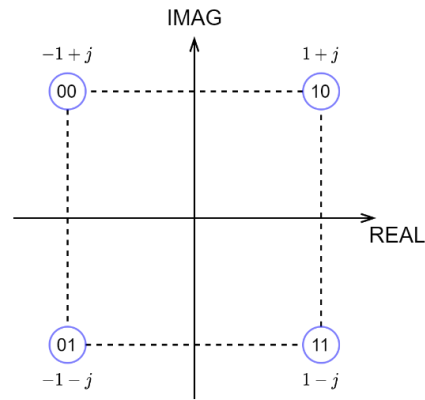


Figura 1.5. Mapeo del esquema de modulación digital 4-QAM. Por los autores.

Tras generar la secuencia de símbolos discretos, la segunda función del modulador digital es transformar dicha secuencia en una forma de onda continua y con un ancho de banda limitado.

El filtro Raíz Cuadrada de Coseno Alzado (SRRC, *Square Root Raised Cosine*) (RC, *Raised Cosine*) es usualmente utilizado en enlaces de comunicación digital para dar forma a la señal transmitida. Por lo general, al implementar dos filtros SRRC, uno en transmisión,  $p(t)$ , y otro en recepción,  $p(-t)$ , se satisface el criterio de Nyquist para una transmisión libre de ISI (siempre y cuando el canal no sea dispersivo). La respuesta combinada de los filtros SRRC en transmisión y recepción produce un pulso,  $g(t)$ , denominado “pulso de coseno alzado”, el cual se muestra en la Figura 1.6 en el dominio del tiempo [15].

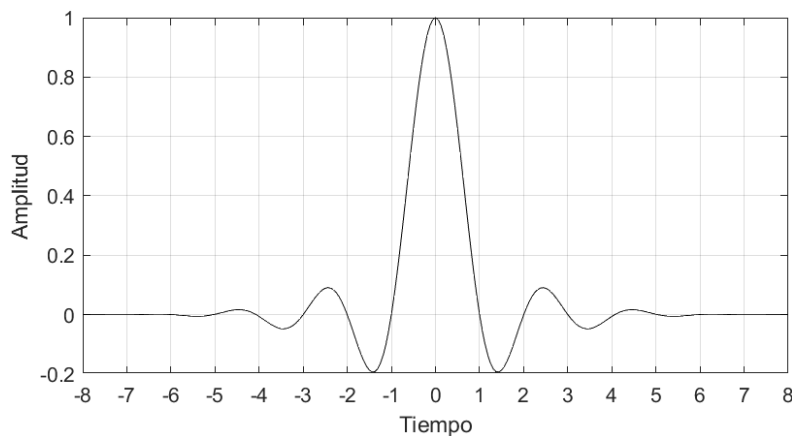


Figura 1.6. Respuesta de un pulso de coseno alzado en el dominio del tiempo. Por los autores.

Considerando como función base el pulso conformador SRRC con energía normalizada en uno, se tiene que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p^2(t) dt = 1. \quad (1.5)$$





La señal transmitida en banda base toma la forma:

$$x_b(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k p(t - kT). \quad (1.6)$$

Después de dar forma a la señal continua  $x_b(t)$ , para completar el proceso de modulación, esta señal se modula con una señal portadora analógica, logrando conformar la señal a transmitir por el canal de comunicación, con una traslación en frecuencia.

Para el caso de la modulación pasa banda, se desplaza el espectro de la señal a una frecuencia determinada  $f_c$ . La señal transmitida se expresa como:

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{Re}[\sqrt{2}e^{j2\pi f_c t} x_b(t)] \\ &= \sqrt{2} \text{Re} \left[ e^{j2\pi f_c t} \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k p(t - kT) \right]. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Reemplazando (1.7) en (1.1), la señal en los terminales del receptor está dada por:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) + z(t) \\ &= \left\{ \sqrt{2} \text{Re} \left[ e^{j2\pi f_c t} \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k p(t - kT) \right] \right\} * h(t) + z(t). \end{aligned} \quad (1.8)$$

- Demodulador digital

En la Figura 1.7 se presenta el receptor de un enlace de comunicación digital con demodulación M-QAM.

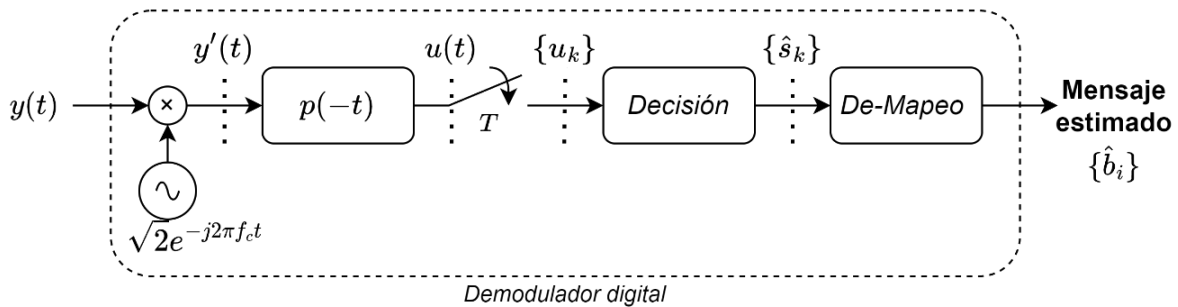


Figura 1.7. Receptor de un enlace de comunicación digital con demodulación M-QAM. Por los autores.



El proceso de demodulación inicia a partir de la señal recibida,  $y(t)$ , proveniente del canal de comunicación, y dado que se realizó una translación en frecuencia en transmisión, se debe trasladar el espectro a banda base, con lo que se genera la señal  $y'(t)$  dada por:

$$\begin{aligned} y'(t) &= y(t) \sqrt{2} e^{-j2\pi f_c t} \\ &= \left\{ \left( \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ e^{j2\pi f_c t} \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k p(t - kT) \right] * h(t) + z(t) \right) \sqrt{2} e^{-j2\pi f_c t} \right\}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Posteriormente, un filtro acoplado  $p(-t)$ , igual al filtro conformador  $p(t)$ , genera la señal  $u(t)$ , dada por:

$$\begin{aligned} u(t) &= y'(t) * p(-t) \\ &= \left\{ \left( \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ e^{j2\pi f_c t} \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k p(t - kT) \right] * h(t) + z(t) \right) \sqrt{2} e^{-j2\pi f_c t} \right\} * p(-t) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k p(t - kT) * \tilde{h}(t) * p(-t) + \left[ z(t) \sqrt{2} e^{-j2\pi f_c t} \right] * p(-t), \end{aligned} \quad (1.10)$$

donde la función  $\tilde{h}(t)$  es la respuesta al impulso equivalente en banda base del canal dispersivo pasa banda,  $h(t)$ . La respuesta en frecuencia del canal  $\tilde{h}(t)$  se define como:

$$\tilde{H}(f) = H(f + f_c), \quad (1.11)$$

luego:

$$\tilde{h}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f + f_c)\} = e^{-j2\pi f_c t} \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = e^{-j2\pi f_c t} h(t). \quad (1.12)$$

Al muestrear la señal  $u(t)$  cada  $T$  segundos, se obtiene la secuencia de las observaciones en los instantes  $k$ -ésimos<sup>1</sup>,  $\{u_k, k \in \mathbb{Z}\}$ . La observación en el instante  $k$ -ésimo esta dada por:

$$u_k = u(kT). \quad (1.13)$$

A partir de la secuencia de observaciones, se estiman los símbolos transmitidos, por lo que se realiza el proceso de decisión para obtener la secuencia de símbolos

---

<sup>1</sup> Se considera el mismo instante  $k$ -ésimo para representar a un símbolo transmitido y su observación en recepción, sin tener en cuenta el retardo introducido por el filtro  $p(t)$ , y del mismo modo para las siguientes representaciones y retardos respectivos.



estimados,  $\{\hat{s}_k, k \in \mathbb{Z}\}$ . En la etapa de decisión, se utiliza un criterio para asignar el símbolo demodulado más probable, en el caso de la modulación M-QAM comúnmente se utiliza el criterio de decisión de Distancia Euclidiana Mínima (MD, *Minimum Euclidean Distance*), donde el símbolo de referencia que tenga la distancia mínima euclidiana con la observación se selecciona como el símbolo estimado.

Finalmente, la demodulación termina al convertir los símbolos estimados en una secuencia de bits  $\{\hat{b}_i\}$  en el proceso de demapeo, proceso inverso del mapeo, usando como referencia el diagrama de mapeo utilizado.

### 1.1.2. Canal Discreto Equivalente

El efecto de un canal dispersivo Gaussiano se puede representar en un bloque discreto equivalente, permitiendo un nivel de abstracción apropiado para describir su comportamiento y el del enlace global. Con este objetivo, se define la respuesta global al impulso del enlace de comunicación como:

$$r(t) = p(t) * \tilde{h}(t) * p(-t) = g(t) * \tilde{h}(t), \quad (1.14)$$

donde  $g(t) = p(t) * p(-t)$  representa el pulso de coseno alzado, el cual cumple con la condición de Nyquist para una respuesta libre de ISI [16] y se define como:

$$g(t) = \frac{\text{sinc}(t/T) \cos(\pi \rho t/T)}{1 - (2\rho t/T)^2}, \quad (1.15)$$

donde  $\rho$  es el factor de roll-off o ancho de banda en exceso, el cual satisface  $0 \leq \rho \leq 1$ .

Remplazando (1.3) y (1.12) en (1.14), la respuesta global al impulso del enlace de comunicación se representa como:

$$\begin{aligned} r(t) &= g(t) * \tilde{h}(t) = g(t) * e^{-j2\pi f_c t} h(t) \\ &= g(t) * \{e^{-j2\pi f_c t} [\delta(t) + \alpha \delta(t - \tau)]\} \\ &= g(t) * \{e^{-j2\pi f_c(0)} \delta(t) + \alpha e^{-j2\pi f_c T} \delta(t - \tau)\} \\ &= g(t) + \alpha e^{-j2\pi f_c \tau} g(t - \tau), \end{aligned} \quad (1.16)$$

donde el coeficiente del canal discreto equivalente en el instante k-ésimo es de la forma:



$$\begin{aligned}
 r_k &= r(kT) \\
 &= g(kT) + \alpha e^{-j2\pi f_c \tau} g(kT - \tau) \\
 &= \delta[k] + \alpha e^{-j2\pi f_c \tau} g(kT - \tau),
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

donde  $\delta[k]$  es la función delta de Kronecker.

En la Figura 1.8 se representa el canal discreto equivalente, con  $r_k$  como el bloque que resume el efecto del canal dispersivo Gaussiano y de los filtros de transmisión y recepción, el cual no satisface el criterio de Nyquist para una respuesta libre de ISI.

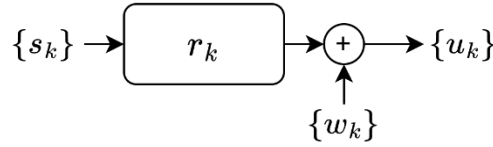


Figura 1.8. Canal discreto equivalente. Por los autores.

$u(t)$  en (1.10) se reescribe como:

$$u(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s_n r(t - nT) + w(t), \tag{1.18}$$

donde  $w(t)$  es el ruido filtrado, dado por:

$$w(t) = [z(t) \sqrt{2} e^{-j2\pi f_c t}] * p(-t). \tag{1.19}$$

Tras muestrear la señal  $u(t)$  cada  $T$  segundos, la observación en el instante  $k$ -ésimo es de la forma:

$$\begin{aligned}
 u_k &= u(kT) \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} s_n r(kT - nT) + w(kT) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s_n r((k - n)T) + w(kT) \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} s_n r_{k-n} + w_k = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r_n s_{k-n} + w_k \\
 &= r_k * s_k + w_k,
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

donde,  $w_k = w(kT) \sim \mathcal{CN}(0, \sigma^2)$ .

De esta manera, se describe a la observación en el instante  $k$ -ésimo como la suma del símbolo deseado, la ISI introducida en símbolos adyacentes y el ruido presente en la observación.



$$\underbrace{u_k}_{\text{Observación en el instante } k} = \dots + \underbrace{r_0 s_k}_{\text{Símbolo deseado}} + \underbrace{r_1 s_{k-1} + r_2 s_{k-2} + \dots + r_N s_{k-N}}_{\text{ISI}} + \underbrace{w_k}_{\text{Ruido presente en la observación}} \quad (1.21)$$

En la Figura 1.9 se presenta el enlace equivalente en tiempo discreto.

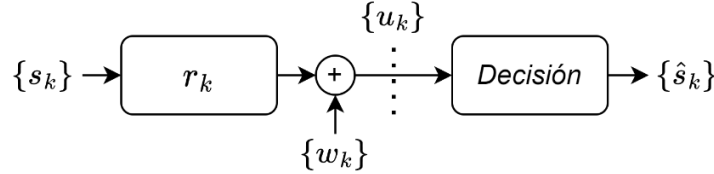


Figura 1.9. Enlace equivalente en tiempo discreto. Por los autores.

## 1.2. ECUALIZACIÓN DE CANAL

Un método para solucionar el problema de la transmisión por un canal dispersivo consiste en diseñar un receptor capaz de compensar o reducir la ISI en las observaciones, lo cual se conoce como equalización [17].

En la Figura 1.10 se presenta el enlace equivalente en tiempo discreto con equalización.

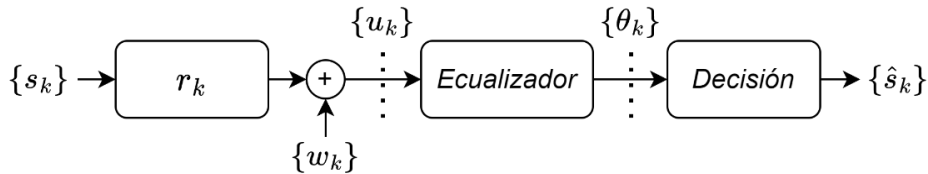


Figura 1.10. Enlace equivalente en tiempo discreto con equalización. Por los autores.

La equalización lineal opera sobre las muestras a la salida del muestreador  $\{u_k\}$ , de esta manera, a través de un filtro de Respuesta Finita al Impulso (FIR, *Finite Impulse Response*) se generan las variables de decisión ( $\{\theta_k, k \in \mathbb{Z}\}$ ) dadas por:

$$\theta_k = (s_k * r_k + w_k) * \gamma_k. \quad (1.21)$$

Existen diferentes técnicas o algoritmos de equalización lineal que determinan la forma de obtener los coeficientes del filtro equalizador  $\gamma_k$ . Dos casos especiales son: el equalizador lineal de Forzado a Cero (ZF-LE) y el equalizador lineal de Mínimo Error Cuadrático Medio (MMSE-LE). Los coeficientes buscan influenciar de tal forma que la diferencia entre el símbolo deseado y la variable de decisión,  $\varepsilon_k = \theta_k - s_k$ , sea mínima, esto es, el error de decisión tienda a cero,  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ . Generalmente, es imposible eliminar completamente la ISI a la salida del equalizador, siempre hay alguna interferencia residual cuando se utilizan los coeficientes óptimos de longitud finita. Además, la estructura del equalizador conlleva una complejidad



computacional más alta si se utilizan más coeficientes que compensen la distorsión del canal [1], [18].

En escenarios donde la ISI es severa, se utilizan los ecualizadores no lineales para mejorar el desempeño del enlace de comunicación. Uno de ellos es el Ecualizador con Realimentación de Decisión (DFE), en el cual las decisiones se toman con la influencia de decisiones previas [19].

### 1.2.1. Ecualización Lineal MMSE

En la ecualización lineal, para obtener la variable de decisión  $\theta_k$ , se forma una combinación lineal de los valores recibidos de las observaciones  $\{u_k\}$ . Así, se utilizan las copias escaladas apropiadamente de símbolos presentes en los  $u_k$  cercanos para cancelar o reducir la ISI y mejorar la Relación de Señal a Interferencia más Ruido (SINR, *Signal-to-Interference-plus-Noise Ratio*) de salida. La SINR es una medida comúnmente utilizada que indica qué tan bien funciona el receptor, y se define como la relación entre la potencia de la señal y la suma de las potencias de interferencia intersímbolo y ruido<sup>2</sup>, esto es:

$$\text{SINR} = \frac{P_S}{P_I + P_N}. \quad (1.22)$$

Para entender el funcionamiento del ecualizador lineal MMSE [20], se describe el siguiente ejemplo numérico:

- Ejemplo MMSE-LE

Supóngase que la observación en cualquier instante k-ésimo está dada por:

$$u_k = s_k + 0.4 s_{k-1} - 0.2 s_{k-2} + w_k.$$

Entonces, surge la pregunta: ¿Cómo construir la variable de decisión  $\theta_k$  a partir de una combinación lineal de las observaciones  $u_k$  de tal manera que se minimice el error cuadrático medio entre  $\theta_k$  y  $s_k$ ?

Para responder este interrogante se hace el siguiente análisis:

Las observaciones en los diferentes instantes alrededor del instante k-ésimo están dadas por:

---

<sup>2</sup> La suma de interferencia intersímbolo y ruido también se conocen como el *impairment* de la señal.



$$\begin{aligned}
 & \vdots \\
 u_{k-2} &= s_{k-2} + 0.4 s_{k-3} - 0.2 s_{k-4} + w_{k-2} \\
 u_{k-1} &= s_{k-1} + 0.4 s_{k-2} - 0.2 s_{k-3} + w_{k-1} \\
 u_k &= s_k + 0.4 s_{k-1} - 0.2 s_{k-2} + w_k \\
 u_{k+1} &= s_{k+1} + 0.4 s_k - 0.2 s_{k-1} + w_{k+1} \\
 u_{k+2} &= s_{k+2} + 0.4 s_{k+1} - 0.2 s_k + w_{k+2} \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

La opción elegida para la variable de decisión es:

$$\theta_k = u_k + a u_{k-1} + b u_{k-2},$$

donde  $a$  y  $b$  son coeficientes por determinar.

La opción elegida utiliza las copias de las observaciones  $u_k, u_{k-1}, u_{k-2}$  que conforman la ventana deslizante (*sliding window*) de valores recibidos. En la Figura 1.11 se muestra la estructura de este ecualizador.

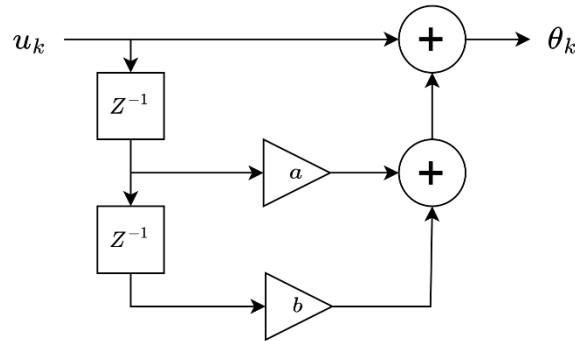


Figura 1.11. Diagrama de bloques en el ejemplo MMSE-LE. Por los autores.

Remplazando,

$$\begin{aligned}
 \theta_k &= s_k + 0.4 s_{k-1} - 0.2 s_{k-2} + w_k + a (s_{k-1} + 0.4 s_{k-2} - 0.2 s_{k-3} + w_{k-1}) \\
 &\quad + b (s_{k-2} + 0.4 s_{k-3} - 0.2 s_{k-4} + w_{k-2}) \\
 &= s_k + (0.4 + a) s_{k-1} + (-0.2 + 0.4a + b) s_{k-2} + (-0.2a + 0.4b) s_{k-3} \\
 &\quad + (-0.2b) s_{k-4} + (w_k + a w_{k-1} + b w_{k-2}).
 \end{aligned}$$

Es importante resaltar que se podrían usar diferentes combinaciones lineales entre las observaciones anteriores o posteriores al instante  $k$ -ésimo y obtener sus respectivos coeficientes de ganancia de equalización. Otra opción sería, por ejemplo:  $\theta_k = u_k + a u_{k+1}$ , donde existe un retardo de procesamiento para que  $u_{k+1}$  sea recibido. La idea es utilizar todas las copias de los símbolos anteriores y posteriores que introducen interferencia en la decisión del símbolo deseado.

Como  $\theta_k$  es una estimación de  $s_k$ , se considera el error en la estimación como:



$$\begin{aligned}\varepsilon_k &= \theta_k - s_k \\ &= (0.4 + a) s_{k-1} + (-0.2 + 0.4a + b) s_{k-2} + (-0.2a + 0.4b) s_{k-3} + (-0.2b) s_{k-4} \\ &\quad + (w_k + a w_{k-1} + b w_{k-2}).\end{aligned}$$

Para hacer que  $\varepsilon_k$  sea lo más pequeño posible, se deben considerar todas las copias de símbolos adyacentes que introducen ISI. Esta técnica propone minimizar el promedio (media) de la potencia (cuadrado) del error ( $\varepsilon_k$ ), lo que se conoce como el Mínimo Error Cuadrático Medio (MMSE).

El error cuadrático medio es la función a minimizar, y está dada por:

$$\begin{aligned}\text{MSE} &= \mathbb{E}[(\varepsilon_k)^2] \\ &= (0.4 + a)^2 E_s + (-0.2 + 0.4a + b)^2 E_s + (-0.2a + 0.4b)^2 E_s + (-0.2b)^2 E_s \\ &\quad + (1^2 + a^2 + b^2) \sigma^2,\end{aligned}$$

donde  $\mathbb{E}[\cdot]$  es el operador de valor esperado y  $\mathbb{E}[s_k^2] = E_s$  y  $\mathbb{E}[w_k^2] = \sigma^2$ .

Este término representa la potencia del *impairment* (suma de interferencia y ruido) de la señal a la salida del filtro equalizador, por lo que la solución MMSE-LE da una estimación parcial o sesgada del símbolo deseado. Al minimizar esta función, se maximiza la SINR, expectativa que se tiene con la implementación del equalizador.

El punto donde el gradiente de la función MSE es igual a cero identifica el mínimo de la función, por lo tanto, el gradiente respecto a  $a$ ,  $b$  y  $c$ , y su igualación respecto a cero, es:

$$\begin{aligned}\nabla(\text{MSE}) &= 0 \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial \text{MSE}}{\partial a} \\ \frac{\partial \text{MSE}}{\partial b} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

Así, se obtiene el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\frac{\partial \text{MSE}}{\partial a} = 0$$

$$2(0.4 + a)E_s + 2(-0.2 + 0.4a + b)(0.4)E_s + 2(-0.2a + 0.4b)(-0.2)E_s + 2a\sigma^2 = 0$$

$$(1.2 E_s + \sigma^2)a + (0.32 E_s)b = -0.32 E_s$$

y





$$\frac{\partial \text{MSE}}{\partial b} = 0$$

$$2(-0.2 + 0.4a + b)E_s + 2(-0.2a + 0.4b)(0.4)E_s + 2(-0.2b)(-0.2)E_s + 2b\sigma^2 = 0$$

$$(0.32 E_s)a + (1.2 E_s + \sigma^2)b = 0.2 E_s.$$

Luego, el sistema lineal de ecuaciones en función de la  $\text{SNR} = E_s/\sigma^2$  es:

$$\begin{cases} (1.2 \text{SNR} + 1)a + (0.32 \text{SNR})b = -0.32 \text{SNR} \\ (0.32 \text{SNR})a + (1.2 \text{SNR} + 1)b = 0.2 \text{SNR}. \end{cases}$$

Con una  $\text{SNR} = 10$  veces, la solución del sistema lineal de ecuaciones es:

$$a = -0.3023 \quad , \quad b = 0.2283.$$

Como medida de comparación, se utiliza la SINR (con una  $\text{SNR} = 10$  veces).

La SINR en la observación es:

$$\text{SINR}_u = \frac{E_s}{(0.4^2 + 0.2^2) E_s + \sigma^2} = \frac{\text{SNR}}{0.2 \text{SNR} + 1} = 3.33 \text{ veces.}$$

Por su parte, la SINR en la variable de decisión es:

$$\text{SINR}_\theta$$

$$= \frac{1^2 \text{SNR}}{[(0.4 + a)^2 + (-0.2 + 0.4a + b)^2 + (-0.2a + 0.4b)^2 + (-0.2b)^2] \text{SNR} + (1^2 + a^2 + b^2)}$$
$$= 6.34 \text{ veces.}$$

Esto significa que el ecualizador MMSE-LE mejora la SINR, lo que se traduce en una reducción hipotética de la BER.

En la Figura 1.12 se presenta la SINR obtenida antes y después del ecualizador, para varios valores de SNR.

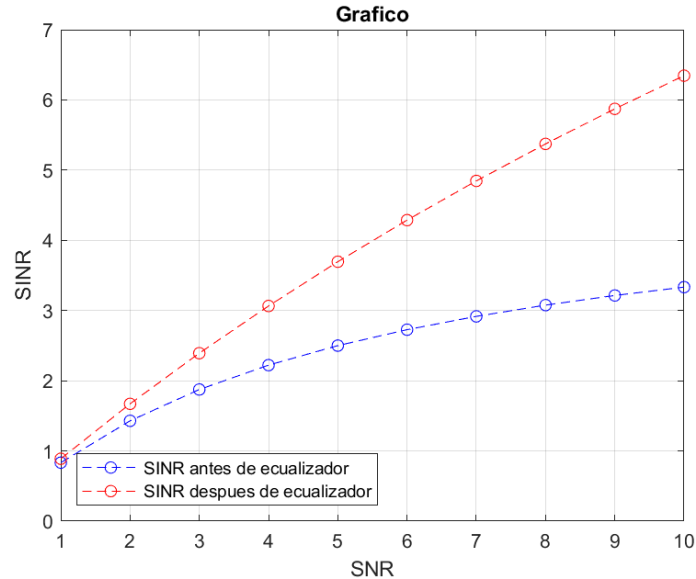


Figura 1.12. SINR antes y después del equalizador en el ejemplo MMSE-LE. Por los autores.

### 1.2.2. Equalización No Lineal DFE

En la equalización no lineal DFE, se utilizan decisiones de símbolos anteriores  $\hat{s}_k$  para reducir la ISI en la decisión de los siguientes símbolos. La realimentación puede acarrear un error en las variables de decisión subsiguientes si el símbolo estimado difiere del verdadero, lo que podría aumentar la BER. Este fenómeno se conoce como propagación de errores [21].

En la Figura 1.13 se presenta el diagrama de bloques de un equalizador no lineal DFE.

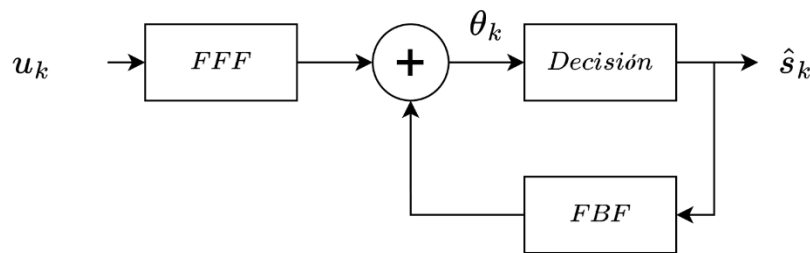


Figura 1.13. Diagrama de bloques de un DFE. Adaptada de: [20].

El diseño del DFE utiliza una combinación de un Filtro Alimentado hacia Adelante (FFF, *FeedForward Filter*) y un Filtro de Retroalimentación (FBF, *FeedBack Filter*). El FFF procesa inicialmente la señal recibida para tratar de compensar el efecto del canal mediante una respuesta al impulso inversa; mientras que el FBF reduce la interferencia causada por símbolos anteriores al aprovechar la información de los símbolos decididos anteriormente [9], [22].



Para entender el funcionamiento del DFE, se describen dos ejemplos utilizando el criterio ZF y el criterio MMSE [20].

### 1.2.2.1. ZF-DFE

En la Figura 1.14 se presenta el diagrama de bloques de un ecualizador no lineal ZF-DFE.

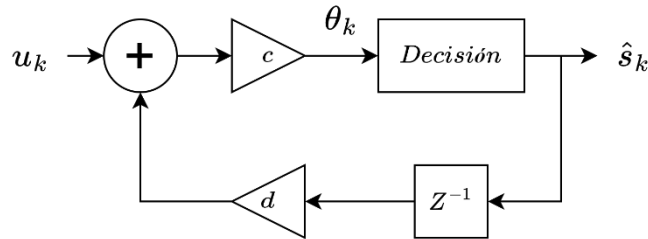


Figura 1.14. Diagrama de bloques de un ZF-DFE. Por los autores.

- Ejemplo ZF-DFE

Al igual que en el ejemplo anterior, se supone la observación en cualquier instante k-ésimo como:

$$u_k = s_k + 0.4 s_{k-1} - 0.2 s_{k-2} + w_k.$$

Entonces surge la pregunta: ¿Cómo construir la variable de decisión  $\theta_k$  a partir de decisiones anteriores para eliminar por completo la ISI?

Para responder este interrogante se hace el siguiente análisis:

Las observaciones en los diferentes instantes alrededor del instante k-ésimo están dadas por:

$$\begin{aligned} u_0 &= s_0 + w_0 \\ u_1 &= s_1 + 0.4 s_0 + w_1 \\ u_2 &= s_2 + 0.4 s_1 - 0.2 s_0 + w_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Se forman las variables de decisión como:

$$\begin{aligned} \theta_0 &= u_0 \\ &= s_0 + w_0, \\ \rightarrow \hat{s}_0 &= \text{decisión } \{\theta_0\}, \end{aligned}$$

donde  $\text{decisión } \{\cdot\}$  es un operador que elige el elemento de la constelación más cercano al argumento.



$$\begin{aligned}\theta_1 &= u_1 - 0.4 \hat{s}_0 \\ &= s_1 + 0.4 s_0 + w_1 - 0.4 \hat{s}_0 \\ &= s_1 + 0.4(s_0 - \hat{s}_0) + w_1,\end{aligned}$$

$$\rightarrow \hat{s}_1 = \text{decisión } \{\theta_1\},$$

$$\begin{aligned}\theta_2 &= u_2 - 0.4 \hat{s}_1 + 0.2 \hat{s}_0 \\ &= s_2 + 0.4 s_1 - 0.2 s_0 + w_2 - 0.4 \hat{s}_1 + 0.2 \hat{s}_0 \\ &= s_2 + 0.4(s_1 - \hat{s}_1) - 0.2(s_0 - \hat{s}_0) + w_2,\end{aligned}$$

$$\rightarrow \hat{s}_2 = \text{decisión } \{\theta_2\}$$

⋮

Generalizando:

$$\begin{aligned}\theta_k &= u_k - 0.4 \hat{s}_{k-1} + 0.2 \hat{s}_{k-2} \\ &= s_k + 0.4(s_{k-1} - \hat{s}_{k-1}) - 0.2(s_{k-2} - \hat{s}_{k-2}) + w_k.\end{aligned}$$

La variable de decisión  $\theta_k$ , como se muestra en la Figura 1.15, se compone a partir de la realimentación de copias de símbolos decididos anteriormente.

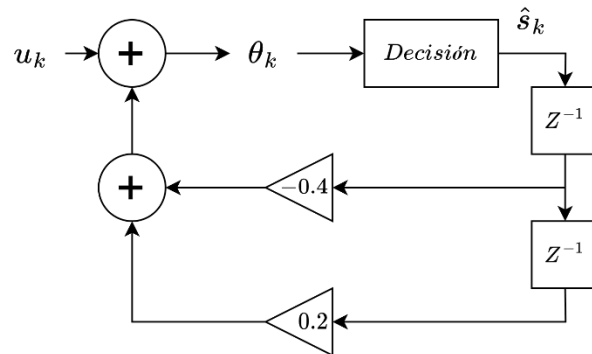


Figura 1.15. Diagrama de bloques en el ejemplo ZF-DFE. Por los autores.

Esta solución ZF-DFE ya no realiza el ruido a diferencia de los ecualizadores lineales, sin embargo, puede acarrear una propagación de errores en los símbolos decididos anteriormente.

Se hace la comparación de la SINR (con una SNR = 10 veces).

La SINR en la observación es igual que en el ejemplo anterior:

$$\text{SINR}_u = \frac{E_s}{(0.4^2 + 0.2^2) E_s + \sigma^2} = \frac{\text{SNR}}{0.2 \text{SNR} + 1} = 3.33 \text{ veces.}$$



Por su parte, la SINR en la variable de decisión para este ejemplo es:

$$\text{SINR}_\theta = \begin{cases} \frac{E_s}{\sigma^2} = \text{SNR} = 10 \text{ veces, si no hay errores} \\ \frac{E_s}{2(0.4^2)E_s + \sigma^2} = \frac{\text{SNR}}{(0.32)\text{SNR} + 1} = 2.38 \text{ veces, si hay error en } \hat{s}_{k-1} \\ \frac{E_s}{2(0.2^2)E_s + \sigma^2} = \frac{\text{SNR}}{(0.08)\text{SNR} + 1} = 5.55 \text{ veces, si hay error en } \hat{s}_{k-2} \\ \frac{E_s}{2(0.4^2 + 0.2^2)E_s + \sigma^2} = \frac{\text{SNR}}{0.4 \text{SNR} + 1} = 2 \text{ veces, si hay errores en } \hat{s}_{k-1} \text{ y } \hat{s}_{k-2}. \end{cases}$$

ZF-DFE elimina completamente la ISI si no hay propagación de errores y además no realza el ruido.

### 1.2.2.2. MMSE-DFE

En la Figura 1.16 se presenta el diagrama de bloques de un equalizador no lineal MMSE-DFE.

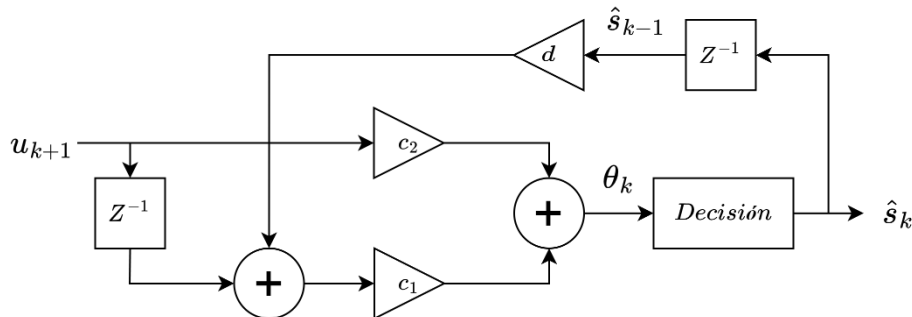


Figura 1.16. Diagrama de bloques de un MMSE-DFE. Por los autores.

- Ejemplo MMSE-DFE

Al igual que en los ejemplos anteriores, se supone la observación en cualquier instante k-ésimo como:

$$u_k = s_k + 0.4 s_{k-1} - 0.2 s_{k-2} + w_k.$$

Entonces surge la pregunta: ¿Cómo construir la variable de decisión  $\theta_k$  a partir de una combinación lineal de las observaciones  $\{u_k\}$  y de decisiones anteriores de tal manera que se minimice el error cuadrático medio entre  $\theta_k$  y  $s_k$ ?

Para responder este interrogante se hace el siguiente análisis:



Las observaciones en los diferentes instantes alrededor del instante  $k$ -ésimo están dadas por:

$$\begin{aligned} & \vdots \\ u_{k-2} &= s_{k-2} + 0.4 s_{k-3} - 0.2 s_{k-4} + w_{k-2} \\ u_{k-1} &= s_{k-1} + 0.4 s_{k-2} - 0.2 s_{k-3} + w_{k-1} \\ u_k &= s_k + 0.4 s_{k-1} - 0.2 s_{k-2} + w_k \\ u_{k+1} &= s_{k+1} + 0.4 s_k - 0.2 s_{k-1} + w_{k+1} \\ u_{k+2} &= s_{k+2} + 0.4 s_{k+1} - 0.2 s_k + w_{k+2} \\ & \vdots \end{aligned}$$

La opción elegida para la variable de decisión es:

$$\theta_k = a \phi_1 + b \phi_2 + c \phi_3,$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son coeficientes por determinar y

$$\begin{aligned} \phi_1 &= u_k + 0.2 \hat{s}_{k-2} \\ \phi_2 &= u_{k+1} + 0.2 \hat{s}_{k-1} \\ \phi_3 &= u_{k+2} + 0. \end{aligned}$$

La opción elegida para la variable de decisión  $\theta_k$  utiliza las copias de las observaciones  $u_k, u_{k+1}, u_{k+2}$ , que conforman la ventana deslizante (*sliding window*) de valores recibidos.

La variable de decisión  $\theta_k$ , como se muestra en la Figura 1.17, se compone a partir de una combinación de copias de observaciones  $u_k$  para símbolos anteriores y posteriores (recibidos), como en MMSE-LE, y también de la realimentación de copias de símbolos decididos anteriormente, como en ZF-DFE. Al igual que MMSE-LE, dependiendo de la combinación elegida, los coeficientes de ganancia de equalización se obtienen al minimizar el error cuadrático medio de la variable de decisión  $\theta_k$  respecto al símbolo deseado  $s_k$ .

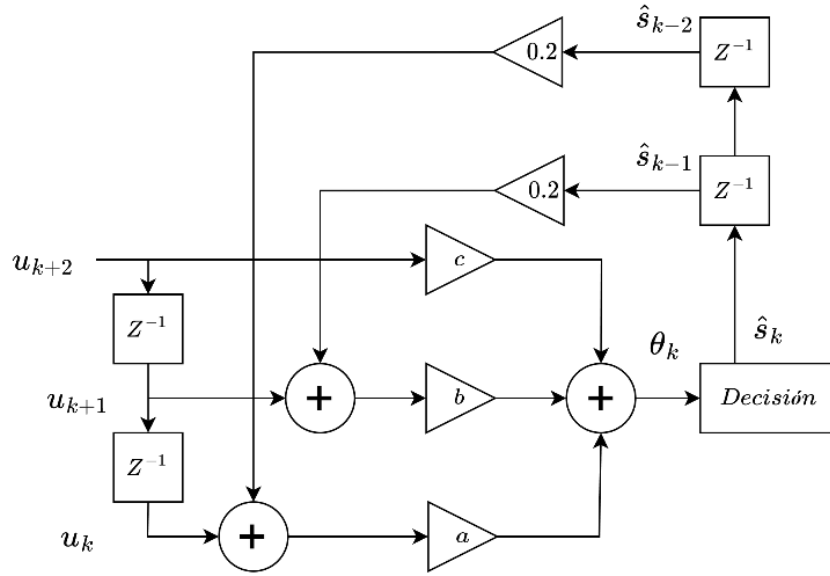


Figura 1.17. Diagrama de bloques en el ejemplo MMSE-DFE. Por los autores.

Remplazando,

$$\begin{aligned}\theta_k &= a(u_k + 0.2 \hat{s}_{k-2}) + b(u_{k+1} + 0.2 \hat{s}_{k-1}) + c(u_{k+2}) \\ &= a(s_k + 0.4 s_{k-1} - 0.2 s_{k-2} + w_k + 0.2 \hat{s}_{k-2}) \\ &\quad + b(s_{k+1} + 0.4 s_k - 0.2 s_{k-1} + w_{k+1} + 0.2 \hat{s}_{k-1}) \\ &\quad + c(s_{k+2} + 0.4 s_{k+1} - 0.2 s_k + w_{k+2}).\end{aligned}$$

Si las decisiones previas son correctas, esto es,  $s_{k-1} = \hat{s}_{k-1}$  y  $s_{k-2} = \hat{s}_{k-2}$ , se tiene que:

$$\begin{aligned}\theta_k &= a(s_k + 0.4 s_{k-1} + w_k) + b(s_{k+1} + 0.4 s_k + w_{k+1}) \\ &\quad + c(s_{k+2} + 0.4 s_{k+1} - 0.2 s_k + w_{k+2}) \\ &= (a + 0.4b - 0.2c)s_k + (0.4a)s_{k-1} + (b + 0.4c)s_{k+1} + (c)s_{k+2} \\ &\quad + a w_k + b w_{k+1} + c w_{k+2}.\end{aligned}$$

El error de estimación está dado por:

$$\begin{aligned}\varepsilon_k &= \theta_k - s_k \\ &= (a + 0.4b - 0.2c - 1)s_k + (0.4a)s_{k-1} + (b + 0.4c)s_{k+1} + (c)s_{k+2} \\ &\quad + a w_k + b w_{k+1} + c w_{k+2}.\end{aligned}$$

Así, el error cuadrático medio, que constituye la función a minimizar, es:

$$\begin{aligned}\text{MSE} &= \mathbb{E}[\varepsilon_k^2] \\ &= (a + 0.4b - 0.2c - 1)^2 E_s + (0.4a)^2 E_s + (b + 0.4c)^2 E_s + c^2 E_s \\ &\quad + a^2 \sigma^2 + b^2 \sigma^2 + c^2 \sigma^2.\end{aligned}$$



Su gradiente respecto a  $a$ ,  $b$  y  $c$ , y su igualación respecto a cero, es:

$$\nabla(\text{MSE}) = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \text{MSE}}{\partial a} \\ \frac{\partial \text{MSE}}{\partial b} \\ \frac{\partial \text{MSE}}{\partial c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Así, se obtiene el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\frac{\partial \text{MSE}}{\partial a} = 0$$

$$2(a + 0.4b - 0.2c - 1)E_s + 2(0.4a)(0.4)E_s + 2a\sigma^2 = 0$$

$$(1.16 E_s + \sigma^2)a + (0.4 E_s)b + (-0.2 E_s)c = E_s,$$

$$\frac{\partial \text{MSE}}{\partial b} = 0$$

$$2(a + 0.4b - 0.2c - 1)(0.4)E_s + 2(b + 0.4c)E_s + 2b\sigma^2 = 0$$

$$(0.4 E_s)a + (1.16 E_s + \sigma^2)b + (0.32 E_s)c = 0.4 E_s$$

y

$$\frac{\partial \text{MSE}}{\partial c} = 0$$

$$2(a + 0.4b - 0.2c - 1)(-0.2)E_s + 2(b + 0.4c)(0.4)E_s + 2(c)E_s + 2c\sigma^2 = 0$$

$$(-0.2 E_s)a + (0.32 E_s)b + (1.2 E_s + \sigma^2)c = -0.2 E_s$$

Luego, el sistema lineal de ecuaciones en función de la  $\text{SNR} = E_s/\sigma^2$  es:

$$\begin{cases} (1.16 \text{ SNR} + 1)a + (0.48 \text{ SNR})b & + (-0.2 \text{ SNR})c = \text{SNR} \\ (0.48 \text{ SNR})a + (1.2 \text{ SNR} + 1)b & + (0.32 \text{ SNR})c = 0.4 \text{ SNR} \\ (-0.2 \text{ SNR})a + (0.32 \text{ SNR})b & + (1.2 \text{ SNR} + 1)c = -0.2 \text{ SNR}. \end{cases}$$

Con una  $\text{SNR} = 10$ , la solución del sistema lineal de ecuaciones es:

$$a = 0.7543, \quad b = 0.0934, \quad c = -0.0608.$$





Se hace la comparación de la SINR (con una SNR = 10 veces).

La SINR en la observación es igual que en los ejemplos anteriores:

$$\text{SINR}_u = \frac{E_s}{(0.4^2 + 0.2^2) E_s + \sigma^2} = \frac{\text{SNR}}{0.2 \text{ SNR} + 1} = 3.33 \text{ veces.}$$

Por su parte, la SINR en la variable de decisión para este ejemplo es:

$$\begin{aligned} \text{SINR}_\theta &= \frac{1^2 \text{ SNR}}{[(a + 0.4b - 0.2c - 1)^2 + (0.4a)^2 + (b + 0.4c)^2 + c^2] \text{SNR} + (a^2 + b^2 + c^2)} \\ &= 5.09 \text{ veces.} \end{aligned}$$

El diseño utilizado para la estimación de los símbolos en este ejemplo no es la mejor, por lo que se deben utilizar las copias de observaciones y los respectivos símbolos decididos que mayor impacto tengan en la ISI.

En la Figura 1.18 se presenta la SINR obtenida antes y después del equalizador, para varios valores de SNR.

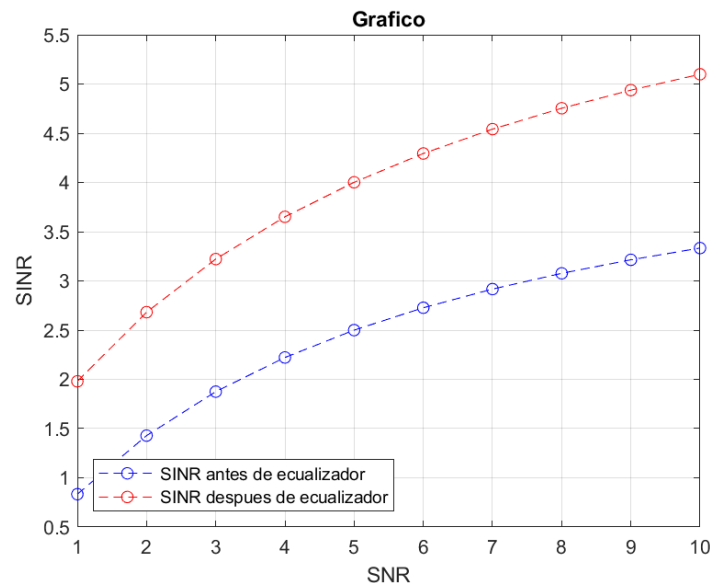


Figura 1.18. SINR antes y después del equalizador en el ejemplo MMSE-DFE. Por los autores.

MMSE-DFE es una mejor estrategia para minimizar la suma de ISI y ruido que la ZF-DFE, debido a que ofrece una solución óptima para minimizar la influencia de la ISI y el ruido. Su capacidad para controlar la propagación de errores y mantener un equilibrio entre la mitigación de interferencias y el control del ruido lo convierten en una opción más versátil que ZF-DFE. Al adoptar el MMSE-DFE y construir de manera adecuada la variable de decisión, se logra mejorar significativamente el desempeño general del enlace, asegurando una transmisión más eficiente y confiable de la información.



# CAPÍTULO 2

## 2. DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN

El enfoque metodológico utilizado como base para el desarrollo de la simulación es el Modelo Incremental, el cual se caracteriza por representar las actividades, tareas y acciones a realizarse de forma iterativa e incremental. Este enfoque permite una representación detallada del proceso de simulación y evaluación, lo que facilita la identificación y corrección de errores en el enlace [23]; las fases para el desarrollo son: requerimientos, diseño, implementación y pruebas.

Con dicha metodología, se proponen tres (3) etapas o incrementos, relacionadas de tal forma que cada una signifique un avance con respecto a la anterior, con el propósito de implementar el enlace de comunicación a nivel de simulación. En la Figura 2.1 se presenta la metodología propuesta siguiendo el Modelo Incremental.

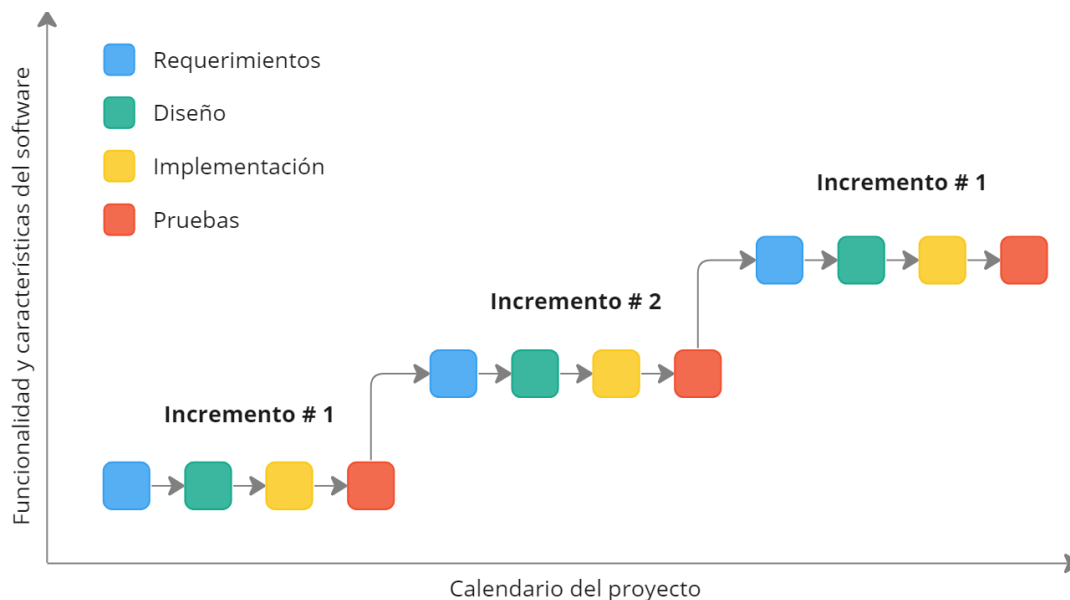


Figura 2.1. El modelo incremental. Adaptada de: [23].

En cada una de las etapas se simulará un enlace de comunicación digital diferente. Las etapas son las siguientes:

- Etapa 1. Enlace de comunicación digital sobre un canal AWGN.
- Etapa 2. Enlace de comunicación digital sobre un canal dispersivo Gaussiano, sin equalización.
- Etapa 3. Enlace de comunicación digital sobre un canal dispersivo Gaussiano, con equalización.



Así mismo, se tuvo en cuenta el Modelo de Desarrollo Concurrente, el cual agrega un proceso iterativo y concurrente, permitiendo el desarrollo en diferentes estados simultáneamente [24]. Los estados para el proceso concurrente son: inactivo, en desarrollo, cambios en espera, en revisión o terminado. Así, las actividades, tareas y acciones se desarrollan en un proceso iterativo, incremental y concurrente. En la Figura 2.2 se presenta el modelo de proceso concurrente para una actividad.

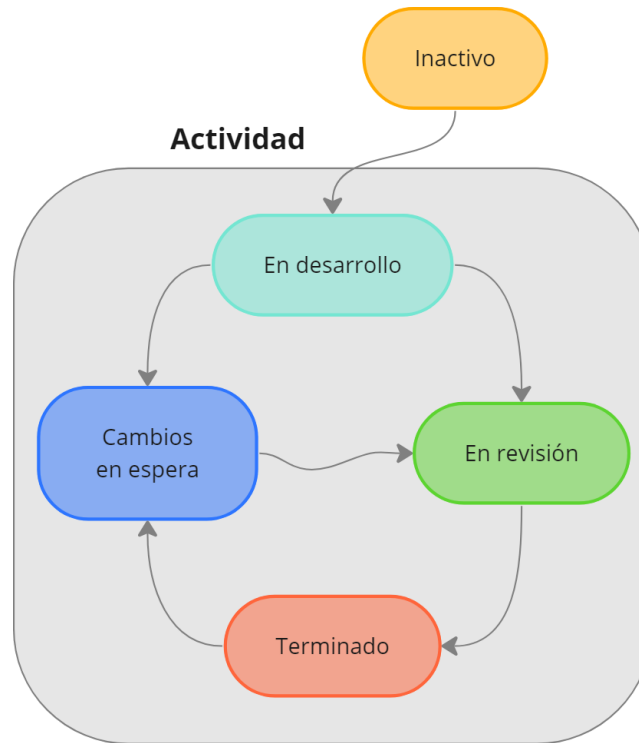


Figura 2.2. Modelo de proceso concurrente para una actividad. Adaptada de: [23].

## 2.1. ETAPA 1. ENLACE DE COMUNICACIÓN DIGITAL SOBRE UN CANAL AWGN.

### 2.1.1. Requerimientos

Los requerimientos del simulador desarrollado en esta etapa describen los procesos y las señales generadas durante la transmisión de un mensaje digital, para lograr un enlace de comunicación digital base y sus salidas esperadas:

- Implementar un enlace de comunicación digital con modulación y demodulación 4-QAM.
- Implementar un canal AWGN con variación de la potencia de ruido.
- Obtener la BER del enlace implementado como medida de desempeño y de referencia.



## 2.1.2. Diseño e Implementación

### 2.1.4.1. Variables de entrada y salida

*Variables de entrada:*

- Esquema y orden de modulación 4-QAM con codificación Gray.
- Mensaje: vector de símbolos, definidos por el alfabeto de modulación digital 4-QAM y generados aleatoriamente con una distribución uniforme.
- $E_b/N_o$ , relación que permite establecer la potencia de ruido que afecta a la señal transmitida.
- Características del filtro conformador y del filtro acoplado de raíz de coseno alzado: factor de roll-off, número de muestras por símbolo o sobremuestreo (*sps*) y duración del filtro en número de símbolos (*span*).
- Frecuencia portadora,  $f_c$ , en el proceso de modulación pasa banda y demodulación banda base.

*Variables de salida:*

- *BER*, proporción de bits que se reciben incorrectamente en relación con el número total de bits transmitidos, para evaluar el desempeño del enlace de comunicación digital.
- Representación gráfica de señales generadas en diferentes puntos en el enlace de comunicación, para visualizar y analizar su comportamiento.
- Diagrama de la constelación en recepción, para visualizar y analizar la modulación de la señal transmitida, mediante los puntos que representan los símbolos transmitidos en el esquema de modulación 4-QAM.
- Curva de desempeño *BER* vs  $E_b/N_o$ , muestra la relación entre la tasa de error de bits y la relación energía de bit a densidad de potencia de ruido en el enlace de comunicación digital, para evaluar y comparar su desempeño con relación a los otros enlaces de comunicación digital propuestos.

### 2.1.4.2. Descripción de bloques

En la Figura 2.3 se presenta el diagrama del enlace de comunicación digital sobre un canal AWGN que se implementó en la herramienta Matlab, donde se identifican los bloques con sus entradas y salidas correspondientes, que determinan el comportamiento del enlace [25].

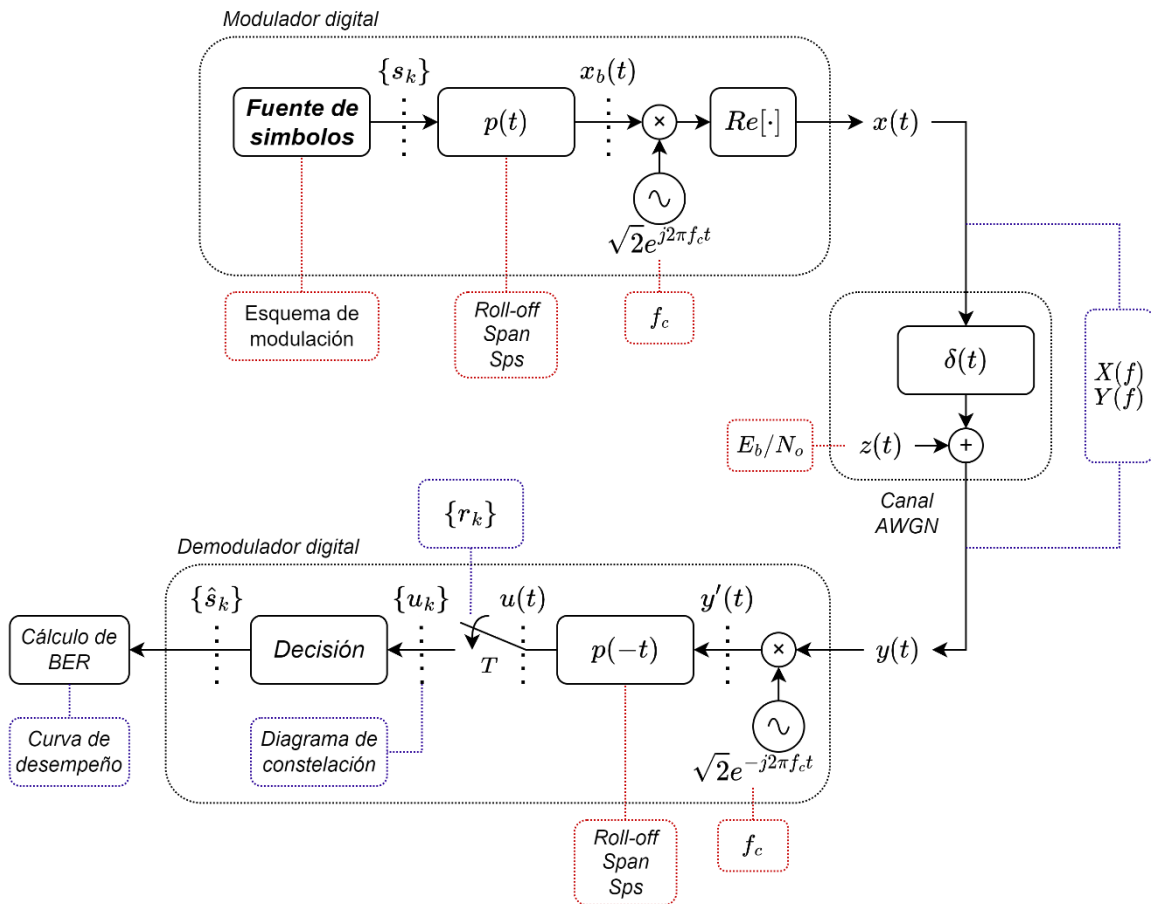


Figura 2.3. Enlace de comunicación digital sobre canal AWGN. Por los autores.

**Fuente de símbolos:** genera una secuencia de símbolos aleatoriamente con una distribución uniforme, definidos por el alfabeto de modulación digital 4-QAM. La salida es un vector con la secuencia de símbolos en tipo de dato complejo  $\{s_k\}$ , que representa el mensaje a transmitir y se modela en Matlab a través de la función randsrc [26]. En la Figura 2.4 se muestra el diagrama de constelación de 4-QAM.

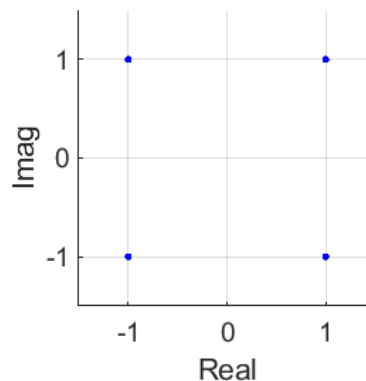


Figura 2.4. Diagrama de constelación de 4-QAM. Por los autores.



**Filtro conformador  $p(t)$ :** da forma a la secuencia de símbolos en función a la respuesta en raíz cuadrada de coseno alzado del filtro. El filtro  $p(t)$  modifica la señal de entrada para limitar el ancho de banda y mitigar la interferencia entre los símbolos adyacentes, y se modela en Matlab a través de la función `rcosdesign`, especificando los parámetros: factor de roll-off=0.25; número de muestras por símbolo o sobremuestreo  $sps = 16$ ; y duración del filtro en número de símbolos  $span = 8$ . La longitud del filtro está dada por  $(sps \cdot span) + 1 = 129$  muestras. La señal modificada por el filtro, se modela en Matlab a través de la función `filter` y se representa en un vector complejo  $x_b(t)$ . En la Figura 2.5 se muestra la respuesta al impulso de los filtros de transmisión y recepción.

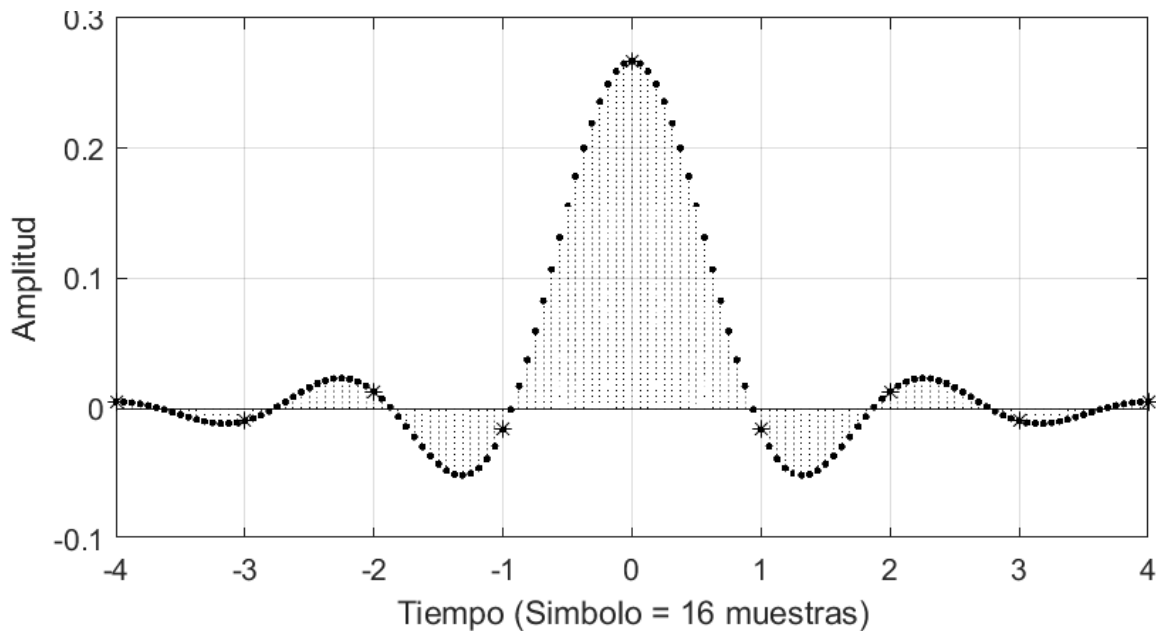


Figura 2.5. Respuesta al impulso de los filtros de transmisión y recepción (raíz de coseno alzado).  
Por los autores.

**Modulador pasa banda:** traslada el espectro de  $x_b(t)$  hasta la frecuencia deseada ( $f_c$ ). La señal modulada está compuesta por dos partes: la parte en fase ( $I$ ) y la parte en cuadratura ( $Q$ ), y se representa matemáticamente como  $x(t) = I(t) \cos(2\pi f_c t) - Q(t) \sin(2\pi f_c t)$ . La señal transmitida también se puede representar matemáticamente en forma exponencial como  $x(t) = \text{Re}[x_b(t) \sqrt{2} e^{j2\pi f_c t}]$ .

**Canal AWGN:** adiciona ruido AWGN ( $z(t)$ ) a la señal transmitida  $x(t)$ . Este modelo de canal establece que el ruido es una señal aleatoria con una distribución de probabilidad normal (Gaussiana) de media cero y varianza  $\sigma^2$ . La señal de ruido se genera aleatoriamente con distribución normal en un vector del tamaño de  $x(t)$ , modelado en Matlab a través de la función `randn`, escalonado por la desviación estándar  $\sigma$  en función de  $E_b/N_0$ .



$$\sigma = \sqrt{\frac{E_s}{2 (\log_2 M)(E_b/N_0)'}} \quad (2.1)$$

donde  $E_s$  es la energía de símbolo,  $M = 4$  es el tamaño de la constelación y  $E_b/N_0$  se expresa en unidades lineales.

La señal de salida está representada como:  $y(t) = x(t) + z(t)$ .

**Demodulador banda base:** recupera la señal modulada de pasa banda a banda base. La señal compleja de salida está representada matemáticamente en forma exponencial como  $y'(t) = y(t) \sqrt{2} e^{-j2\pi f_c t}$ .

**Filtro acoplado  $p(-t)$ :** transforma la señal que representa la secuencia de símbolos a través de la respuesta en raíz cuadrada de coseno alzado del filtro. El filtro  $p(-t)$  está diseñado de igual forma al filtro conformador. La señal a la salida del filtro  $u(t)$  se representa en un vector complejo.

La respuesta en cascada de los dos filtros  $g(t) = p(t) * p(-t)$ , da a lugar a una respuesta en coseno alzado, que satisface el criterio de Nyquist para una respuesta libre de ISI (si el canal no es dispersivo). En la Figura 2.6 se muestra la respuesta al impulso conjunta de los filtros de transmisión y recepción.

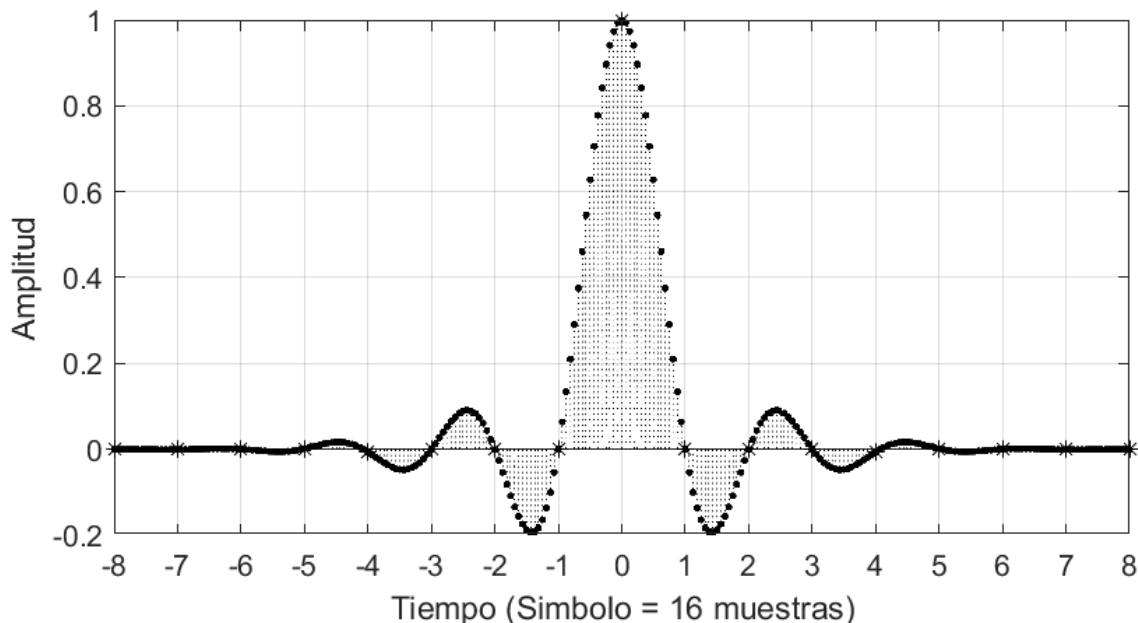


Figura 2.6. Respuesta al impulso conjunta de los filtros de transmisión y recepción (coseno alzado completo). Por los autores.

El diseño del pulso de coseno alzado  $g(t)$  es finito. La longitud del pulso está dada por  $2(sps \cdot span) + 1 = 257$  muestras.



**Muestreo:** obtiene las observaciones en los instantes  $k$ -ésimos al muestrear la señal  $u(t)$  una vez cada periodo de símbolo  $T$ . Computacionalmente, se obtiene diezmando el vector  $u(t)$  por un factor  $sps$ . La señal de salida se representa en un vector complejo con las observaciones recibidas en los instantes  $k$ -ésimos,  $\{u_k\}$ .

**Etapa de decisión:** convierte la secuencia de observaciones en una secuencia de símbolos definidos por el alfabeto de modulación digital 4-QAM. Se utiliza la técnica de la distancia mínima, que encuentra la menor distancia euclidiana entre las observaciones y los símbolos de referencia en el plano complejo para realizar la decisión. La salida se representa en un vector complejo con los símbolos decididos  $\{\hat{s}_k\}$ .

**Cálculo de la BER:** calcula la BER del enlace de comunicación digital para evaluar su desempeño. Al tener una constelación con codificación Gray, la BER se obtiene a partir de la Tasa de Error de Símbolo (SER, *Symbol Error Rate*), medida que indica la probabilidad de que un símbolo transmitido sea recibido y decodificado incorrectamente  $SER = Pr\{\hat{s}_k \neq s_k\}$ , luego:

$$BER \cong \frac{SER}{\log_2 M} \quad (2.2)$$

El valor de SER se obtiene al comparar los símbolos transmitidos  $\{s_k\}$  y los símbolos decididos  $\{\hat{s}_k\}$ , y se modela en Matlab a través de la función `symerr`.

### 2.1.5. Pruebas de Validación

Para corroborar el correcto funcionamiento del enlace de comunicación digital sobre un canal AWGN, se realizan las siguientes pruebas de validación:

**Prueba 1:** Enlace de comunicación digital sin ruido. Se espera que:

- El mensaje estimado esté libre de errores,  $SER = 0$ .
- La secuencia de observaciones antes del bloque de decisión sea idéntica a la secuencia de símbolos transmitidos; en el diagrama de constelación, solamente se contemplen los elementos del esquema de modulación 4-QAM.

*Resultados de la prueba:*

En la validación de  $SER = 0$ , se realizan 10 simulaciones con 10000 iteraciones de símbolos generados, para obtener una solución aproximada en la variable de interés SER. En la Figura 2.7 se presenta los valores de SER obtenidos en las simulaciones, corroborando el correcto funcionamiento del enlace de comunicación digital sin ruido a nivel de simulación.



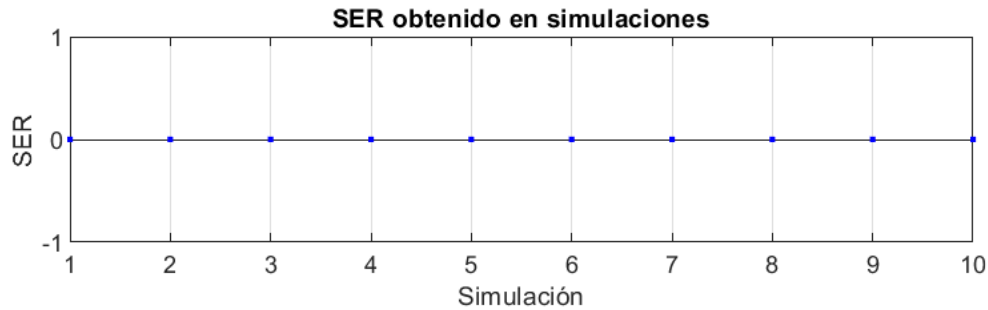


Figura 2.7. SER obtenido en simulaciones en la prueba de validación 1. Por los autores.

En la Figura 2.8 se presenta el diagrama de constelación obtenido para el enlace de comunicación digital sin ruido, con esquema de modulación 4-QAM, mostrando que  $\{u_k\} \cong \{s_k\}$ . El pequeño error obtenido es despreciable en el funcionamiento del enlace de comunicación digital. El error se debe al diseño del filtro  $p(t)$  que es finito, de la misma forma, el pulso en coseno alzado  $g(t) = p(t) * p(-t)$  es finito.

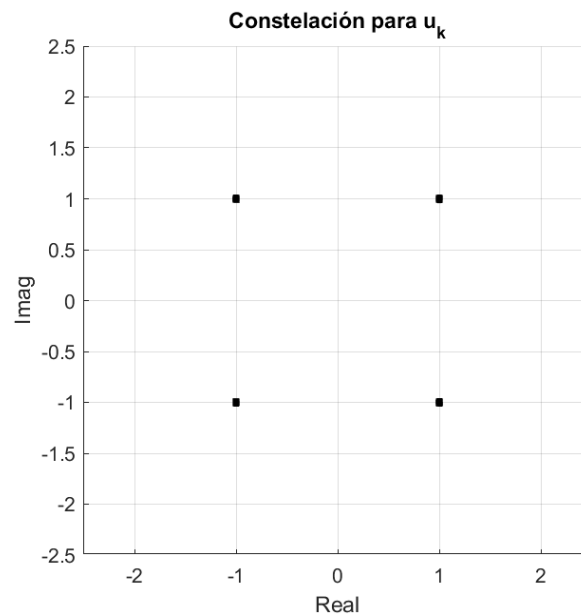


Figura 2.8. Diagrama de constelación en la prueba de validación 1. Por los autores.

Los demás resultados para el enlace de comunicación digital sin ruido se presentan en el Anexo I.

**Prueba 2:** Enlace de comunicación digital sobre un canal AWGN. Se espera que:

- La curva de desempeño BER vs  $E_b/N_0$  de la simulación corresponda con la curva de desempeño teórica del esquema de modulación 4-QAM sobre un canal AWGN.



### Resultados de la prueba:

La curva de desempeño teórica para el enlace de comunicación digital sobre un canal AWGN, se modela en Matlab a través de la función `berawgn`. La probabilidad de error para el esquema de modulación M-QAM, se calcula con la expresión:

$$P_{e_{M-QAM}} \approx \left( \frac{4}{\log_2(M)} \right) \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) Q \left( \sqrt{\frac{3 \log_2(M)}{M-1} \frac{E_b}{N_0}} \right) \quad (2.3)$$

Para la relación  $E_b/N_0$  correspondiente, se utilizan los valores de 0 a 12 dB.

Se realiza una única simulación con 200000 símbolos generados, para obtener una solución aproximada en la variable de interés SER, para cada valor de  $E_b/N_0$  dado [29].

En la Figura 2.9 se presenta las curvas de BER vs  $E_b/N_0$  teórica y simulada, mostrando cómo la curva simulada converge a la curva teórica, corroborando el correcto funcionamiento del enlace de comunicación digital sobre un canal AWGN a nivel de simulación y en la etapa 1 en general.

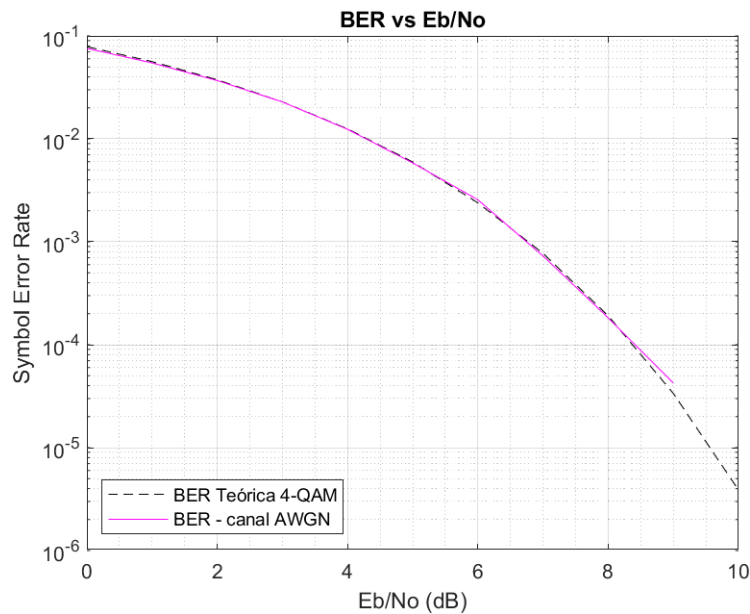


Figura 2.9. Curva de desempeño BER vs  $E_b/N_0$  en la prueba de validación 2. Por los autores.

Los demás resultados para el enlace de comunicación digital sin ruido se presentan en el Anexo I.



## **2.2. ETAPA 2. ENLACE DE COMUNICACIÓN DIGITAL SOBRE UN CANAL DISPERSIVO GAUSSIANO SIN ECUALIZACIÓN.**

### **2.2.1. Requerimientos**

Además de los requerimientos del simulador desarrollado en la etapa 1, en esta etapa se adicionan los siguientes requerimientos:

- Añadir distorsión a la señal transmitida en el canal de comunicación, con la variación de la ganancia y el retardo de un rayo secundario (multitrayecto).
- Calcular la SINR y la BER del enlace implementado como medida de desempeño y de comparación.

### **2.2.1. Diseño e Implementación**

#### 2.2.3.1. Variables de entrada y salida

Además de las variables presentadas en la etapa 1, en esta etapa se adicionan las siguientes:

*Variables de entrada:*

- Características del canal dispersivo: ganancia ( $\alpha$ ) y retardo ( $\tau$ ) de un rayo secundario de la señal transmitida.

*Variables de salida:*

- SINR, métrica para medir la relación entre la señal deseada en relación con la interferencia y el ruido.
- Representación gráfica temporal y espectral de las señales antes y después del canal de comunicación y de la respuesta del canal de comunicación, para visualizar, analizar y comparar sus comportamientos.

#### 2.2.3.2. Descripción de bloques

En la Figura 2.10 se presenta el diagrama del enlace de comunicación digital sobre un canal dispersivo Gaussiano.

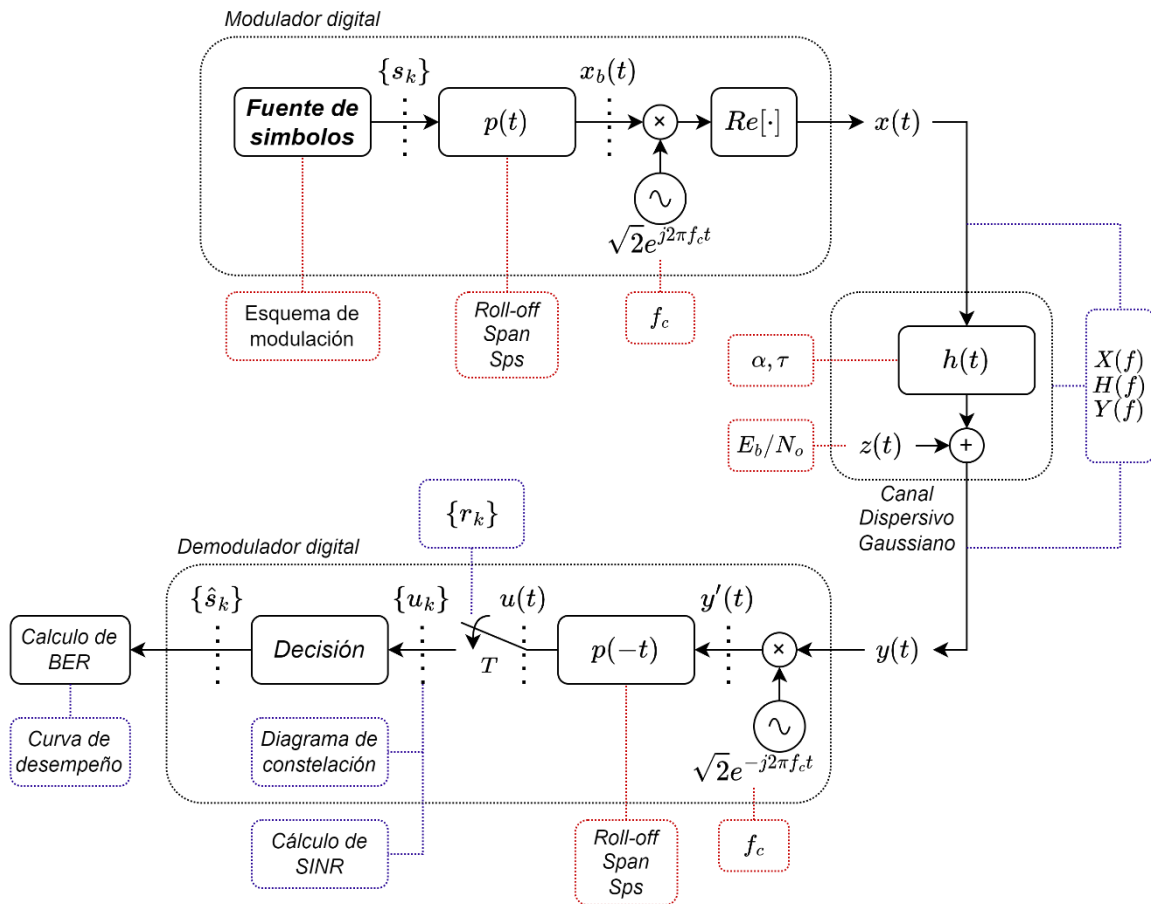


Figura 2.10. Enlace de comunicación digital sobre canal dispersivo Gaussiano. Por los autores.

**Canal dispersivo Gaussiano:** distorsiona y adiciona ruido AWGN (bloque Canal AWGN) a la señal transmitida  $x(t)$ . La distorsión de la señal transmitida (rayo primario) se expresa con la presencia de un rayo secundario, representando el fenómeno de multitrayecto. El rayo secundario se representa como una copia de  $x(t)$ , con una ganancia ( $\alpha$ ) y un retardo ( $\tau$ ) respecto al periodo de símbolo  $T$  (se utiliza el valor en muestras, según el  $sps = 16$ ).

La señal de salida está representada como:  $y(t) = x(t) + \alpha x(t - \tau) + z(t)$ .

Para la representación gráfica de  $x(t)$  y  $y(t)$  en el dominio de la frecuencia, se calcula la Transformada Discreta de Fourier (DFT, *Discrete Fourier Transform*) y se modela en Matlab a través de la función `fft`. Para la representación gráfica de  $H(f)$ , se utiliza:  $H(f) = 1 + \alpha e^{-j2\pi f\tau}$ . En la Figura 2.11, se representa la magnitud del espectro de la respuesta al impulso para dos escenarios de canal dispersivo Gaussiano,  $\alpha = 0.5$ ,  $\tau = 4$  muestras y  $\alpha = 0.8$ ,  $\tau = 6$  muestras, cuyos máximos se obtienen cuando  $f = n/T$  con un valor de  $1 + \alpha$ .

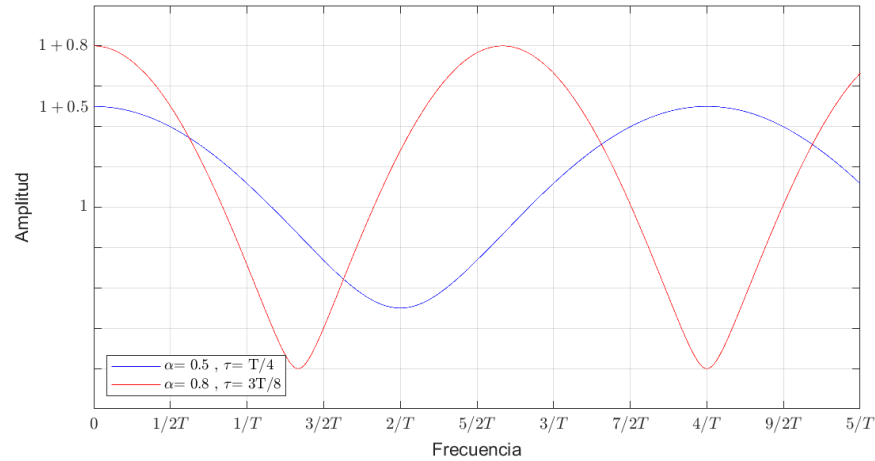


Figura 2.11. Magnitud del espectro de la respuesta al impulso del canal dispersivo Gaussiano. Por los autores.

**Cálculo de SINR:** se calcula la SINR del enlace de comunicación digital, para evaluar la calidad de la comunicación. La SINR se obtiene al dividir la potencia de la señal deseada entre la suma de las potencias de interferencia y ruido. La señal de interés es la observación  $u_k$  (ver (1.20)), por lo que:

$$\begin{aligned}
 \text{SINR}_u &= \frac{P_S}{P_I + P_N} \\
 &= \frac{\mathbb{E}[(r_0 s_k)^2]}{\mathbb{E}[(\sum_{n, n \neq 0} r_n s_{k-n})^2] + E[w_k^2]} \\
 &= \frac{|r_0|^2 E_s}{(\sum_{n, n \neq 0} |r_n|^2) E_s + \sigma^2} \\
 &= \frac{|r_0|^2 \text{SNR}}{(\sum_{n, n \neq 0} |r_n|^2) \text{SNR} + 1}. \tag{2.4}
 \end{aligned}$$

#### 2.2.4. Pruebas de Validación

Para corroborar el correcto funcionamiento del enlace de comunicación digital sobre un canal dispersivo Gaussiano, se realiza la siguiente prueba de validación:

**Prueba 3:** Enlace de comunicación digital sobre un canal dispersivo Gaussiano. Se espera que:

- El espectro en magnitud de la señal recibida ( $|Y(f)|$ ) debe coincidir con el espectro en magnitud teórico del canal dispersivo Gaussiano ( $|H(f)|$ ).



*Resultados de la prueba:*

El espectro en magnitud del canal dispersivo Gaussiano se modela con la siguiente ecuación:

$$|H(f)| = \sqrt{1 + 2\alpha \cos(2\pi f\tau) + \alpha^2}. \quad (2.5)$$

Para la evaluación del canal dispersivo Gaussiano, se proponen 3 canales definidos por las características del rayo secundario, ganancia ( $\alpha$ ) y retardo ( $\tau$ ), de la siguiente manera:

Canal 1:  $\alpha = 0.5$  y  $\tau = T/4$

$$|H(f)| = \sqrt{1 + \cos\left(2\pi f\left(\frac{T}{4}\right)\right) + 0.25}$$

En la Figura 2.12 se presenta la comparación entre los espectros en magnitud de la señal transmitida, la señal recibida y el canal dispersivo Gaussiano con  $E_b/N_0 = 10$ .

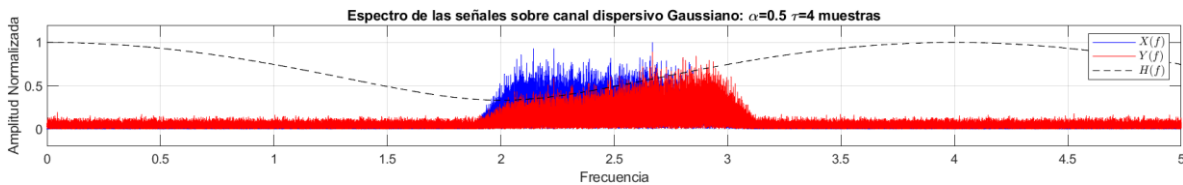


Figura 2.12. Espectro de señales sobre Canal dispersivo Gaussiano en la prueba de validación 3 (escenario 1). Por los autores.

Canal 2:  $\alpha = 0.5$  y  $\tau = 3T/8$

$$|H(f)| = \sqrt{1 + \cos\left(2\pi f\left(\frac{3T}{8}\right)\right) + 0.25}$$

En la Figura 2.13 se presenta la comparación entre los espectros en magnitud de la señal transmitida, la señal recibida y el canal dispersivo Gaussiano con  $E_b/N_0 = 10$ .

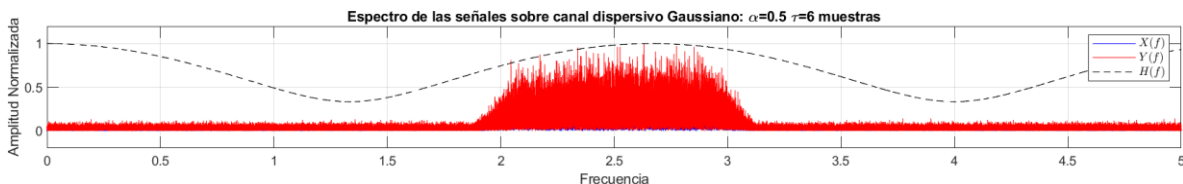


Figura 2.13. Espectro de señales sobre Canal dispersivo Gaussiano en la prueba de validación 3 (escenario 2). Por los autores.



Canal 3:  $\alpha = 0.8$  y  $\tau = 3T/4$

$$|H(f)| = \sqrt{1 + 1.6 \cos\left(2\pi f \left(\frac{3T}{4}\right)\right) + 0.64}$$

En la Figura 2.14 se presenta la comparación entre los espectros en magnitud de la señal transmitida, la señal recibida y el canal dispersivo Gaussiano con  $E_b/N_0 = 10$ .

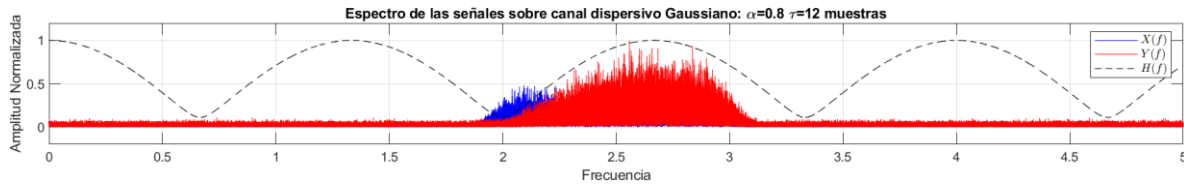


Figura 2.14. Espectro de señales sobre Canal dispersivo Gaussiano en la prueba de validación 3 (escenario 3). Por los autores.

Como se observa en los tres canales propuestos, el espectro en magnitud de la señal recibida coincide con el espectro en magnitud teórico del canal dispersivo Gaussiano, corroborando el correcto dimensionamiento del canal dispersivo Gaussiano a nivel de simulación y en la etapa 2 en general.

Los demás resultados para el enlace de comunicación digital sobre un canal dispersivo Gaussiano, sin ecualización, se presentan en el Anexo II.

## 2.3. ETAPA 3. ENLACE DE COMUNICACIÓN DIGITAL SOBRE UN CANAL DISPERSIVO GAUSSIANO CON ECUALIZACIÓN.

### 2.3.1. Requerimientos

Además de los requerimientos del simulador desarrollado en las etapas 1 y 2, en esta etapa se adicionan los siguientes requerimientos:

- La implementación de un ecualizador DFE-MMSE para el receptor del enlace de comunicación.
- Calcular la SINR y la BER del enlace implementado como medida de desempeño deseado.

### 2.3.2. Diseño e Implementación

#### 2.3.1.1. Variables de entrada y salida

Además de las variables presentadas en las etapas 1 y 2, en esta etapa se adicionan las siguientes:



*Variables de entrada:*

- Porcentaje de la magnitud normalizada de los coeficientes del canal discreto equivalente  $\{r_k\}$ , para determinar la longitud del equalizador.

*Variables de salida:*

- SINR después del equalizador (señal  $\theta_k$ ), para comparar la calidad de la comunicación con la SINR antes del equalizador (señal  $u_k$ ).
- Ganancia e impacto del equalizador, para analizar la mejora de desempeño que genera el equalizador.

2.3.1.2. Descripción de bloques

En la Figura 2.15 se presenta el diagrama del enlace de comunicación digital sobre un canal dispersivo Gaussiano con equalización.

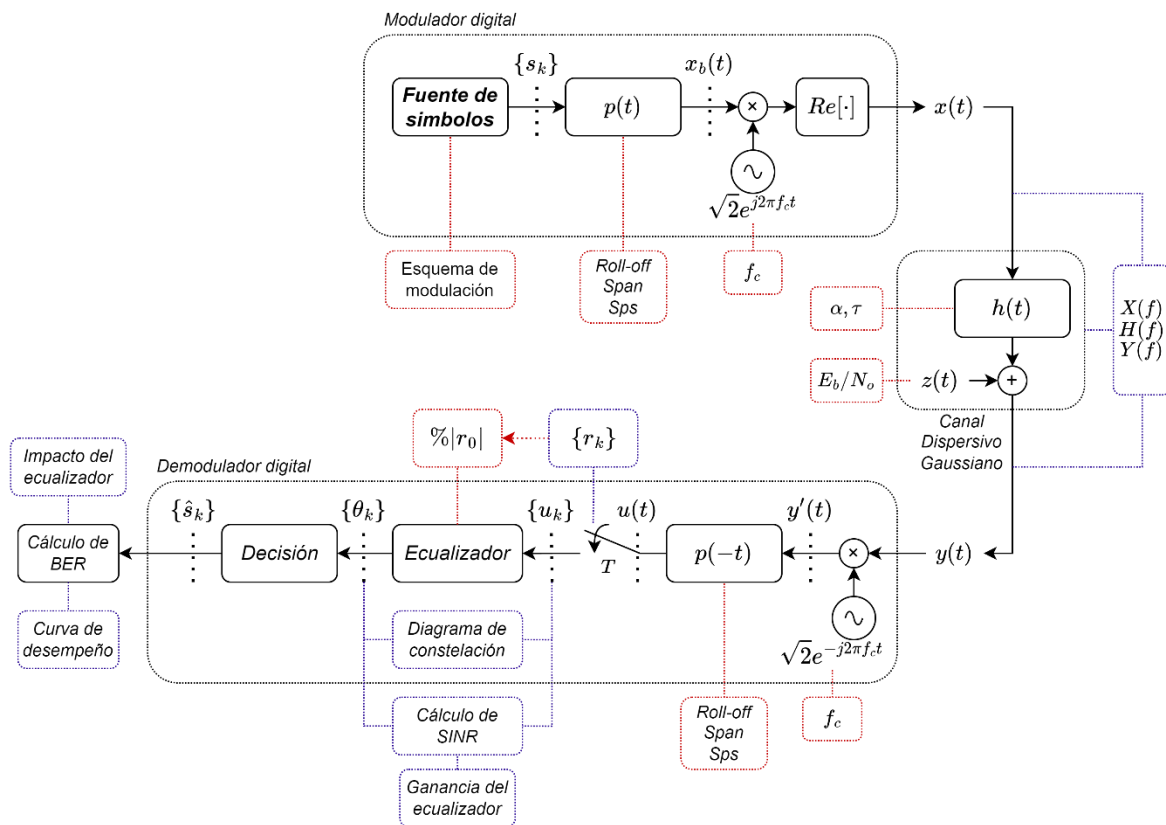


Figura 2.15. Enlace de comunicación digital sobre canal dispersivo Gaussiano con equalización DFE-MMSE. Por los autores.

**Equalizador DFE-MMSE:** Contrarresta el efecto del canal dispersivo Gaussiano, teniendo en cuenta la ISI y el ruido. Se utiliza la técnica de equalización con realimentación de decisión basada en el criterio de optimización de mínimo error





cuadrático medio, para obtener una estimación parcial o sesgada del símbolo deseado a través de  $\theta_k$ , a partir de la combinación de copias de observaciones  $\{u_k\}$  adyacentes y la realimentación de símbolos decididos  $\{\hat{s}_k\}$ . La longitud del ecualizador se determina a partir del porcentaje de la magnitud de los coeficientes del canal discreto equivalente  $\{r_k\}$  a tener en cuenta, es decir, utilizar una profundidad de la ISI que sea significativa para el diseño del ecualizador. El diseño del ecualizador MMSE-DFE se presenta a continuación, en una sección aparte.

**Cálculo de SINR después del ecualizador:** calcula la SINR del enlace de comunicación digital con equalización, para evaluar la calidad de la comunicación. La señal de interés para obtener la SINR es la variable de decisión  $\theta_k$ , por lo que:

$$\text{SINR}_\theta = \frac{P_S}{P_I + P_N} = \frac{\mathbb{E}[(r_0 s_k)^2]}{\mathbb{E}[(\theta_k - s_k)^2]} = \frac{|r_0|^2 E_s}{\mathbb{E}[\varepsilon_k^2]} = \frac{|r_0|^2 \text{SNR}}{\text{MSE}} \quad (2.6)$$

**Ganancia de equalización:** se define como la relación entre la SINR del enlace de comunicación con ecualizador y la SINR del enlace de comunicación sin ecualizador. Brinda una referencia del desempeño del ecualizador respecto a la interferencia y el ruido.

$$G = \frac{\text{SINR}_\theta}{\text{SINR}_u} \quad (2.7)$$

**Impacto del ecualizador:** se define como la diferencia de  $E_b/N_0$  que se requiere para lograr un mismo valor de BER en el enlace de comunicación sin ecualizador respecto al enlace de comunicación con ecualizador. Brinda una referencia del desempeño del ecualizador respecto a la BER. En la Figura 2.16 se muestra la representación del impacto de un ecualizador.

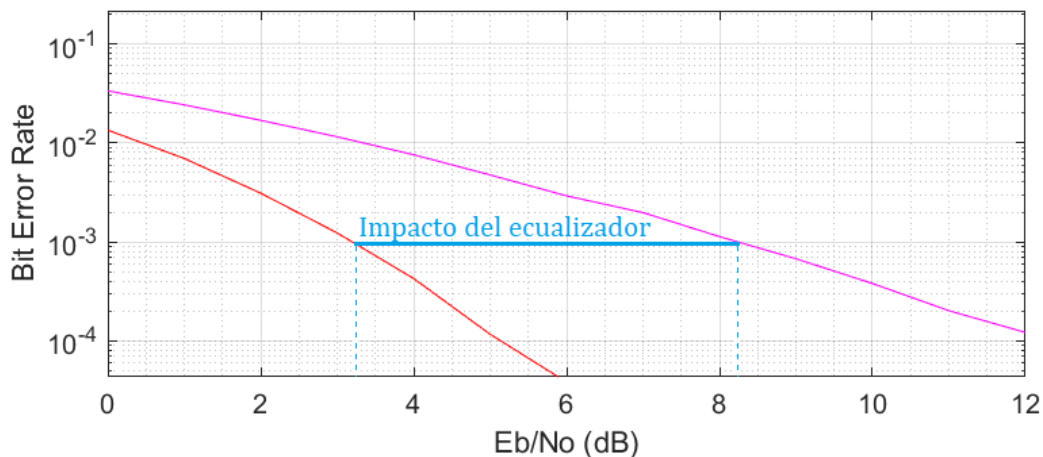


Figura 2.16. Impacto del ecualizador. Por los autores.



### 2.3.1.3. Diseño de ecualizador DFE-MMSE generalizado en forma matricial

Sean los coeficientes complejos del canal discreto equivalente:

$$\{r_k\} = \{r_{-n}, \dots, r_{-1}, r_0, r_1, \dots, r_n\}.$$

La observación en el instante k-ésimo, es de la forma<sup>3</sup>:

$$u_k = r_{-n}s_{k+n} + \dots + r_{-1}s_{k+1} + r_0s_k + r_1s_{k-1} + \dots + r_ns_{k-n} + w_k.$$

Para facilitar el proceso, se asigna  $n = 2$ . Corresponde al diseño del filtro ecualizador con 5 coeficientes.

Para las observaciones:

$$\begin{aligned} u_{k-2} &= r_{-2}s_k + r_{-1}s_{k-1} + r_0s_{k-2} + r_1s_{k-3} + r_2s_{k-4} + w_{k-2} \\ u_{k-1} &= r_{-2}s_{k+1} + r_{-1}s_k + r_0s_{k-1} + r_1s_{k-2} + r_2s_{k-3} + w_{k-1} \\ u_k &= r_{-2}s_{k+2} + r_{-1}s_{k+1} + r_0s_k + r_1s_{k-1} + r_2s_{k-2} + w_k \\ u_{k+1} &= r_{-2}s_{k+3} + r_{-1}s_{k+2} + r_0s_{k+1} + r_1s_k + r_2s_{k-1} + w_{k+1} \\ u_{k+2} &= r_{-2}s_{k+4} + r_{-1}s_{k+3} + r_0s_{k+2} + r_1s_{k+1} + r_2s_k + w_{k+2} \end{aligned}$$

Se puede escribir en forma matricial como:

$$\mathbf{u} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{w},$$

$$\begin{bmatrix} u_{k-2} \\ u_{k-1} \\ u_k \\ u_{k+1} \\ u_{k+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_2 & r_1 & r_0 & r_{-1} & r_{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & r_1 & r_0 & r_{-1} & r_{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_2 & r_1 & r_0 & r_{-1} & r_{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_2 & r_1 & r_0 & r_{-1} & r_{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_2 & r_1 & r_0 & r_{-1} & r_{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{k-4} \\ s_{k-3} \\ s_{k-2} \\ s_{k-1} \\ s_k \\ s_{k+1} \\ s_{k+2} \\ s_{k+3} \\ s_{k+4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{k-2} \\ w_{k-1} \\ w_k \\ w_{k+1} \\ w_{k+2} \end{bmatrix}.$$

y de forma general para cualquier  $n$  como:

<sup>3</sup> La forma de  $u_k$  corresponde con la convolución:  $\{s_k\} * \{r_k\}$



$$\mathbf{u} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{w},$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_{k-n} \\ \vdots \\ u_k \\ \vdots \\ u_{k+n} \end{bmatrix}}_{\substack{\mathbf{u} \\ (2n+1) \times 1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \overbrace{r_n \cdots r_0 \cdots r_{-n}}^{2n+1} & \overbrace{0 \cdots 0}^{2n} \\ \overbrace{0 \cdots 0}^n & \overbrace{r_n \cdots r_0 \cdots r_{-n}}^{2n+1} & \overbrace{0 \cdots 0}^n \\ \overbrace{0 \cdots 0}^{2n} & \overbrace{r_n \cdots r_0 \cdots r_{-n}}^{2n+1} \end{bmatrix}}_{\substack{\mathbf{R} \\ (2n+1) \times (4n+1)}} \underbrace{\begin{bmatrix} s_{k-2n} \\ \vdots \\ s_k \\ \vdots \\ s_{k+2n} \end{bmatrix}}_{\substack{\mathbf{s} \\ (4n+1) \times 1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} w_{k-n} \\ \vdots \\ w_k \\ \vdots \\ w_{k+n} \end{bmatrix}}_{\substack{\mathbf{w} \\ (2n+1) \times 1}}. \quad (2.8)$$

Se tiene la variable de decisión:

$$\theta_k = c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2 + c_3 \phi_3 + c_4 \phi_4 + c_5 \phi_5,$$

donde,

$$\begin{aligned} \phi_1 &= u_{k-2} - r_{(-1)} \hat{s}_{k-1} - r_0 \hat{s}_{k-2} - r_1 \hat{s}_{k-3} - r_2 \hat{s}_{k-4} \\ \phi_2 &= u_{k-1} - r_0 \hat{s}_{k-1} - r_1 \hat{s}_{k-2} - r_2 \hat{s}_{k-3} \\ \phi_3 &= u_k - r_1 \hat{s}_{k-1} - r_2 \hat{s}_{k-2} \\ \phi_4 &= u_{k+1} - r_2 \hat{s}_{k-1} \\ \phi_5 &= u_{k+2}. \end{aligned}$$

De este modo, la estimación del símbolo deseado  $\theta_k$  se forma a partir de la combinación de copias de observaciones  $\{u_k\}$  adyacentes y la realimentación de símbolos decididos  $\{\hat{s}_k\}$ . En la Figura 2.17 se presenta el diseño del equalizador con cinco coeficientes, en el cual, para obtener la variable de decisión  $\theta_k$  se necesita la ventana deslizante  $[u_{k-2}; u_{k-1}; u_k; u_{k+1}; u_{k+2}]$  de valores recibidos, teniendo un retardo de procesamiento de dos símbolos.

Se puede generalizar en forma matricial para cualquier  $n$  como:

$$\boldsymbol{\phi} = \mathbf{u} - \mathbf{Re} \cdot \hat{\mathbf{s}}.$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_{n+1} \\ \vdots \\ \phi_{2n+1} \end{bmatrix}}_{\substack{\boldsymbol{\phi} \\ (2n+1) \times 1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_{k-n} \\ \vdots \\ u_k \\ \vdots \\ u_{k+n} \end{bmatrix}}_{\substack{\mathbf{u} \\ (2n+1) \times 1}} - \underbrace{\begin{bmatrix} r_n & \cdots & r_0 & \cdots & \cancel{r_{-n}} \\ 0 & \cdots & r_n & \cdots & \cancel{r_n} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cancel{r_n} \end{bmatrix}}_{\substack{\mathbf{Re} \\ (2n+1) \times (4n+1)}} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{s}_{k-2n} \\ \vdots \\ \hat{s}_{k-n} \\ \vdots \\ \hat{s}_{k-1} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\hat{\mathbf{s}} \\ (2n+1) \times 1}}. \quad (2.9)$$

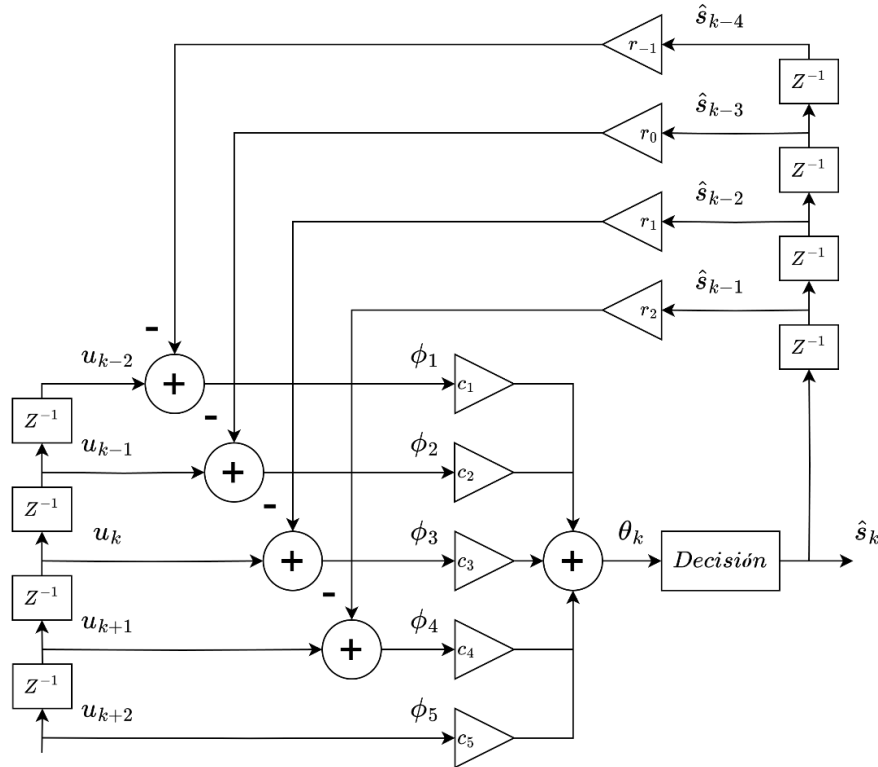


Figura 2.17. Diseño del equalizador para  $n=2$ . Por los autores.

Remplazando,

$$\begin{aligned} \theta_k = & c_1(u_{k-2} - r_{-1}\hat{s}_{k-1} - r_0\hat{s}_{k-2} - r_1\hat{s}_{k-3} - r_2\hat{s}_{k-4}) \\ & + c_2(u_{k-1} - r_0\hat{s}_{k-1} - r_1\hat{s}_{k-2} - r_2\hat{s}_{k-3}) + c_3(u_k - r_1\hat{s}_{k-1} - r_2\hat{s}_{k-2}) \\ & + c_4(u_{k+1} - r_2\hat{s}_{k-1}) + c_5(u_{k+2}). \end{aligned}$$

Si los símbolos anteriores son estimados correctamente:

$$s_{k-1} = \hat{s}_{k-1}, s_{k-2} = \hat{s}_{k-2}, s_{k-3} = \hat{s}_{k-3}, s_{k-4} = \hat{s}_{k-4}$$

$$\begin{aligned} \theta_k = & c_1(r_{-2}s_k + r_{-1}s_{k-1} + r_0s_{k-2} + r_1s_{k-3} + r_2s_{k-4} + w_{k-2} - r_{-1}\hat{s}_{k-1} - r_0\hat{s}_{k-2} - r_1\hat{s}_{k-3} - r_2\hat{s}_{k-4}) \\ & + c_2(r_{-2}s_{k+1} + r_{-1}s_k + r_0s_{k-1} + r_1s_{k-2} + r_2s_{k-3} + w_{k-1} - r_0\hat{s}_{k-1} - r_1\hat{s}_{k-2} - r_2\hat{s}_{k-3}) \\ & + c_3(r_{-2}s_{k+2} + r_{-1}s_{k+1} + r_0s_k + r_1s_{k-1} + r_2s_{k-2} + w_k - r_1\hat{s}_{k-1} - r_2\hat{s}_{k-2}) \\ & + c_4(r_{-2}s_{k+3} + r_{-1}s_{k+2} + r_0s_{k+1} + r_1s_k + r_2s_{k-1} + w_{k+1} - r_2\hat{s}_{k-1}) \\ & + c_5(r_{-2}s_{k+4} + r_{-1}s_{k+3} + r_0s_{k+2} + r_1s_{k+1} + r_2s_k + w_{k+2}). \end{aligned}$$

Se obtiene que no hay copias de símbolos anteriores que introduzcan ISI, así:

$$\begin{aligned} \theta_k = & c_1(r_{-2}s_k + w_{k-2}) \\ & + c_2(r_{-2}s_{k+1} + r_{-1}s_k + w_{k-1}) \\ & + c_3(r_{-2}s_{k+2} + r_{-1}s_{k+1} + r_0s_k + w_k) \\ & + c_4(r_{-2}s_{k+3} + r_{-1}s_{k+2} + r_0s_{k+1} + r_1s_k + w_{k+1}) \\ & + c_5(r_{-2}s_{k+4} + r_{-1}s_{k+3} + r_0s_{k+2} + r_1s_{k+1} + r_2s_k + w_{k+2}). \end{aligned}$$



Reorganizando,

$$\begin{aligned}\theta_k = & s_k(r_{-2}c_1 + r_{-1}c_2 + r_0c_3 + r_1c_4 + r_2c_5) + s_{k+1}(r_{-2}c_2 + r_{-1}c_3 + r_0c_4 + r_1c_5) \\ & + s_{k+2}(r_{-2}c_3 + r_{-1}c_4 + r_0c_5) + s_{k+3}(r_{-2}c_4 + r_{-1}c_5) + s_{k+4}(r_{-2}c_5) \\ & + w_{k-2}c_1 + w_{k-1}c_2 + w_kc_3 + w_{k+1}c_4 + w_{k+2}c_5\end{aligned}$$

Como  $\theta_k$  es una estimación de  $s_k$ , se considera el error en la estimación como:

$$\begin{aligned}\varepsilon_k = \theta_k - s_k = & s_k(r_{-2}c_1 + r_{-1}c_2 + r_0c_3 + r_1c_4 + r_2c_5 - 1) \\ & + s_{k+1}(r_{-2}c_2 + r_{-1}c_3 + r_0c_4 + r_1c_5) + s_{k+2}(r_{-2}c_3 + r_{-1}c_4 + r_0c_5) \\ & + s_{k+3}(r_{-2}c_4 + r_{-1}c_5) + s_{k+4}(r_{-2}c_5) + w_{k-2}c_1 + w_{k-1}c_2 + w_kc_3 \\ & + w_{k+1}c_4 + w_{k+2}c_5\end{aligned}$$

El criterio de optimización MMSE propone minimizar el promedio (media) de la potencia (cuadrado) del error ( $\varepsilon_k$ ).

Función a minimizar:

$$\begin{aligned}\text{MSE} = \mathbb{E}[\varepsilon_k^2] = & (r_{-2}c_1 + r_{-1}c_2 + r_0c_3 + r_1c_4 + r_2c_5 - 1)^2 E_s \\ & + (r_{-2}c_2 + r_{-1}c_3 + r_0c_4 + r_1c_5)^2 E_s + (r_{-2}c_3 + r_{-1}c_4 + r_0c_5)^2 E_s \\ & + (r_{-2}c_4 + r_{-1}c_5)^2 E_s + (r_{-2}c_5)^2 E_s + (c_1)^2 \sigma^2 + (c_2)^2 \sigma^2 + (c_3)^2 \sigma^2 \\ & + (c_4)^2 \sigma^2 + (c_5)^2 \sigma^2,\end{aligned}$$

donde  $\mathbb{E}[s_k^2] = E_s$  y  $\mathbb{E}[w_k^2] = \sigma^2$ .

El punto donde el gradiente de la función es igual a cero, identifica el mínimo de la función, y se obtiene el siguiente sistema lineal de cinco ecuaciones con cinco incógnitas:

$$\nabla \text{MSE}(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = 0 \quad : \text{Gradiente de MSE se iguala a cero}$$

$$\frac{\partial \text{MSE}}{\partial c_1} = 0 \rightarrow (r_{-2}c_1 + r_{-1}c_2 + r_0c_3 + r_1c_4 + r_2c_5 - 1)(r_{-2})E_s + c_1\sigma^2 = 0$$

$$\frac{\partial \text{MSE}}{\partial c_2} = 0 \rightarrow \frac{(r_{-2}c_1 + r_{-1}c_2 + r_0c_3 + r_1c_4 + r_2c_5 - 1)(r_{-1})E_s + (r_{-2}c_2 + r_{-1}c_3 + r_0c_4 + r_1c_5)(r_{-2})E_s + c_2\sigma^2}{(r_{-2}c_2 + r_{-1}c_3 + r_0c_4 + r_1c_5)(r_{-2})E_s + c_2\sigma^2} = 0$$

$$\frac{\partial \text{MSE}}{\partial c_3} = 0 \rightarrow \frac{(r_{-2}c_1 + r_{-1}c_2 + r_0c_3 + r_1c_4 + r_2c_5 - 1)(r_0)E_s + (r_{-2}c_2 + r_{-1}c_3 + r_0c_4 + r_1c_5)(r_{-1})E_s + (r_{-2}c_3 + r_{-1}c_4 + r_0c_5)(r_{-2})E_s + c_3\sigma^2}{(r_{-2}c_3 + r_{-1}c_4 + r_0c_5)(r_{-2})E_s + c_3\sigma^2} = 0$$



$$\frac{\partial \text{MSE}}{\partial c_4} = 0 \rightarrow \begin{aligned} & (r_{-2}c_1 + r_{-1}c_2 + r_0c_3 + r_1c_4 + r_2c_5 - 1)(r_1)E_s + \\ & (r_{-2}c_2 + r_{-1}c_3 + r_0c_4 + r_1c_5)(r_0)E_s + \\ & (r_{-2}c_3 + r_{-1}c_4 + r_0c_5)(r_{-1})E_s + \\ & (r_{-2}c_4 + r_{-1}c_5)(r_{-2})E_s + c_4\sigma^2 \end{aligned} = 0$$

$$\frac{\partial \text{MSE}}{\partial c_5} = 0 \rightarrow \begin{aligned} & (r_{-2}c_1 + r_{-1}c_2 + r_0c_3 + r_1c_4 + r_2c_5 - 1)(r_2)E_s + \\ & (r_{-2}c_2 + r_{-1}c_3 + r_0c_4 + r_1c_5)(r_1)E_s + \\ & (r_{-2}c_3 + r_{-1}c_4 + r_0c_5)(r_0)E_s + \\ & (r_{-2}c_4 + r_{-1}c_5)(r_{-1})E_s + \\ & (r_{-2}c_5)(r_{-2})E_s + c_5\sigma^2 \end{aligned} = 0$$

Luego, el sistema lineal de ecuaciones en función de la  $\text{SNR} = E_s/\sigma^2$  es:

$$\begin{aligned} & [r_{-2}(r_{-2})]\text{SNR } c_1 + c_1 + \\ & [r_{-1}(r_{-2})]\text{SNR } c_2 + \\ & [r_0(r_{-2})]\text{SNR } c_3 + \\ & [r_1(r_{-2})]\text{SNR } c_4 + \\ & [r_2(r_{-2})]\text{SNR } c_5 \end{aligned} = (r_{-2})\text{SNR}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & [r_{-2}(r_{-1})]\text{SNR } c_1 + \\ & [r_{-1}(r_{-1}) + r_{-2}(r_{-2})]\text{SNR } c_2 + c_2 + \\ & [r_0(r_{-1}) + r_{-1}(r_{-2})]\text{SNR } c_3 + \\ & [r_1(r_{-1}) + r_0(r_{-2})]\text{SNR } c_4 + \\ & [r_2(r_{-1}) + r_1(r_{-2})]\text{SNR } c_5 \end{aligned} = (r_{-1})\text{SNR}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & [r_{-2}(r_0)]\text{SNR } c_1 + \\ & [r_{-1}(r_0) + r_{-2}(r_{-1})]\text{SNR } c_2 + \\ & [r_0(r_0) + r_{-1}(r_{-1}) + r_{-2}(r_{-2})]\text{SNR } c_3 + c_3 = (r_0)\text{SNR} \\ & [r_1(r_0) + r_0(r_{-1}) + r_{-1}(r_{-2})]\text{SNR } c_4 + \\ & [r_2(r_0) + r_1(r_{-1}) + r_0(r_{-2})]\text{SNR } c_5 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & [r_{-2}(r_1)]\text{SNR } c_1 + \\ & [r_{-1}(r_1) + r_{-2}(r_0)]\text{SNR } c_2 + \\ & [r_0(r_1) + r_{-1}(r_0) + r_{-2}(r_{-1})]\text{SNR } c_3 + \\ & [r_1(r_1) + r_0(r_0) + r_{-1}(r_{-1}) + r_{-2}(r_{-2})]\text{SNR } c_4 + c_4 + \\ & [r_2(r_1) + r_1(r_0) + r_0(r_{-1}) + r_{-1}(r_{-2})]\text{SNR } c_5 \end{aligned} = (r_1)\text{SNR}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & [r_{-2}(r_2)]\text{SNR } c_1 + \\ & [r_{-1}(r_2) + r_{-2}(r_1)]\text{SNR } c_2 + \\ & [r_0(r_2) + r_{-1}(r_1) + r_{-2}(r_0)]\text{SNR } c_3 + \\ & [r_1(r_2) + r_0(r_1) + r_{-1}(r_0) + r_{-2}(r_{-1})]\text{SNR } c_4 + \\ & [r_2(r_2) + r_1(r_1) + r_0(r_0) + r_{-1}(r_{-1}) + r_{-2}(r_{-2})]\text{SNR } c_5 + c_5 \end{aligned} = (r_2)\text{SNR}, \quad (5)$$



El sistema lineal se puede escribir en forma matricial como:

$$\mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{B} \quad (2.10)$$

Donde  $\mathbf{A}$  es la matriz de coeficientes,  $\mathbf{C}$  es la matriz de incógnitas y  $\mathbf{B}$  es la matriz de términos independientes en el sistema lineal. La solución se obtiene como:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (2.11)$$

donde  $\mathbf{A}^{-1}$  es la matriz inversa de  $\mathbf{A}$  [27], [28].

Las matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  se representan como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} [r_{-2}(r_{-2})]\text{SNR} + 1 & [r_{-1}(r_{-2})]\text{SNR} & [r_0(r_{-2})]\text{SNR} & [r_1(r_{-2})]\text{SNR} & [r_2(r_{-2})]\text{SNR} \\ [r_{-2}(r_{-1})]\text{SNR} & [r_{-1}(r_{-1}) + r_{-2}(r_{-2})]\text{SNR} + 1 & [r_0(r_{-1}) + r_{-1}(r_{-2})]\text{SNR} & [r_1(r_{-1}) + r_0(r_{-2})]\text{SNR} & [r_2(r_{-1}) + r_1(r_{-2})]\text{SNR} \\ [r_{-2}(r_0)]\text{SNR} & [r_{-1}(r_0) + r_{-2}(r_{-1})]\text{SNR} & [r_0(r_0) + r_{-1}(r_{-1}) + r_{-2}(r_{-2})]\text{SNR} + 1 & [r_1(r_0) + r_0(r_{-1}) + r_{-1}(r_{-2})]\text{SNR} & [r_2(r_0) + r_1(r_{-1}) + r_0(r_{-2})]\text{SNR} \\ [r_{-2}(r_1)]\text{SNR} & [r_{-1}(r_1) + r_{-2}(r_0)]\text{SNR} & [r_0(r_1) + r_{-1}(r_0) + r_{-2}(r_{-1})]\text{SNR} & [r_1(r_1) + r_0(r_0) + r_{-1}(r_{-1}) + r_{-2}(r_{-2})]\text{SNR} + 1 & [r_2(r_1) + r_1(r_0) + r_0(r_{-1}) + r_{-1}(r_{-2})]\text{SNR} \\ [r_{-2}(r_2)]\text{SNR} & [r_{-1}(r_2) + r_{-2}(r_1)]\text{SNR} & [r_0(r_2) + r_{-1}(r_1) + r_{-2}(r_0)]\text{SNR} & [r_1(r_2) + r_0(r_1) + r_{-1}(r_0) + r_{-2}(r_{-1})]\text{SNR} & [r_2(r_2) + r_1(r_1) + r_0(r_0) + r_{-1}(r_{-1}) + r_{-2}(r_{-2})]\text{SNR} + 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} (r_{-2})\text{SNR} \\ (r_{-1})\text{SNR} \\ (r_0)\text{SNR} \\ (r_1)\text{SNR} \\ (r_2)\text{SNR} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad c_5]$$

En forma general para cualquier  $n$ , las matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  se representan como:



$$\mathbf{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} [r_{-n}(r_{-n})]_{\text{SNR}} + 1 & \cdots & [r_o(r_{-n})]_{\text{SNR}} & \cdots & [r_n(r_{-n})]_{\text{SNR}} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ [r_{-n}(r_o)]_{\text{SNR}} & \vdots & \begin{bmatrix} r_o(r_o) + \\ \vdots \\ r_{-n}(r_{-n}) \end{bmatrix}_{\text{SNR}} + 1 & \cdots & \begin{bmatrix} r_n(r_o) + \\ \vdots \\ r_o(r_{-n}) \end{bmatrix}_{\text{SNR}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [r_{-n}(r_n)]_{\text{SNR}} & \vdots & \begin{bmatrix} r_o(r_n) + \\ \vdots \\ r_{-n}(r_o) \end{bmatrix}_{\text{SNR}} & \vdots & \begin{bmatrix} r_n(r_n) + \\ \vdots \\ r_o(r_o) + \\ \vdots \\ r_{-n}(r_{-n}) \end{bmatrix}_{\text{SNR}} + 1 \end{bmatrix}}_{(2n+1) \times (2n+1)}$$

$$\mathbf{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} (r_{-n})_{\text{SNR}} \\ \vdots \\ (r_o)_{\text{SNR}} \\ \vdots \\ (r_n)_{\text{SNR}} \end{bmatrix}}_{(2n+1) \times 1}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} = \underbrace{[c_1 \quad \cdots \quad c_{n+1} \quad \cdots \quad c_{2n+1}]}_{1 \times (2n+1)}.$$

Se puede generalizar  $\theta_k$  en forma matricial para cualquier  $n$  como:

$$\theta_k = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\phi} \quad (2.12)$$

$$\theta_k = \underbrace{[c_1 \quad \cdots \quad c_{n+1} \quad \cdots \quad c_{2n+1}]}_{1 \times (2n+1)} \left( \underbrace{\begin{bmatrix} u_{k-n} \\ \vdots \\ u_k \\ \vdots \\ u_{k+n} \end{bmatrix}}_{(2n+1) \times 1} - \underbrace{\begin{bmatrix} r_n & \cdots & r_o & \cdots & r_{-n} \\ 0 & \cdots & r_n & \cdots & r_o \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & r_n \end{bmatrix}}_{(2n+1) \times (4n+1)} \underbrace{\begin{bmatrix} s_{k-2n} \\ \vdots \\ s_{k-n} \\ \vdots \\ s_{k-1} \\ 0 \end{bmatrix}}_{(2n+1) \times 1} \right).$$

### 2.3.4. Pruebas de Validación

Para corroborar el correcto funcionamiento del enlace de comunicación digital con equalización DFE-MMSE sobre un canal dispersivo Gaussiano, se realizan las siguientes pruebas de validación:

**Prueba 4:** Enlace de comunicación digital con equalización sobre un canal dispersivo sin ruido. Se espera que:





- El mensaje estimado presente una tendencia a estar libre de errores (i.e.,  $SER \approx 0$ ).
- La secuencia de símbolos antes del bloque de decisión ( $\{\theta_k\}$ ), presente una tendencia a la secuencia de símbolos transmitidos ( $\{s_k\}$ ); en el diagrama de constelación, se contemplen las variables de decisión bien definidas en los elementos del esquema de modulación 4-QAM.

### Resultados de la prueba:

Para la evaluación del ecualizador DFE-MMSE se proponen 3 canales definidos por las características del rayo secundario, ganancia y retardo.

En la validación de  $SER \approx 0$ , para cada canal dispersivo sin ruido propuesto, se realiza una simulación con 100000 iteraciones de símbolos generados, para obtener una solución aproximada en la variable de interés SER.

En las Figuras 2.19, 2.21 y 2.23 se presenta los diagramas de constelación obtenidos en las simulaciones, con esquema de modulación 4-QAM, mostrando que  $\{\theta_k\}$  está bien definida con relación a  $\{s_k\}$ , corroborando el correcto funcionamiento del enlace de comunicación digital con ecualización sobre un canal dispersivo sin ruido a nivel de simulación y en la etapa 4 en general.

Canal 1:  $\alpha = 0.5$  y  $\tau = T/4$

Para el diseño del filtro correspondiente se utilizan 3 coeficientes (1 pasado y 1 futuro), como se muestra en la Figura 2.18.

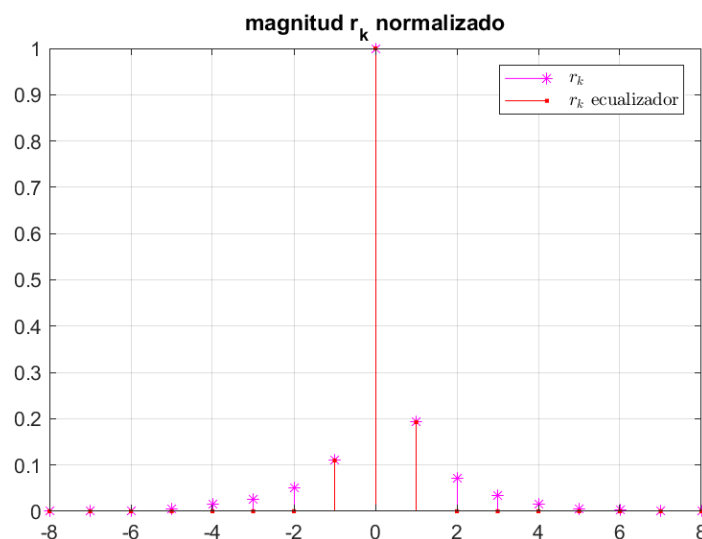


Figura 2.18. Magnitud  $r_k$  normalizado en la prueba de validación 4 (escenario 1). Por los autores.

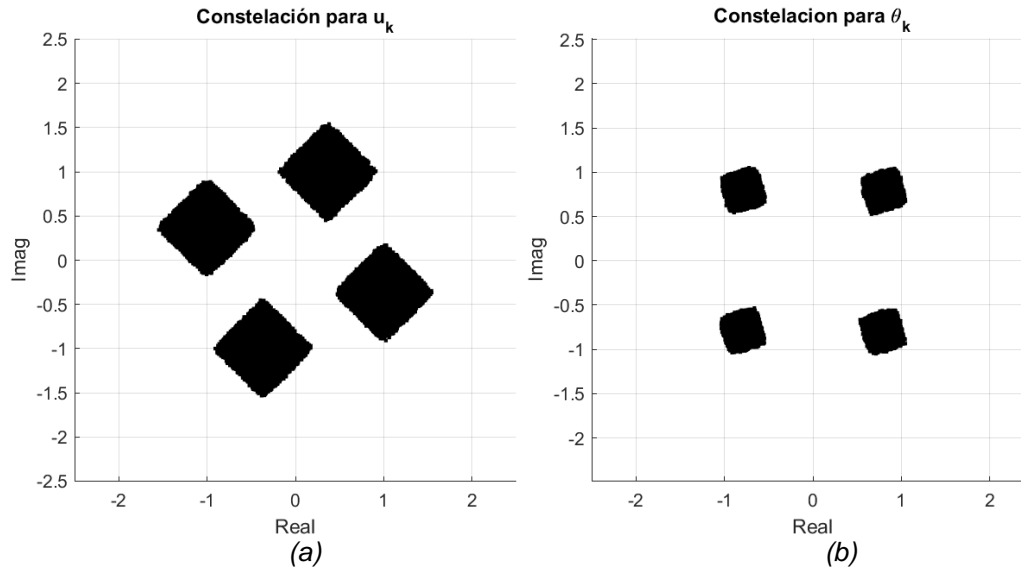


Figura 2.19. Constelaciones para (a)  $u_k$  (b)  $\theta_k$  en la prueba de validación 4 (escenario 1). Por los autores.

SER sin equalizador = 0.0197, 0.0195, 0.0203, 0.0198, 0.0201.  
SER con equalizador = 0

Canal 2:  $\alpha = 0.5$  y  $\tau = 3T/8$

Para el diseño del filtro correspondiente se utilizan 2 coeficientes (1 futuro), como se muestra en la Figura 2.20.

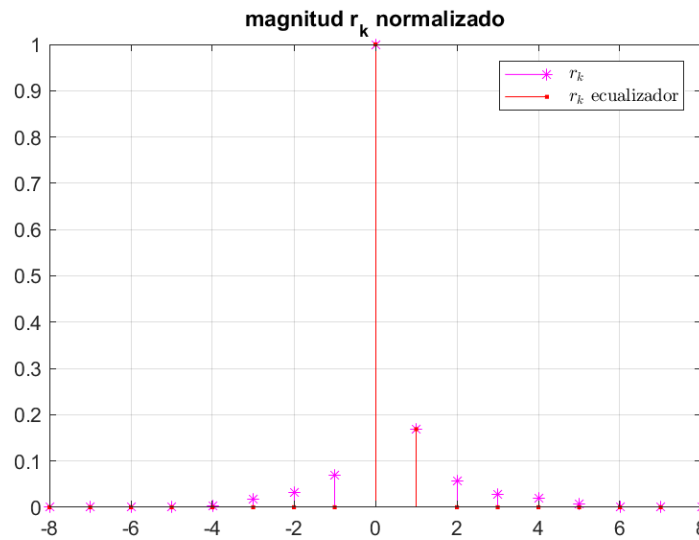


Figura 2.20. Magnitud  $r_k$  normalizado en la prueba de validación 4 (escenario 2). Por los autores.

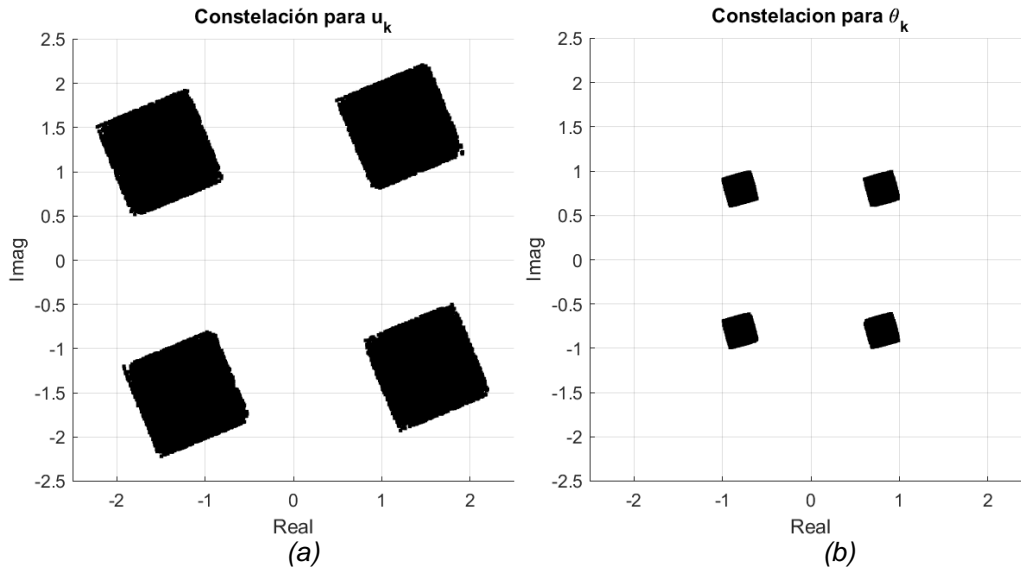


Figura 2.21. Constelaciones para (a)  $u_k$  (b)  $\theta_k$  en la prueba de validación 4 (escenario 2). Por los autores.

SER sin ecualizador = 0  
SER con ecualizador = 0

Canal 3:  $\alpha = 0.8$  y  $\tau = 3T/4$

Para el diseño del filtro correspondiente se utilizan 3 coeficientes (2 futuros), como se muestra en la Figura 2.22.

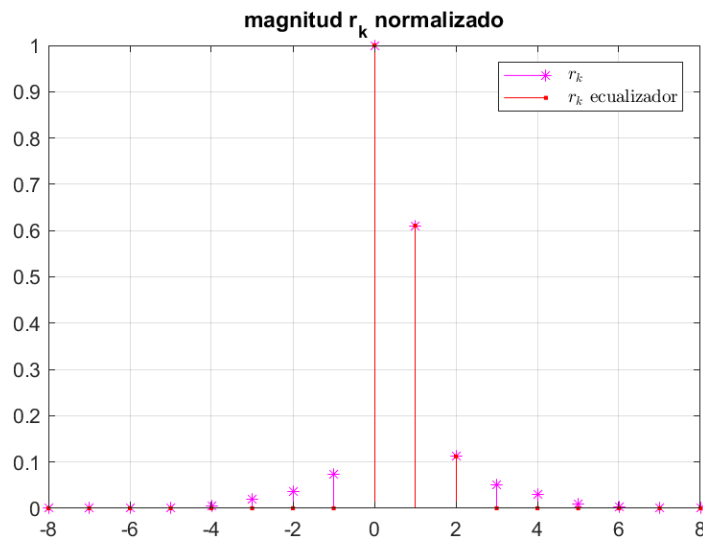


Figura 2.22. Magnitud  $r_k$  normalizado en la prueba de validación 4 (escenario 3). Por los autores.

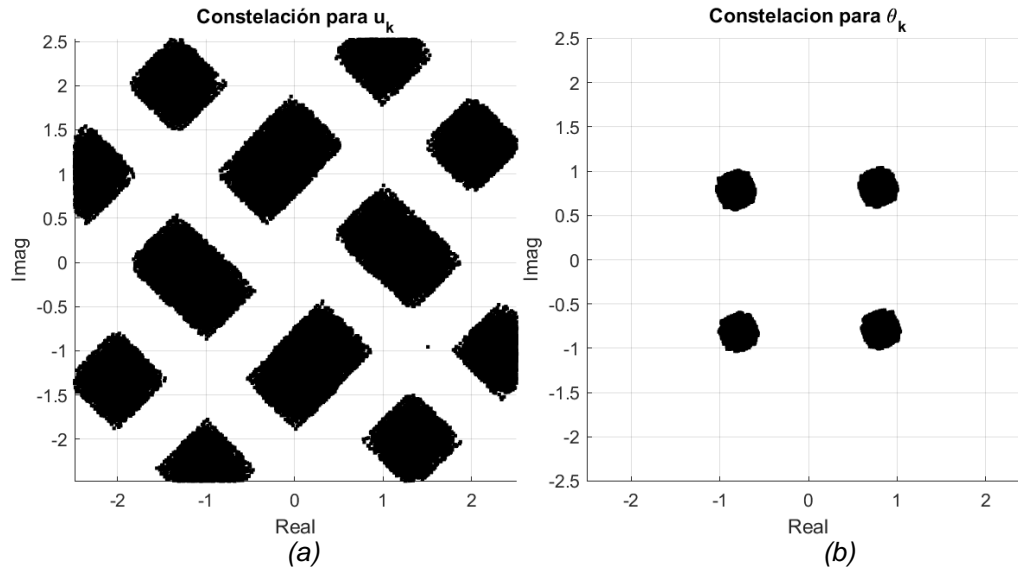


Figura 2.23. Constelaciones para (a)  $u_k$  (b)  $\theta_k$  en la prueba de validación 4 (escenario 3). Por los autores.

SER sin ecualizador = 0.1421, 0.1454, 0.1422, 0.1429, 0.1434.  
SER con ecualizador = 0

Los demás resultados para el enlace de comunicación digital sin ruido se presentan en el Apéndice: Pruebas de validación para enlaces de comunicación digital.



# CAPÍTULO 3

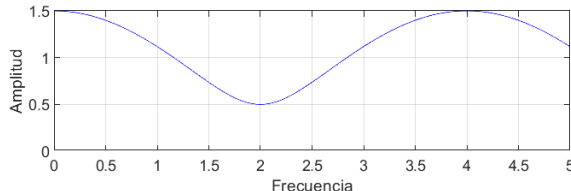
## 3. ANÁLISIS Y RESULTADOS

Este capítulo presenta el análisis y los resultados de desempeño del enlace de comunicación de única portadora con ecualización DFE-MMSE diseñado, respecto al enlace sin la etapa de ecualización. Primero, se estudia el desempeño del ecualizador ante los efectos del canal dispersivo, a través de diferentes escenarios de canal. Luego, se estudia el desempeño del ecualizador ante la complejidad en su diseño, a través de la longitud del ecualizador.

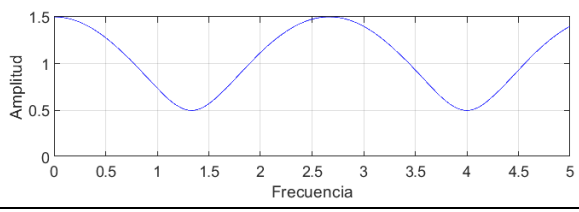
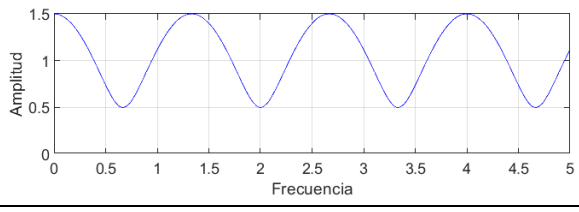
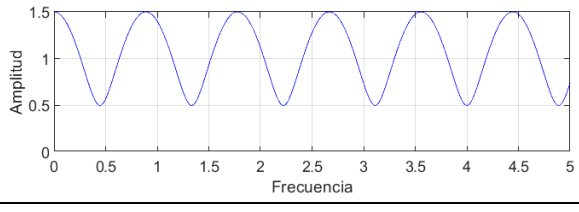
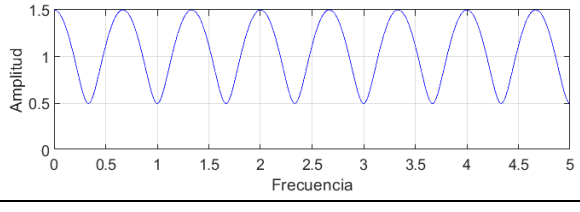
### 3.1. COMPARACIÓN DE DESEMPEÑO PARA DIFERENTES CANALES DISPERSIVOS GAUSSIANOS

La comparación de los resultados de desempeño del enlace de comunicación digital con ecualización DFE-MMSE se realizan a partir de los efectos del canal dispersivo Gaussiano. Los diferentes escenarios de canal están definidos por las características del rayo secundario, ganancia y retardo, como se observa en la Tabla 3.1.

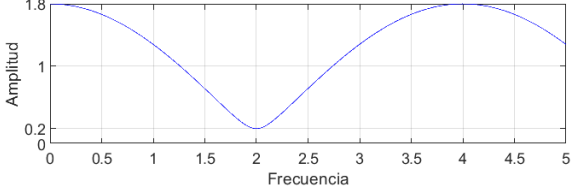
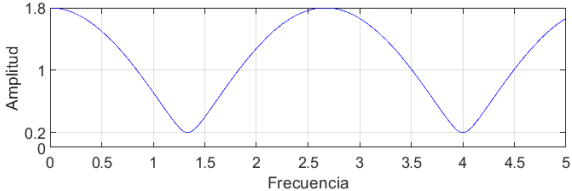
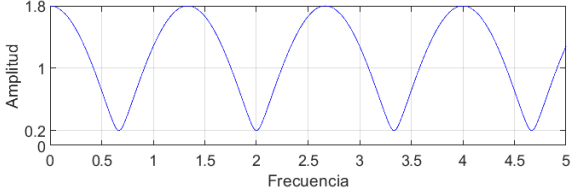
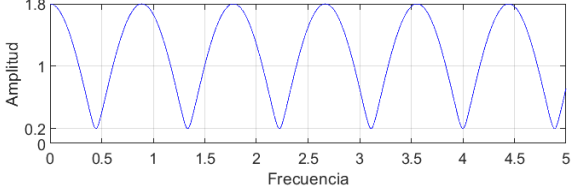
Tabla 3.1. Escenarios y respuesta de canal.

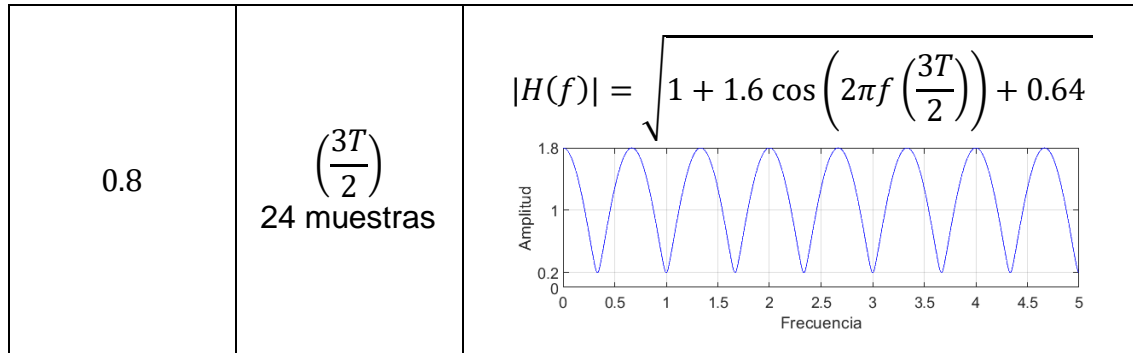
Escenario de canal		Respuesta de canal
Ganancia ( $\alpha$ )	Retardo ( $\tau$ )	
0.5	$\left(\frac{T}{4}\right)$ 4 muestras	$ H(f)  = \sqrt{1 + \cos\left(2\pi f \left(\frac{T}{4}\right)\right) + 0.25}$ 



0.5	$\left(\frac{3T}{8}\right)$ 6 muestras	$ H(f)  = \sqrt{1 + \cos\left(2\pi f \left(\frac{3T}{8}\right)\right) + 0.25}$ 
0.5	$\left(\frac{3T}{4}\right)$ 12 muestras	$ H(f)  = \sqrt{1 + \cos\left(2\pi f \left(\frac{3T}{4}\right)\right) + 0.25}$ 
0.5	$\left(\frac{9T}{8}\right)$ 18 muestras	$ H(f)  = \sqrt{1 + \cos\left(2\pi f \left(\frac{9T}{8}\right)\right) + 0.25}$ 
0.5	$\left(\frac{3T}{2}\right)$ 24 muestras	$ H(f)  = \sqrt{1 + \cos\left(2\pi f \left(\frac{3T}{2}\right)\right) + 0.25}$ 



0.8	$\left(\frac{T}{4}\right)$ 4 muestras	$ H(f)  = \sqrt{1 + 1.6 \cos\left(2\pi f \left(\frac{T}{4}\right)\right) + 0.64}$ 
0.8	$\left(\frac{3T}{8}\right)$ 6 muestras	$ H(f)  = \sqrt{1 + 1.6 \cos\left(2\pi f \left(\frac{3T}{8}\right)\right) + 0.64}$ 
0.8	$\left(\frac{3T}{4}\right)$ 12 muestras	$ H(f)  = \sqrt{1 + 1.6 \cos\left(2\pi f \left(\frac{3T}{4}\right)\right) + 0.64}$ 
0.8	$\left(\frac{9T}{8}\right)$ 18 muestras	$ H(f)  = \sqrt{1 + 1.6 \cos\left(2\pi f \left(\frac{9T}{8}\right)\right) + 0.64}$ 



En el diseño del ecualizador, se toman en cuenta los coeficientes complejos del canal discreto equivalente  $\{r_k\}$  tales que su magnitud normalizada supere el 10%, por lo tanto, la longitud del ecualizador puede ser diferente para cada escenario de canal.

### 2.3.5. Comportamiento del Enlace de Comunicación Digital

En la Figura 3.1 se muestran las señales transmitida y recibida sobre el canal dispersivo Gaussiano para cada escenario de canal al variar los parámetros de ganancia y retardo del rayo secundario con  $E_b/N_0 = 10$  dB. Se obtiene que las señales  $x(t)$  y  $y(t)$  son diferentes, tal diferencia corresponde a la distorsión y ruido AWGN introducido por el canal dispersivo Gaussiano. Se debe tener en cuenta que los primeros 4 periodos de símbolos corresponden al retardo de procesamiento del filtro conformador  $p(t)$ .

En la Figura 3.2 se muestran los espectros de las señales transmitida y recibida sobre el canal dispersivo Gaussiano y la respuesta del canal, para cada escenario de canal, al variar los parámetros de ganancia y retardo del rayo secundario con  $E_b/N_0 = 10$  dB.

En la Tabla 3.2 se muestran los diagramas de constelación de los símbolos recibidos para cada escenario de canal, al variar los parámetros de ganancia y retardo del rayo secundario con  $E_b/N_0 = 10$  dB.



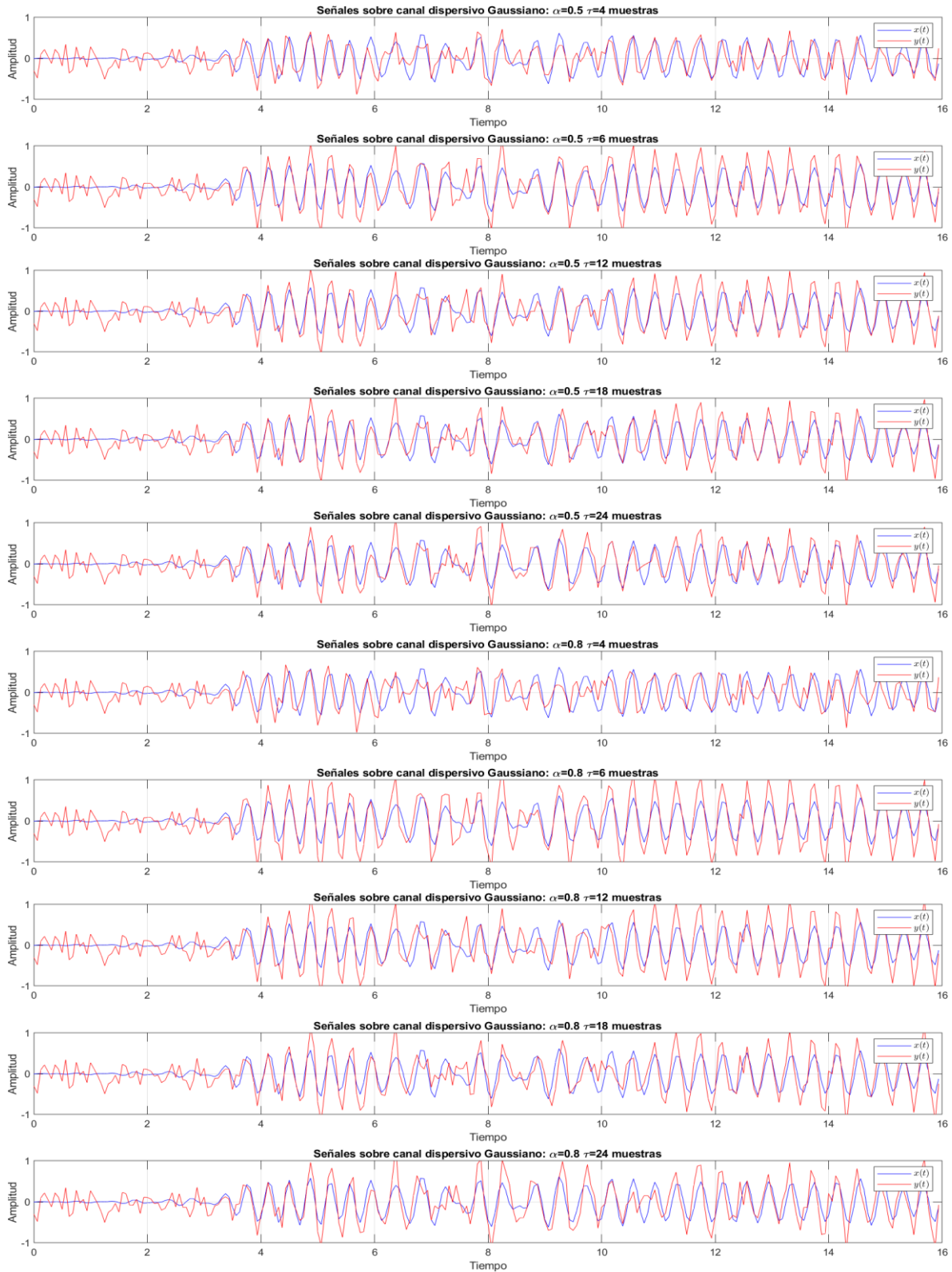


Figura 3.1. Señales transmitida y recibida sobre el canal dispersivo Gaussiano al variar los parámetros del rayo secundario. Por los autores.

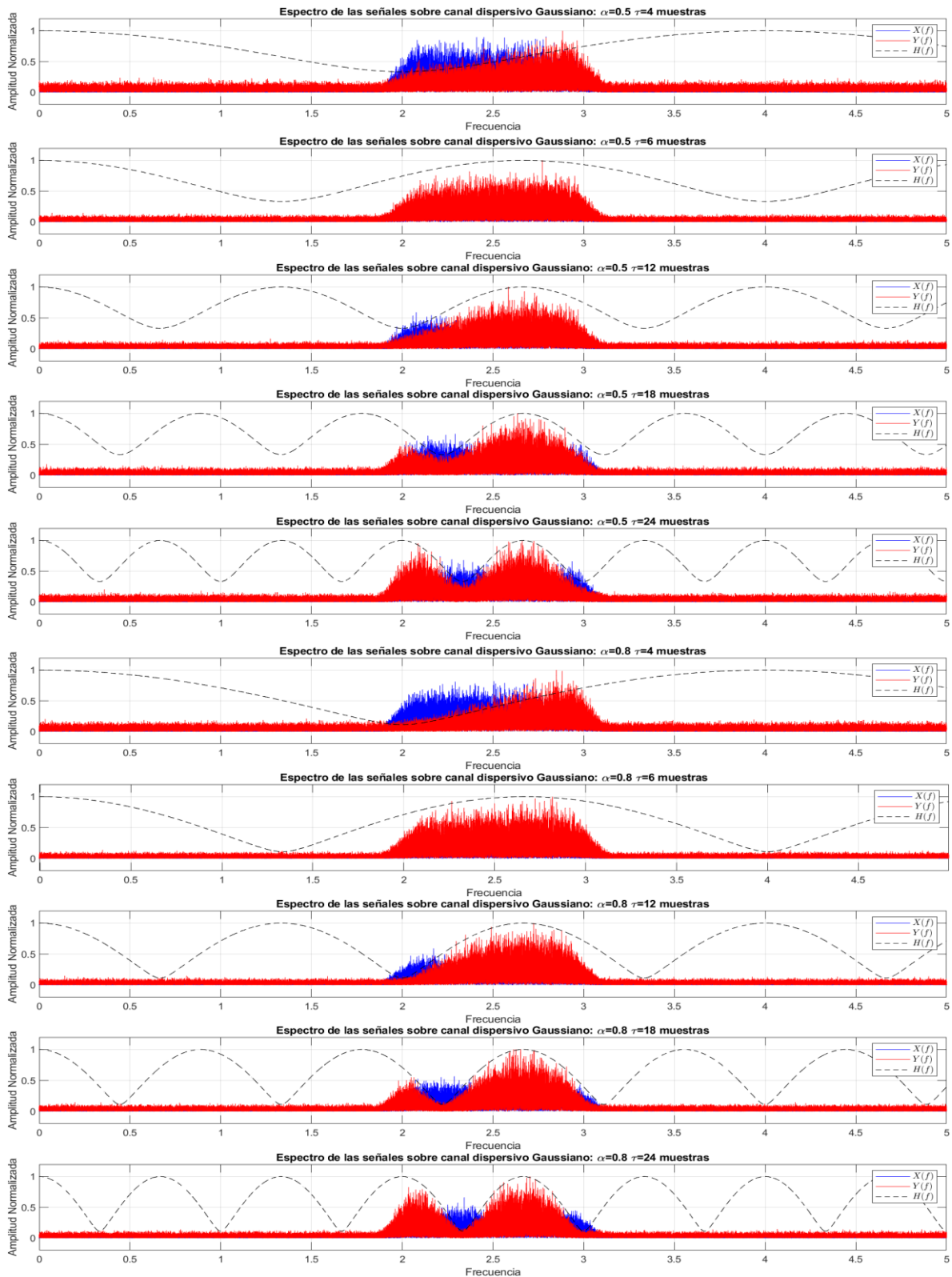
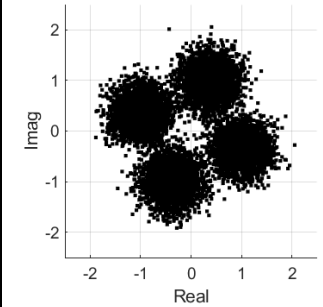
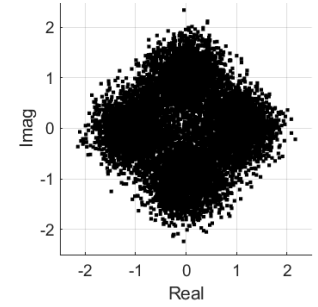
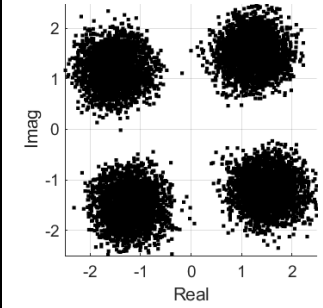
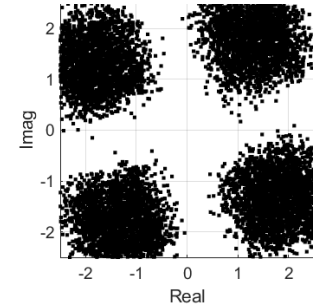
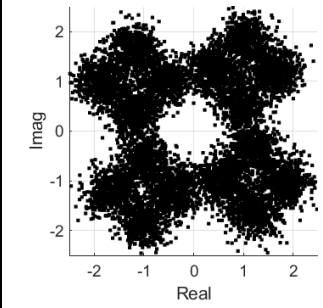
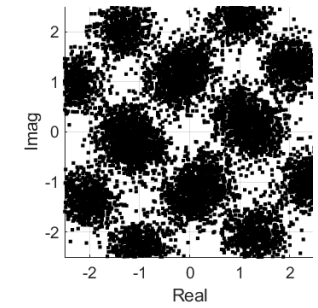
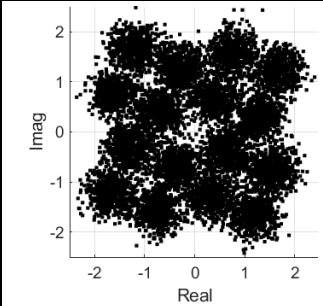
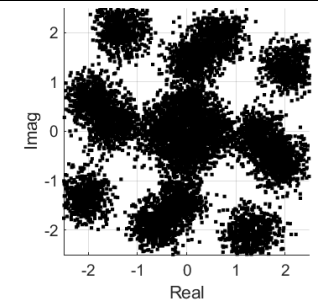
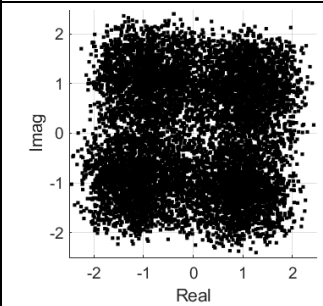
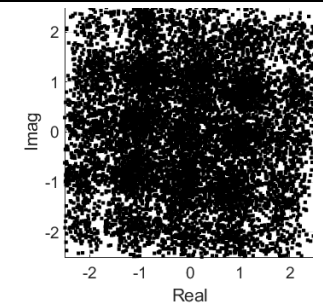


Figura 3.2. Espectros de señales sobre el canal dispersivo Gaussiano al variar los parámetros del rayo secundario. Por los autores.



Tabla 3.2. Diagramas de constelación sin equalización al variar los parámetros del rayo secundario.

Escenario de canal	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.8$
$\tau = T/4$ 4 muestras		
$\tau = 3T/8$ 6 muestras		
$\tau = 3T/4$ 12 muestras		
$\tau = 9T/8$ 18 muestras		
$\tau = 3T/2$ 24 muestras		



En las Figuras 3.1, 3.2 y en la Tabla 3.2 se observa el comportamiento del enlace de comunicación digital sobre los escenarios de canal dispersivo Gaussiano, donde la distorsión introducida está representada por los valores en conjunto de ganancia y retardo del rayo secundario y reflejada en la respuesta  $h(t)$  compleja, y el nivel de ruido adicionado está representado por la  $E_b/N_0$ .

Mientras el retardo del rayo secundario es el causante de que la señal transmitida sobre el canal dispersivo presente alteraciones, la ganancia del rayo secundario determina en qué medida dichas alteraciones afectan la señal transmitida. Para mayores valores de ganancia, los efectos causados por el retardo son más significativos.

En el dominio del tiempo, el rayo secundario define si la interferencia introducida es constructiva o destructiva. Se puede observar que los escenarios de canal con  $\tau = 6$  muestras poseen un impacto constructivo significativo.

En el dominio de la frecuencia, el rayo secundario define cómo la respuesta del canal distorsiona la banda de frecuencias ocupada por el espectro de la señal transmitida, que está centrada en la frecuencia portadora  $f_c$ .

En los diagramas de constelación, el rayo secundario define cómo la interferencia introducida afecta a los símbolos transmitidos, las observaciones en recepción presentan efectos de rotación, distribución difusa y descentrado de sus posiciones originales en el plano complejo, de tal forma que se pueden observar agrupaciones totalmente diferentes.

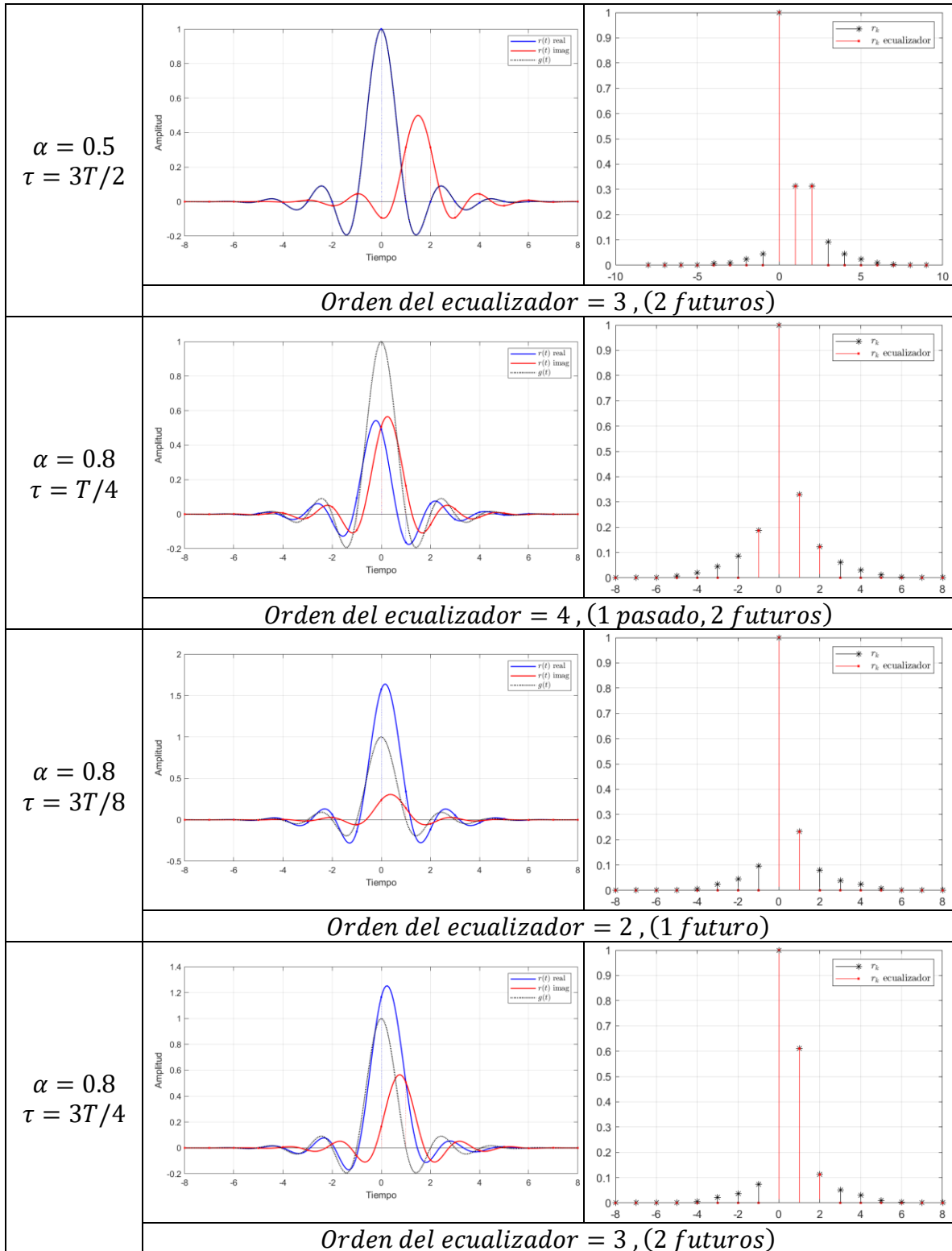
### **2.3.6. Diseño del Ecualizador DFE-MMSE**

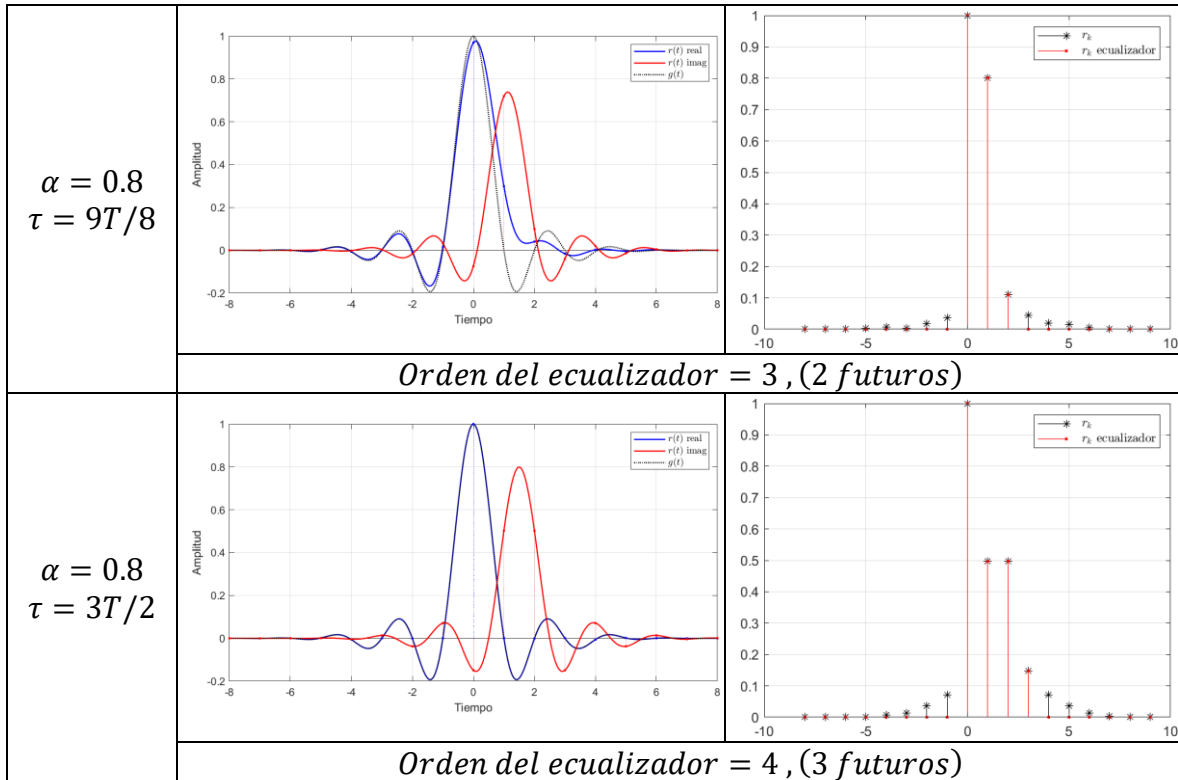
En la Tabla 3.3 se muestra la respuesta global al impulso del enlace de comunicación digital  $r(t)$  sobre el canal dispersivo Gaussiano y la magnitud normalizada de los coeficientes complejos del canal discreto equivalente  $\{r_k\}$  que superan el 10% (que determinan la longitud del ecualizador) para cada escenario de canal, al variar los parámetros de ganancia y retardo del rayo secundario.



Tabla 3.3. Respuesta global al impulso del enlace de comunicación digital.

Escenario de canal	Respuesta global al impulso del enlace de comunicación digital	Magnitud normalizada de $\{r_k\}$ que superan el 10%
$\alpha = 0.5$ $\tau = T/4$		
<i>Orden del ecualizador = 3, (1 pasado y 1 futuro)</i>		
$\alpha = 0.5$ $\tau = 3T/8$		
<i>Orden del ecualizador = 2, (1 futuro)</i>		
$\alpha = 0.5$ $\tau = 3T/4$		
<i>Orden del ecualizador = 2, (1 futuro)</i>		
$\alpha = 0.5$ $\tau = 9T/8$		
<i>Orden del ecualizador = 2, (1 futuro)</i>		





En la Tabla 3.3 se observa el comportamiento de la respuesta global al impulso del enlace de comunicación sobre los escenarios de canal dispersivo Gaussiano, donde se obtiene una representación compleja de  $r(t)$  que distorsiona los símbolos transmitidos en amplitud y fase, por lo tanto,  $r(t) \neq g(t)$  no satisface el criterio de Nyquist para una respuesta libre de ISI. También se observa el comportamiento a nivel de los coeficientes del canal discreto equivalente  $\{r_k\}$ , donde se determina la profundidad de la ISI. Para el diseño del equalizador, se determina su longitud a partir de la magnitud normalizada de los  $\{r_k\}$  que superan un porcentaje significativo, lo cual representa la profundidad de ISI que el equalizador tiene en cuenta. Para estos diseños, se puede observar que los coeficientes  $\{r_k\}$  que mayor peso de ISI tendrán en el símbolo deseado serán las copias de las observaciones adyacentes, sin embargo, para escenarios de canal con mayor retardo en el rayo secundario, esto puede cambiar. Para los escenarios con  $\tau = 24$  muestras, un coeficiente no adyacente ( $r_2$ ) tiene tanto impacto como un coeficiente adyacente ( $r_1$ ) respecto al coeficiente que determina al rayo principal  $r_0$ .

### 2.3.7. Desempeño del Equalizador DFE-MMSE

#### 3.1.1.1. Desempeño en el diagrama de constelación

En la Tabla 3.4 se muestran los diagramas de constelación, tanto de las observaciones, como de las variables de decisión luego del equalizador, para cada



escenario de canal, al variar los parámetros de ganancia y retardo del rayo secundario, con  $E_b/N_0 = 10 \text{ dB}$ .

Tabla 3.4. Diagramas de constelación antes y después de la equalización al variar los parámetros del rayo secundario.

Escenario de canal	$\alpha = 0.5$		$\alpha = 0.8$	
	Antes	Después	Antes	Después
$\tau = T/4 = 4$ muestras				
$\tau = 3T/8 = 6$ muestras				
$\tau = 3T/4 = 12$ muestras				
$\tau = 9T/8 = 18$ muestras				
$\tau = 3T/2 = 24$ muestras				

Como se observa en la Tabla 3.4, la comparación de los diagramas de constelación antes (observaciones  $\{u_k\}$ ) y después (variables de decisión  $\{\theta_k\}$ ) del equalizador DFE-MMSE representa el desempeño del equalizador en cada escenario del enlace de comunicación. Se observa que, para la mayoría de los escenarios, hay una





mejora significativa en el efecto de rotación y en el agrupamiento conforme al esquema de modulación 4-QAM, reduciendo la incertidumbre cerca al origen, sin embargo, para los escenarios con  $\tau = 4$  muestras, el agrupamiento no es muy notorio.

### 3.1.1.2. Desempeño en la SINR

En la Figura 3.3 se muestran las curvas SINR vs SNR y Ganancia de equalización vs SNR para el enlace de comunicación digital con canal dispersivo Gaussiano, para cada escenario de canal al variar los parámetros de ganancia y retardo del rayo secundario, al variar  $E_b/N_0$  de 0 a 12 dB.

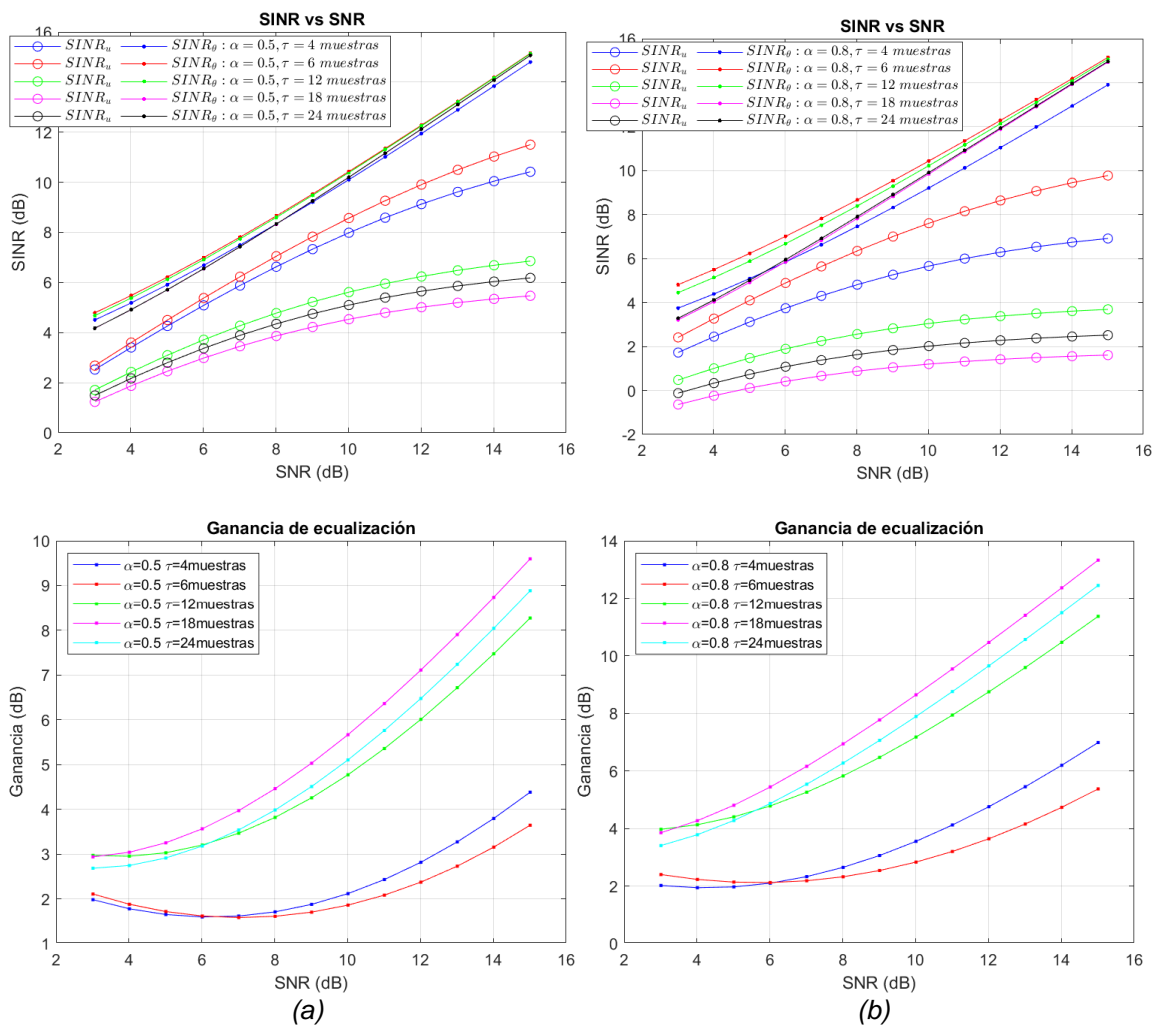


Figura 3.3. Curvas (a) SINR vs SNR y (b) Ganancia de equalización vs SNR. Por los autores.

Como se observa en la Figura 3.3, la comparación de la SINR antes (observación  $u_k$ ) y después (variable de decisión  $\theta_k$ ) del equalizador DFE-MMSE representa la ganancia del equalizador en función de la SNR en cada escenario del enlace de

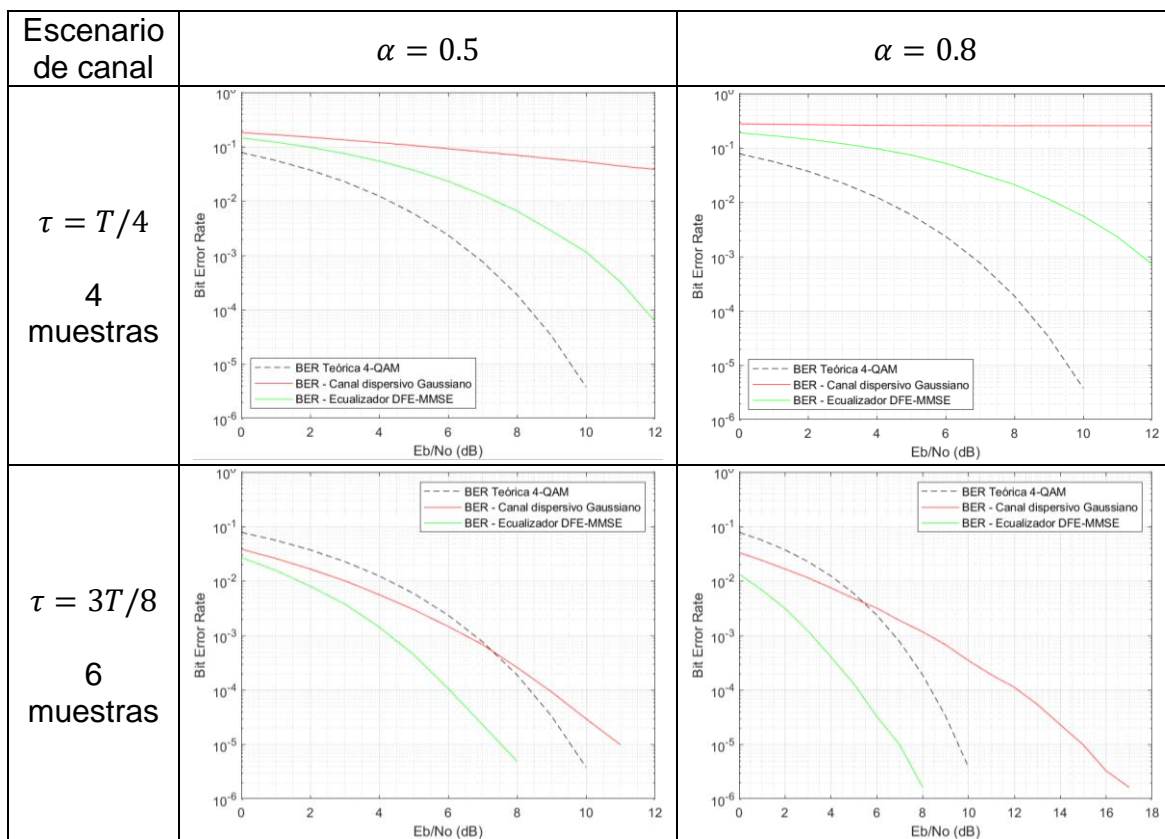


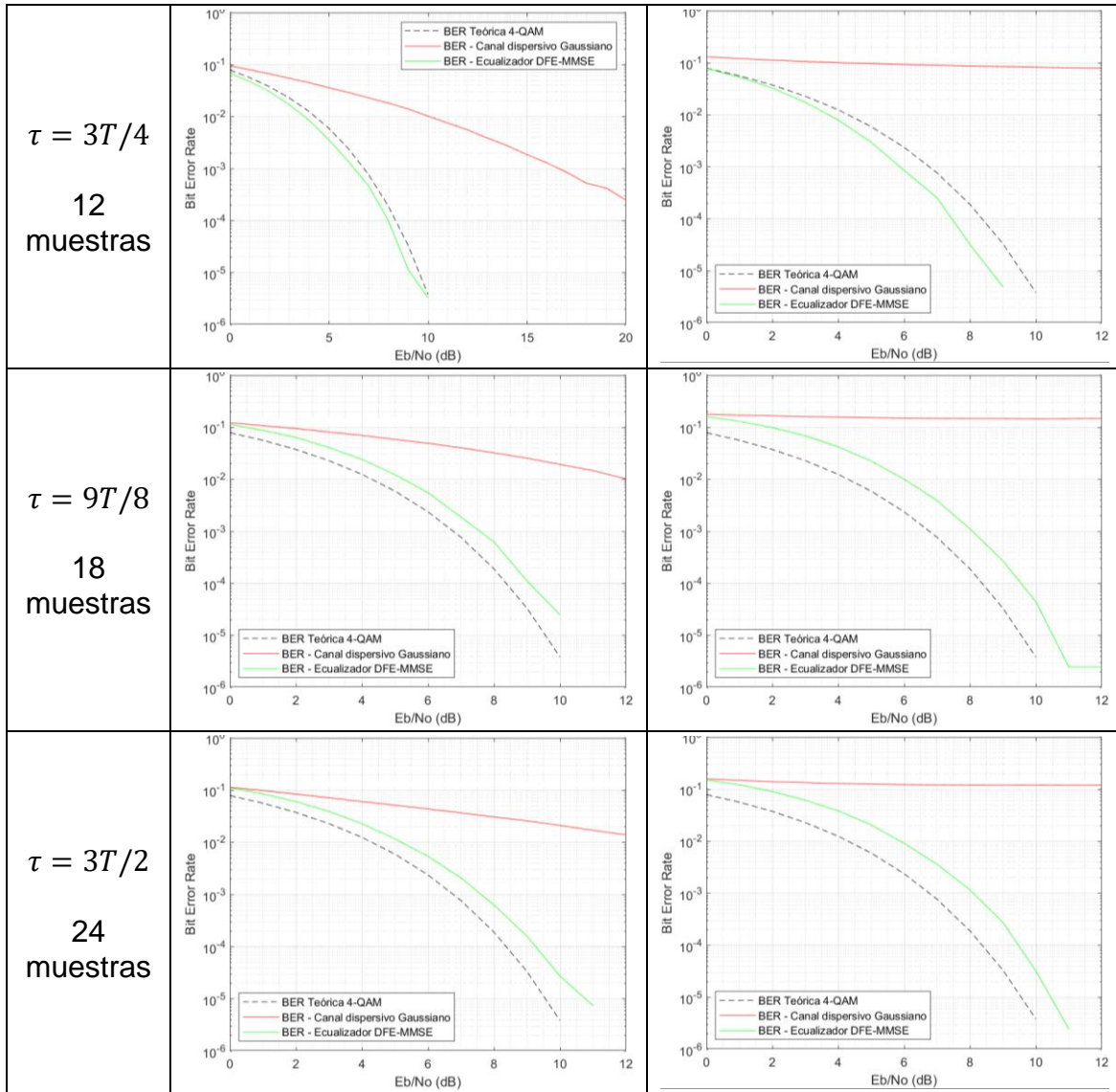
comunicación, donde se puede determinar qué tanto puede disminuir la suma de ISI y de ruido introducida en la señal recibida. Se observa que, para la mayoría de los escenarios, hay una ganancia de SINR significativa, con un efecto proporcional al aumentar la SNR. Para los escenarios con  $\tau = 4$  muestras y  $\tau = 6$  muestras la ganancia es menor respecto a la SINR sin ecualización, sin embargo, solamente para el segundo escenario se puede inferir que su poca ganancia se debe a la caracterización constructiva de su respuesta al impulso.

### 3.1.1.3. Desempeño en la BER

En la Tabla 3.5 se muestran las curvas BER vs  $E_b/N_0$  para el enlace de comunicación digital con canal dispersivo Gaussiano, para cada escenario de canal al variar los parámetros de ganancia y retardo del rayo secundario, al variar  $E_b/N_0$  de 0 a 12 dB.

Tabla 3.5. Curvas de desempeño BER vs  $E_b/N_0$ .





Como se observa en la Tabla 3.5, la comparación de la BER del enlace de comunicación digital con y sin ecualizador DFE-MMSE, sobre los escenarios de canal dispersivo Gaussiano, representa el desempeño del ecualizador en función de la  $E_b/N_o$ , donde se puede determinar qué tan rápido disminuye la BER al aumentar la  $E_b/N_o$  y qué tanta diferencia (impacto del ecualizador) de  $E_b/N_o$  existe para lograr un mismo valor de BER entre los dos enlaces comparados.

Se observa que, para todos los escenarios, hay una mejora significativa del desempeño de la BER, y en algunos casos, tan buena que se aproxima o incluso mejora el desempeño de la BER en un enlace de comunicación sobre un canal AWGN. Los escenarios anteriormente diferenciados por su comportamiento y desempeño, reafirman su caracterización:



- Los escenarios con  $\tau = 4$  muestras tienen una curva de desempeño BER que baja lento, para una  $E_b/N_0 = 12$  dB se logra alcanzar una  $BER = 10^{-4}$  y una  $BER = 10^{-3}$  con  $\alpha = 0.5$  y  $\alpha = 0.8$  respectivamente.
- Los escenarios con  $\tau = 6$  muestras tienen una curva de desempeño de la BER que se encuentra por debajo de la curva correspondiente a un enlace de comunicación con un canal AWGN. Incluso en el caso del enlace sin ecualización, su curva de BER está por debajo cuando la relación señal a ruido  $E_b/N_0$  es inferior a 8 dB con un valor de  $\alpha$  igual a 0.5 y a 6 dB con un valor de  $\alpha$  igual a 0.8, aproximadamente.

En la Tabla 3.6 se muestra el impacto del ecualizador para cada escenario de canal al variar los parámetros de ganancia y retardo del rayo secundario.

Tabla 3.6. Impacto del ecualizador al variar los parámetros del rayo secundario.

Impacto del ecualizador en una BER de $10^{-3}$				
$\alpha$	$\tau$	$E_b/N_0$ (dB)	$E_b/N_0$ eq (dB)	Impacto
0.5	4 muestras	--	10.08	$\infty$
	6 muestras	6.49	4.38	2.11
	12 muestras	16.70	6.30	10.4
	18 muestras	17.27	7.57	9.7
	24 muestras	22.61	7.64	14.97
0.8	4 muestras	--	11.80	$\infty$
	6 muestras	8.16	3.21	4.95
	12 muestras	--	5.94	$\infty$
	18 muestras	--	8.13	$\infty$
	24 muestras	--	8.14	$\infty$

Como se observa en la Tabla 3.6, la  $E_b/N_0$  requerida para una BER objetivo de  $10^{-3}$  para el enlace de comunicación con ecualización es diferente para cada escenario y el impacto respecto al enlace de comunicación sin ecualización es favorable en todos los casos. En la mayor parte de los escenarios evaluados, la distorsión presente es tan severa que no permite analizar cuantitativamente el desempeño del ecualizador DFE-MMSE, sobre todo cuando la ganancia del rayo secundario aumenta a  $\alpha = 0.8$ .

Si bien, al aumentar la ganancia del rayo secundario los efectos dispersivos definidos por el retardo aumentan, no se puede determinar si tal proporción influye en el efecto de desempeño del ecualizador, como se puede observar con los valores del impacto del ecualizador y las curvas de desempeño BER vs  $E_b/N_0$ .



### 3.2. COMPARACIÓN DE DESEMPEÑO PARA DIFERENTES LONGITUDES DEL ECUALIZADOR

La comparación del desempeño del enlace de comunicación con ecualización DFE-MMSE se realiza a partir de la complejidad del diseño del ecualizador. Los diferentes escenarios de ecualización están definidos por la longitud del ecualizador, para 3 diferentes escenarios de canal definidos por las características del rayo secundario, ganancia y retardo, como se observa en la Tabla 3.7.

Tabla 3.7. Escenarios de ecualización definidos por la longitud del ecualizador.

Canal discreto equivalente normalizado	Escenario de ecualización	
	Número de coeficientes	Porcentaje %
$\alpha = 0.5, \tau = T/4 = 4$ muestras 	2 (un futuro)	19.27 – 10.98
	3 (un pasado y un futuro)	10.97 – 7.15
	4 (un pasado y dos futuros)	7.14.– 5.02
	5 (dos pasados y dos futuros)	5.01 – 3.52
$\alpha = 0.5, \tau = 3T/4 = 12$ muestras 	2 (un futuro)	40.53 – 7.47
	3 (dos futuros)	7.46 – 4.86
	4 (un pasado y dos futuros)	4.85 – 3.39
	5 (un pasado y tres futuros)	3.38 – 2.38
$\alpha = 0.5, \tau = 3T/2 = 24$ muestras 	2 (un futuro) <sup>4</sup>	31.25 – 9.30
	3 (dos futuros)	31.25 – 9.30
	4 (tres futuros)	9.29 – 4.48
	5 (cuatro futuros)	4.47 – 4.44

En la Tabla 3.7 se observan los coeficientes del canal discreto equivalente, para cada escenario de canal dispersivo Gaussiano, que se utilizan para definir la

<sup>4</sup> Se modifica el código en Matlab para analizar el escenario con un solo futuro.



profundidad de la ISI que el ecualizador tiene en cuenta. En este esquema, el coeficiente correspondiente al instante 0 se considera el 100%, y a partir de este punto se calculan los porcentajes relativos de los otros coeficientes.

De esta forma, la magnitud de los  $\{r_k\}$  que superan el porcentaje mínimo definido se consideran como los coeficientes del canal discreto equivalente óptimos o la profundidad de la ISI significativa.

Cabe destacar el escenario con  $\tau = 24$  muestras, ya que dos coeficientes  $\{r_k\}$  que representan la ISI, tienen un valor significativo y parecido.

### 2.3.8. Desempeño del Ecualizador DFE-MMSE

#### 3.2.1.1. Desempeño en el diagrama de constelación

Tabla 3.8. Diagramas de constelación al variar la longitud del ecualizador.

Escenario	Sin ecualización	Con ecualización		
		2 coeficientes	3 coeficientes	4 coeficientes
$\alpha = 0.5$ $\tau = T/4$ 4 muestras				
$\alpha = 0.5$ $\tau = 3T/4$ 12 muestras				
$\alpha = 0.5$ $\tau = 3T/2$ 24 muestras				

Como se observa en la Tabla 3.8, al variar la longitud del ecualizador, solamente en el escenario con  $\tau = 24$  muestras, cuando se pasa de 2 a 3 coeficientes, se observa en los diagramas de constelación un cambio significativo en el agrupamiento conforme al esquema de modulación 4-QAM.



### 3.2.1.2. Desempeño en la SINR

En la Figuras 3.4 y 3.5 se muestran las curvas SINR vs SNR y Ganancia de equalización vs SNR, respectivamente, variando la longitud del equalizador.

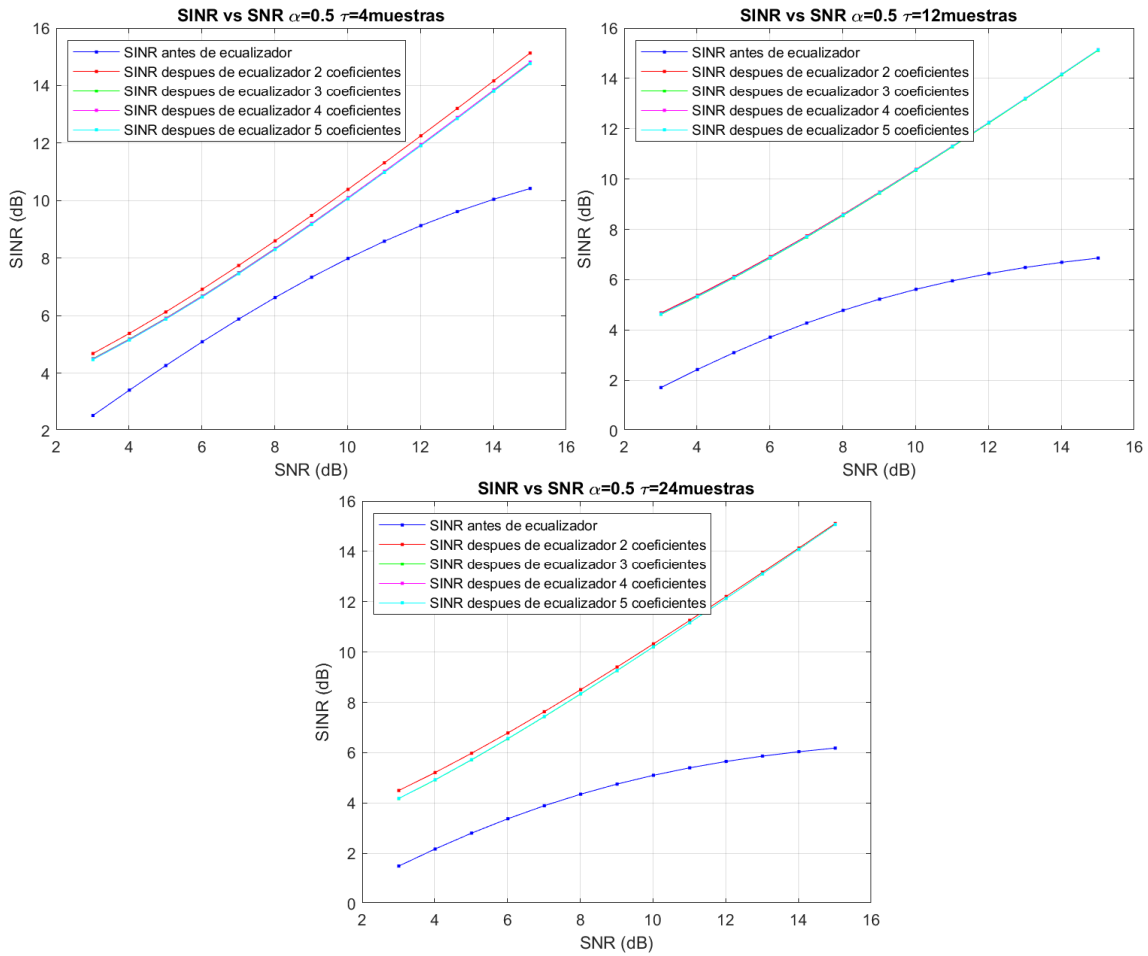


Figura 3.4. SINR vs SNR variando la longitud del equalizador. Por los autores.

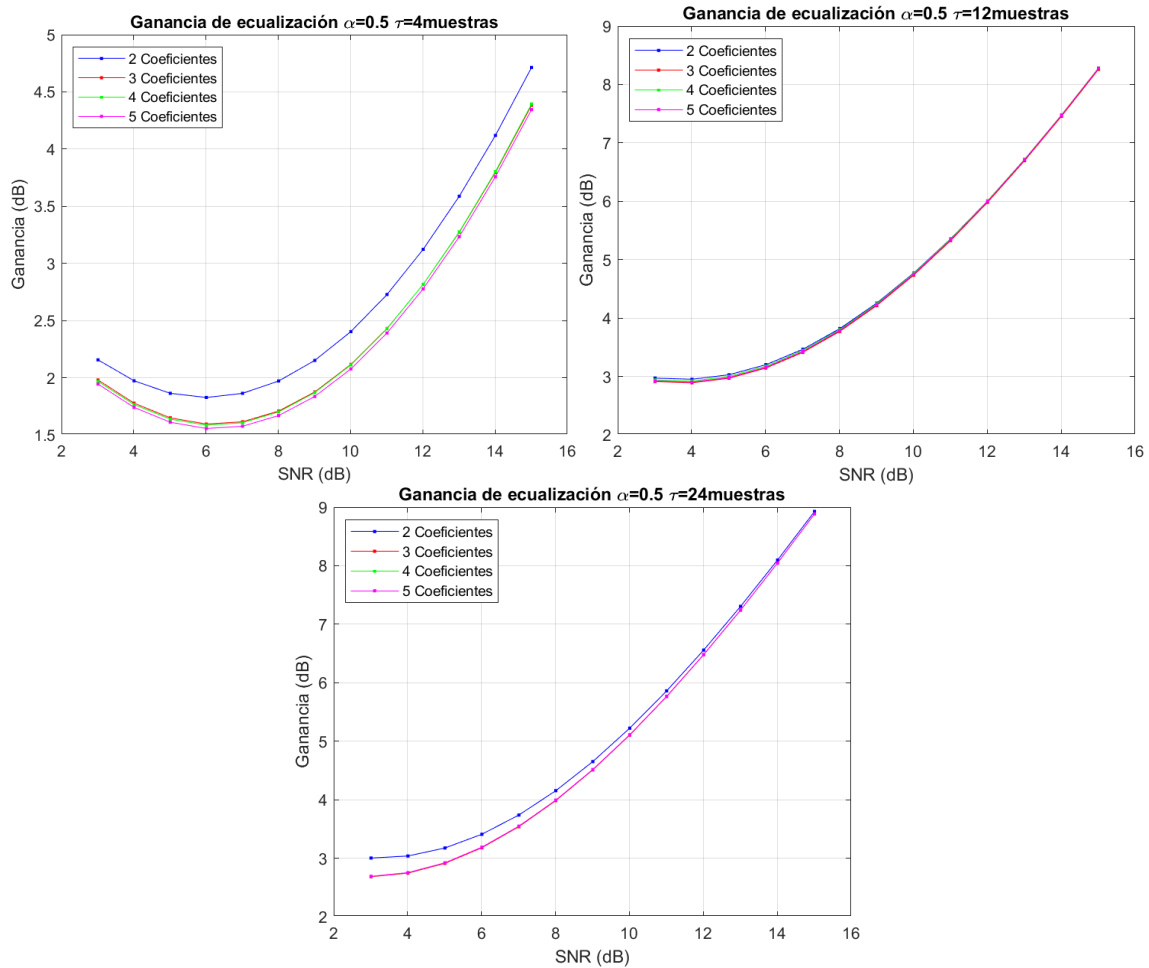


Figura 3.5. Ganancia de equalización variando la longitud del equalizador. Por los autores.

Las curvas de SINR vs SNR y ganancia de equalización al variar la longitud del equalizador no corresponden con el desempeño global del enlace de comunicación. Esto se debe a que la forma de obtener la SINR en Matlab solo tiene en cuenta los coeficientes del canal discreto equivalente que se utilizan en el diseño del equalizador. Por lo tanto, en la Figuras 3.4 y 3.5, se observa que, al variar la longitud del equalizador, las curvas de SINR vs SNR y la ganancia de equalización tienden a estabilizarse al escenario donde el equalizador utilizaría todos los coeficientes del canal discreto equivalente que introducen ISI.

### 3.2.1.3. Desempeño en la BER

En la Figura 3.6 se muestran las curvas BER vs  $E_b/N_0$  para el enlace de comunicación digital con canal dispersivo Gaussiano, para cada escenario de equalización.



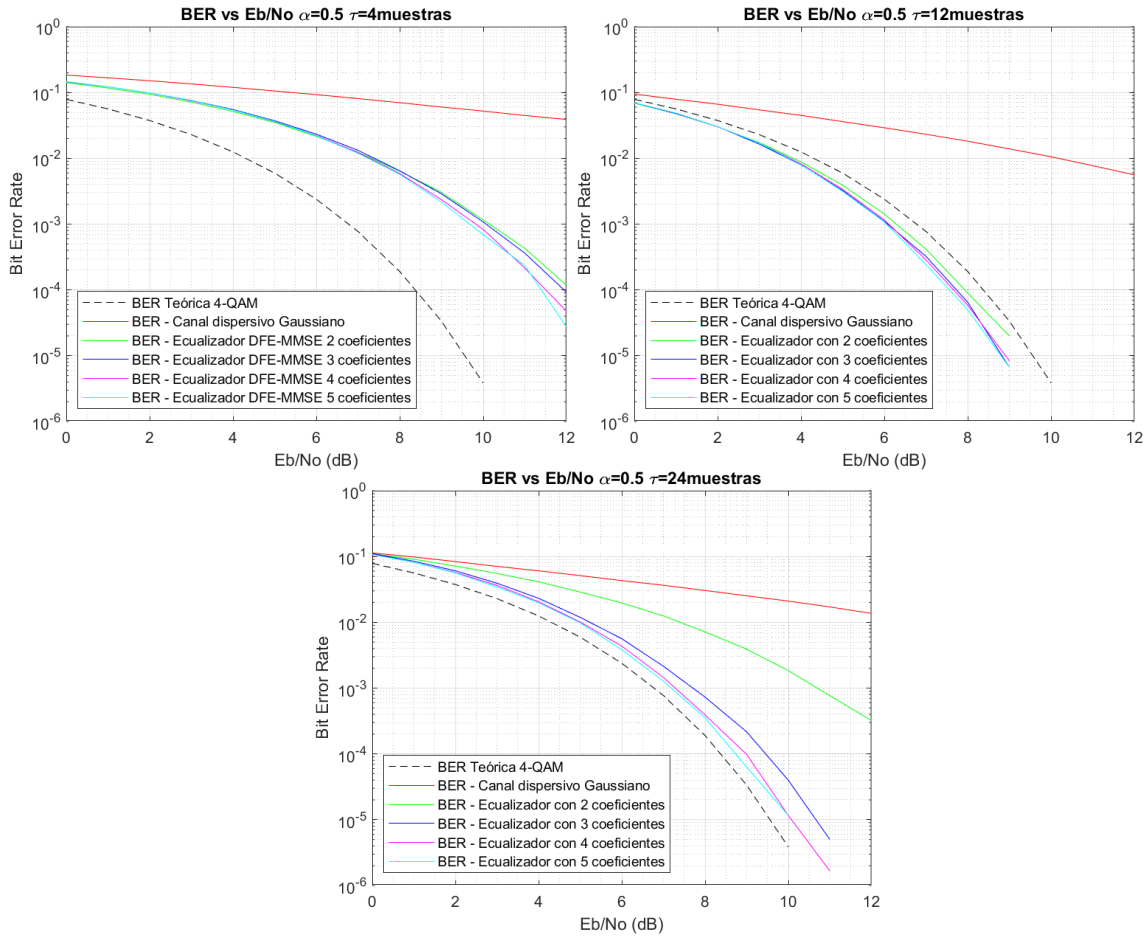


Figura 3.6. BER vs  $E_b/N_o$  variando la longitud del equalizador. Por los autores.

En la Figura 3.6 se observa que, al variar la longitud del equalizador, el impacto en las gráficas de BER vs  $E_b/N_o$  es mínimo, solamente en el escenario con  $\tau = 24$  muestras, cuando se pasa de 2 a 3 coeficientes, se observa un impacto significativo en la curva de desempeño BER que baja rápido hasta estabilizarse.

En la Tabla 3.9 se muestra el impacto para cada escenario de equalización.

Tabla 3.9. Impacto del equalizador al variar la longitud del equalizador.

Impacto del equalizador en una BER de $10^{-3}$				
Canal	# Coeficientes	$E_b/N_o$ (dB)	$E_b/N_o$ eq (dB)	Impacto
$\alpha = 0.5$ $\tau = 4$ muestras	2	--	10.20	$\infty$
	3	--	10.08	$\infty$
	4	--	9.55	$\infty$
	5	--	7.57	9.70
$\alpha = 0.5$ $\tau = 12$ muestras	2	16.56	6.26	10.30
	3	16.56	6.08	10.48
	4	16.56	6.08	10.48
	5	16.56	6.04	10.52



$\alpha = 0.5$ $\tau = 24$ muestras	2	22.90	10.8	12.1
	3	22.90	7.7	15.2
	4	22.90	7.3	15.6
	5	22.90	7.2	15.7

Como se observa en la Tabla 3.9, al variar la longitud del ecualizador, la  $E_b/N_0$  requerida para un BER objetivo de  $10^{-3}$  disminuye levemente. En los escenarios con  $\alpha = 0.5$ , la distorsión presente es tan severa que no permite analizar cuantitativamente el desempeño del ecualizador DFE-MMSE.

El desempeño de este diseño de ecualizador, sugiere que al aumentar la longitud del ecualizador se obtienen mejoras no significativas en el desempeño del enlace de comunicación, cuando se utilizan porcentajes bajos que determinan la profundidad de ISI a tener en cuenta. Sin embargo, la longitud del ecualizador toma más relevancia cuando la amplitud de los coeficientes del canal discreto equivalente supera un porcentaje significativamente alto.



# CAPÍTULO 4

## 4. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

---

### 4.1. CONCLUSIONES

- El desempeño de un enlace de comunicación no depende únicamente de la distorsión causada por el canal de comunicación. Es esencial coordinar esfuerzos tanto en el diseño del transmisor como en el receptor. Por lo tanto, resulta apropiado utilizar una representación que involucre el efecto conjunto del transmisor, del canal y del receptor, tal como lo hace la respuesta al impulso global del enlace de comunicación digital.
- El desempeño a nivel de la BER en un enlace de comunicación digital sobre un canal dispersivo Gaussiano mejora significativamente al emplear la técnica de ecualización DFE-MMSE, esto se debe al hecho de que esta técnica de ecualización trata de reducir de forma simultánea tanto la potencia de ISI como la potencia de ruido presente en la observación original. Dicha mejora se puede constatar, no solo en la curva de desempeño de BER vs  $E_b/N_0$ , sino en los diagramas de constelación y en la SINR de la variable de decisión generada por el ecualizador.
- La mejora de desempeño lograda con el ecualizador DFE-MMSE depende del escenario particular que se esté considerando. Por ejemplo, en el escenario constituido por un rayo directo (de ganancia 1 y retardo 0) y un rayo secundario (de ganancia 0.5 y retardo  $3T/4$ ), la mejora de desempeño obtenida con el ecualizador es de 10.4 dB para un BER de referencia de  $10^{-3}$ , es decir, que la incorporación del ecualizador permite reducir la potencia de transmisión a la décima parte para lograr la tasa de error indicada. Sin embargo, en la mayoría de los escenarios considerados, la mejora de desempeño obtenida con el ecualizador es infinita.
- La longitud de un ecualizador DFE-MMSE es uno de los parámetros que se pueden optimizar. Si bien, el desempeño mejora al aumentar el número de coeficientes, al sobrepasar cierta cantidad de ellos la mejora de desempeño se torna despreciable
- La longitud del ecualizador DFE-MMSE implementado en este trabajo de grado depende de la cantidad de coeficientes del canal discreto equivalente que introducen ISI significativa. En general, el desempeño del ecualizador mejora con el aumento de su longitud, pero al aumentar indefinidamente dicha longitud, la mejora de desempeño puede tonarse despreciable. Es por eso que debe buscarse un punto de equilibrio entre longitud del ecualizador



y desempeño de la tasa de error, para de esa manera lograr buenas prestaciones a cambio de una complejidad computacional razonable.

- En la mayoría de los escenarios considerados, fue suficiente diseñar el ecualizador considerando únicamente los dos coeficientes más significativos del canal discreto equivalente para lograr un desempeño aceptable de la BER. En los demás escenarios fue necesario considerar un tercer coeficiente cuando la magnitud del mismo igualaba la del segundo coeficiente más significativo.

#### **4.2. TRABAJOS FUTUROS**

- Explorar la aplicación de técnicas de aprendizaje automático, como redes neuronales, para la estimación del canal en un escenario real controlado, e implementar una etapa de ecualización DFE-MMSE.
- Analizar el desempeño de un ecualizador DFE-MMSE adaptando los coeficientes de los filtros FFF y FBF independientemente y conjuntamente.
- Analizar el desempeño de un ecualizador en un enlace de comunicación con ecualización realimentada de decisiones basada en el criterio de máxima verosimilitud (ML-DFE).
- Extender la investigación del ecualizador DFE-MMSE a escenarios de comunicaciones con múltiples antenas, conocidos como sistemas MIMO (Multiple-Input Multiple-Output).
- Evaluar el desempeño del ecualizador DFE-MMSE en sistemas de comunicación de quinta generación (5G).
- Investigar la viabilidad y eficiencia de implementar el ecualizador DFE-MMSE en sistemas embebidos y dispositivos de comunicación de bajo consumo energético.

Este trabajo ha contribuido a ampliar el conocimiento en el campo de la ecualización de canal en sistemas de comunicaciones digitales y puede servir como punto de partida para futuras investigaciones y aplicaciones prácticas en el ámbito de las tecnologías de transmisión de datos.



## BIBLIOGRAFÍA

- [1] J. G. Proakis and M. Salehi, *Digital communications*, 5th ed. 2008.
- [2] Wong and Lok, "Chapter 4 - Intersymbol Interference and Equalization," in *Theory of Digital Communications*, pp. 1–24.
- [3] C. Wei-Chieh and Y. Jenq-Tay, "Finite-length predictive decision feedback equalizer design for multipath channels with large delay spread," *Digit. Signal Process.*, vol. 70, pp. 105–113, 2017, doi: 10.1016/j.dsp.2017.08.001.
- [4] N. Dikhaminjia *et al.*, "Improved MMSE algorithm for DFE optimization," *IEEE Int. Symp. Electromagn. Compat. Signal/Power Integr.*, pp. 433–436, 2017, doi: 10.1109/ISEMC.2017.8077909.
- [5] R. Fischer, J. Huber, and C. Windpassinger, "Signal processing in decision-feedback equalization of intersymbol-interference and multiple-input/multiple-output channels: A unified view," *Signal Processing*, vol. 83, no. 8, pp. 1633–1642, 2003, doi: 10.1016/S0165-1684(03)00078-1.
- [6] F. K. H. Lee and P. J. McLane, "Comparison of two nonuniformly-spaced decision feedback equalizers for sparse multipath channels," *IEEE Int. Conf. Commun.*, vol. 3, pp. 1923–1928, 2002, doi: 10.1109/icc.2002.997183.
- [7] J. M. Cioffi, G. P. Dudevoir, M. V. Eyuboglu, and G. D. Forney, "MMSE decision-feedback equalizers and coding - Part I: Equalization results," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 43, no. 10, pp. 2582–2594, 1995.
- [8] N. Al-Dhahir and J. M. Cioffi, "Symbol Rate Optimization for the MMSE-DFE on Bandlimited Dispersive Channels," *Digit. Signal Process.*, vol. 6, no. 2, pp. 73–95, 1996.
- [9] J. E. Smee and N. C. Beaulieu, "On the equivalence of the simultaneous and separate MMSE optimizations of a DFE FEE and FBF," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 45, no. 2, pp. 156–158, 1997, doi: 10.1109/26.554362.
- [10] Y. Gong and C. F. N. Cowan, "A self-structured adaptive decision feedback equalizer," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 13, no. 3, pp. 169–172, 2006, doi: 10.1109/LSP.2005.862601.
- [11] P. Prandoni and M. Vetterli, "Chapter 12 - Design of a Digital Communication," in *Signal Processing for Communications*, EFPL Press, 2008.
- [12] B. Sklar, *Digital Communications: Fundamentals and Applications*, 2nd ed. 2001.
- [13] S. Haykin, *Communications systems*, 4th ed. John Wiley & Sons, 2001. doi: 10.1201/9781351228480.
- [14] J. M. Cioffi, "Modulation and Canonical Reception." <https://cioffi-group.stanford.edu/doc/book/chap1.pdf>
- [15] Agilent Technologies, "Agilent Digital Modulation in Communications Systems - An Introduction. Application Note 1298," 2001.
- [16] R. G. Gallager, *Principles of Digital Communication*. 2007. doi: 10.1002/9780470290996.ch2.
- [17] J. M. Cioffi, "Equalization." <https://cioffi-group.stanford.edu/doc/book/chap3.pdf>
- [18] J. Barry, "Chapter 8 - Equalization," in *Academic Press Library in Mobile and*



- Wireless Communications: Transmission Techniques for Digital Communications*, 2016, pp. 283–331. doi: 10.1016/B978-0-12-398281-0.00008-9.
- [19] N. Al-Dhahir and J. M. Cioffi, “MMSE Decision-Feedback Equalizers: Finite-Length Results,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 41, no. 4, pp. 961–975, 1995, doi: 10.1109/18.391242.
- [20] G. E. Bottomley, *Channel Equalization for Wireless Communications: From Concepts to Detailed Mathematics*. 2011. doi: 10.1002/9781118105283.
- [21] M. Reuter, J. C. Allen, J. R. Zeidler, and R. C. North, “Mitigating error propagation effects in a decision feedback equalizer,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 49, no. 11, pp. 2028–2041, 2001, doi: 10.1109/26.966079.
- [22] J. Palicot and A. Goupil, “Performance analysis of the weighted decision feedback equalizer,” *Signal Processing*, vol. 88, no. 2, pp. 284–295, 2008, doi: 10.1016/j.sigpro.2007.07.021.
- [23] R. Pressman, *Ingeniería del Software. Un enfoque práctico.*, 7th ed. McGraw Hill, 2002.
- [24] A. Estayno, “Modelo Concurrente de Ciclo de Vida - 1205,” pp. 402–413, 2006.
- [25] J. E. Briceño, *Principios de la comunicaciones*, Digital II. Universidad de Los Andes, 2012.
- [26] The MathWorks Inc., “MATLAB Documentation,” *MATLAB Online Help*, 2023. <https://la.mathworks.com/help/matlab/index.html>
- [27] C. Arce S., W. Castillo E., and J. Gonzalez, “Álgebra Lineal,” *Univ. Costa Rica. Esc. Mat.*, 2002, [Online]. Available: [www.algebra.com](http://www.algebra.com)
- [28] B. Kolman and D. R. Hill, *Álgebra Lineal*, 8th ed. PEARSON EDUCACIÓN, 2006.
- [29] J. I. Illana, “Métodos Monte Carlo,” *Dep. Física Teórica y del Cosm. - Univ. Granada*, 2013.



## Anexo I: Comportamiento de enlaces de comunicación previos.

- **Enlace de comunicación digital sin ruido.**

Las señales  $x(t)$  y  $y(t)$  y sus espectros son iguales. En la Figura I.1 se presentan las señales (primeros 16 segundos) y espectros sobre el canal sin ruido.

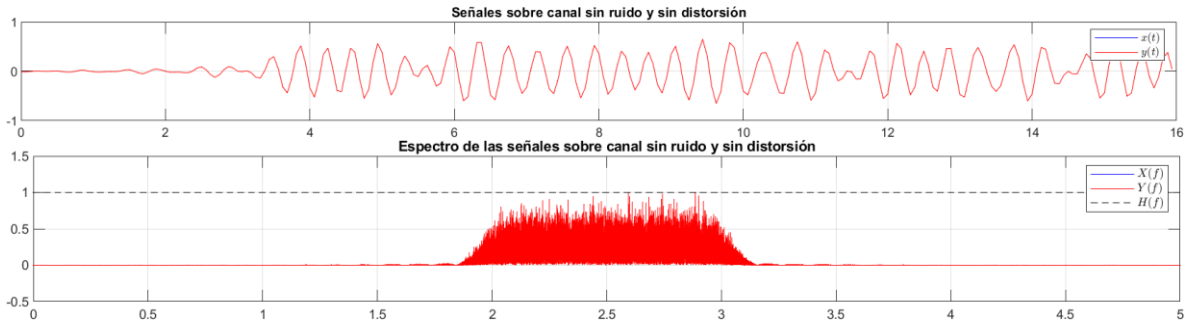


Figura I.1. Señales transmitida y recibida sobre el canal sin ruido. Por los autores.

En la Figura I.2 se presenta el diagrama de constelación obtenido para el enlace de comunicación digital sin ruido, con esquema de modulación 4-QAM, mostrando que  $\{u_k\} \cong \{s_k\}$ .

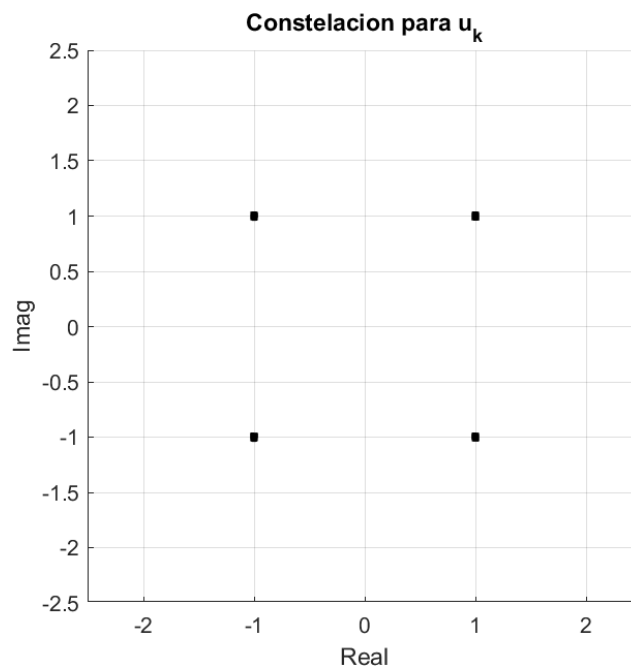


Figura I.2. Diagrama de constelación para  $u_k$  sobre el canal sin ruido. Por los autores.



En la Figura I.3 se presenta la respuesta global al impulso del enlace de comunicación sobre el canal sin ruido, se tiene que  $r(t) = g(t)$ .

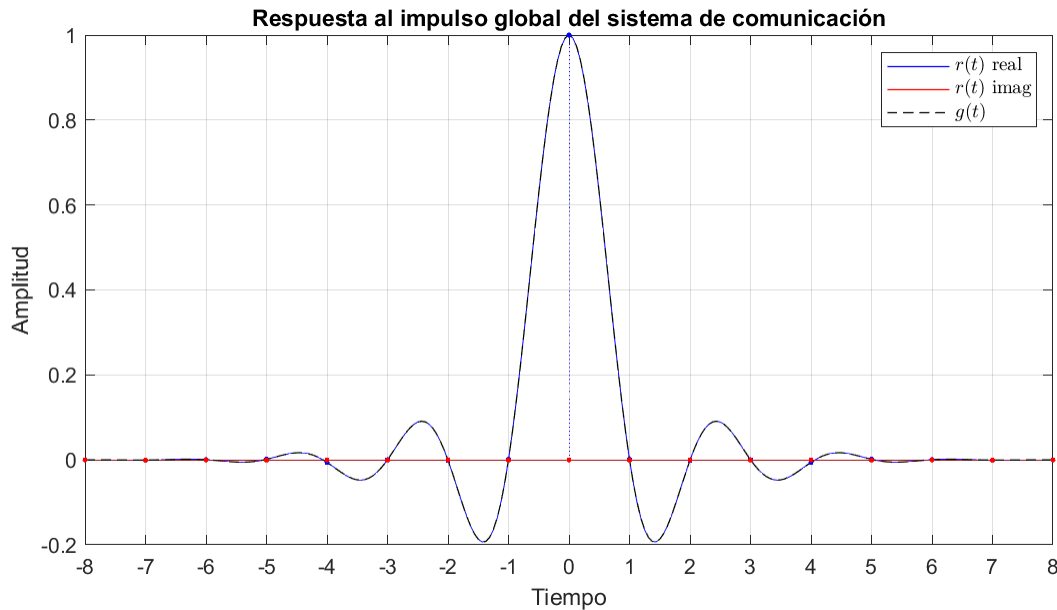


Figura I.3. Respuesta global al impulso del enlace de comunicación sobre el canal sin ruido. Por los autores.

- **Enlace de comunicación digital sobre un canal AWGN.**

Las señales  $x(t)$  y  $y(t)$  y sus espectros son diferentes, tal diferencia corresponde al ruido introducido por el canal AWGN. En la Figura I.4 se presentan las señales (primeros 16 segundos) y espectros sobre el canal AWGN con  $E_b/N_o = 12$ .

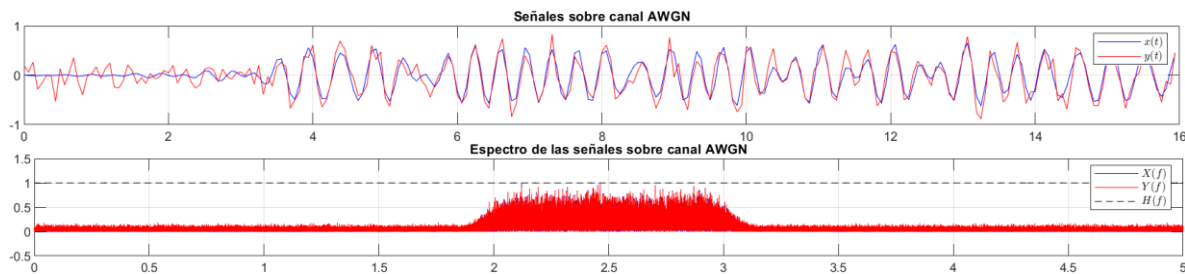


Figura I.4. Señales transmitida y recibida sobre el canal AWGN. Por los autores.

En la Figura I.5 se presenta el diagrama de constelación obtenido para el enlace de comunicación digital sobre el canal AWGN con  $E_b/N_o = 10$ , con esquema de modulación 4-QAM, mostrando que  $\{u_k\} \neq \{s_k\}$ .



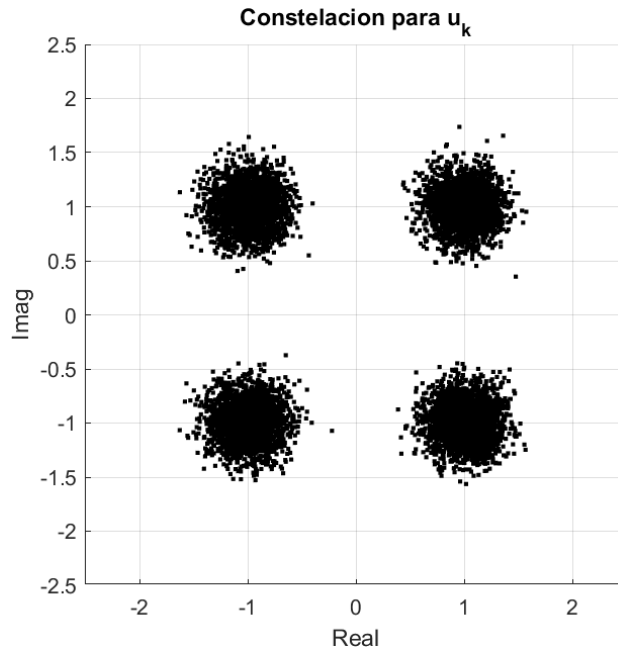


Figura I.5. Diagrama de constelación para  $u_k$  sobre el canal AWGN. Por los autores.

En la Figura I.6 se presenta la respuesta global al impulso del enlace de comunicación sobre el canal AWGN, se tiene que  $r(t) = g(t)$ .

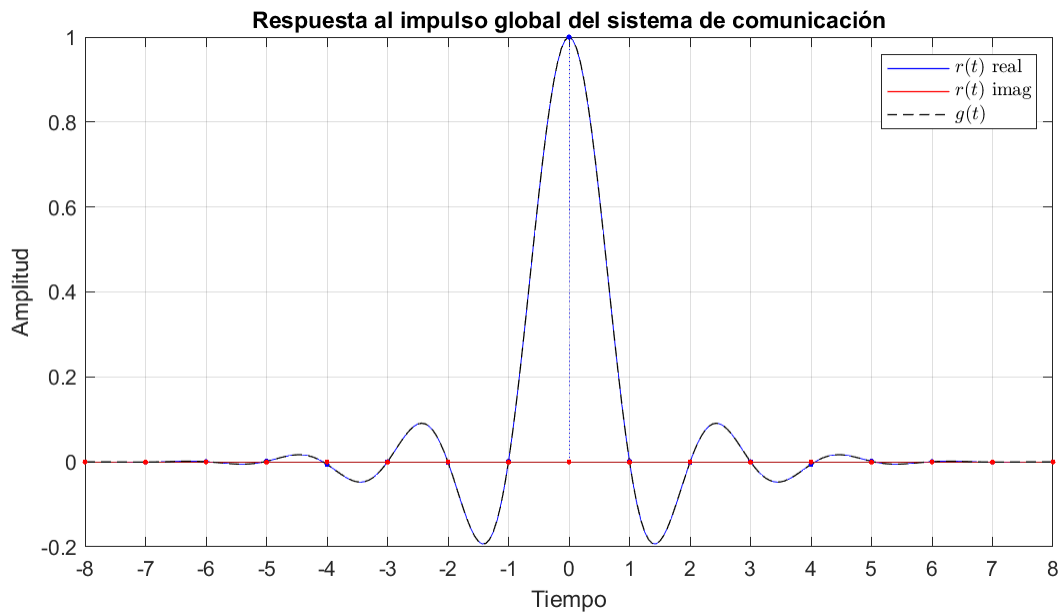


Figura I.6. Respuesta global al impulso del enlace de comunicación sobre el canal AWGN. Por los autores.



## Anexo II: SINR vs SNR en enlaces de comunicación digital sobre un canal dispersivo Gaussiano sin ecualización.

En la Figura II.1 se presentan las curvas SINR vs SNR para diferentes enlaces de comunicación digital sobre un canal dispersivo Gaussiano sin ecualización, demostrando que, a nivel general, la SINR no aumenta al aumentar la SNR, debido a que la dispersión causada por el canal dispersivo Gaussiano limita la calidad de la señal.

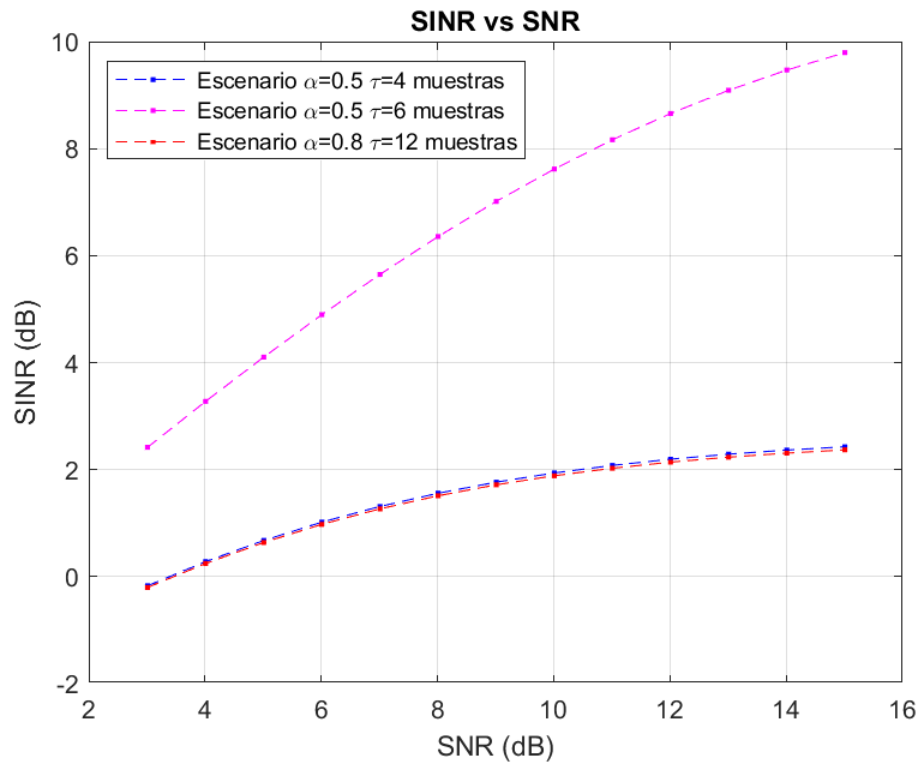


Figura II.1. SINR vs SNR de unos enlaces de comunicación digital sobre un canal dispersivo Gaussiano. Por los autores.