# ANÁLISIS TEÓRICO DE LA DINÁMICA TEMPORAL DE LOS OLIGOPOLIOS A LA COURNOT: UNA PERSPECTIVA DESDE LA TEORÍA DEL CAOS

**LENIN ALONSO MUÑOZ**
**MARCELA FERNÁNDEZ MÉNDEZ**

**UNIVERSIDAD DEL CAUCA**
**FACULTAD DE CIENCIAS CONTABLES, ECONÓMICAS Y ADMINISTRATIVAS**
**DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA**
**POPAYÁN**
**2012**

# ANÁLISIS TEÓRICO DE LA DINÁMICA TEMPORAL DE LOS OLIGOPOLIOS A LA COURNOT: UNA PERSPECTIVA DESDE LA TEORÍA DEL CAOS

**LENIN ALONSO MUÑOZ**
**MARCELA FERNÁNDEZ MÉNDEZ**

**Trabajo de Grado para optar al título de ECONOMISTA**

**Director de Tesis:**
**Mg. ANDRÉS MAURICIO GÓMEZ**
**Economista**

**UNIVERSIDAD DEL CAUCA**
**FACULTAD DE CIENCIAS CONTABLES, ECONÓMICAS Y ADMINISTRATIVAS**
**DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA**
**POPAYÁN**
**2012**

Nota de aceptación

Firma del presidente del jurado

Firma del presidente del jurado

Firma del presidente del jurado

Popayán, 17 octubre de 2012

## TABLA DE CONTENIDO

# INTRODUCCIÓN

La presencia de los mercados oligopólicos en el sistema capitalista actual es cada vez más amplia y frecuente. En las últimas décadas, este tipo de organización del mercado es más recurrente y las estrategias adoptadas por cada una de las empresas para obtener una mayor participación en el mismo, se tornan cada vez más fuertes. Un ejemplo de este comportamiento lo constituye el sector de las telecomunicaciones en América Latina, por mencionar dos casos, la disputa por el mercado mexicano valorado en unos US$22.000 millones; suscita una polémica entre Telmex y el duopolio de las televisoras: Televisa y Azteca, por la televisión de pago; dicha disputa se manifiesta en acusaciones que van desde elevadas tarifas en los servicios, hasta impedimentos a la entrada. Otro ejemplo de esto se configura en el caso colombiano, en donde se torna cada vez más controversial la elevada tarifa de interconexión que Claro (Telmex), establece para sus principales rivales, la empresa holandesa Tigo y española Movistar, a ello se suma las irregularidades de portabilidad numérica denunciadas ante el Ministerio de las TIC, la Comisión de Regulación de las Comunicaciones (CRC) y la Superintendencia de Industria y Comercio (SIC). Lo anteriores casos ponen en evidencia algunas características propias de mercados imperfectos.

Si tenemos en cuenta las condiciones actuales del modelo capitalista; en donde la competencia no solo se limita a cantidades o precios o a la modelación de los mercados en competencia perfecta, sino que también influyen otros aspectos como la calidad en la prestación del servicio, la innovación tecnológica involucrada, entre otros, que resultan ser decisivos en la prevalencia o disolución de las firmas; podemos evidenciar la necesidad de comprender y analizar la dinámica de las economías globalizantes actuales, donde los mercados imperfectos especialmente los mercados oligopólicos desempeñan papeles preponderantes.

La microeconomía ortodoxa, a través de modelos como el de Bertrand, Stackelberg y Cournot, indaga sobre el comportamiento de mercados oligopólicos de forma estática.

Este tipo de análisis permite una modelación tradicional que converge a un único equilibrio inmutable, en cuyo caso, los resultados allí planteados no proporcionan un panorama completo sobre el proceso dinámico que se lleva a cabo por las firmas teniendo en cuenta las respectivas reacciones de que presentan ante sus rivales. La dinamización de este proceso, es decir la implementación del cambio en el tiempo de una o más variables, implica no garantizar la consecución de un equilibrio único, estable e inmutable; por el contrario, la consecución del mismo (del equilibrio) puede estar lejana o ausente. Este proceso, en contraposición a una formalización determinista del modelo de oligopolio de Cournot, implica la interdependencia de información dentro del sistema a emular, es así como la dinámica presente en él proporciona la información necesaria para establecer, desde las condiciones iniciales, una ruta que explique en conjunto el comportamiento de las firmas en el tiempo, aspecto que se considera en esta indagación teórica, como fundamental.

Dentro de los aspectos relevantes sobre la motivación del presente trabajo de investigación se destaca el hecho de la escasez de estudios teóricos al respecto; pese a que el enfoque microeconómico sobre oligopolios continúa siendo parte fundamental en la formación académica e investigativa de la economía contemporánea. Es así como resulta pertinente indagar sobre modelaciones que involucren el tiempo, así como también el cuestionamiento de un único equilibrio, como estable y presente en economías contemporáneas. La introducción del tiempo como variable en un análisis permitirá establecer los alcances de anteriores y nuevos enfoques, proporcionando información que robustece y se articula al conocimiento económico; permitiendo que de esta forma, que la teoría se retroalimente y evolucione acorde a las necesidades de compresión de un sistema económico que hoy es entendido como complejo y dinámico.

La búsqueda de rutas caóticas en los equilibrios dinámicos del modelo, no solo implica transformar un enfoque de análisis estático a uno dinámico, sino que además posibilita ampliar los alcances de dicho modelo. El uso de herramientas no convencionales y la exploración teórica de esta modelación, constituye un procedimiento necesario y capaz de contribuir, mediante aportes a la formación de conocimiento en el campo de la economía, mediante la reevaluación de la información que se tiene, sumado a la información que se puede generar dados los resultados, producto del trabajo de investigación. La dinamización del modelo de oligopolio de Cournot conduce a patrones disimiles de comportamiento de las firmas en el tiempo. Estos patrones de no linealidad o irregularidad, producto de la dinamización de los sistemas deterministas, implican cambios que afectan y complejizan los resultados. El tiempo como variable inherente de cualquier proceso socioeconómico y de cualquier otro campo de las ciencias, es tangencialmente mencionado e irrelevante en el aun análisis estático – comparativo; por tanto, las soluciones no logran dar completa cuenta del comportamiento de las variables ni abarcar en su totalidad, el problema en cuestión. Al introducir dichas alteraciones en el comportamiento de las firmas, se involucra el desarrollo de un orden que permita explicar de forma colectiva las reacciones de las firmas ante las decisiones de sus rivales, su comportamiento e interacción como parte de un mercado cambiante a través del tiempo.

En este sentido profundizar sobre la dinamización del modelo de oligopolio a la Cournot requiere de la utilización de la teoría del caos como herramienta para llevar a cabo la modelación teórica que intente explicar el comportamiento en el tiempo de las firmas que en principio, basadas en sus decisiones de producción, parecen desarrollarse aleatoriamente. De este modo el análisis del comportamiento del mercado bajo este enfoque permite establecer una tendencia general de dicho comportamiento.

En el presente informe, se consigna el resultado de un ejercicio teórico que busca reflexionar sobre la relevancia del análisis dinámico y, en particular, los efectos de la inserción del cambio temporal en el modelo de oligopolio a la Cournot. Para tal fin, se ha hecho uso reiterado de herramientas matemáticas, estadísticas y teóricas sobre modelación dinámica, teoría del caos y teoría económica. Metodológicamente, se parte de la construcción de un modelo de oligopolio a la Cournot,  el cual involucra el cambio en el tiempo de las cantidades producidas por cada firma; esto a partir de una tasa de crecimiento adoptada y como resultado de sus funciones de reacción; todo, para poder determinar la posibilidad de un equilibrio y establecer la dinámica de las trazas temporales descritas por cada uno de dichos comportamientos; a la par que se establece, a partir del análisis caótico de los exponentes de Lyapunov, la existencia o indicios de caos para ciertos casos que componen la función que condensa el modelo dinámico propuesto.

La finalidad del presente trabajo está en hallar las rutas caóticas en el modelo de oligopolio a la Cournot, que surgen mediante la relajación de los supuestos fundamentales del modelo estático. En este sentido, se presentan una serie de escenarios, posteriormente modelados matemáticamente y simulados, los cuales pretenden mostrar el comportamiento y dependencia a las condiciones iniciales que presentan los resultados ante una modelación que involucra el cambio de variables en el tiempo en un oligopolio a la Cournot.

Esta indagación teórica constituye un acercamiento y familiarización de las nuevas herramientas matemáticas y estadísticas con que la investigación económica cuenta hoy en día, y busca igualmente, involucrarlas en el análisis como parte del ejercicio de formación académica. Siendo los oligopolios una de las configuraciones del mercado cada vez más frecuentes, el centrar el ejercicio en este escenario en particular, cobra una mayor relevancia a la par que vigencia y pertinencia; aspectos que se mezclan con ese constante interés de formación integral y robusta necesaria en la actualidad del desarrollo del conocimiento económico.

# CAPÍTULO I

# TEORÍA Y ASPECTOS POCO CONOCIDOS SOBRE LOS OLIGOPOLIOS

## 1.1 Introducción.

Si bien los mercados perfectamente competitivos constituyen un ideal deseable, en la actualidad predominan estructuras mucho más complejas como el monopolio, el oligopolio y la competencia monopolística, en donde un puñado de empresas es capaz de influir significativamente en los precios del mercado. De este modo en comparación a la competencia perfecta y dada una tecnología, las condiciones se basan generalmente en niveles de producción más bajos y precios más altos. No obstante, en contraposición a dichas características, la imperfección en la organización de esta clase de estructuras genera dinámicas interesantes al interior de las empresas y de la economía. Estas se basan en la explotación de economías de escala y la inversión de grandes sumas de dinero en investigación, desarrollo e innovación, para aumentar sus beneficios y cuota de mercado. Este proceso continuo de innovación para garantizar la permanecía de las empresas en el mercado apalanca el crecimiento económico a largo plazo, por tanto el estudio de esta clase de competidores permite una mayor comprensión de las economías actuales.

La presencia de estructuras imperfectas, es decir, divergentes al modelo de competencia perfecta, se hace mucho más frecuente en un mundo globalizado. Igualmente la existencia de un, cada vez más reducido, número de grupos económicos que rivalizan por una mayor cuota en el mercado en sectores estratégicos de la economía, se convierte en el común denominador de casi cualquier nación. Imperfecciones en el mercado, derivadas de economías de producción a gran escala y de barreras a la entrada, son elementos que inciden y de alguna manera propenden por su prevalencia. Dichos elementos permeados por costos, eficiencia, legislación y codependencia generan procesos que desde el campo de la economía se han tratado con el fin de establecer mediante una profundización teórica y conceptual, la conducta de esta clase de competidores.

## 1.2 Oligopolios

Para el caso específico de los oligopolios, la competencia es mucho más fuerte, en comparación a otros mercados imperfectos, en cuanto que cualquier decisión tomada por las empresas con el propósito de aumentar sus beneficios y cuota de mercado es capaz de incidir en la conducta de sus competidoras. Este tipo de estructura no solo se encuentra ligada tácitamente al número de empresas y de sus dimensiones, sino también a su comportamiento. Al enfrentarse a una fuerte situación de interdependencia, las decisiones en cuanto a precios, producción, publicidad e inversión en un mercado de este tipo, están sujetas a importantes consideraciones estratégicas, debido a que, tanto influencia como reacciones en las empresas rivales deben ser tenidas en cuenta, en la medida que se espera obtener el mejor resultado posible dado lo que hacen sus competidoras. En este sentido, la modelación de cómo se logra dicho objetivo se complejiza ya que las decisiones evolucionan en el tiempo.

Con un pequeño número de empresas, la rivalidad por mayor poder de mercado es mediada por dos acciones: un comportamiento cooperativo o no cooperativo. El primero de ellos implica una reducción de la competencia por medio de acuerdos previos o implícitos sobre el nivel de producción y los precios, aunque no siempre sean necesarios y solo sean adoptados por las empresas como formas tácticas de comportamiento dentro del mercado, ello se define como un comportamiento de colusión, por el contrario las empresas pueden optar por una solución de cartel, es decir, su organización como empresas independientes productoras de bienes similares, con el objetivo de elevar los precios al restringir su producción. No obstante, dichas conductas no resultan definitivas en cuanto existe la posibilidad para las empresas de infringir lo pactado, motivadas por el aumento en los beneficios que ello podría implicar. El segundo comportamiento incide en la forma como esta asume su rol en el mercado, generando mayor competencia frente a sus rivales, lo cual desencadena guerra de precios, la investigación para la mejora en la calidad del producto, proporcionar una mejor experiencia de compra, innovación en productos, etc.

Bajo dichos aspectos y dada una fuerte interdependencia estratégica, si una empresa está considerando modificar sus niveles de producción o precio de venta, puede mediante una variedad de supuestos tratar de determinar el comportamiento de sus rivales y el efecto en ellos de su propia conducta. Es así como la fundamentación microeconómica de un mercado oligopólico en los análisis de Bertrand, Stackelberg y Cournot, por mencionar algunos de los más destacados enfoques para determinar el equilibrio de esta clase de mercados, abarcan las implicaciones de mantener o no invariables los supuestos que inciden en la conducta de los competidores, ya sea mediante una competencia basada en precios o cantidades. Dichas modelaciones, muestran que a diferencia de los mercados perfectamente competitivos o monopolísticos, estas establecen sus decisiones de nivel de producción y precios, con base en consideraciones estratégicas particulares y la conducta de sus competidoras, no obstante la colusión a un equilibrio establece que un mercado se encuentra en equilibrio en la medida que las empresas hacen lo mejor que pueden y no tienen razón alguna para alterar el precio o el nivel de producción.

### 1.2.1 Modelo de Cournot

El modelo de duopolio planteado por primera vez por el economista francés Augustin Cournot en 1838, plantea que la competencia por el mercado ante la producción de un bien homogéneo y un conocimiento de la curva de demanda de mercado, la decisión de producción de las empresas se realizará de forma simultánea de modo tal que "*Cuando toma su decisión de producción, cada una tiene cuenta a su competidora. Sabe que también decide la cantidad que va a producir y que el precio que obtendrá depende de la producción total de las dos empresas."(Pindyck.1999;426)*

*“El modelo de Cournot se basa en dos conceptos fundamentales de las empresas en un mercado de duopolio: que cada una se comportará en una forma maximizadora de las utilidades y que cada una supondrá que la otra empresa mantendrá constante su producción al nivel existente cuando cambie su propia producción” (Shotter.1996; 364)* De este modo, cada firma fija su propia cantidad maximizadora de utilidades. Ambas firmas se enfrentan a una misma curva de demanda, donde el precio está sujeto a las cantidades de los duopolistas y en consecuencia, cada una de ellas se enfrenta a una función de costos determinada por su tecnología de producción. Los costos marginales aumentan según crece la producción, a una tasa creciente mientras que los costos promedios tienen forma de $U$.

Este enfoque de duopolio establece que al enfrentarse las dos empresas a una curva de demanda lineal inversa, $p = a - b(q_i + q_j)$ y determinadas sus respectivas funciones de costos como $C_i = c(q_i)$ y $C_j = c(q_j)$ para la empresa $i$ y $j$ respectivamente, el equilibrio a la Cournot para este tipo de mercados estará dado por un nivel de producción tal que para cada empresa no existirán incentivos para modificarlo. La consecución del equilibrio Cournot está estrechamente ligada a interacción estratégica de las firmas en el mercado, debido que al establecer en cada una de sus respectivas funciones de reacción o de mejor respuesta, la elección óptima y maximizadora del nivel de producción frente a las acciones de sus rivales, es posible determinar cómo este es alcanzado.

La maximización de la utilidad de las empresas duopolistas, se encuentra en función de sus ingresos y costos, es necesario aclarar que el precio está sujeto a la producción de ambos. Por tanto, la elección de la producción de cada empresa de acuerdo al modelo de Cournot plantea que aun cuando la firma $i$ establezca su nivel de producción, sin importar cuál este sea, pese a ello la producción de la firma $j$ no cambiará, esta suposición es denominada Conjetura Cournot.

Al fijar su producción con base a sus propias elecciones de maximización, la empresa $i$ establece su función de beneficio como monopolio, es decir, encontrará el nivel de producción adecuado cuando su costo marginal iguale a su ingreso marginal. De esta manera cada punto sobre la función de reacción de cada empresa representará una elección óptima de la firma $i$ ante la producción de su rival. El punto de equilibrio de Cournot está determinado por la intercesión de las funciones de reacción de las dos firmas. (Shotter.1996; 364-370)

El modelo de Cournot plantea que al establecerse los siguientes supuestos:

- Existencia de solo dos firmas en el mercado i y j
- Competencia en cantidades por un periodo de tiempo
- Un bien homogéneo
- Función de demanda determinada por $P = a - bQ$
- $CT_i = c.q_i$
- $CT_j = c.q_j$
- $Q = q_i + q_j$
- Y siendo los beneficios de la empresa $i$ y $j$, respectivamente: $\pi_i = P.q_i - CT_i$ y $\pi_j = P.q_j - CT_j$

La determinación de las reacciones de cada una de las firmas está determinada al remplazar el valor de $P$ en la función de beneficios de la firma $i$ y posteriormente derivando con respecto a $q_i$ se obtiene:

$$\pi_i = [a - b.Q].q_i - C.q_i$$
$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = a - 2b.q_i - bq_j - C$$

Despejando $q_i$ de la ecuación se establece la siguiente función de reacción de la firma $i$

$$FR_i = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}q_j \quad \textbf{Ecuación 1}$$

Aplicando un procedimiento similar la respectiva función de reacción de la empresa j será:

$$FR_j = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}q_i \quad \textbf{Ecuación 2}$$

La determinación de las cantidades óptimas a producir se obtiene al introducir la ecuación 2 en 1.

$$q_i = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}\left[\frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}q_i\right]$$

De esta forma las cantidades a producir por la firma $i$ es tan determinadas por:

$$q_i = \frac{a-c}{3b} \quad \textbf{Ecuación 3}$$

De forma análoga las cantidades de la empresa $j$ están determinadas por

$$q_j = \frac{a-c}{3b} \quad \textbf{Ecuación 4}$$

Las cantidades de la industria se obtienen remplazando $q_i$ y $q_j$ en $Q$

$$Q = q_i + q_j$$

Las cantidades de la industria estarán dadas por:

$$Q = \frac{2}{3}\left[\frac{a-c}{b}\right] \textbf{ Ecuación 5}$$

La determinación del precio en modelo se obtiene remplazando $Q$ en la ecuación

$$P = a - b.Q$$

$$P = a - b.\left[\frac{2}{3}\frac{a-c}{b}\right]$$

$$P = c + \left[\frac{a-c}{3}\right] \textbf{ Ecuación 6}$$

La determinación de los beneficios de las empresas $i$ y $j$ se obtiene se muestra a continuación:

$$\pi_i = [P - CM_e]q_i$$

$$\pi_i = \left[c + \frac{a-c}{3} - CM_e\right].\frac{a-c}{3b} \textbf{ Ecuación 7}$$

$$\pi_j = [P - CM_e]q_j$$

$$\pi_j = \left[c + \frac{a-c}{3} - CM_e\right] . \frac{a-c}{3b} \quad \textbf{Ecuación 8}$$

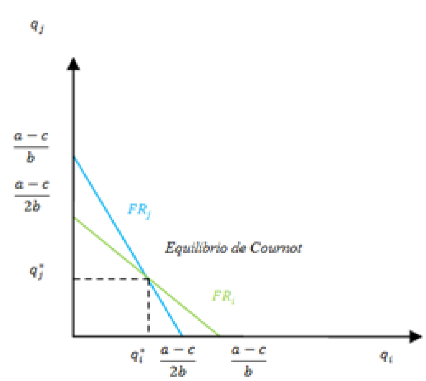
La determinación de los beneficios de la industria están dados por:

$$\pi_{ij} = \pi_i + \pi_j$$

$$\pi_{i.j} = \frac{[a-c]^2}{9b} \quad \textbf{Ecuación 9}$$

El modelo de duopolio no garantiza que las firmas elegirán los niveles de producción que sus respectivas funciones de reacción plantean, sino que de hacerlo el mercado se encontrará en equilibrio. No obstante, de igual forma se espera que los niveles de producción de ambas firmas tiendan hacia éste con el tiempo, mediante un proceso convergente debido a la forma en cómo son trazadas las funciones de reacción. (Véase anexo I)

**GRÁFICO 1: MODELO DE DUOPOLIO DE COURNOT**




La intersección de las funciones de reacción de las empresas en el punto $(q_i^*, q_j^*)$ muestra la elección óptima de la empresa ante el comportamiento de su empresa rival.

**Fuente:** Elaboración propia

#### 1.2.1.1 Implicaciones poco conocidas del modelo de duopolio de Cournot

El modelo de oligopolio de Cournot anteriormente planteado cuenta con una serie de implicaciones derivadas de su argumentación inicial. En este sentido, mediante manipulaciones algebraicas y conceptos microeconómicos, pueden presentarse diferentes escenarios de contextualización y profundización teórica, como se muestra a continuación.

**Supuestos:**

- $i$ firmas, $i = 1,2,3 \ldots n$
- La función de demanda no es lineal

  $\mathrm{P} = \mathrm{F.Q}$ Donde $\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{Q}} < 0$
- Los costos asumen cualquier tipo de rendimiento
- Bienes homogéneos

Las implicaciones del modelo de Cournot ante estos supuestos establecen:

**a.** *Las firmas tienen poder de mercado P > CMg*

En los mercados oligopólicos, el precio no es el reflejo del costo marginal, en este sentido se presenta ineficiencia en la asignación, en cuanto se presentan pérdidas irrecuperables de eficiencia (PIE).

$$\pi_i = \mathrm{P}.q_i - \mathrm{CT}_i[q_i]$$

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = \underbrace{\mathrm{P} - \left[\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{Q}}.\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial q_i}\right] q_i}_{\mathrm{IMg}} - \underbrace{\frac{\partial \mathrm{CT}_i[q_i]}{\partial q_i}}_{\mathrm{CMg}} = 0$$

$$\frac{\mathrm{P} - \partial \mathrm{C}[q_i]}{\partial q_i} = -q_i \left[\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{Q}}.\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial q_i}\right]$$

$$P - CMg > 0$$

**b.** *El poder de mercado es directamente proporcional a la participación de la firma i en el total de la producción e inversamente proporcional a la elasticidad precio en la que opera*

$$P - \frac{\partial CT_i[q_i]}{\partial q_i} - q_i\left[\frac{\partial P}{\partial Q}.\frac{\partial Q}{\partial q_i}\right] > 0$$

$$\frac{P}{P}.\frac{Q}{Q}\left[\frac{P - \partial C[q_i]}{\partial q_i}\right] = -q_i\left[\frac{\partial P}{\partial Q}.\frac{\partial Q}{\partial q_i}\right]$$

$$\left[\frac{P - CMg}{P}\right] = -q_i\left[\frac{\partial P}{\partial Q}.\frac{\partial Q}{\partial q_i}\right]\frac{Q}{P}.\frac{1}{Q}$$

$$L = -\left[\frac{\partial P}{\partial Q}\frac{Q}{P}\right]\frac{q_i}{Q}.\frac{\partial Q}{\partial q_i}$$

$$\mathrm{L} = -\frac{1}{\varepsilon}.\delta_{\mathrm{i}}$$

Esta relación es conocida como el índice de Lerner, este índice se denota como, L=(P-CM)/P este describe el poder de mercado de una empresa con base a una relación entre precio y costo marginal, mediante este índice se asume que a mayor control sobre el mercado que una empresa tenga, el precio de sus productos serán superiores a los precios existentes en el caso de un mercado en competencia perfecta. El índice presenta valores entre 0 y 1, donde un número mayor implica un mayor poder de mercado. Teniendo en cuenta esto, para una empresa en competencia perfecta, donde P = CM, el índice seria L = 0; significando que una empresa no tiene poder de mercado; para el caso de monopolio puro, dicho índice seria L=1, implicando totalidad en el poder de mercado. Este índice nos muestra la relación inversa entre el precio de un bien y su demanda en el mercado. En otras palabras, el inverso de la elasticidad precio de la demanda.

**c.** *Existe ineficiencia por que las empresas con costos altos siguen produciendo, debido a que se presentan pérdidas irrecuperables de eficiencia*

Existe ineficiencia, por que las empresas con costos más altos siguen produciendo.

- Dada una función de demanda lineal $P = a - bQ$ en donde $a = b = 1$
- Sean las cantidades total del mercado $Q = q_1 + q_2$
- Dada la función de precio $P = 1 - Q$

- Sean $C_1$ y $C_1$ los costos de las empresas $A_1$ y $A_2$ respectivamente
- $C_1 > C_1$

De esta forma se obtiene:

$$q_1 = \frac{1 - C_1}{2} - \frac{1}{2} q_2$$

$$q_2 = \frac{1 - C_2}{2} - \frac{1}{2} q_1$$

$$q_1 = \frac{1 - C_1}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{1 - C_2}{2} - \frac{1}{2} q_1\right]$$

$$q_1 = \frac{1 - C_1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{C_2}{4} + \frac{1}{4} q_1$$

$$q_1 - \frac{1}{4} q_1 = \frac{1 - C_1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{C_2}{4}$$

$$\frac{3}{4} q_1 = \frac{1 - C_1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{C_2}{4}$$

$$q_1 = \frac{3}{4}\left[\frac{1 - C_1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{C_2}{4}\right]$$

$$q_1 = \frac{2[1 - C_1]}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} C_2$$

$$q_1 = \frac{2}{3} - \frac{2C_1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} C_2$$

$$q_1 = \frac{1}{3} - \frac{2C_1}{3} + \frac{1}{3} C_2$$

Las cantidades de la empresa $\mathrm{A}_1$ se muestran a continuación:

$$q_1 = \frac{1 - 2C_1 + C_2}{3}$$ **Ecuación 10**

Realizando un procedimiento similar las cantidades para la empresa $A_2$ están dadas por:

$$q_2 = \frac{1 - 2C_2 + C_1}{3}$$ **Ecuación 11**

De este modo se tiene que las cantidades del mercado están determinadas por:

$$Q = q_1 + q_2$$

$$Q = \frac{1 - 2C_1 + C_2}{3} + \frac{1 - 2C_2 + C_1}{3}$$

$$Q = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}C_1 - \frac{1}{3}C_2$$

**d.** *El poder de mercado del monopolio es superior al del oligopolio*

$$\mathrm{L} = \frac{\delta_i}{\varepsilon}$$

Teniendo en cuenta la definición de índice de Lerner, y dado que la participación de las empresas en el mercado se define por las unidades que aporta al total de las cantidades demandas, se puede establecer que el poder de mercado de un monopolio es L=1, esto en cuanto el poder de mercado de la empresa monopolística es del 100%, debido a que las cantidades demandadas son producidas en su totalidad por la empresa. En el caso del oligopolio la participación de cada una de las empresas es menos al 100% en cualquiera de ellas, en cuanto que las cantidades que demanda el mercado, se encuentran repartidas entre las diferentes empresas que forman parte de la industria, y esta participación será en cualquier caso inferior a 1.

**e.** *El equilibrio de Cournot – Nash para el caso de oligopolio no es un óptimo paretiano*

El Óptimo de Pareto se define como la situación en la cual no se puede mejorar la situación de alguien sin menoscabar el bienestar de otro algún otro este peor, en este sentido, el equilibrio de Cournot que luego es retomado por Nash en teoría de juegos, no constituye un optimo paretiano, debido a que la decisión a la que confluyen las empresas con base a las acciones de sus rivales, no necesariamente es la decisión más eficiente en el sentido paretiano a la que se puede llegar. Este tema se abordara más adelante en este capítulo.

**f.** *El equilibrio de Cournot solo es estable de forma estática y no de forma dinámica.*

El equilibrio de Cournot establece que las empresas determinan las cantidades a producir asumiendo que su competidora mantiene constante su nivel de producción, esta decisión se toma de forma independiente por una sola vez y en el mismo instante, permitiendo una configuración particular de cantidades a producir por cada una de las empresas en el oligopolio estableciendo un único equilibrio claramente estático, por cuanto no varían las decisiones en el tiempo. En cambio, cuando se involucran elementos dinámicos, o simplemente la posibilidad de cambiar en el tiempo las decisiones de producción, el equilibrio de Cournot sería inestable, dado que no existirá un punto de convergencia de producción para las empresas, por cuanto los oligopolistas involucrarían aspectos económicos y políticos en sus decisiones, sumado a ello la posibilidad de cooperación y experiencia previa puede proporcionar información importante en cada una de las empresas y la posibilidad de establecer estrategias para afrontar eventualidades u oportunidades futuras.

### 1.2.2 Modelo de Bertrand

Cuatro décadas después de la publicación del modelo de oligopolio de Cournot Joseph Louis Francois Bertrand (1822 - 1900), matemático y economista francés, plantea su modelo microeconómico sobre duopolios. En él, a diferencia del modelo de Cournot anteriormente desarrollado, la competencia se lleva a cabo con base a precios. Las empresas quienes producen bienes homogéneos toman decisiones simultáneas en este aspecto.

Suponiendo la existencia de un mercado con una curva de demanda de la forma $P = A - Q$. Donde $Q = q_i + q_j$, que sería la producción total del bien $x$ homogéneo, entendiéndose este como la sumatoria del producto de la empresa *i* más el producto de la empresa $j$ y de igual forma si se supone que ambas empresas poseen un mismo costo marginal $CMg$; es decir $CMg = CMg_i = CMg_j$. Cuando un duopolio de este tipo compite eligiendo un precio; cada empresa buscará establecer el menor posible, dado que el consumidor, ante un bien homogéneo, optará por aquel bien cuyo precio sea menor. Si los precios son diferentes la empresa que cobre un precio menor captará todo el mercado, dejando a su competidora por fuera del mercado. No obstante, si ambas empresas cobran el mismo precio por el bien $x$, que como se indica es homogéneo, a los compradores no les importaría comprar en una u otra empresa, logrando repartirse la demanda de este mercado duopolistico. (Pindyck. 1995; 433)

El menor precio posible al que se hace referencia no es otro sino el costo marginal $CMg$ de las empresas, donde los duopolistas logran tener participación en el mercado, logran vender, pero su beneficio en cero. Este sería pues un equilibrio del mercado dado que cada empresa produce $q$ unidades a un precio igual al $CMg$. Si no fuera el precio igual al costo marginar, sino que fuese mayor, las empresas tendrían incentivos para disminuir el precio y captar totalmente el mercado; y el precio no podría ser menor al $CMg$ porque las empresas no tendrían incentivos para producir dado que los beneficios serían negativos. Así entonces, el mejor escenario posible es repartirse la producción y establecer, cada empresa, su precio igual al costo marginal. (Pindyck.1995; 433.)

#### 1.2.2.1 Escenarios alternativos de solución del modelo Bertrand

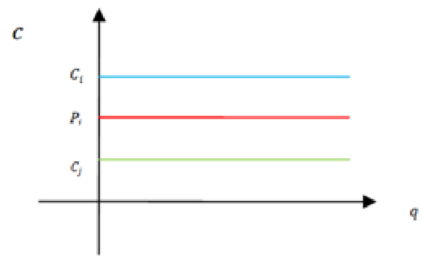
El modelo de oligopolio de Bertrand presenta una serie de soluciones alternativas derivadas de la relajación de uno de sus supuestos, con lo cual se presentan tres escenarios distintos al inicialmente planteado por el modelo, cada uno de ellos con resultados que afectan la organización del mercado y cuyas implicaciones son importantes para profundizar en los alcances del mismo.

**Primer escenario**

**Supuestos**

- Rendimientos contantes a escala
- Bienes homogéneos
- Costos constantes pero no iguales, $C_i > C_j$

## GRÁFICO 2: DESCRIPCIÓN PRIMER ESCENARIO – COSTOS CONSTANTES PERO NO IGUALES




El grafico presenta los costos constantes de las empresas $i$ y $j$ y el precio del mercado $P_j$. En donde $C_i > C_j$.

**Fuente**: Elaboración propia.

El primer escenario de solución, modifica el supuesto de costos, manteniendo constante el tipo de rendimiento y la clase de bienes. Para este caso en específico se supone un precio $P_j$ intermedio a ambos costos de producción (Grafico 2). Al presentarte una situación en donde $C_i > P_j > C_j \rightarrow P_j > C_j \rightarrow \pi_j > 0$; la empresa $i$ saldrá del mercado debido a que presentara perdidas en el largo plazo al ser sus costos superiores a los de la empresa $j$ . Esta situación conducirá a una solución de monopolio en cuanto que la empresa $j$ suplirá la totalidad de la demanda del mercado.

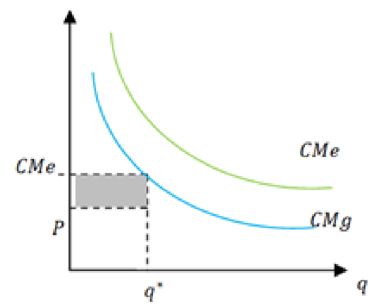
### Segundo escenario

### Supuestos

- Rendimientos crecientes
- Bienes homogéneos
- Costos constantes e iguales, $C_i = C_j$

El segundo escenario de solución presupone rendimientos crecientes, en este sentido el análisis conduce a que la competencia entre las empresas generara una precio igual del costo marginal ($P = CMg$) y la producción optima implicara costes medios superiores al precio. De esta forma las empresas no pueden ser precio – aceptantes, dado los beneficios negativos que ello implicaría, y por tanto las empresas dejarían de producir. Ante el escenario de rendimientos crecientes, el modelo de Bertrand no tiene solución.

**GRÁFICO 3: DESCRIPCIÓN SEGUNDO ESCENARIO – RENDIMIENTOS CRECIENTES**



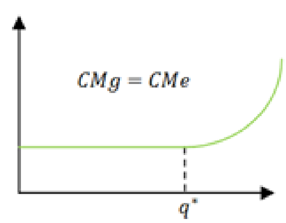

**Fuente**: Elaboración propia.

**Supuestos**

- Rendimientos constantes
- Bienes homogéneos
- Costos constantes e iguales, $C_i = C_j$

Cuando los rendimientos son constantes los $CMg$ son iguales a los $CMe$ hasta un punto crítico en el cual se agota la capacidad instalada, a partir de ahí los costos se incrementan drásticamente al no contar con los requerimientos y especificaciones para la producción de una unidad adicional.

**GRÁFICO 4: DESCRIPCIÓN SEGUNDO ESCENARIO – RENDIMIENTOS CONSTANTES**




**Fuente**: Elaboración propia.

**Supuestos**

- Rendimientos decrecientes
- Bienes homogéneos
- Costos constantes e iguales, $C_i = C_j$

Cuando los rendimientos son decrecientes las empresas en competencia deberán cobrar precios muy elevados a sus consumidores, debido a que su capacidad instalada ya se ha agotado, además no pueden suplir las demandas residuales, todo ello conduce a que existan tantos precios como firmas en el mercado y por tanto la solución es semejante a la solución de competencia monopolística.

**Tercer escenario**

**Supuestos**

- Rendimientos constantes a escala
- Bienes heterogéneos
- Costos constantes e iguales $C_i = C_j$

Las funciones de demanda para las empresas $i$ y $j$ se presentan a continuación:

$$q_i = 1 - P_i + bP_j$$
$$q_j = 1 - P_j + bP_i$$

En donde $b > 0$

Los beneficios de la empresa $i$ están dados por:

$$\pi_i = P_i q_i - C_i q_i$$

La determinación de la función de reacción de las firmas está dada por:

$$\pi_i = P_i(1 - P_i + bP_j) - C_i(1 - P_i + bP_j)$$
$$\pi_i = P_i - P_i^2 + bP_iP_j - C_i + CP_i - CbP_j$$

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial P_i} = 1 - 2P_i + bP_j + C$$

$$1 - 2P_i + bP_j + C = 0$$

Siendo la función de reacción de la empresa $i$

$$P_i = \frac{1+bP_j+C}{2}$$ **Ecuación 12**

La determinación de la función de reacción para empresa $j$ implica un procedimiento similar con lo cual se tendría que la función de reacción para la empresa está dada por:

$$P_j = \frac{1+bP_i+C}{2}$$ **Ecuación 13**

Para obtener el precio óptimo para cada empresa se introduce el valor de la función de reacción de la empresa $j$ en la función de reacción de la empresa $i$

$$P_i = \frac{1 + b\left[\frac{1 + bP_i + c}{2}\right] + c}{2}$$

$$P_i = \frac{(2+b) + c(2+b)}{(2+b)(2+b)}$$

$$P_i = \frac{(1+c)}{(2-b)}$$ **Ecuación 14**

De modo similar, el precio óptimo de la empresa $j$ está dado por:

$$P_j = \frac{1 + b\left[\frac{1 + bP_j + C}{2}\right] + c}{2}$$

$$P_j = \frac{4[2 + b + bC + 2C]}{(2+b)(2-b)}$$

$$P_j = \frac{(2+b) + C(2+b)}{(2+b)(2-b)}$$

$$P_j = \frac{(1+C)}{(2-b)}$$ **Ecuación 15**

Las cantidades a producir por las empresas $i$ y $j$ se muestran a continuación

$$q_i = 1 - P_i + bP_j$$

$$q_i = 1 - \frac{(1+C)}{(2-b)} + b\frac{(1+C)}{(2-b)}$$

$$q_i = \frac{1 + bC - C}{2 - b}$$

$$q_i = \frac{1+C(b-1)}{2-b}$$ **Ecuación 16**

De forma análoga las cantidades a producir por la empresa $j$, están determinadas por

$$q_j = 1 - P_j + bP_i$$

$$q_j = 1 - \frac{(1+C)}{(2-b)} + b\frac{(1+C)}{(2-b)}$$

$$q_j = \frac{1+C(b-1)}{2-b}$$ **Ecuación 17**

Los beneficios en el modelo de Bertrand, están determinados por:

$$\pi_i = \left[\frac{1+C}{2-b}\right] - \left[\frac{1+C(b-1)}{2-b}\right] - C\left[\frac{1+C(b-1)}{2-b}\right]$$

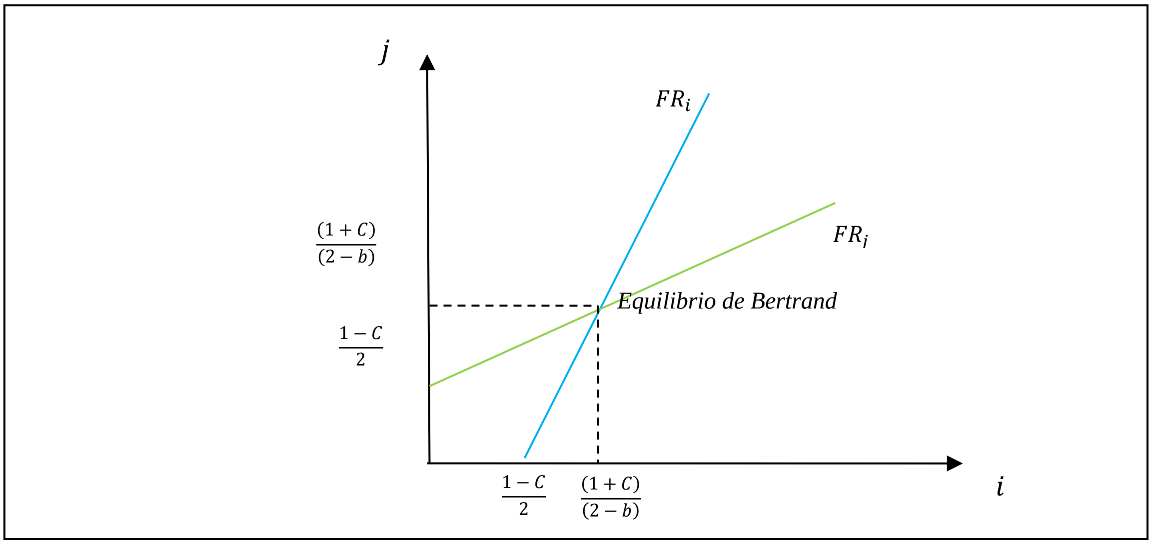
$$\pi_i = \left[\frac{(1+C)}{(2-b)} - \frac{2-b}{2-b} * C\right] * q_i$$

$$\pi_i = [P_i - C] * q_i$$ **Ecuación 18**

De igual forma, realizando un proceso similar obtendríamos los beneficios para la empresa $j$ obteniendo como resultado.

$$\pi_j = [P_j - C] * q_j$$ **Ecuación 19**

**GRÁFICO 5: MODELO DE DUOPOLIO DE BERTRAND**




**Fuente:** Elaboración propia

### 1.2.3 Modelo de Stackelberg

El economista alemán Heinrich Freiherr Von Stackelberg, planeta el modelo de oligopolio de liderazgo. La argumentación es basada en la ventaja que origina ser la primera empresa en decidir el nivel de producción en el mercado. Es decir, en este modelo se supone, que en un mercado oligopólico, los duopolistas no toman sus decisiones de producción de forma simultánea, por el contrario, se plantea que la empresa $i$, como empresa líder del mercado, es la primera en establecer su nivel de producción el cual no puede ser modificado una vez haya sido determinado; con base en esta determinación, es cómo, posteriormente, la empresa $j$, o firma seguidora, establece su respectivo nivel de producción como mejor respuesta al asumido por su rival (Pindyck,1995;431). En la actualidad podemos encontrar varios ejemplos de este comportamiento líder-seguidor; entre algunos se pueden citar: Apple como líder en el mercado de dispositivos móviles y tablet, Amazon, BlackBerry, y el resto son seguidores; Sony por décadas se ha consolidado como líder en aparatos para audio y vídeo, dejando a su competencia como seguidora en este ámbito.

En este modelo, el equilibrio se logra cuando la empresa $i$, o empresa líder, siendo la primera en establecer su nivel de producción, se adelanta a la empresa seguidora, logrando con esto, obtener mayores beneficios. Una vez la empresa líder ha captado la mayor parte del mercado, a la empresa $j$, o seguidora, no le queda otra opción sino la de producir menos. Es claro que en este escenario, los beneficios que la empresa líder obtiene son mayores que los obtenidos en un modelo a la Cournot. La empresa líder sabe, que la empresa seguidora se comporta como un duopolista de Cournot y además, que el nivel de producción de la empresa seguidora depende de la producción de la empresa líder. Por lo tanto, las cantidades producidas por la empresa seguidora son las relacionadas en su función de reacción. Es decir: $q_j = FR_j(q_i)$

Como se mostraba anteriormente, un duopolista, que se comporta a la Cournot, tiene una función de reacción como la establecida en la ecuación (2).

$$FR_j = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}q_j \quad \textbf{Ecuación 2}$$

Reemplazando (2) en $P = a - bq_i - bq_j$

Se tendría:

$$P = a - bq_j - \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}q_i \quad \textbf{Ecuación 20}$$

Como es sabido, la maximización de beneficios para la empresa líder se logrará cuando se igualen su $IMg$ y su $CMg$.

Para la empresa líder, tenemos que su ingreso total tiene la forma:

$IT_i = P.q_i$ Ahora al reemplazar P por su definición en (21) y tendríamos.

$$IMg_i = \left(a - bq_j - \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}q_i\right)q_i \qquad \textbf{Ecuación 21}$$

Derivando parcialmente (22) obtenemos el $IMg_i$ para la empresa líder:

$$IMg_j = \left(a - bq_j - \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}q_i\right)q_i \qquad \textbf{Ecuación 22}$$

Cuando se igualan, el $IMg$ y el $CMg$, la empresa líder obtiene su mayor beneficio (Pindyck.1995; 432). Para este caso, dicho beneficio estaría dado en el nivel de producción $q_i^s$, que sería la producción de la empresa líder en el modelo de Stackelberg.

Como se supone un comportamiento a la Cournot de la empresa seguidora, su nivel de producción depende de la decisión de la empresa líder, es decir el nivel de producción de la empresa seguidora está dado por la función de reacción de ella misma.

Retomando la ecuación (10), se determina la producción de la empresa seguidora teniendo en cuenta el nivel de producto $q_i^s$ de la empresa líder:

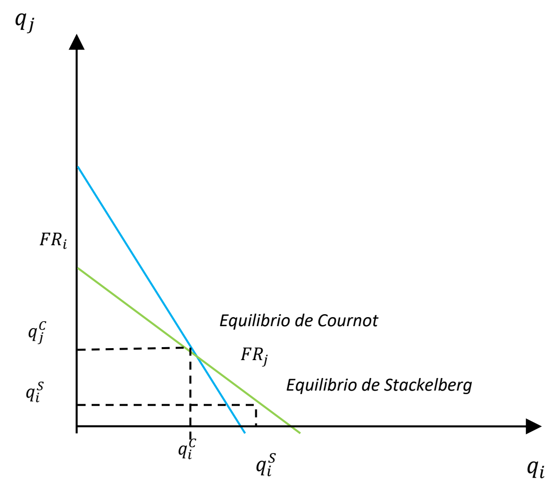
$$q_j^s = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}q_i^s$$

Y ahora el nivel de precios en el modelo de Stackelberg sería:

$$P^s = a - b\left(q_i^s + q_j^*\right) \qquad \textbf{Ecuación 23}$$

En este modelo, la cantidad producida por la empresa líder aumenta y la de la empresa seguidora disminuye, sin embargo se produce más que en el modelo de Cournot. Mientras que los precios en el modelo de Stackelberg son menores a los registrados en el modelo Cournot.

**GRAFICO 6: MODELO DE STACKELBERG**




Las cantidades $q_i^c, q_j^c$ hacen referencia a las del modelo de Cournot, mientras que $q_i^s, q_j^s$ al modelo de Stackelberg. Se logra evidenciar que $q_j^c > q_j^s$, es decir, las cantidades producidas por la firma seguidora disminuyen en el modelo de Stackelberg respecto al modelo de Cournot. Con

**Fuente:** Elaboración propia

### 1.2.4 Otros modelos

**Modelo de Edgeworth:** El modelo supone dos empresas en competencia $i$ y $j$, productoras de un bien homogéneo con costos igual a cero, cada empresa se enfrenta a una curva de demanda rectilínea idéntica para dicho producto, la capacidad de la empresa es limitada para satisfacer toda la demanda del mercado y ambas empresas maximizan su ganancia total en la medida que suponen que su rival mantendrá constante su precio. Como resultado de este enfoque y dada su fundamentación las empresas presentaran oscilaciones continuas del precio del producto entre el precio del monopolio y el de producción máxima de la empresa. (Salvatore, 2009)

**Modelo de Chamberlin:** El modelo además de contemplar los supuestos empleados en la formulación de duopolio de Cournot y el modelo de Edgeworth, reconoce que los duopolistas si reconocen su dependencia mutua. Como resultado a este planteamiento se obtiene que los duopolistas fijan precios idénticos, cantidades idénticas, y maximizan sus ganancias conjuntas. (Salvatore, 2009).

**Modelo de demanda quebrada o Sweezy:** Como una aproximación más realista de los mercados contemporáneos este modelo intenta explicar la rigidez de precios a menudo asociados con los oligopolios. Como premisa de su fundamentación, se observa la presión a la que se ven sometidas las empresas por competir entre ellos con el fin de obtener una mayor participación en el mercado, por medio de la calidad y el diseño en el producto, así como también en publicidad y servicio, vez de competir con cambios en los precios ya que una subida implicaría su salida del mercado y una reducción del mismo implicaría una reducción de los precios de la industria para igualarla.

**Modelo del cartel centralizado:** El cartel como se menciona inicialmente constituye una forma de organización de la industria con el fin de determinar políticas de manera conjunta con el objetivo de aumentar los beneficios (Varian, 2006). Los diferentes tipos de carteles tienen en el cartel centralizado el máximo nivel de integración, en cuyo caso la solución conduce a una solución de monopolio.

**Modelo del cartel de repartición del mercado:** En este tipo de organización de cartel, con menos grado de colusión que el del cartel centralizado, las empresas establecen acuerdos para determinar su participación en el mercado. Como resultado, bajo ciertas condiciones, también puede conducir a una solución de monopolio.

**Modelo de liderazgo de precios:** Este modelo de colusión imperfecta se caracteriza por elegir tácitamente como precio de la industria aquel que la firma líder o de costos más bajos, lo cual permite vender a las demás empresas al mismo precio y posteriormente llega a llenar el mercado.

### 1.3 Teoría de juegos y los oligopolios

Anteriormente, se abordaron los elementos teóricos conocidos y poco conocidos de los oligopolios a partir de las modelaciones tradicionales y a la luz del equilibrio estático. En este aparte, se presentan algunas de las teorías más modernas del análisis dinámico, enriqueciendo el acervo de herramientas metodológicas para el estudio de los mercados oligopólicos así como también otros aspectos de la economía.

Las decisiones de precio, producción, publicidad e inversión en nuevo capital son tan solo algunas de las consideraciones estratégicas que las empresas en formas híbridas de organización industrial deben tomar. Fuera del análisis de las estructuras como el monopolio y la competencia perfecta, la lógica de los mercados oligopolísticos suscita interrogantes sobre este tipo de estructura y de conducta de las empresas existentes en él al ser este tipo de configuración del mercado más recurrente.

A partir del desarrollo de componentes matemáticos y estadísticos, se ha establecido una serie de herramientas metodológicas para la modelaciones dinámicas. La teoría de juegos hace parte de ese conglomerado teórico del que ha logrado pasar de un sistema de equilibrios estáticos a la modelación dinámica y con ello a la ampliación del estudio de la economía, y para nuestro caso en particular, a la profundización en el análisis de los oligopolios.

La teoría de juegos comprende el estudio de los problemas de decisión multipersonales, y su uso puede hacerse extensivo a muchos campos del conocimiento. Pero particularmente, su aplicación es significativa y recurrente en diferentes temas de análisis económico, como los oligopolios, teoría de la negociación, teoría de subastas y comercio internacional decisiones arancelarias. La descripción de interacciones de decisión en estructuras formalizadas de incentivos (juego), permite profundizar sobre el estudio de problemas de decisión en la medida que se genera información relevante para el análisis del comportamiento de los agentes involucrados en él (jugadores), debido a que las decisiones son estratégicamente interdependientes, el resultado de las decisiones tomadas por cada jugador depende de las decisiones de los otros e influyen a su vez en las retribuciones e incentivos (pagos) como resultado final del juego.

Existen dos clases de juegos: estáticos (o de decisión simultánea) y dinámicos (o de decisión sucesiva). Estos a su vez se subdividen en dos de acuerdo al tipo de información, ya sea esta completa o incompleta. Los juegos de información completa, presuponen que la función de ganancias de cada jugador a partir de una combinación de acciones establecidas, es conocida por los jugadores. Por el contrario los juegos de información incompleta no.

Los juegos pueden caracterizarse por ser cooperativos o no. La cooperación en juego presupone carácter vinculante entre las empresas participantes, debido a que la toma de decisiones implica estrategias conjuntas, determinadas por medio de un contrato. Por el contrario, en un juego no cooperativo, no es posible la negociación entre las partes. Por tanto, y enfatizando el análisis en un juego no cooperativo, el comportamiento de los jugadores, el cual se supone racional involucra el conocimiento de las motivaciones en la conducta de los jugadores que permiten deducir cual será su forma de proceder ante las acciones de su adversario. "*La representación en forma normal de un juego con $n$ jugadores, sus respectivas estrategias, es decir, las acciones que puede tomar cada jugador en cada momento de iteración* $(S_1, \dots S_n)$ *y funciones de ganancias* $(u_1, \dots u_{n.})$ *, se denota como* $A = \{S_1, \dots S_n;\ u_1, \dots u_n\}$*" (Gibbons,2003,4).* Usualmente un juego emplea matrices o árboles de decisión, como herramientas que permiten representar los incentivos que los agentes pueden obtener al seguir determinados cursos de acción. Este enfoque mantiene vigente el supuesto de maximización de las utilidades, lo cual posibilita el análisis de los objetivos y de estrategias para consecutivamente tomar decisiones encaminadas a obtener dicha finalidad, no obstante se hace necesario aclarar que el adversario reconoce y elabora sus propias estrategias orientadas a obtener el mismo resultado.

Existen ciertos criterios que deben ser tenidos en cuenta para comprender la iteración en estos procesos de decisión. Uno de ellos es el concepto de estrategia dominante[1]; en este sentido, un curso de acción óptimo e independiente de las acciones de los demás jugadores, es definido como tal. Por tanto, los jugadores al ser agentes racionales, optaran por emplear estrategias dominantes en la medida que presuponen mayor utilidad.

No obstante, no es condición suficiente para establecer como solución unívoca a un juego, el empleo de estrategias dominantes en la determinación de un posible resultado. Algunos de ellos pueden no presentar estrategia domínate y de tenerla la estabilidad del equilibrio por medio de las mismas resulta discutible. Por ello en la búsqueda de un concepto general y aplicable, la teoría de juegos establece el equilibrio de Nash como concepto solución a un juego.

### 1.3.1 Equilibrio de Nash

Al realizar una predicción sobre las estrategias de los jugadores y a su vez fundamentar que ésta es correcta y en efecto sea elegida por los jugadores, la teoría de juegos emplea el concepto de Equilibrio de Nash (EN)[2] como solución estable a un juego. Este se define como el conjunto de estrategias predichas para cada jugador de mejor respuesta ante las estrategias de los otros jugadores, ningún jugador desearía desviarse unilateralmente de la decisión tomada, dadas las estrategias elegidas por los demás participantes en el juego. Un Equilibrio de Nash está formado por las estrategias óptimas

[1] Una Estrategia dominante se define un juego en forma normal $A = \{S_1, \dots S_n;\ u_1, \dots u_n\}$. , en donde $S_i^{'}$ y $S_i^{''}$ son posibles estrategias del jugador $i$, como aquella estrategia $s_i^{''}$, si para cada combinación posible de las estrategias, la ganancia del jugador $i$ por utilizar $s_i^{'}$ es estrictamente menor que la ganancia por utilizar $s_i^{''}.u_i\left(s_1, \dots, s_{i-1,} s_i^{'}, s_{i+1}, \dots s_n\right) < u_i\left(s_1, \dots, s_{i-1,} s_i^{''}, s_{i+1}, \dots s_n\right)$. Las estrategias dominantes también pueden ser consideradas como estrategias Maxmin, es decir, aquellas que se caracterizan por maximizar la ganancia mínima que puede obtenerse en un juego. (Gibbons. 1992;5)

[2] En un juego normal $\mathrm{A} = \{\mathrm{S}_1, \dots \mathrm{S}_\mathrm{n};\ \mathrm{u}_1, \dots \mathrm{u}_\mathrm{n}\}$. , las estrategias $\mathrm{S}_\mathrm{i}^*, \dots, \mathrm{S}_\mathrm{n}^*$ forman un Equilibrio de Nash si para cada jugador $i$, $\mathrm{S}_\mathrm{i}^*$ es la mejor respuesta del jugador $i$ a las estrategias de los otros jugadores $n-1$, $(s_1^*, \dots s_{i-1}^*, s_{1+1}^*, \dots s_n^*)$ : $u_i(s_1^* \dots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \dots s_n^*) \geq u_i(s_1^* \dots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \dots s_n^*)$ (Op. Cit)

para cada jugador, sin embargo, ello no implica que mediante éste se obtenga el mejor resultado posible, sino que *"cada empresa obtiene lo mejor resultado posible dado lo que hacen sus* competidoras" (Pindyck, 1995; 425)

El Equilibrio de Nash se basa en dos argumentos principales para ser empleado como condición necesaria (y en algunos casos suficiente) para que un perfil de estrategias sea la solución de un juego. El primero de ellos hace referencia a un comportamiento racional dentro del proceso de decisión. Un jugador en un juego es consciente que el y su adversario son exactamente racionales es exactamente racional, por lo tanto podrá concluir que su estrategia de equilibrio de Nash es la mejor que puede jugar. La formación de expectativas con respecto a las decisiones del otro jugador, posibilita calcular las consecuencias de sus propias decisiones. El segundo argumento, enfatiza en la experiencia como otro elemento importante para dicha determinación, ello en la medida que los jugadores aprenden las características del juego y con ello se corrobora que optar por la estrategia individual racional es la mejor opción debido a que reporta los pagos más altos. Con ello conforme los jugadores aprenden de sus experiencias en juegos posteriores, la predicción del juego hacia las estrategias estables de Nash se tornan más recurrentes (Gibbons, 1992; 9-15).

### 1.3.2 Estrategias puras y estrategias mixtas

Dado que el equilibrio de Nash basa su argumentación en la racionalidad de los jugadores, existen otros dos conceptos importantes en el desarrollo de estrategias de este tipo, en un juego. Uno de ellos es el de *Estrategias Puras*, se denomina así a la opción concreta de decisión, de la que los jugadores pueden hacer uso en un juego determinado, obteniendo como resultado un equilibrio. No obstante existen juegos en donde la determinación de un equilibrio no es posible, debido a que los jugadores no encuentran satisfactorio ninguna combinación de estrategias acorde a las retribuciones que esperan obtener una vez finalizado en juego. En este caso, no es posible considerar un equilibrio en estrategias puras, sin embargo empleando *Estrategias Mixtas,* es decir, aquellas que el jugador elige aleatoriamente entre dos o más opciones posibles en un conjunto de posibilidades, o lo que también podría considerarse como aleatoriedad de estrategias puras con asignación de probabilidad, es posible determinarlo.

### 1.3.3 Los Juegos repetidos

La posibilidad de que un juego pueda ser llevado a cabo por más de una vez, es denominado, *Juego Repetido*, es este sentido, la continua interacción de los jugadores genera información sobre la conducta de sus respectivos rivales que puede ser empleada en futuros juegos. La dinamización del juego influye en la forma como los agentes asumen su estrategia racional en él. Esta clase de juegos, se subdivide en Juegos Finitos y Juegos Infinitos, como su nombre lo expresa lo juegos finitos se desarrollan en un número definido de veces mientras que los últimos no.

### 1.3.4 Juegos secuenciales

Los juegos en donde, las decisiones no son tomadas de forma simultánea, son denominados *Juegos Secuenciales*, en este sentido la ventaja de jugar primero, ya mencionada en el modelo de oligopolio de Stackelberg, influye notoriamente en el resultado final de un juego, y a diferencia de los juegos simultáneos, su complejidad es menor, debido a que el análisis basa en las acciones y reacciones racionales de los jugadores una vez establecida la estrategia de mayores pagos optada por el primer jugador.

### 1.3.5 Amenazas, credibilidad y reputación

En un juego secuencial la credibilidad de las estrategias es fundamental para incidir en el comportamiento del oponente de manera favorable. De a cuerdo con ello, las amenazas y lo autenticas o no, que estas resulten ser al rival, son factores determinantes en el resultado en un juego. Limitar la posición del jugador oponente a la conducta de su adversario presupone una estrategia importante en el desarrollo del juego. Cabe aclarar que una amenaza solo es útil cuando es creíble, de forma que logre influenciar estratégicamente el comportamiento del rival.

Para el caso específico de un juego repetido la reputación del jugador en juegos previos es fundamental, en cuanto determinará la forma de proceder de su rival ante sus posibles estrategias.

### 1.3.6 Aplicación de la teoría de juegos al modelo de oligopolio de Cournot

Quizá una de las aplicaciones más habituales en teoría de juegos, sea aquella enfocada al estudio de organizaciones industriales con un reducido número de empresas, en este sentido, los oligopolios son pioneros dada la aplicabilidad de esta teoría en su análisis

Cournot en su modelo de duopolio, anticipó el equilibrio de Nash en más de un siglo, el que, en la actualidad se constituye como uno de los modelos clásicos de la teoría de juegos. Como se mostró anteriormente, la competencia por una mayor cuota del mercado y la determinación del precio del bien homogéneo de acuerdo a las cantidades en el mercado, colude a un equilibrio que vacía el mercado. El tratamiento matemático que de este modelo se realiza desde la teoría de juegos y bajo la perspectiva de Joaquín Pérez Navarro en su libro Teoría de Juegos se presenta a continuación:

**Supuestos:**

**a.** Sean $q_1$ y $q_2$ las cantidades de productos homogéneos producidos por las empresas $A_1$ y $A_2$ respectivamente.

**b.** Función de demanda inversa decreciente y lineal en el intervalo $\left[0, \frac{a}{b}\right]$

$$P(Q) = \begin{cases} a - bQ & \text{si } bQ < a \\ 0 & \text{si } bQ \geq a \end{cases} \text{donde } b > Q$$

**c.** La cantidad agregada en el mercado es igual a $Q = q_1 + q_2$

**d.** El coste de producción de la cantidad $q_i$ por la empresa es $C_1(q_1) = cq_1$; $C_2(q_2) = cq_2$

**e.** No existen costos fijos, el coste marginal es constante e igual a $c$ para ambas empresas, en donde se supone que $c < a$

**f.** Las empresas eligen cantidades en forma simultanea

**g.** Los beneficios estarán determinados por:

$$\pi_1(q_1, q_2) = q_1(a - bq_1 - bq_2) - cq_1 = q_1(a - bq_1 - bq_2 - c)$$
$$\pi_2(q_1, q_2) = q_2(a - bq_1 - bq_2) - cq_2 = q_2(a - bq_1 - bq_2 - c)$$

**h.** Los jugadores $A_1$ y $A_2$cuentan con espacios de estrategias $S_1 = S_2 = \left[0, {}^{a}\!/_{b}\right]$

**i.** Se supone que las funciones de pagos o ganancias están determinadas por:

$$U_1(q_1, q_2) = q_1(a - bq_1 - bq_2)$$
$$U_2(q_1, q_2) = q_1(a - bq_1 - bq_2)$$

En donde se supone que las utilidades coinciden con los beneficios y los jugadores son neutrales al riesgo.

**Cálculo del equilibrio de Nash**

Para establecer la respuesta óptima que la empresa $A_1$ ante cualquier acción tomada por $A_2$ se obtiene a partir de la solución del siguiente sistema.

$$\max u_1(q_1, q_2) = q_1(a - bq_1 - bq_2 - c) \quad 0 \leq q_1 \leq {}^{a}\!/_{b}$$

Se supone que la solución interior, donde $q_1^{+} + q_2$ pertenece al intervalo abierto $\left(0, {}^{a}\!/_{b}\right)$.

**Condiciones de primer y segundo orden en la determinación de un máximo**

Derivando la ecuación parcialmente con respeto a $q_1$, se obtiene.

$$\partial u_1 {}^{(q_1, q_2)}\!\Big/_{\partial q_1} = q_1(-b) + (a - bq_1 - bq_2 - c) = 0$$

Despejando $q_1$ de la ecuación

$$q_1 = \frac{a - c - bq_2}{2b}$$

Para determinar que efectivamente sea una elección óptima de respuesta de $A_1$, se aplica segunda derivaba con lo cual se obtiene:

$$\partial^2 u_1 {}^{(q_1,\ q_2)}\Big/_{\partial\ \mathrm{q}_1^2} = -2b < 2$$

Una vez satisfecha la condición suficiente de máximo, se establece como correspondencia óptima para la empresa $A_1$.

$$R_1(q_1) = \frac{a - c - bq_2}{2b}$$

Paralelamente, y empleando un procedimiento similar para la empresa $A_2$ , la correspondencia óptima para la empresa se obtiene a partir de la solución del siguiente sistema.

$$\max u_2(q_1, q_2) = q_2(a - bq_1 - bq_2 - c) \quad 0 \leq q_2 \leq {}^{a}\!/_{b}$$

Una vez aplicadas las condiciones de primer y segundo orden, como se realizó anteriormente con la empresa $A_1$ , se deduce que la correspondencia de respuesta óptima para la empresa $A_2$ está determinada por:

$$R_2(q_1) = \frac{a - c - bq_1}{2b}$$

Para establecer el equilibrio de Nash $(q_1^*, q_2^*)$ y siendo $q_1^*$ y $q_2^*$ las respuestas óptimas de las empresas $A_1$ y $A_2$ respectivamente. Se tiene que

$$q_1^* = \frac{a - c - bq_2^*}{2b}$$

$$q_2^* = \frac{a - c - bq_1^*}{2b}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior:

$$q_2^* = \frac{a - c - b\,\dfrac{a - c - bq_2^*}{2b}}{2b}$$

$$q_2^* = \frac{a - c + bq_2^*}{4b}$$

$$q_2^* = \frac{a - c}{3b}$$

Análogamente se establece que:

$$q_1^* = \frac{a - c}{3b}$$

# CAPÍTULO II
# UN EQUILIBRIO COURNOT INESTABLE: TEORÍA Y ANTECEDENTES A CASO DE ESTUDIO

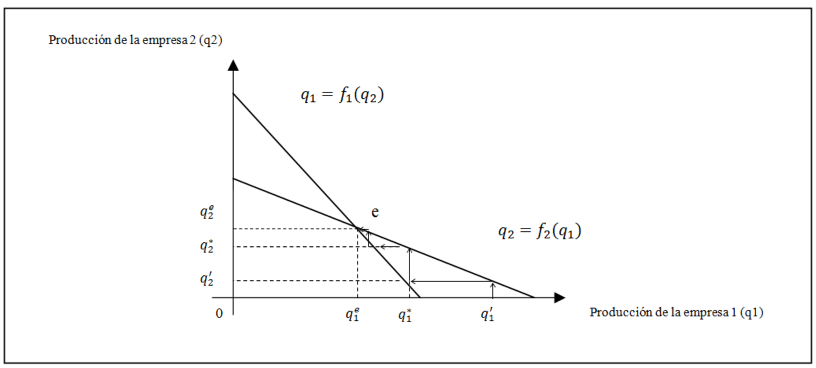
## 2.1 Un equilibrio Cournot inestable – Schotter

De acuerdo a Schotter, A. (1996), el modelo de oligopolio de Cournot desarrollado dentro la teoría de mercados imperfectos, presenta un equilibrio inestable en su modelación, el autor no profundiza al respecto, en cuanto solo se limita a establecer que la convergencia que se presenta en la formalización a la Cournot está dada  por la forma en cómo son trazadas las funciones de reacción de las dos únicas empresas en competencia. En consecuencia, una modificación de la pendiente de solo una de las funciones de reacción de la empresa, a diferencia de lo que plantea inicialmente el modelo de Cournot, conduciría a una divergencia del punto de equilibrio. Si bien, la afirmación que se presenta en el texto resulta consecuente con el tema de análisis, se hace necesario mediante una revisión teórica, establecer bajo qué parámetros esto se hace posible, determinando la existencia de un equilibrio o no para ese mercado, dada la convergencia o divergencia del mismo.

Para comprender el análisis entorno al equilibrio inestable de Cournot, es necesario retomar el análisis del modelo de mismo, desarrollado en el capitulo anterior, en el cual es importante resaltar que el mercado se encontrará en equilibrio si las empresas eligen los niveles de producción $q_i^e$ y $q_j^e$, en este sentido, frente al interrogante que suscita dicha afirmación con respecto a ¿qué garantiza que las firmas realmente optaran por dichos niveles de producción? Shooter plantea que existen dos respuestas al respecto, *"la primera, es que la teoría de Cournot no afirma que las firmas que los duopolistas elegirán estos niveles de producción. Todo lo que dice es que si los eligen, el mercado se encontrará en equilibrio. La segunda, va más lejos y dice que se puede esperar* *realmente que los niveles de producción en el mercado llegaran con el tiempo a* $q_1^e$ *y* $q_2^e$ *" (Schotter.1996; 371)*

Al analizar esta última afirmación, se presupone un proceso de *convergencia* hacia el punto de equilibrio de Cournot, como se muestra en el gráfico 7. En él, la empresa 1 parte de una producción superior a la de equilibrio, denotada como $q_1'$, al introducir dicha producción en su respectiva función de reacción la empresa 2 optará por producir $q_2'$, producción aun inferior a su producción óptima, no obstante, la respuesta de la empresa 1, ante dicha producción generará una disminución de la producción de $q_1'$ a $q_1^*$, con lo cual por el contrario la empresa 2 presentará un nivel de producción mayor $q_2'$; este proceso convergente continuará hasta situar a ambas empresas en sus respectivas cantidades de producción de equilibrio.

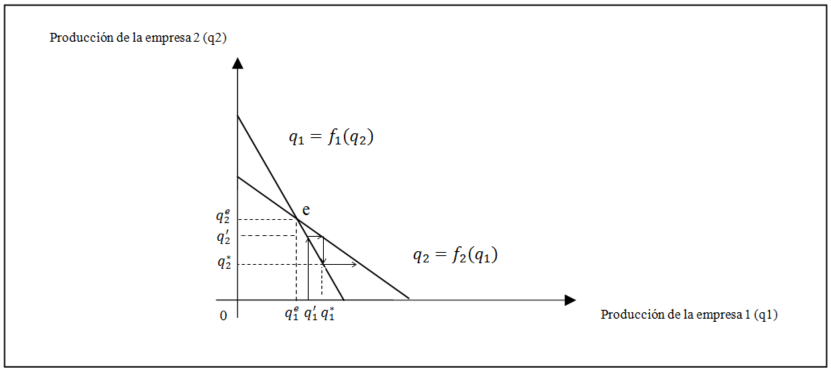
**GRÁFICO 7: EL EQUILIBRIO DE LA FUNCIÓN DE REACCIÓN (EQUILIBRIO DE NASH) PARA EL DUOPOLIO**




**Fuente:** Schotter.1996; 371

Dado lo anterior, Schotter plantea que el modelo puede generar un proceso *divergente*, en la medida que este, depende en la forma en que son trazadas las curvas de reacción, para lo anterior se presupone que una leve modificación de la pendiente de una de las empresa, desplazaría las producciones de las empresas más lejos del punto de equilibrio del mercado, como muestra el gráfico 8. En este sentido el presente capítulo intenta explorar bajo qué condiciones, dicha afirmación es cierta. Para su análisis, se han desarrollado tres escenarios posibles de intercepción de las respectivas funciones de reacción de las empresas donde se logró determinar las condiciones bajo las cuales el proceso de determinación del equilibrio tiende a ser convergente.

**GRÁFICO 8: UN EQUILIBRIO COURNOT INESTABLE**




**Fuente:** Schotter. 1996; 372

## 2.2 Condiciones de convergencia y divergencia

El desarrollo de los escenarios inicia con la reformulación de las respectivas funciones de reacción de las empresas, debido a que ello favorecerá la manipulación a lo largo del análisis:

- $q_i = \frac{a_i c_i}{2b_i} - m_i q_j = K_i - m_i q_j$ Siendo $K_i = \frac{a_i c_i}{2b_i}$
- $q_j = \frac{a_j c_j}{2b_j} - m_j q_i = k_j - m_j q_i$ Siendo $K_j = \frac{a_j c_j}{2b_j}$

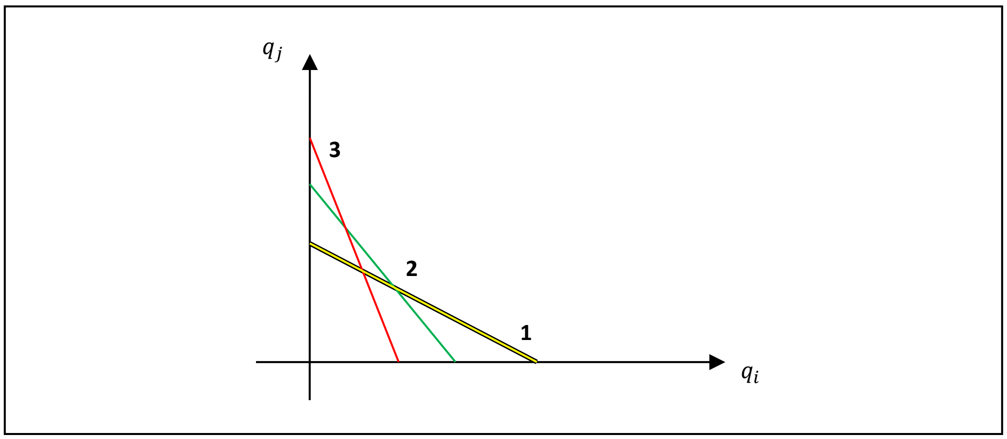
Las condiciones bajo las cuales las funciones de reacción de las empresas se interceptan en el primer cuadrante de un plano cartesiano se presentan a continuación:

$$\left[\begin{array}{l} k_j > k_i \\ \dfrac{k_i m_j}{m_i} > k_j \\ m_i > m_j \end{array}\right. \rightarrow \left[k_i \frac{m_j}{m_1} > k_j > k_i\right.$$

$$\begin{bmatrix} k_j < k_i \\ k_i < \dfrac{m_i}{m_j} k_j \\ m_j < m_i \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} k_j < k_i < \dfrac{m_i}{m_j} k_j \\ m_j < m_i \end{bmatrix}$$

Establecidas esas condiciones para que la intercepción de las firmas se presente en el cuadrante (+,+) del plano, a continuación se presentan tres escenarios para determinar el posible proceso de convergencia o divergencia de las empresas en la determinación del equilibrio, basados en las posibilidades de las formas que se podría presentar las funciones de reacción de las firmas:

**GRÁFICO 9: DESCRIPCIÓN DE LOS ESCENARIOS**




**Fuente:** Elaboración propia

El anterior gráfico muestra las tres posibles formas que podría presentar la función de reacción de la empresa j, manteniendo la función de reacción de la firma i fija (línea de color negro), con lo cual se hace fácil ejemplificar los escenarios que se presentan a continuación (cabe anotar que el desarrollo de los escenarios tiene en cuenta la variación de ambas funciones de reacción). Con lo anterior se pueden presentar tres escenarios.

**Primer escenario:** Cualquier punto es punto de equilibrio dadas las siguientes condiciones.

- Si $m_i = \frac{1}{m_j}$
- Y $k_i = \frac{1}{m_j} * k_j$

**Segundo escenario*:*** El proceso hacia el equilibrio es convergente si:

- $\begin{cases} \frac{k_i}{m_i m_j} > \frac{k_j}{m_i} > k_i \\ \frac{1}{m_j} > m_i \end{cases}$
- $\begin{cases} \frac{k_i}{m_i} > k_j > k_i m_j \\ \frac{1}{m_j} > m_i \end{cases}$

Si $\frac{1}{m_j} > m_i$ entonces $k_j$ debe ser mayor que el producto $k_i m_j$ y a su vez menor que $\frac{k_i}{m_i}$

**Tercer escenario:** El proceso hacia el equilibrio es divergente si:

- $\begin{cases} \frac{k_j}{m_j} < k_i < m_i * k_j \\ \frac{1}{m_j} < m_i \end{cases}$

Si $\frac{1}{m_j} < m_i$, entonces se debe cumplir que $\frac{k_j}{m_j}$ debe ser menor que $k_i$ y a su vez menor que el producto de $m_i * k_j$

Con lo anterior se puede concluir que el proceso de decisión en la producción de cantidades para las empresas es:

- *Divergente del equilibrio:* Si la función de reacción de la empresa j presenta una pendiente mayor, con un intercepto superior al de la función de reacción de la empresa i.
- *Convergente del equilibrio:* Pendiente menor con un intercepto inferior al de la función de reacción de la empresa i.

- *Cualquier punto es punto de equilibrio:* Pendiente igual, intercepto igual, caso singular el equilibrio se presenta en cualquier punto.

La convergencia del equilibrio en el modelo de oligopolio de Cournot es debida a la forma con son trazadas las funciones de reacción, que a su vez están determinadas por la pendiente e intercepto de las funciones de reacción.

El análisis que se presentó anteriormente, se desarrolló con el objetivo de establecer bajo qué condiciones la afirmación hecha por Schotter se presenta, ampliando así el análisis teórico del modelo de oligopolio de Cournot. No obstante, este tipo de afirmaciones plantean y cuestionan el planteamiento del modelo y motiva el desarrollo de la presente investigación.

### 2.3. Otros antecedentes del caso de estudio

Si bien el planteamiento realizado por Schooter, abordado y ampliado en el numeral anterior, evidencia la existencia de un equilibrio inestable de Cournot, a ese análisis se le suman artículos como *On The Bifurcations of Equilibria of a Locally Cournot Economic Model* escrito por Juan L.G. Guirao, Miguel A. López, Jaume Llibre y Raquel Martínez (2000), en el cual se plantea, de manera complementaria al tema a desarrollar, las diferentes bifurcaciones de equilibrios presentes en el modelo de Cournot sí se asume la interacción de tres firmas; de igual manera plantea los atractores preponderantes para la modelación y la estabilidad de los mismos. El desarrollo de este planteamiento emplea un modelo económico en el que la generalización del duopolio de Cournot supone que las firmas se encuentran alrededor de una línea o círculo y que cada firma compite a la Cournot con su respectiva firma rival en sentido derecho e izquierdo, las bifurcaciones de los equilibrios se definen en términos de los costes de producción de cada firma. Este proceso económico es modelado matemáticamente un sistema dinámico discreto de dos dimensiones.

En este sentido si la firma X pone en el mercado al inicio del juego $\alpha 0$ de producto y la firma Y pone $\beta 0$, en el próximo paso del juego la firma X producirá g ($\beta 0$), es decir, un cantidad de producto que depende directamente del nivel de producción de la empresa Y en el paso anterior, por otro lado la firma Y producirá f (α0) en un proceso dinámico. Por lo tanto, todo el proceso se rige por la dinámica del sistema discreto, en el que la fuerza depende de la dinámica de los mapas de un intervalo de dimensiones F y G. Este planteamiento emplea el método sistemas dinámicos, es decir, el desarrollo de un conjunto de ecuaciones cuyos parámetros internos siguen una serie de reglas temporales que varían con respecto al tiempo.

El estudio de los sistemas dinámicos se lleva a cabo mediante la modelación del proceso por medio de ecuaciones de estado que relacionan estados pasados con estados futuros, un enfoque de análisis cualitativo y por último la simulación del mismo. El modelo propuesto limita la formalización matemática del modelo de oligopolio de Cournot al número específico de tres firmas, sumado a lineamientos que podrían contribuir a la incursión de una cuarta.

Entre otras consideraciones teóricas se encuentra *El Equilibrio Dinamico Per I Mercati Oligopolistici* escrito por Alfio Patti (2009), en este se aborda el problema de dinámica de equilibrio en un mercado oligopolístico, a partir de las condiciones de equilibrio a manera equivalente en términos de una desigualdad variacional. Por medio de teoremas de existencia y aplicación del teorema de la dualidad infinita dimensiones desarrollado, se obtienen la existencia de variables de Lagrange, que permiten describir el comportamiento del mercado.

La revista Equilibrio Económico de la Universidad Autónoma de Coahuila, en su segunda publicación semestral del año 2007, escrita por Vicente Germán-Soto y José Luis Escobedo Sagaz, analiza, desarrolla y evalúa la aplicabilidad de la teoría de juegos empleada en el dilema del prisionero, en estructuras de mercado oligopolístico. En este sentido, la argumentación considera, bajo qué condiciones cooperar con el adversario, en un juego finito, puede ser una estrategia óptima para una empresario en un juego a la Cournot. Como resultado de su proceso de investigación se encontró que dicha conducta y pese a las limitaciones, la cooperación puede mantenerse mediante tres condiciones básicas, los pagos, las estrategias y la probabilidad de actuar racionalmente. Sumado a anterior, el estudio permite modificar y adherir otras consideraciones (capacidad de producción de la empresa) que para éste, conforman un análisis mucho más práctico.

Con las anteriores consideraciones teóricas se evidencia la necesidad de comprender los desequilibrios que se presentan en la economía actual. En este sentido, la exclusión de la posibilidad de que exista comunicación y cooperación entre las empresas en los modelos planeados en el capitulo uno y la existencia de estrictos supuestos, no da cuenta sobre la realidad de los mercados contemporáneos en el que las economías capitalistas actuales, las empresas aprenden de sus rivales y de la historia de sus confrontaciones, modifican sus estrategias, introducen innovaciones a sus procesos productivos, son permeadas por la políticas macroeconómicas, crisis mundiales, entre otras cosas; lo cual queda por fuera de la modelación clásica y lo que es peor aún no da cuenta de los constantes y recurrentes desequilibrios en los que divagan los mercados modernos. Los acercamientos teóricos que se han establecido anteriormente pretenden aportar en la discusión e involucrar estos aspectos relegados en modelaciones clásicas. En este orden de ideas, mediante la profundización en la determinación de la convergencia o divergencia del equilibrio en el modelo de oligopolio de Cournot y con el cuestionamiento y uso de la teoría en torno a sistemas dinámicos, lo que se pretende es indagar sobre el alcance del modelo de duopolio de Cournot a la luz de supuestos que tratan de explicar el comportamiento de este tipo de mercado, intentando escudriñar sobre aspectos excluidos anteriormente y que están presentes en el análisis propuesto.

## 2.4 Sistemas Dinámicos y teoría del caos

El desarrollo del pensamiento económico ha ido de la mano con el desarrollo de las diferentes ciencias que aportan a la comprensión y análisis de la realidad. El paso de la concepción estática a la dinámica, significó un avance considerable en la formulación de modelos que se acerquen más a la conducta del mundo real. Gracias a esta nueva concepción, se logran identificar relaciones, propiedades y características que bajo la modelación estática podrían permanecer ocultas. Sin embargo, dicha trascendencia significó también un paso hacia estructuras más robustas y complejas para el análisis, hecho que requirió de la implementación de herramientas teóricas y metodológicas que estuvieran más acordes con los nuevos requisitos.

Con los aportes que desde la física y el cálculo realizara Isaac Newton, inicia un largo camino en la construcción de teorías que permitieran la modelación, estudio y comprensión de un mundo complejo, cambiante en el tiempo y particularmente, caótico. Dichos aportes permiten hoy dejar atrás el cómodo mundo de la estática y el determinismo[3], para adentrarnos en la dinámica, con el fundamental rol del tiempo como variable y la posible aparición de comportamientos caóticos, donde los principios de Laplace ya no funcionan y no sería ya "sencillo" conocer, a partir de las condiciones iniciales, el valor de algún parámetro en cualquier momento del tiempo.

Este principio de Laplace se encuentra resumido en su aseveración *"Podemos mirar el estado presente del universo como el efecto del pasado y la causa de su futuro. Se podría condensar un intelecto que en cualquier momento dado sabría todas las fuerzas que animan la naturaleza y las posiciones de los seres que la componen, si este intelecto fuera lo suficientemente vasto para someter los datos al análisis, podría condensar en una simple fórmula de movimiento de los grandes cuerpos del universo y del átomo más ligero; para tal intelecto nada podría ser incierto y el futuro así como el pasado estarían frente sus ojos". (Muñoz. 1946;396)*

---

[3] El determinismo es una doctrina filosófica que sostiene que todo acontecimiento físico, incluyendo el pensamiento y acciones humanas, están causalmente determinados por la irrompible cadena causa-consecuencia, y por tanto, el estado actual determina en algún sentido el futuro. Existen diferentes formulaciones de determinismo, que se diferencian en los detalles de sus afirmaciones. Existe una diferencia importante entre la determinación y la predictibilidad de los hechos. La determinación implica exclusivamente la ausencia de azar en la cadena causa-efecto que da lugar a un suceso concreto. La predictibilidad es un hecho potencial derivado de la determinación certera de los sucesos, pero exige que se conozcan las condiciones iniciales (o de cualquier punto) de la cadena de causalidad. (Muñoz. 1946; 384-417).

La economía ha recorrido el mismo camino desde sus inicios como ciencia. Al principio, rezaría el génesis de la economía, todo era calma, equilibrio, estática y determinismo juntos. El resultado futuro no era sino el resultado de las condiciones iniciales y del inevitable equilibrio al que se encontraba condenado el mundo económico. Era la concepción y visión de un mundo lineal, predecible y autocorregido. Sin embargo, con los avances teóricos, la misma ciencia económica, se fortaleció en su análisis, y al igual que las ciencias exactas, pasó de los sistemas estáticos a los dinámicos, a la implementación de sistemas cambiantes en el tiempo, y con ello, a la modelación compleja de la realidad. El reconocimiento de factores sociales, políticos, económicos y hasta psicológicos, en la determinación del componerte económico, a la par de la inclusión en el análisis de las variaciones del comportamiento en el tiempo, ha hecho de la economía, en la actualidad, una ciencia de estudios complejos, con modelaciones dinámicas que comprende, que el mundo en el que vivimos, es un compendio de leyes y comportamientos que interactúan de manera contante en un sistema donde reina el caos.

### 2.4.1 La modelación de la realidad

Un modelo es la construcción abstracta de un determinado aspecto de la realidad, en el cual intervienen, de manera general, las variables que van a caracterizar, o describir por así decirlo, la realidad a modelar, y relaciones funcionales entre estas variables.

En general se puede hablar de dos tipos de modelación de la realidad: la estática y la dinámica. En la modelación estática, el tiempo no desempeña ninguna función, todo comportamiento se desarrolla en un instante y no es iterante en el tiempo. Por el contrario, la modelación dinámica, involucra de manera fundamental el tiempo, dado que considera el cambio de alguna o varias variables durante un periodo de tiempo, es decir, describe trayectorias temporales que detallan su comportamiento.

Como lo planteara Restrepo dentro de la modelación dinámica se encuentran dos generalidades. La primera son *"los modelos dinámicos deterministas, donde, tanto los parámetros como las variables temporales tienen valores determinados y conocidos con* *total certeza en cualquier momento".* La segunda generalidad son *"los modelos dinámicos estocásticos, en donde las variables o parámetros no tienen un valor conocido con certeza sino que siguen una distribución de probabilidad".(Restrepo. 2007; 34)*

### 2.4.2. Aspectos generales de la Teoría del Caos

La teoría del Caos, constituye un nuevo enfoque en el estudio de los fenómenos naturales y sociales. De lo que se trata, es de la aplicación de nuevas herramientas, teóricas, matemáticas y metodológicas, que permitan la comprensión del comportamiento complejo de éstos fenómenos. Pasar de una complejidad cualitativa a una cuantitativa, configura el avance que introduce elementos como dinámica, series de tiempo, ecuaciones diferenciales, atractores, sistemas no lineales, probabilidad e incertidumbre.

Hasta hace unos años, la naturaleza era entendida como un sistema dinámico que se comportaba según la teoría causal y determinista de Laplace, la cual establece que cuando se conocen de manera exacta las condiciones iniciales de un sistema, es posible predecir de manera precisa el estado del sistema en cualquier otro momento; lo que significaba que todos los componentes del sistema eran regidos por leyes de carácter universal y que, en consecuencia, era posible prever cada fenómeno si se conocen de antemano dichas leyes. Sin embargo, y gracias a los aportes y estudios realizados más recientemente, se ha podido establecer que dicha causalidad no es del todo posible, lo que ha llevado a reformular la noción determinista de la naturaleza y darle paso y cabida a la incertidumbre, la probabilidad y al caos.

El estudio de los comportamientos que presentan incertidumbre, dado que no es posible predecir el desarrollo de su movimiento, constituyen la base de lo que se denomina Teoría del Caos. En el caso de la economía, dicha Teoría del Caos, trata es del estudio del comportamiento de variables económicas que son significativamente sensibles a los cambios en sus condiciones iniciales. Es decir, el estudio de la economía desde una perspectiva no determinista, de variables que son funcionalmente no lineales y con comportamientos aparentemente desordenados, pero que poseen una dinámica explicable desde la teoría del caos.[*Véase: (Cornejo. 2004); (Restrepo. 2007); (Schifter. 1996)*]

### 2.4.3 Del determinismo al Caos

Con los planteamientos realizados por Isaac Newton (1642 – 1727), nace la mecánica clásica y con ella, los sistemas dinámicos. Estos se encontrarían regidos por la teoría causal y determinista formulada por Laplace, bajo la cual dichos modelos dinámicos se comportarían de acuerdo a esta teoría siempre que estados iniciales o valores iniciales de las variables produzcan comportamientos o trayectorias cercanas en todo momento o instante de tiempo. Sin embargo, se encontró con posterioridad que existen modelos dinámicos que presentan comportamientos distintos o dependencia sensible a las condiciones o valores iniciales. Cuando existen estados iniciales muy cercanos entre si, casi iguales, que presentan trayectorias que se separan de manera exponencial en el tiempo, se habla de incertidumbre en el desarrollo del movimiento. A este comportamiento se le conoce como movimiento caótico.

Según los seguidores del enfoque determinista y causal, la incertidumbre no era sino el resultado de la falta de conocimiento de todas las variables y de su comportamiento, a la par de la complejidad que presentaban los fenómenos a analizar. No fue sino hasta que Henri Poincaré (1854 – 1912), al resolver el problema de los tres cuerpos, permitió esclarecer el hecho de la aleatoriedad, dado que mostró que no eran necesarios la concepción de sistemas complejos para la existencia de aleatoriedad. Poincaré afirmó que dicho comportamiento aleatorio era producto de la *"sensibilidad a las condiciones iniciales" (Poincaré. 1893; 68)*, es decir, que ante una pequeña variación de la medición o condición inicial, se genera un gran efecto en el fenómeno, en su comportamiento o resultado final; lo que hace de la predicción un imposible. Dado que el caos no implica falta de orden, a partir de la imposibilidad de la predicción, se puede calificar el caos como un tipo de orden con movimiento impredecible.

Como principales características de los comportamientos caóticos se pueden citar las siguientes: *"las trayectorias permanecen acotadas dentro de una región finita del espacio de fase y el sistema presenta sensibilidad a pequeños cambios de las condiciones iniciales; esto es, trayectorias vecinas se separan exponencialmente y se habla de divergencia exponencial". (Restrepo. 2004; 18).*

Dado que no todas las trayectorias pueden ser consideradas como caóticas; para saber si un comportamiento es o no caótico, se suelen utilizar, como herramientas de carácter cualitativo, los denominados exponentes de Lyapounov[4]. Estos exponentes permiten medir la rapidez con que se alejan o difieren en el tiempo, dos rutas dinámicas con condiciones iniciales muy cercanas o de variación infinitesimal.

Según lo presentara Restrepo, existen dos casos de los exponentes de Lyapounov. El primero es para "aplicaciones unidimensionales, sobre R1; donde los exponentes de Lyapounov miden el crecimiento promedio de los errores infinitesimales en la condición inicial, se trata es de calcular la tasa de separación de los puntos cercanos a lo largo de una línea recta". En segundo lugar para *"aplicaciones N-dimensionales o sobre RN para $N \geq 1$, en donde el comportamiento de los puntos cercanos puede variar de dirección, es decir los puntos cercanos pueden moverse de manera separada a lo largo de una dirección y casi juntos a lo largo de otra" (Restrepo. 2007; 127).*

Estos exponentes hacen parte de los elementos que han permitido definir el caos y en particular establecer la trayectoria caótica. Dado que *"para una aplicación f en RN, cada trayectoria del sistema tiene N exponentes de Lyapounov, los que miden las tasas de separación de la trayectoria a lo largo de N direcciones" (Restrepo. 2007; 128).*

---

[4] El Exponente Lyapunov o Exponente característico Lyapunov de un sistema dinámico es una cantidad que caracteriza el grado de separación de dos trayectorias infinitesimalmente cercanas. Esta medida de caos, fue introducida por el célebre matemático ruso Alexander Mijailovic Lyapunov a principios del siglo XX.

A los cambios en los ejes, producto de la repetición en el tiempo, se les conoce como números de Lyapounov, que *"miden la cantidad de estiramientos y contracciones generados por los cambios temporales del sistema o evolución de la trayectoria desde la condición inicial" (Restrepo, 2001; 48),* estos números tienen como característica ser finitos y decrecientes.

Los exponentes de Lyapounov se obtienen del logaritmo natural de los números de Lyapounov, son igualmente finitos y decrecientes.

*"Ahora, siendo f una aplicación en RN con N ≥ 1, es decir N-dimensional, con una trayectoria acotada que parte de la condición inicial x0, se puede afirmar que dicha trayectoria es caótica si cumple con:*

*- No ser asintóticamente periódica.*

*- Que ningún exponente de Lyapounov sea igual a cero, o lo que es lo mismo, que ningún número de Lyapounov sea uno.*

*- Que el primer exponente de Lyapounov asociado a la trayectoria sea positivo, esto es, que el exponente de Lyapounov asociado a la condición inicial x0 sea mayor que cero". (Restrepo. 2007; 39)*

Cuando se cumplen éstas condiciones se dice que la trayectoria es caótica y que presenta alta sensibilidad a los cambios en las condiciones iniciales. Además los exponentes de Lyapounov son usados de igual manera para los sistemas dinámicos y las ecuaciones diferenciales.

# CAPÍTULO III

# CONSTRUCCIÓN Y FORMALIZACIÓN MATEMÁTICA DEL MODELO DINÁMICO DE COURNOT Y LA DETECCIÓN DEL CAOS

La ausencia de shocks externos en gran parte de las modelaciones económicas, posibilita que estas sean concebidas como procesos simples, lineales y estables; no obstante, esta abstracción teórica, que genera la consecución de un equilibrio estático y permite una construcción analítica y contextual de la economía, dista mucho de la realidad y en particular de la no-linealidad inherente de los procesos económicos. El comportamiento complejo e irregular, producto de algunos sistemas incluso deterministas que intentan dar una aproximación a la realidad, requiere de una modelación exigente, capaz de proporcionar información relevante de una interacción inicial y particularmente vista como caótica. En este sentido y en los últimos años, diferentes campos del conocimiento, no solo de la economía, han tratado de acoplarse a dichas nuevas condiciones integrando diversos factores preponderantes en el análisis, que si bien complejizan la búsqueda de resultados, por otro lado, enriquecen el estudio de los diferentes fenómenos y amplían el campo de acción de la teoría.

Uno de los elementos que se incluyen en el análisis de los comportamientos de diversos fenómenos es su estudio dinámico. Cuando se hace uso del término dinámico, se está refiriendo al tipo de análisis cuyo principal objeto es *"trazar y estudiar las trayectorias temporales específicas de las variables, o bien determinar, para un tiempo dado, si esas variables tenderán a converger hacia ciertos valores (de equilibrio)."(Chiang 1987; 443).* Esto para determinar la posible afectación temporal de las variables, introduciendo explícitamente el elemento tiempo para la descripción de su comportamiento, dado que en cada momento o punto de tiempo le ocurrirá algo a la variable en estudio o cuestión.

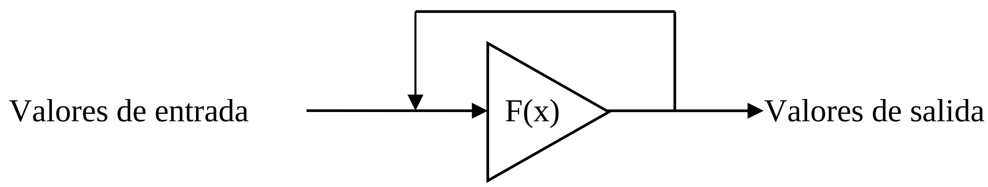
La dinamización del modelo es parte fundamental del presente estudio sobre el modelo de oligopolio de Cournot. Es decir, se busca construir un modelo dinámico que dé cuenta de las trayectorias temporales de las variables, insertando éste en un sistema de cambios temporales, en el cual se haya introducido de manera explícita el tiempo como variable. En particular para este caso, se empleará el tiempo en su forma discreta, dado que las variables experimentarán un cambio sólo una vez para cada periodo de tiempo.

En capítulos previos, se describe y muestra el modelo de oligopolio de Cournot, identificándolo como un sistema cerrado estático en el cual las firmas en competencia toman una única decisión de producción, encaminada a generar un equilibrio en el mercado. Dicha decisión omite elementos importantes en el análisis de los oligopolios como por ejemplo la interdependencia estratégica, la cual desempeña un papel preponderante en este tipo de mercados y es adquirida por medio de la experiencia ante las reacciones de la empresa rival en el tiempo. En este sentido la formulación del modelo de oligopolio de Cournot requerirá de un sistema de retroalimentación, capaz de estimar decisiones de producción en un periodo de tiempo determinado, teniendo en cuenta, además de las decisiones de producción de cada empresa en periodos anteriores, la introducción de dichas acciones en un componente adaptativo sujeto a lo aprendido de su rival en decisiones de producción  anteriores, es decir, reconocer y aprender de la historia. En éste enfoque del modelo de Cournot, se hará uso las decisiones y el aprendizaje de las empresas en momentos previos para determinar la elección de las cantidades a producir en un futuro; en particular, determinar esas cantidades como un factor de crecimiento a partir de producciones anteriores.

La formalización del modelo dinámico de Cournot a partir de ese enfoque teórico, no busca desconocer la existencia de otras aproximaciones respecto al tema, pero su elección se debe a que éste resulta propicio para el estudio dinámico que se pretende llevar a cabo, debido a que incluye en el análisis un factor fundamental, el que las empresas puedan aprender de la historia y de alguna manera puedan ajustar su producción de acuerdo a ello, de forma tal que se pueda determinar la influencia en el equilibrio del mercado a largo plazo; y en esta medida, el análisis a partir de un modelo auto-regresivo permitirá hacerlo.

Como se anotaba, el modelo sugerido, presenta un lazo de retroalimentación, lo que significa que toda decisión futura tiene como base elementos del pasado, es decir, la historia de las actuaciones pasadas, se introducen en el modelo para obtener valores de salida futuras.

Gráficamente, un sistema de lazo cerrado, como el propuesto en el modelo, se representaría como sigue:




De lo que se trata, es de tener un valor de entrada ($X_{IN}$) al sistema en un periodo t, al cual se le aplica la función ($f_{(x)}$) que determina su comportamiento temporal para ese momento, logrando un valor de salida del sistema ($X_{OUT}$); convirtiéndose éste ultimo ($X_{OUT}$) en un nuevo valor de entrada para el periodo t+1, y así sucesivamente, se repite el ciclo iterando en el tiempo.

## 3.1 Construcción del Modelo Dinámico de Oligopolio de Cournot

Para iniciar, se retoma la definición de la Función de Reacción de las empresas i y j del Capítulo I, ecuaciones (ver  anexo I)

$$FR_i = \frac{a-C}{2b} - \frac{1}{2} q_j$$

$$FR_j = \frac{a-C}{2b} - \frac{1}{2} q_i$$

En apartes anteriores, se mostró que la decisión de producir de un agente i está dada, en el modelo de Cournot por las funciones de reacción.

Al reemplazar la ecuación (10) en la (9) se tiene:

$$q_i = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}\left[\frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}q_i\right]$$

Al operar se tienen las cantidades a producir por la firma i de la forma:

$$q_i = \frac{a-c}{2b} - \frac{a-c}{4b} + \frac{1}{4}q_i$$

$$q_i - \frac{1}{4}q_i = \frac{a-c}{2b} - \frac{a-c}{4b}$$

$$\frac{3}{4}q_i = \frac{a-c}{2b} - \frac{a-c}{4b}$$

Con esta relación se puede determinar las cantidades a producir por el agente i, suponiendo un comportamiento a la Cournot de su rival, dichas cantidades están dadas por la ecuación:

$$q_i = \frac{a-c}{3b}$$

Estas cantidades, como es sabido, corresponden a las producidas por el agente i en el modelo de Cournot como sistema estático. Esto es, la función de reacción del agente i, denotada por $FR_i$, contiene la respuesta de la otra firma como rival, es decir, posee en su comportamiento final el proceder del agente j. Sin embargo, y suponiendo un crecimiento (decrecimiento) de la producción de ese agente para cada momento t, se podrían expresar esas cantidades de manera funcional dependiente del tiempo. Se asume como las cantidades iniciales de producción en el momento t = 0, del nacimiento o puesta en funcionamiento de la empresa.

De lo que se trata ahora es de expresar las cantidades a producir en un futuro, momento (t+1) como función de las cantidades producidas en el periodo anterior, momento (t), matemáticamente se expresa por:

$$q_{i_{(t+1)}} = f(q_{i_{(t)}}) \textbf{ Ecuación 24}$$

Debe notarse que esa función de $q_{(i)}$ en el tiempo, denotada por $f(q_{i_{(t)}})$, está, igualmente, en función de la reacción de su rival en ese mismo momento (t); dado que, como se mostrara anteriormente, en un sistema oligopólico a la Cournot, las cantidades producidas por una firma obedecen, según su propia función de reacción, a la respuesta presentada por la firma considerada como rival.

La funcionalidad presentada en (24) pretende mostrar el crecimiento(decrecimiento) de las cantidades producidas en cada momento (t+1) a partir de lo ocurrido en periodos previos y como respuesta a la respuesta de su rival, contenida en $q_{i_{(t)}}$. Para ello se ha definido ese crecimiento (decrecimiento) en función de θ.

$$q_{i_{(t+1)}} = \theta(q_{i_{(t)}}) \quad \textbf{Ecuación 25}$$

Ese factor θ de (26) es la razón del crecimiento (decrecimiento) de las cantidades producidas por el agente i en el tiempo, en cuantas unidades varía la producción del agente de un periodo a otro, es decir la producción en (t+1) será θ veces las cantidades del periodo (t). Como se entiende que en la realidad no se podrían producir cantidades negativas, su valor será siempre positivo, ($0 < \theta$). Sin embargo, al asumir a θ como una constante positiva, se estaría suponiendo de antemano un crecimiento exponencial ilimitado de las cantidades producidas, hecho que a luz de la realidad es inaceptable. Por esta razón θ se debe definir funcionalmente, para que dé verdadera razón del posible crecimiento (decrecimiento) de la producción.

Si se supone la existencia de escasez en los recursos para la producción y que el uso de esos recursos es igualmente limitado. Además que el tamaño de las plantas en el corto plazo es fijo y que el crecimiento de la producción, por ende, no puede ser ilimitado. Se puede definir el factor θ como:

$$\theta = (\alpha - \beta q_{i_{(t)}}) \quad \textbf{Ecuación 26}$$

En la ecuación (26), θ presenta dos componentes (α y β), los cuales establecen el máximo y mínimo de crecimiento. Estos parámetros acotarán a θ de tal forma que no pueda presentarse un crecimiento infinito. Cuando la producción en el periodo (t=0) es cero, θ puede asumir su mayor capacidad de crecimiento α, a medida que la producción crece en el tiempo; θ irá disminuyendo debido a la cada vez mayor dificultad o costo del recurso limitado, logrando que las cantidades aumenten hasta el punto en que $\beta q_{i_{(t)}}$ sea igual a α y la esperanza de crecimiento θ se haya colmado.

Estos elementos α y β son parámetros de la función y determinan el comportamiento de la tasa de crecimiento (decrecimiento) de la producción. El factor α, siempre positivo, indica la razón en que crece la producción debido a la apropiación de los factores de naturaleza limitada, este parámetro determina el ritmo al cual la producción cambia a partir de la estrategia de explotación del recurso disponible, incrementando las unidades en cada periodo según las características particulares de la empresa, poder de mercado y disponibilidad y capacidad de uso de los recursos de carácter limitados. Este valor de α no debe ser confundido con una expectativa adaptativa, dado que obedece es a decisiones de carácter autónomo, posible y determinados en el proceso productivo por cada empresa teniendo en cuenta sus características, dotaciones, tamaño de planta y proyecciones de crecimiento planteadas. Mientras que el factor β, que puede asumir valores contemplados en el intervalo ($0 < \beta \leq 1$), mostrará la porción del recurso o factor, necesaria para producir una unidad del bien; este parámetro señala entonces, cuanto o en qué proporción es usado el recurso limitado para la producción de una unidad. Como β referencia la porción de recurso necesario para la producción, éste es fijo en todo el proceso productivo y en cualquier momento (t); dado que para producir una unidad del bien, siempre se requerirán las mismas cantidades de recurso, es decir, no presenta variaciones respecto a la escala de producción. Por ejemplo, para producir una correa de cuero, siempre se necesitará de la misma cantidad de cuero, hilo, taches, pegante, etc., para producir la misma correa sin importar la escala de producción.

Al retomar la ecuación (25) y reemplazar el comportamiento funcional de θ desarrollado en (26), se obtendría:

$$q_{i_{(t+1)}} = \left[(\alpha - \beta q_{i_{(t)}})\right](q_{i_{(t)}})$$

Operando, la ecuación toma la forma:

$$q_{i_{(t+1)}} = \alpha\left(q_{i_{(t)}}\right) - \beta(q_{i_{(t)}})^2 \quad \textbf{Ecuación 27}$$

Se ha logrado construir una relación funcional que itera en el tiempo y describe el crecimiento (decrecimiento) de las cantidades producidas por el agente i que depende de la historia, esto es, de las cantidades producidas en el periodo anterior. Las cantidades producidas por el agente i, tienen, en su razón de cambio, relacionadas los parámetros α y β, es decir, involucra la expectativa de apropiación del recurso limitado y la proporción del recurso necesario para la producción de dichas cantidades.

Nótese que al rezagar la ecuación (27) en un periodo se obtendrá un modelo auto-regresivo (AR-1) de la forma:

$$q_{i_{(t)}} = \alpha\left(q_{i_{(t-1)}}\right) - \beta(q_{i_{(t-1)}})^2 \quad \textbf{Ecuación 28}$$

En este modelo AR-1 se evidencia la dependencia de las cantidades producidas en el presente de sus similares en un periodo anterior. En (28) α y β serán los parámetros que nos identificarán el peso de esa historia en la determinación del presente así como de la relación en la cual creció la producción teniendo como referente producciones pasadas, decisiones que estarán evidentemente relacionadas con las posibilidades, limites y recursos disponibles para dicha producción. Este AR-1 (28) puede ser usado para determinar experimentalmente, en un estudio particular, los valores específicos de los parámetros α y β, para una determinada empresa y estudiar de esta forma el comportamiento de la producción de un agente en un oligopolio.

Retomando, se ha logrado construir un modelo que da razón del crecimiento (decrecimiento) de la producción de una firma en un modelo oligopólico a la Cournot. Estas cantidades serán variantes en el tiempo y dependerán de la producción obtenida en un periodo anterior, así como de la respuesta de su rival, como lo indica la ecuación

(27), esto por cuanto, cada producción del agente i en cualquier momento (t), presenta el efecto de la decisión de producción de su rival, el agente j.

Ahora, una vez determinadas las cantidades producidas por el agente i, y siguiendo el método propuesto por Cournot, se pasa a calcular las cantidades producidas por el agente j a partir de su propia Función de Reacción, la cual depende de las cantidades $q_i$ en cada momento (t).

$$q_{j_{(t)}} = f(q_{i_{(t)}})$$

A partir de la Función de Reacción de j y si se avanza un periodo, se tendría:

$$q_{j_{(t+1)}} = \frac{a-C}{2b} - \frac{1}{2} q_{i_{(t+1)}} \quad \textbf{Ecuación 29}$$

Al reemplazar (27) en (29), se logra tener una relación funcional de las cantidades producidas por la firma j en función de la  producción de i, esto es, como una reacción a la producción de i en el tiempo.

$$q_{j_{(t+1)}} = \frac{a-C}{2b} - \frac{1}{2}\left[\alpha \left(q_{i_{(t)}}\right) - \beta (q_{i_{(t)}})^2\right] \textbf{Ecuación 30}$$

Se tiene en las ecuaciones (27) y (30), cada una de las relaciones funcionales que dan razón de las trazas temporales que recorren las producciones que realizan los agentes en un modelo de oligopolio a la Cournot, como sistema retroalimentado en tiempo discreto. La función (30) muestra el comportamiento de la firma j como respuesta a las determinaciones del agente i, incluidas sus estrategias de apropiación de los recursos y la proporción de los mismos necesaria para la producción de esas cantidades.

### 3.2 Las trayectorias temporales de las variables

Cuando se trabaja en tiempo discreto, la variable, objeto de estudio, solo cambiará cuando el tiempo varíe a su valor entero siguiente, por esta razón, en el análisis, se habla de periodo al cambio de t en una unidad. Dicho cambio, del tiempo como variable discreta o continua, no trae mayores alteraciones al análisis dinámico, aunque sí se altera la forma cómo se soluciona el problema matemático; cambia la metodología matemática empleada. Cuando se trata de una función en tiempo continuo, es viable hablar de variaciones infinitesimales en el cambio temporal, logrando solucionar el sistema con las ecuaciones diferenciales; sin embargo, cuando el tiempo es una variable discreta, dichos cambios temporales no pueden ser abordados desde la derivada y por ende desde las ecuaciones diferenciales. Para los casos de tiempo como variable discreta se habla entonces de un sistema de ecuación de diferencia finita, con la que se obtendrán las trayectorias temporales de la variable. En ecuaciones de diferencia finita, los cambios se representan y entienden como un cociente de diferencias ($\Delta y/\Delta t$) y son llamadas diferencias de *y*.

En las ecuaciones de diferencia finita, al igual que en las ecuaciones diferenciales, "*se trata es de hallar la trayectoria temporal de* $y_{(t)}$ *que es libre de cualquier expresión diferencial"(Chiang. 1987;449).* Para el caso de estudio, se ha considerado suponer tres escenarios para la obtención de las trayectorias temporales de $q_{i(t)}$, a partir de la ecuación (28) o sistema dinámico de diferencia finita.

Se determinan entonces valores arbitrarios para los parámetros $\alpha$ y $\beta$, así como para los factores a, b y c, del modelo de Cournot, y se procede a mostrar el comportamiento de la producción de cada agente bajo la modelación presentada. En este análisis, solo se variará el parámetro $\alpha$, mientras los demás valores permanecerán constantes en cada caso.

Igual que en el análisis a la Cournot, los valores de a, b y c son constantes conocidas en el modelo y para este ejercicio teórico se asumen arbitrariamente con el fin de ilustrar el comportamiento de las firmas. El parámetro β, recuérdese, es el porcentaje de factor que es necesario para producir una unidad del bien; para esta simulación se toma como de 0,01; es decir se requiere de 1% del recurso para producir una unidad del bien, este valor será constante igualmente para cada caso de estudio teórico. En el caso de α, que mide la apropiación del factor de naturaleza limitada, esto es, el porcentaje de adquisición que la firma i decide realizar del factor necesario para la producción, dadas sus características de producción y de planta, y así asegurar un crecimiento(decrecimiento) de su producción. Este parámetro α si cambiará para cada caso de estudio, puesto que se pretende es observar cual es el comportamiento de cada firma ante las posibles decisiones que se puedan asumir. Para el análisis se han utilizado valores críticos de α.

**Caso I:**

| **Componente** | **α** | β | **a** | **b** | **c** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Valor** | 3,99 | 0,01 | 490 | 1 | 40 |

Suponiendo:

Las cantidades producidas por la firma i en un lapso de 50 periodos, a partir de estos valores y en un sistema dinámico de tiempo discreto utilizando la ecuación (27) son:

**Tabla 1. Cantidades producidas por la firma i en 50 periodos, según el modelo dinámico de crecimiento (decrecimiento) determinado en (27)**

| **t** | **$q_{i(t)}$** |
|---|---|
| 0 | 150 |
| 1 | 373,5 |
| 2 | 95,2425 |
| 3 | 289,306237 |
| 4 | 317,350898 |
| 5 | 259,114158 |
| 6 | 362,464021 |
| 7 | 132,429777 |
| 8 | 353,018352 |

| **t** | **$q_{i(t)}$** |
|---|---|
| 25 | 221,738873 |
| 26 | 393,056825 |
| 27 | 23,3600544 |
| 28 | 87,7496956 |
| 29 | 273,121195 |
| 30 | 343,801697 |
| 31 | 189,772702 |
| 32 | 397,056297 |
| 33 | 7,71759598 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 162,323655 | 34 | 30,1975951 |
| 10 | 384,181694 | 35 | 111,369457 |
| 11 | 56,9292204 | 36 | 320,332574 |
| 12 | 194,738228 | 37 | 251,997391 |
| 13 | 397,775755 | 38 | 370,442739 |
| 14 | 4,86974871 | 39 | 105,788299 |
| 15 | 19,1931528 | 40 | 310,183671 |
| 16 | 72,8969087 | 41 | 275,493749 |
| 17 | 237,719073 | 42 | 340,252001 |
| 18 | 383,395525 | 43 | 199,891243 |
| 19 | 59,8268594 | 44 | 398,000969 |
| 20 | 202,916638 | 45 | 3,9761519 |
| 21 | 397,885766 | 46 | 15,7067482 |
| 22 | 4,43337909 | 47 | 60,2029061 |
| 23 | 17,4926341 | 48 | 203,965696 |
| 24 | 66,7356875 | 49 | 397,803076 |

**Fuente:** Elaboración propia

La tabla 1 resume los diversos valores que adopta $q_{i(t)}$, es decir las cantidades producidas en el tiempo por el agente i, a través de su iteración en 50 periodos consecutivos, es evidente el comportamiento aleatorio del nivel de producción, sin una tendencia claramente definida, pero si acotada en sus valores.

En este orden, las cantidades producidas por la firma j, en cada momento (t), como reacción a la acción de producción desarrollada por la firma i, dadas por (30) son:

**Tabla 2: Cantidades producidas por la firma j en 50 periodos, según el modelo dinámico de crecimiento (decrecimiento) determinado en (30)**

| **T** | $\mathbf{q_{j(t)}}$ | **t** | $\mathbf{q_{j(t)}}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 150 | 25 | 114,130563 |
| 1 | 38,25 | 26 | 28,4715874 |
| 2 | 177,37875 | 27 | 213,319973 |
| 3 | 80,3468815 | 28 | 181,125152 |
| 4 | 66,324551 | 29 | 88,4394027 |
| 5 | 95,4429209 | 30 | 53,0991515 |

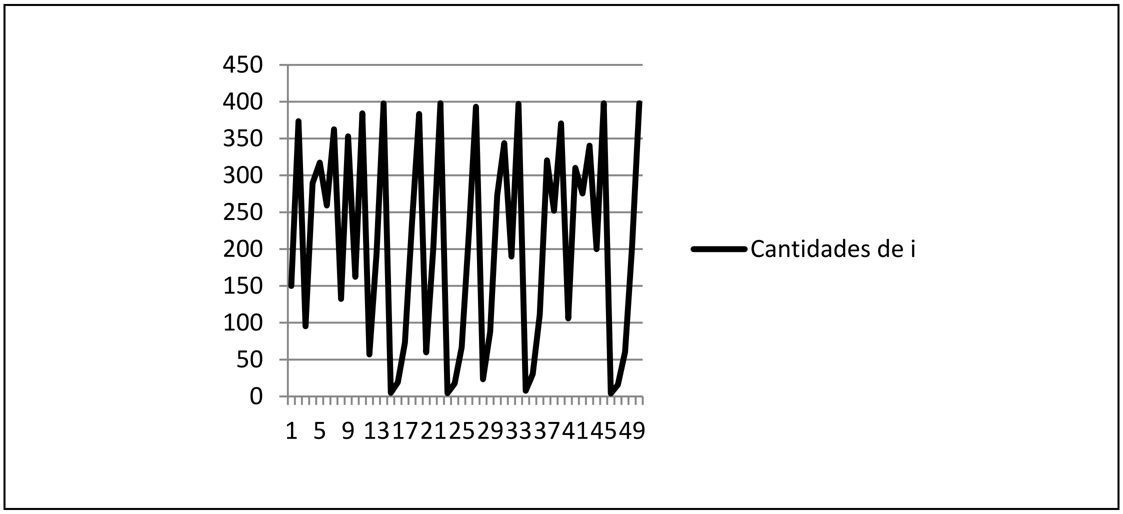
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 43,7679893 | | 31 | 130,113649 |
| 7 | 158,785111 | | 32 | 26,4718516 |
| 8 | 48,4908238 | | 33 | 221,141202 |
| 9 | 143,838173 | | 34 | 209,901203 |
| 10 | 32,9091532 | | 35 | 169,315272 |
| 11 | 196,53539 | | 36 | 64,8337131 |
| 12 | 127,630886 | | 37 | 99,0013044 |
| 13 | 26,1121224 | | 38 | 39,7786304 |
| 14 | 222,565126 | | 39 | 172,10585 |
| 15 | 215,403424 | | 40 | 69,9081644 |
| 16 | 188,551546 | | 41 | 87,2531254 |
| 17 | 106,140464 | | 42 | 54,8739996 |
| 18 | 33,3022376 | | 43 | 125,054379 |
| 19 | 195,08657 | | 44 | 25,9995154 |
| 20 | 123,541681 | | 45 | 223,011924 |
| 21 | 26,0571171 | | 46 | 217,146626 |
| 22 | 222,783311 | | 47 | 194,898547 |
| 23 | 216,253683 | | 48 | 123,017152 |
| 24 | 191,632156 | | 49 | 26,0984622 |

**Fuente:** Elaboración propia

Serán éstas las cantidades que por reacción, el agente j producirá ante las cantidades de su oponente, la firma i. Nótese que las firmas parten de un nivel de producción en t = 0 igual para las dos, ($q_{i_{(0)}} = q_{j_{(0)}} = 150$); sin embargo, mientras que el agente i decide aumentar su producción en el momento (t+1), su rival, por el contrario, la disminuye, mostrando que la estrategia asumida por el agente i es dominante sobre la firma j; además dicha progresión de las cantidades producidas por el agente i se explica por la expectativa de aprovisionamiento (parámetro α = 3,99) adoptado por esta firma, que determina un acaparamiento del recurso disponible, limitando la producción de su rival, la firma j.

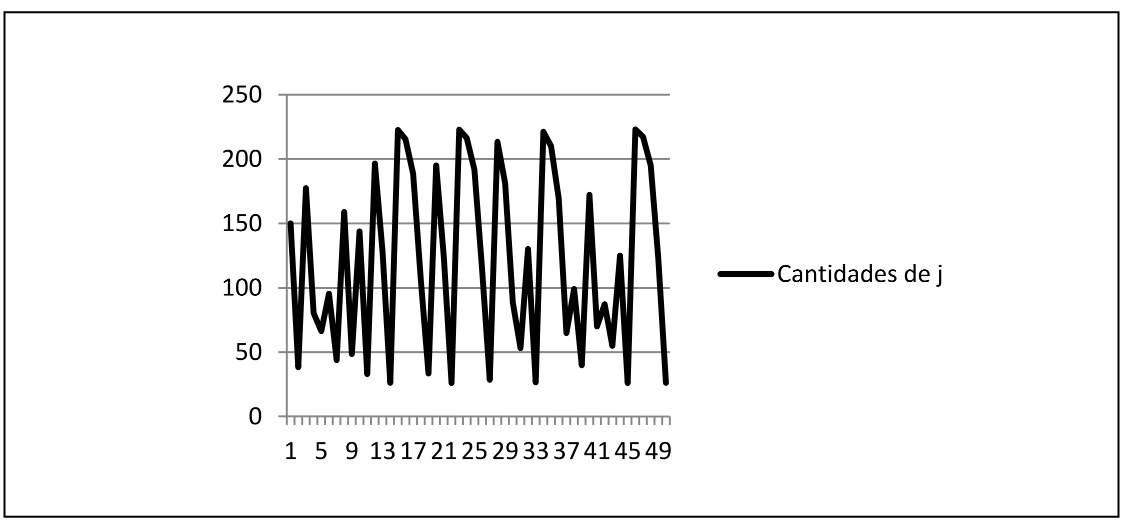
El comportamiento del nivel de producción presentado por cada una de las firmas en los 50 periodos se muestra a continuación de manera gráfica. Es evidente, visualmente, el comportamiento oscilante de dichas cantidades, así como su forma acotada en valores máximos y mínimos de producción para las dos firmas. Los precios, como es de esperarse, son oscilantes igualmente, sin una tendencia definida y acotados.

**GRAFICO 10: CANTIDADES PRODUCIDAS POR LA FIRMA I EN 50 PERIODOS (α = 3,99)**




**Fuente:** Elaboración propia

**GRAFICO 11. CANTIDADES PRODUCIDAS POR LA FIRMA J EN 50 PERIODOS (α = 3,99)**




**Fuente:** Elaboración propia

Como fue definido en capítulos anteriores, las cantidades de la Industria obedecen a la suma de las cantidades producidas por cada empresa en ella.

$$Q = q_i + q_j$$

Y el precio de mercado está definido por.

$$P = a - bQ$$

A partir de los datos obtenidos de las cantidades producidas en cada momento (t), por cada una de las firmas existentes en el oligopolio, se determinan las cantidades de la industria y el comportamiento de los precios en ese oligopolio.

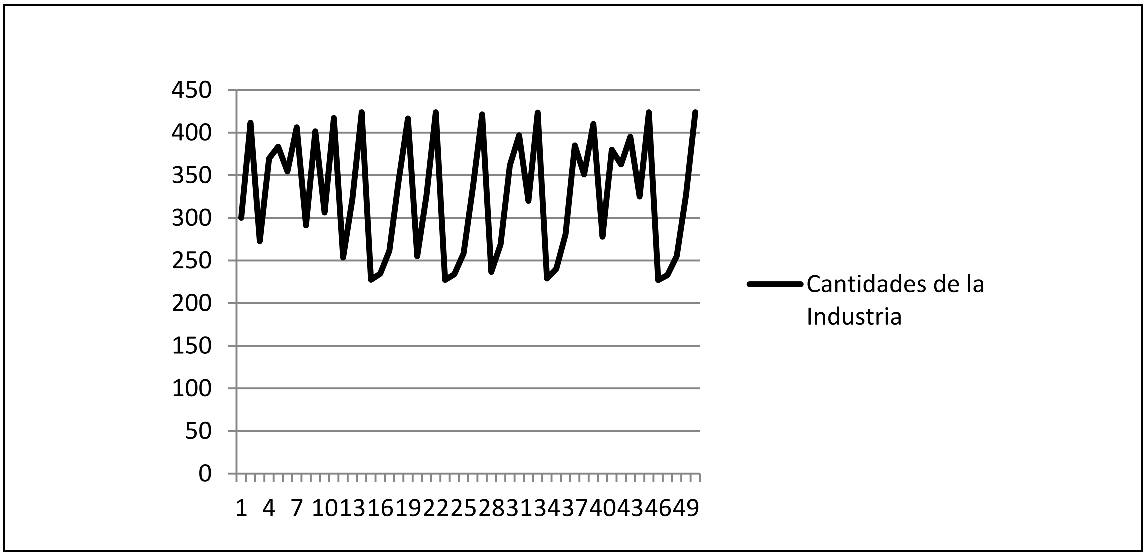
**Tabla 3. Precios y cantidades de la industria en el oligopolio, para cada momento (t)**

| t | Q | P |
|---|---|---|
| 0 | 300 | 190 |
| 1 | 411,75 | 78,25 |
| 2 | 272,62125 | 217,37875 |
| 3 | 369,65311 | 120,34688 |
| 4 | 383,67544 | 106,32455 |
| 5 | 354,55707 | 135,44292 |
| 6 | 406,23201 | 83,767989 |
| 7 | 291,21488 | 198,78511 |
| 8 | 401,50917 | 88,490823 |
| 9 | 306,16182 | 183,83817 |
| 10 | 417,09084 | 72,909153 |
| 11 | 253,46461 | 236,53539 |
| 12 | 322,36911 | 167,63088 |
| 13 | 423,88787 | 66,112122 |
| 14 | 227,43487 | 262,56512 |
| 15 | 234,59657 | 255,40342 |
| 16 | 261,44845 | 228,55154 |
| 17 | 343,85953 | 146,14046 |
| 18 | 416,69776 | 73,302237 |
| 19 | 254,91343 | 235,08657 |
| 20 | 326,45831 | 163,54168 |
| 21 | 423,94288 | 66,057117 |
| 25 | 335,86943 | 154,13056 |
| 26 | 421,52841 | 68,471587 |
| 27 | 236,68002 | 253,31997 |
| 28 | 268,87484 | 221,12515 |
| 29 | 361,56059 | 128,43940 |
| 30 | 396,90084 | 93,099151 |
| 31 | 319,88635 | 170,11364 |
| 32 | 423,52814 | 66,471851 |
| 33 | 228,85879 | 261,14120 |
| 34 | 240,09879 | 249,90120 |
| 35 | 280,68472 | 209,31527 |
| 36 | 385,16628 | 104,83371 |
| 37 | 350,99869 | 139,00130 |
| 38 | 410,22137 | 79,778630 |
| 39 | 277,89415 | 212,10585 |
| 40 | 380,09183 | 109,90816 |
| 41 | 362,74687 | 127,25312 |
| 42 | 395,126 | 94,873999 |
| 43 | 324,94562 | 165,05437 |
| 44 | 424,00048 | 65,999515 |
| 45 | 226,98807 | 263,01192 |
| 46 | 232,85337 | 257,14662 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 22 | 227,21669 | 262,78331 | 47 | 255,10145 | 234,89854 |
| 23 | 233,74631 | 256,25368 | 48 | 326,98284 | 163,01715 |
| 24 | 258,36784 | 231,63215 | 49 | 423,90153 | 66,098462 |

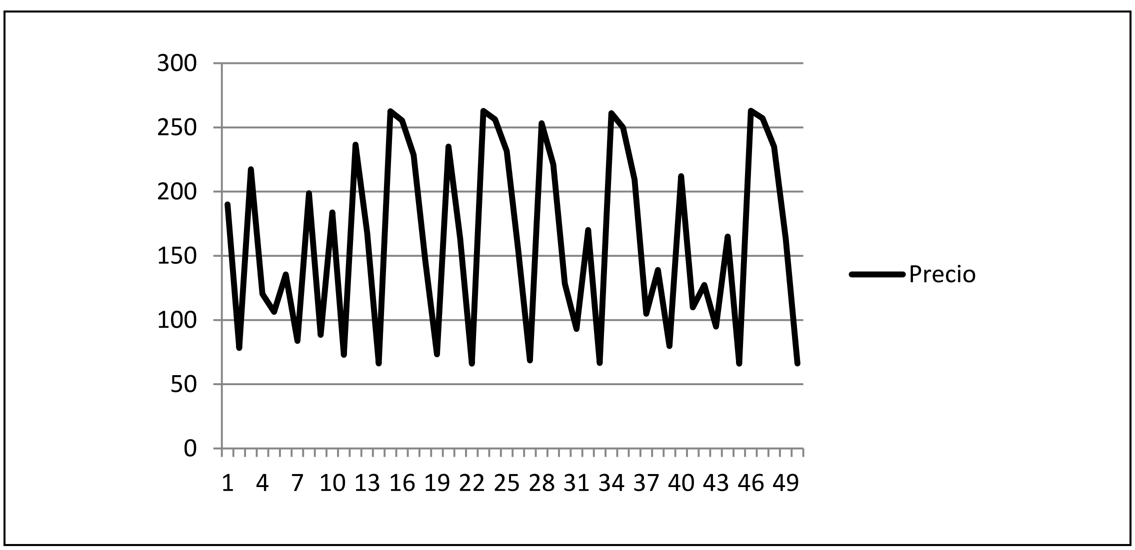
**Fuente:** Elaboración propia

## GRAFICO 12: CANTIDADES DE LA INDUSTRIA




**Fuente:** Elaboración propia

## GRAFICA 13: PRECIOS EN LA INDUSTRIA




**Fuente:** Elaboración propia

La firma i produce mayores cantidades, porque al ser la firma con estrategia dominante; decide un mayor nivel de producción y factor de crecimiento, afectados por la provisión del factor asumida, que para este caso es de $\alpha = 3{,}99$. El tener un crecimiento tan elevado y ante factores limitados, el agente i, acapara el recurso para la producción, restringiendo el accionar de su rival, la firma j, el cual reacciona inversamente a partir del comportamiento de la firma i; es decir, el agente j, aumenta su nivel de producción cuando el nivel de producción de i es bajo. La firma j realiza la mayor producción cuando la firma i presenta el menor nivel de producto, véase periodos 14, 22 y 45.

**Caso II:**

Se suponen los siguientes valores:

| **Componente** | **α** | **β** | **a** | **b** | **c** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Valor** | 2,1 | 0,01 | 490 | 1 | 40 |

Para este caso, las cantidades producidas por el agente i se determinan por la ecuación (27) y se presentan en la siguiente tabla:

**Tabla 4: Cantidades producidas por el agente i con un α = 2,1**

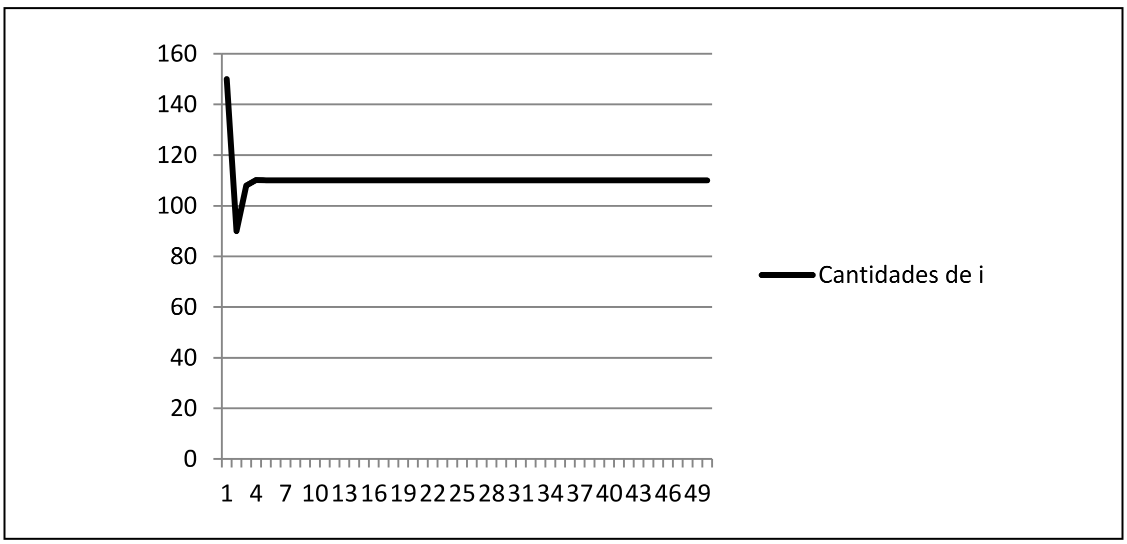
| **t** | **$q_{i(t)}$** |
|---|---|
| 0 | 150 |
| 1 | 90 |
| 2 | 108 |
| 3 | 110,16 |
| 4 | 109,983744 |
| 5 | 110,001623 |
| 6 | 109,999838 |
| 7 | 110,000016 |
| 8 | 109,999998 |
| 9 | 110 |
| 10 | 110 |
| 11 | 110 |
| 12 | 110 |
| 13 | 110 |

| **t** | **$q_{i(t)}$** |
|---|---|
| 25 | 110 |
| 26 | 110 |
| 27 | 110 |
| 28 | 110 |
| 29 | 110 |
| 30 | 110 |
| 31 | 110 |
| 32 | 110 |
| 33 | 110 |
| 34 | 110 |
| 35 | 110 |
| 36 | 110 |
| 37 | 110 |
| 38 | 110 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 14 | 110 | 39 | 110 |
| 15 | 110 | 40 | 110 |
| 16 | 110 | 41 | 110 |
| 17 | 110 | 42 | 110 |
| 18 | 110 | 43 | 110 |
| 19 | 110 | 44 | 110 |
| 20 | 110 | 45 | 110 |
| 21 | 110 | 46 | 110 |
| 22 | 110 | 47 | 110 |
| 23 | 110 | 48 | 110 |
| 24 | 110 | 49 | 110 |

**Fuente:** Elaboración propia

**GRAFIC0 14. CANTIDADES PRODUCIDAS POR EL AGENTE I (α = 2,1)**




**Fuente:** Elaboración propia

Para un parámetro α = 2,1 y según las condiciones iniciales supuestas anteriormente; se encuentran valores decrecientes de la producción de la firma i, que se estabilizan en un nivel de 110 a partir del periodo 9. Este comportamiento es, por así decirlo, estable en el tiempo para esta empresa y señala el nivel de producción que puede adoptar bajo las características del entorno, entre ellas el tamaño de los recursos disponibles para la producción, su expectativa de crecimiento y la apropiación del recurso.

Ahora, el agente j, reacciona en cada periodo a lo determinado por su rival, el agente i; ubicando su nivel de producción en los valores presentados en la tabla 5. Es claro que ahora la firma j actúa como dominante en el proceso. Parte de un crecimiento, decrece para llegar a un nivel estable donde produce 170 unidades, valor mayor que la producción de i. a este nivel de apropiación de recurso limitado, pareciera ser que las firmas convergen a un estado estacionario, donde las dos mantienen fijos sus niveles de producción en el tiempo.

En este proceso de acción-reacción, el agente j, presenta una producción decreciente y con una tendencia a estabilizarse en el tiempo (véase gráfico 15), como respuesta a lo determinado por su adversario. A partir del momento 9, la firma j estabiliza su nivel, situándose por encima de su rival y manteniendo, ambos, una producción fija.

**Tabla 5. Cantidades producidas por el agente j con un $\alpha = 2,1$ según lo determinado en la ecuación (31)**

| t | $q_{j(t)}$ |
|---|---|
| 0 | 150 |
| 1 | 180 |
| 2 | 171 |
| 3 | 169,92 |
| 4 | 170,008128 |
| 5 | 169,999189 |
| 6 | 170,000081 |
| 7 | 169,999992 |
| 8 | 170,000001 |
| 9 | 170 |
| 10 | 170 |
| 11 | 170 |
| 12 | 170 |
| 13 | 170 |
| 14 | 170 |
| 15 | 170 |
| 16 | 170 |
| 17 | 170 |

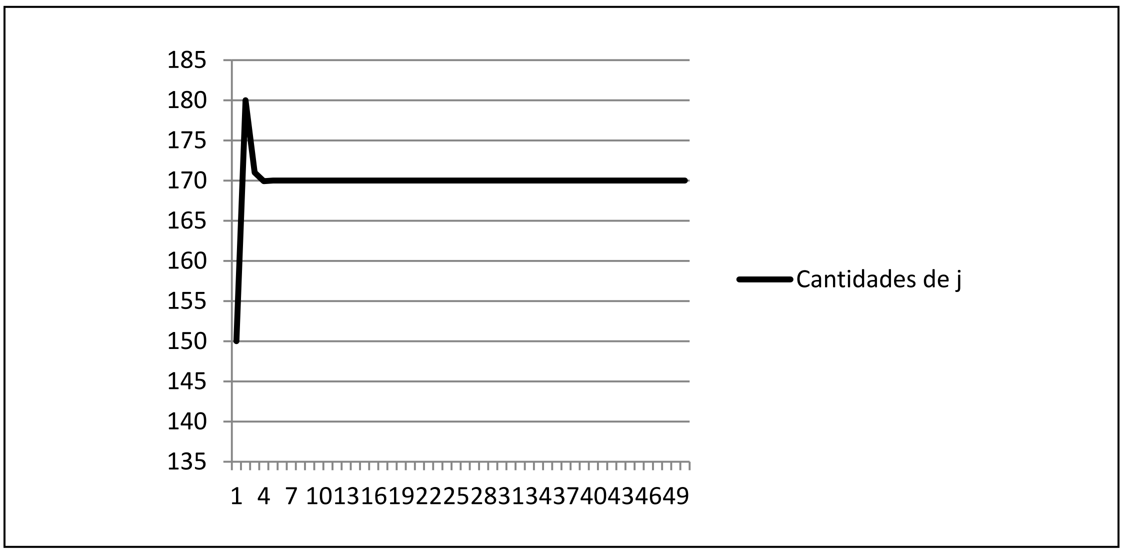
| T | $q_{j(t)}$ |
|---|---|
| 25 | 170 |
| 26 | 170 |
| 27 | 170 |
| 28 | 170 |
| 29 | 170 |
| 30 | 170 |
| 31 | 170 |
| 32 | 170 |
| 33 | 170 |
| 34 | 170 |
| 35 | 170 |
| 36 | 170 |
| 37 | 170 |
| 38 | 170 |
| 39 | 170 |
| 40 | 170 |
| 41 | 170 |
| 42 | 170 |

| | |
|---|---|
| 18 | 170 |
| 19 | 170 |
| 20 | 170 |
| 21 | 170 |
| 22 | 170 |
| 23 | 170 |
| 24 | 170 |

| | |
|---|---|
| 43 | 170 |
| 44 | 170 |
| 45 | 170 |
| 46 | 170 |
| 47 | 170 |
| 48 | 170 |
| 49 | 170 |

**Fuente:** Elaboración propia

**GRAFICO 15. CANTIDADES PRODUCIDAS POR EL AGENTE J CON UN $\alpha$ = 2,1**




**Fuente:** Elaboración propia

Ahora, la producción de la industria reflejará un comportamiento creciente que tienden a un nivel estable en el tiempo. Esto, por el hecho, de que ambas firmas, a partir del momento 9 estabilizan su nivel de producción, llegando a un nivel de 280 unidades a un precio de 210. Este nivel de producción es menor al inicial, (en el momento t=0).

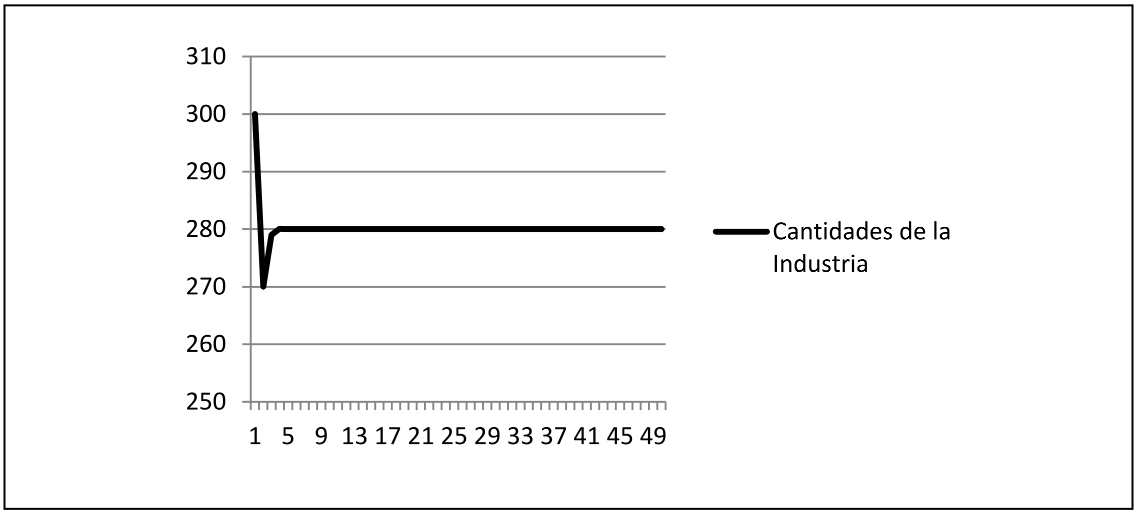
**Tabla 6. Precios y cantidades de la industria en el oligopolio, para un α = 2,1**

| t | Q | P |
|---|---|---|
| 0 | 300 | 190 |
| 1 | 270 | 220 |
| 2 | 279 | 211 |
| 3 | 280,08 | 209,92 |
| 4 | 279,991872 | 210,008128 |
| 5 | 280,000812 | 209,999189 |
| 6 | 279,999919 | 210,000081 |
| 7 | 280,000008 | 209,999992 |
| 8 | 279,999999 | 210,000001 |
| 9 | 280 | 210 |
| 10 | 280 | 210 |
| 11 | 280 | 210 |
| 12 | 280 | 210 |
| 13 | 280 | 210 |
| 14 | 280 | 210 |
| 15 | 280 | 210 |
| 16 | 280 | 210 |
| 17 | 280 | 210 |
| 18 | 280 | 210 |
| 19 | 280 | 210 |
| 20 | 280 | 210 |
| 21 | 280 | 210 |
| 22 | 280 | 210 |
| 23 | 280 | 210 |
| 24 | 280 | 210 |

| t | Q | P |
|---|---|---|
| 25 | 280 | 210 |
| 26 | 280 | 210 |
| 27 | 280 | 210 |
| 28 | 280 | 210 |
| 29 | 280 | 210 |
| 30 | 280 | 210 |
| 31 | 280 | 210 |
| 32 | 280 | 210 |
| 33 | 280 | 210 |
| 34 | 280 | 210 |
| 35 | 280 | 210 |
| 36 | 280 | 210 |
| 37 | 280 | 210 |
| 38 | 280 | 210 |
| 39 | 280 | 210 |
| 40 | 280 | 210 |
| 41 | 280 | 210 |
| 42 | 280 | 210 |
| 43 | 280 | 210 |
| 44 | 280 | 210 |
| 45 | 280 | 210 |
| 46 | 280 | 210 |
| 47 | 280 | 210 |
| 48 | 280 | 210 |
| 49 | 280 | 210 |

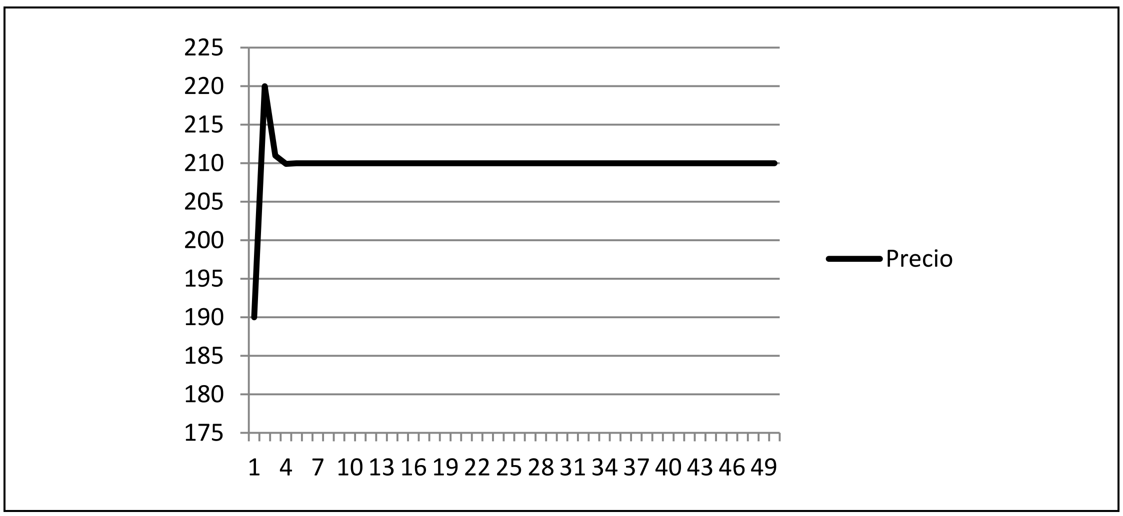
**Fuente:** Elaboración propia

## GRAFICO 16. CANTIDADES DE LA INDUSTRIA (α = 2,1)




**Fuente:** Elaboración propia

## GRAFICO 17: PRECIOS DE LA INDUSTRIA (α = 2,1)




**Fuente:** Elaboración propia

### Caso III

| Componente | α | β | a | b | c |
|---|---|---|---|---|---|
| **Valores** | 0,8 | 0,01 | 490 | 1 | 40 |

En este caso, el agente i decide asumir como tasa de apropiación del recurso el valor α = 0,8; logrando con esto, y dadas las anteriores condiciones iníciales, establecer su producción en las siguientes cantidades:

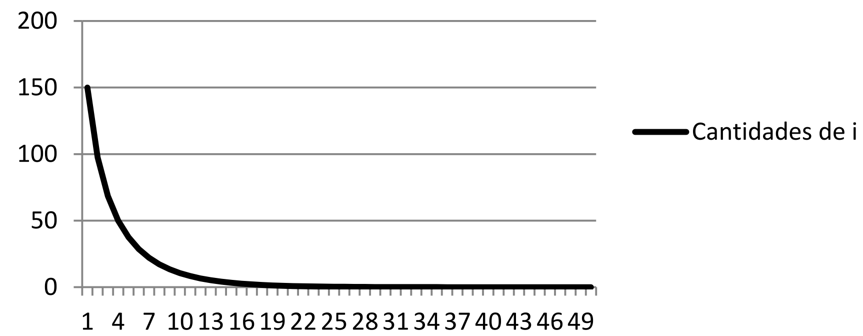
**Tabla 7. Cantidades producidas por el agente i con un α = 0,8**

| t | $q_{i(t)}$ | t | $q_{i(t)}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 150 | 25 | 0,27977794 |
| 1 | 97,5 | 26 | 0,22374408 |
| 2 | 68,49375 | 27 | 0,1789452 |
| 3 | 50,1036062 | 28 | 0,14312414 |
| 4 | 37,5725136 | 29 | 0,11447883 |
| 5 | 28,6463171 | 30 | 0,09156996 |
| 6 | 22,0964422 | 31 | 0,07324758 |
| 7 | 17,188901 | 32 | 0,0585927 |
| 8 | 13,4556625 | 33 | 0,04687073 |
| 9 | 10,5834751 | 34 | 0,03749438 |
| 10 | 8,35477016 | 35 | 0,0299941 |
| 11 | 6,61401395 | 36 | 0,02399438 |
| 12 | 5,24746598 | 37 | 0,01919493 |
| 13 | 4,17043688 | 38 | 0,01535557 |
| 14 | 3,31895696 | 39 | 0,01228422 |
| 15 | 2,64415009 | 40 | 0,00982723 |
| 16 | 2,10832855 | 41 | 0,00786169 |
| 17 | 1,68221779 | 42 | 0,00628929 |
| 18 | 1,34294437 | 43 | 0,00503139 |
| 19 | 1,072552 | 44 | 0,00402509 |
| 20 | 0,85689123 | 45 | 0,00322005 |
| 21 | 0,68477872 | 46 | 0,00257603 |
| 22 | 0,54735406 | 47 | 0,00206082 |
| 23 | 0,43758365 | 48 | 0,00164865 |
| 24 | 0,34987544 | 49 | 0,00131892 |

**Fuente:** Elaboración propia

El comportamiento de la producción para la firma i, en este caso, es diferente al presentado en los casos anteriores. En esta ocasión, el comportamiento es decreciente, mostrando aquí una pérdida de poder de mercado, disminución de las cantidades producidas y cesión de uso de parte de los recursos para dicha producción. Su estrategia no es dominante, sino por el contrario, subordinada al nivel de apropiación de recurso de su rival, la firma j.

**GRAFICO 18. CANTIDADES PRODUCIDAS POR EL AGENTE i ($\alpha$ = 0,8)**




**Fuente:** Elaboración propia

Ahora las cantidades producidas por su rival, el agente j, como respuesta a la acción de la firma i, presentan un comportamiento crecientes con tendencia estabilizarse en el tiempo en algo cercano a las 225 unidades. Para este momento, el agente j se ha convertido en la firma con estrategia dominante en el mercado, ocupando él, la mayor disponibilidad de recursos y aumentado su nivel de producción.

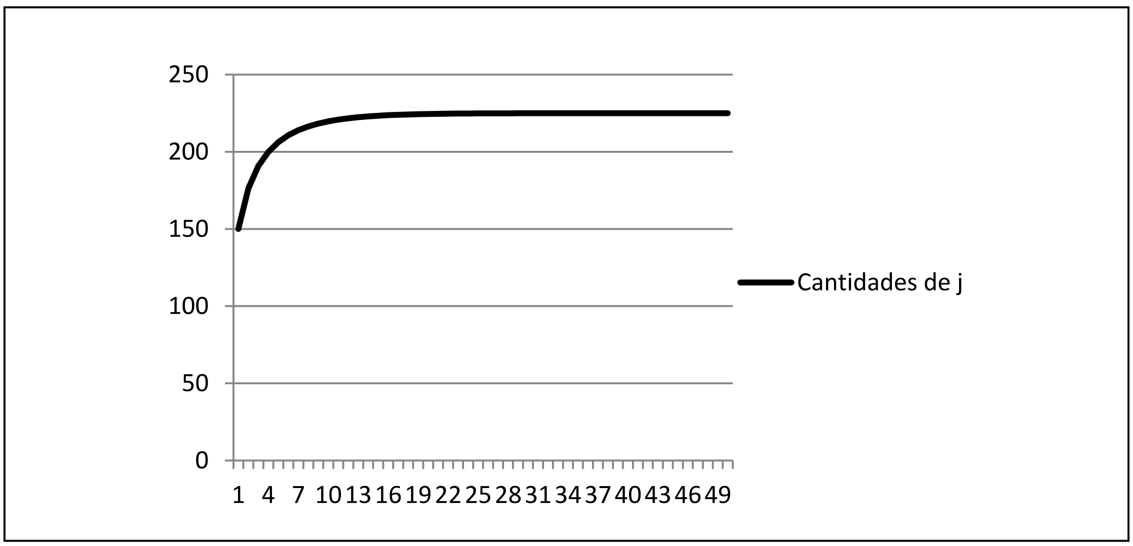
**Tabla 8. Cantidades producidas por el agente j con un $\alpha$ = 0,8**

| t | $q_{j(t)}$ | t | $q_{j(t)}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 150 | 25 | 224,860111 |
| 1 | 176,25 | 26 | 224,888128 |
| 2 | 190,753125 | 27 | 224,910527 |
| 3 | 199,948197 | 28 | 224,928438 |
| 4 | 206,213743 | 29 | 224,942761 |
| 5 | 210,676841 | 30 | 224,954215 |
| 6 | 213,951779 | 31 | 224,963376 |
| 7 | 216,405549 | 32 | 224,970704 |
| 8 | 218,272169 | 33 | 224,976565 |
| 9 | 219,708262 | 34 | 224,981253 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 220,822615 | | 35 | 224,985003 |
| 11 | 221,692993 | | 36 | 224,988003 |
| 12 | 222,376267 | | 37 | 224,990403 |
| 13 | 222,914782 | | 38 | 224,992322 |
| 14 | 223,340522 | | 39 | 224,993858 |
| 15 | 223,677925 | | 40 | 224,995086 |
| 16 | 223,945836 | | 41 | 224,996069 |
| 17 | 224,158891 | | 42 | 224,996855 |
| 18 | 224,328528 | | 43 | 224,997484 |
| 19 | 224,463724 | | 44 | 224,997987 |
| 20 | 224,571554 | | 45 | 224,99839 |
| 21 | 224,657611 | | 46 | 224,998712 |
| 22 | 224,726323 | | 47 | 224,99897 |
| 23 | 224,781208 | | 48 | 224,999176 |
| 24 | 224,825062 | | 49 | 224,999341 |

**Fuente:** Elaboración propia

**GRAFICA 19. CANTIDADES PRODUCIDAS POR EL AGENTE J (α = 0,8)**




**Fuente:** Elaboración propia

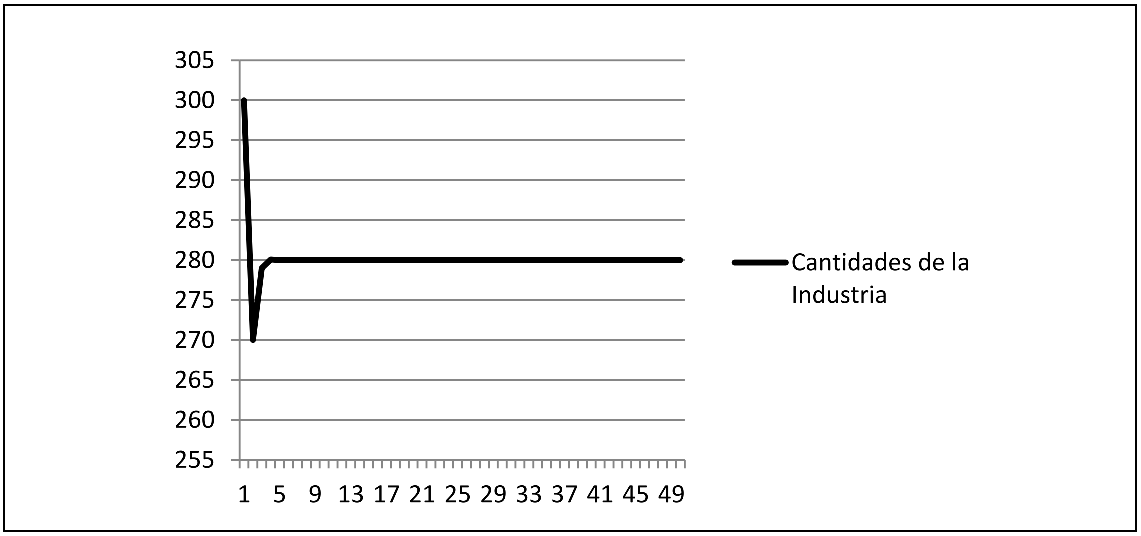
La industria, como lo muestra la tabla 9, presenta un comportamiento casi que regular, en la que se tienen en cuenta las producciones de ambas firmas, puesto que en esta simulación, ninguna de las firmas sale del mercado y los recursos para la producción se encuentran disponibles para los niveles de crecimiento y apropiación de recursos asumidos por cada una.

**Tabla 9. Precios y Cantidades producidas por la Industria con un α = 0,8**

| t | Q | P | t | Q | P |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 300 | 190 | 25 | 225,13988 | 264,86011 |
| 1 | 273,75 | 216,25 | 26 | 225,11187 | 264,88812 |
| 2 | 259,24687 | 230,75312 | 27 | 225,08947 | 264,91052 |
| 3 | 250,05180 | 239,94819 | 28 | 225,07156 | 264,92843 |
| 4 | 243,78625 | 246,21374 | 29 | 225,05723 | 264,94276 |
| 5 | 239,32315 | 250,67684 | 30 | 225,04578 | 264,95421 |
| 6 | 236,04822 | 253,95177 | 31 | 225,03662 | 264,96337 |
| 7 | 233,59445 | 256,40554 | 32 | 225,02929 | 264,97070 |
| 8 | 231,72783 | 258,27216 | 33 | 225,02343 | 264,97656 |
| 9 | 230,29173 | 259,70826 | 34 | 225,01874 | 264,98125 |
| 10 | 229,17738 | 260,82261 | 35 | 225,01499 | 264,98500 |
| 11 | 228,30700 | 261,69299 | 36 | 225,01199 | 264,98800 |
| 12 | 227,62373 | 262,37626 | 37 | 225,00959 | 264,99040 |
| 13 | 227,08521 | 262,91478 | 38 | 225,00767 | 264,99232 |
| 14 | 226,65947 | 263,34052 | 39 | 225,00614 | 264,99385 |
| 15 | 226,32207 | 263,67792 | 40 | 225,00491 | 264,99508 |
| 16 | 226,05416 | 263,94583 | 41 | 225,00393 | 264,99606 |
| 17 | 225,84110 | 264,15889 | 42 | 225,00314 | 264,99685 |
| 18 | 225,67147 | 264,32852 | 43 | 225,00251 | 264,99748 |
| 19 | 225,53627 | 264,46372 | 44 | 225,00201 | 264,99798 |
| 20 | 225,42844 | 264,57155 | 45 | 225,00161 | 264,99839 |
| 21 | 225,34238 | 264,65761 | 46 | 225,00128 | 264,99871 |
| 22 | 225,27367 | 264,72632 | 47 | 225,00103 | 264,99897 |
| 23 | 225,21879 | 264,78120 | 48 | 225,00082 | 264,99917 |
| 24 | 225,17493 | 264,82506 | 49 | 225,00065 | 264,99934 |

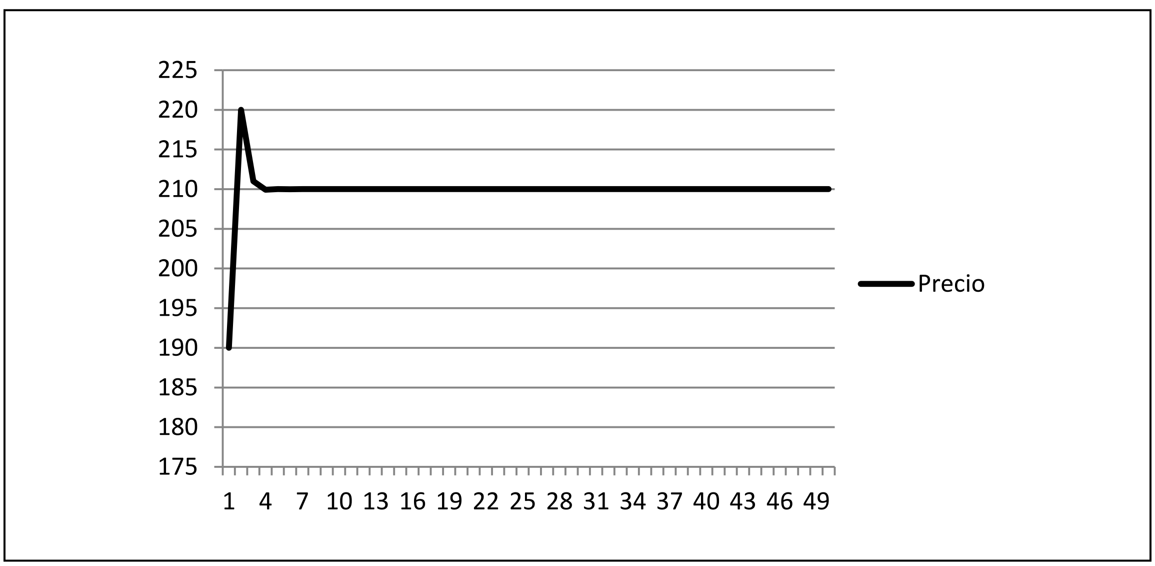
**Fuente:** Elaboración propia

**GRAFICO 20: CANTIDADES PRODUCIDAS POR LA INDUSTRIA (α = 0,8 )**




**Fuente:** Elaboración propia

**GRAFICO 21: PRECIO DE LA INDUSTRIA (α = 0,8 )**




**Fuente:** Elaboración propia

### 3.3. Determinación del Caos a través de los exponentes de Lyapunov

En sistemas lineales o estáticos, lo que se encuentra es una estructura regular de los datos o variables que definen o describen el comportamiento del modelo y que determinan las relaciones lineales que pueden hallarse en ellos; esto equivale a decir que como norma en los sistemas lineales o estáticos las respuestas futuras son el resultado determinístico de las condiciones iniciales. Es posible entonces determinar el valor de cualquier variable en cualquier momento con total certeza.

En la Teoría del Caos, se muestra que no solo una entrada externa aleatoria al sistema dinámico genera posibles irregularidades en los datos de salida del sistema dinámico; esto es, que sistemas no lineales asociados a funciones temporales del sistema, pueden igualmente producir datos de salida muy irregulares. Es claro entonces que sistemas dinámicos no lineales con entradas aleatorias producirán con seguridad valores de salida irregulares. El caos se determina entonces porque *"pequeñas causas pueden producir grandes efectos"* (Restrepo. 2007; 40).

El método para determinar la existencia de caos en series de tiempo no lineales se basa en el estudio de la evolución de los valores de salida en el tiempo. En sistemas dinámicos en tiempo discreto de lo que se trata es del análisis de las trayectorias temporales de la variable, dado que éstas permanecerán acotadas dentro de una región finita del espacio de fase y el sistema presentará alta sensibilidad a pequeños cambios en las condiciones iniciales; a este comportamiento se le denomina diferencia exponencial, es decir trayectorias vecinas se separan exponencialmente una de la otra. En particular, se usa el método de los exponentes de Lyapunov dado que, para aplicaciones unidimensionales, miden el crecimiento promedio de pequeños errores infinitesimales en la condición inicial, en otras palabras, estos exponentes miden la tasa de separación de las trayectorias cercanas a los largo de $N$-direcciones. A los factores de separación en cada una de esas direcciones se les llama números de Lyapunov de la trayectoria.

Como se expresaba en apartes anteriores, y según lo desarrollado por Restrepo, se puede afirmar que una trayectoria es caótica si cumple con las siguientes características:

-No es asintóticamente acotada.

-Ningún número de Lyapunov es igual a uno, o lo que es lo mismo, ningún exponente de Lyapunov es cero.

-Si el primer exponente de Lyapunov asociado a esa trayectoria es positivo.

Para el análisis o determinación del caos, se hará uso de del modelo propuesto en la ecuación (27).

$$q_{i_{(t+1)}} = \alpha\left(q_{i_{(t)}}\right) - \beta(q_{i_{(t)}})^2$$ **Ecuación 27**

Esta relación funcional (27), puede ser reescrita, usando la transformación $X_{(t)} = \frac{\beta}{\alpha} q_{i_{(t)}}$. Al realizar este cambio en la variable, no estaremos alterando en nada su comportamiento, solo se estarían representando los valores de $q_{i_{(t)}}$ en su imagen con valor proporcional en $\frac{\alpha}{\beta} X_{(t)}$.

Este cambio de variable se plantea para disminuir la complejidad de las ecuaciones a ser resueltas en los cálculos de los exponentes de Lyapunov. Además como se introdujera anteriormente, el parámetro β, que mide la proporción del recurso, necesaria para producir una unidad del bien, siendo entonces un valor constante en el sistema, solo cambiará cuando se hable de otro bien y de otro grupo de empresas; es decir, al ser este parámetro, un valor característico y único de cada proceso y bien producido, la función de producción en el tiempo de la firma no depende, de manera directa de β, por ende, no es fundamental observar las variaciones a partir de este factor. Sin embargo, para el caso de α, que mide la proporción de recurso que será apropiado para el proceso productivo, si es fundamental su estudio, dado que este factor si puede cambiar en el mismo sistema y generar situaciones y soluciones diferentes para cada momento y para cada interacción entre agentes; los estudios de los cambios que se generan a partir de éste parámetro son fundamentales para el actual ejercicio teórico.

Al realizar el respectivo cambio de variable y operando se tiene:

$$\frac{\alpha}{\beta}X_{(t+1)} = \alpha\left(\frac{\alpha}{\beta}X_{(t)}\right) - \beta\left(\frac{\alpha}{\beta}X_{(t)}\right)^2$$

$$\frac{\alpha}{\beta}X_{(t+1)} = \left(\frac{\alpha^2}{\beta}X_{(t)}\right) - \left(\frac{\alpha^2}{\beta}X_{(t)}{}^2\right)$$

$$X_{(t+1)} = \left(\alpha X_{(t)}\right) - \left(\alpha X_{(t)}{}^2\right)$$

$$X_{(t+1)} = \alpha X_{(t)}\left(1 - X_{(t)}\right) \quad \textbf{Ecuación 31}$$

La ecuación (31) es una representación de la relación funcional (27) dada en otra variable. Es decir, se realiza el cambio de variable y reescritura de $q_{i_{(t)}}$ $a\, X_{(t)}$. Es evidente que en (31), el comportamiento en el futuro depende solamente del parámetro α, esto es, que solo éste parámetro afecta la dinámica del sistema, como se hiciera notar anteriormente; dado que β mantiene un valor constante en todo momento y para el mismo bien y proceso productivo. Al ser α la proporción de recurso apropiada para la producción, esta afecta de manera directa la expectativa de crecimiento de la producción, así como la característica de la estrategia y en últimas, la variación o comportamiento de la función en el tiempo.

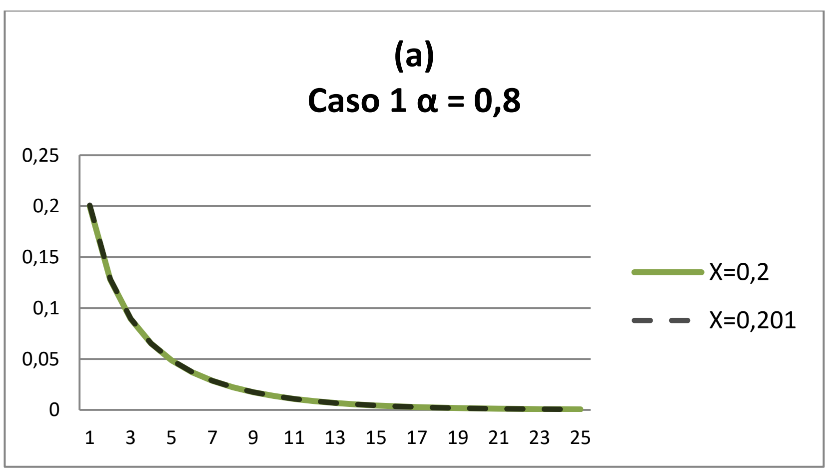
Se hace pertinente recordar que para los casos de estudio previo, en que se obtuvieron las trazas temporales de la función (27), se asumieron tres valores para α (0,8; 2,1 y 3,99). Retomando esos valores se tendría que la función (31) asume las siguientes formas para cada valor de esa tasa de apropiación del recurso limitado para la producción:

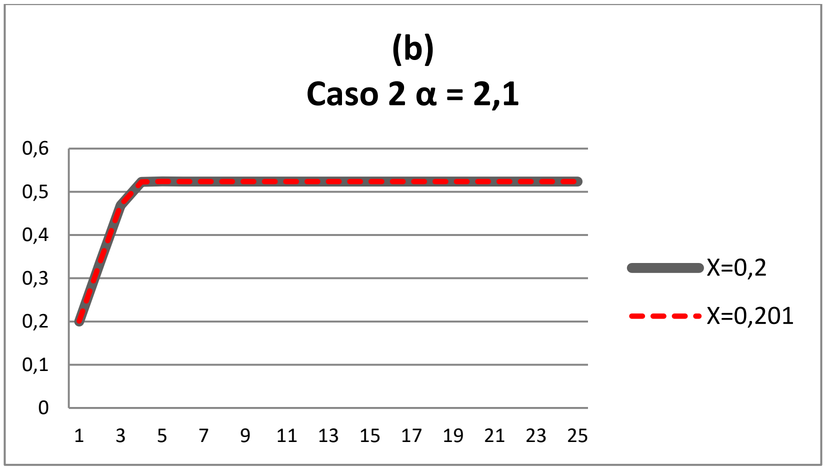
| α = 0,8 | α = 2,1 | α = 3,99 |
|---|---|---|
| $X_{(t+1)} = (0{,}8)X_{(t)}\left(1 - X_{(t)}\right)$ | $X_{(t+1)} = (2{,}1)X_{(t)}\left(1 - X_{(t)}\right)$ | $X_{(t+1)} = (3{,}99)X_{(t)}\left(1 - X_{(t)}\right)$ |

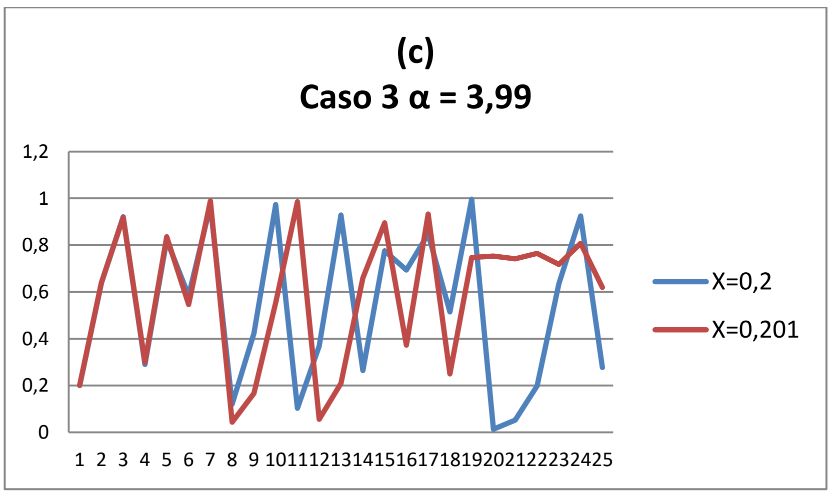
Como se planteara, uno de los métodos para la detección de síntomas caóticos en el comportamiento de una función son los exponentes de Lyapunov; pero antes de pasar a su cálculo, se requiere realizar otros análisis complementarios para estudiar y determinar algunos elementos del comportamiento de la función para cada valor α que son coadyuvantes en la determinación del caos.

Se inicia entonces con el análisis gráfico, con el que se pretende determinar la existencia de una significativa afectación de los valores de salida, ante cambios muy pequeños, tendientes a cero, de los valores iniciales de las variables de entrada de la función. Se suponen entonces dos valores iniciales muy cercanos entre si para $X_{(0)}$ (0,2 y 0,201), es evidente que una condición inicial difiere de la otra en 0,001, es decir en una pequeña cifra. En la grafica 19 se han trazado las líneas que describen el comportamiento temporal de la función (31) con los dos valores iniciales asumidos para $X_{(0)}$ y para cada valor α antes empleado para el análisis.

**Grafica 22. Comportamientos de la función (32) a partir de dos condiciones iniciales diferentes.**






**Fuente:** Elaboración propia

Se observa en la gráfica (22), cómo en los dos primeros casos (apartes a y b de la gráfica), no existe mayor diferencia en los valores de salida cuando las condiciones iniciales cambian en 0,001; las trayectorias para cada valor de $X_{(0)}$ asociado al particular α (0,8 y 2,1) se mantienen casi que iguales, sobrepuesta una trayectoria en la otra. Es decir cuando, a valores esperados de $\alpha = 0{,}8$ y $\alpha = 2{,}1$, un pequeño cambio en las cantidades iniciales producidas por el agente, no alteran de manera significativa el comportamiento de éste en el tiempo, las trayectorias descritas e ilustradas en (a) y (b) para cada valor de X son casi que idénticas, su producción en los dos casos (a valores iniciales diferentes), no difieren de manera significativa y menos exponencial; por el contrario los resultados son prácticamente iguales. Sin embargo, nótese que en la medida que el agente asuma como parámetro de apropiación del recurso para su producción un α = 3,99, parte (c) de la gráfica 22;  la más mínima variación en los valores iniciales a producir, afecta de manera significativa los resultados finales; es decir, una producción se separa de la otra de manera exponencial a pesar de diferir en 0,001 unidades los niveles de producción inicial; a partir de esto, se podría entonces intuir la presencia de comportamiento caótico para este caso en particular (Δ ($X_{1(0)}/X_{2(0)}$) = 0,001 y α = 3,99). Pero es claro, a la luz de la teoría del caos, que sólo el análisis gráfico no es suficiente para determinar síntomas caóticos, por ello se debe continuar con otros métodos de análisis, de tipo cualitativo como cuantitativo.

Ya se anotaba y mostraba gráficamente la dependencia a las variaciones de las condiciones iniciales para uno de los casos específicos de análisis del comportamiento de la función (31); ahora, de lo que se trata es de evaluar otros aspectos funcionales que permiten, en conjunto, inferir la condición caótica. Estas características a analizar son: Aperiodicidad, acotamiento y determinismo.

**Aperiódica:** Es decir que el mismo estado no se repite dos veces. (Restrepo. 2004; 57) En los dos casos iníciales, y gracias a la gráfica se puede determinar fácilmente que presentan un mismo estado más de dos veces, esto es que existen dos o más valores de salida similares. En el caso 3 (α = 3,99), al examinar la grafica, se puede identificar una conducta aperiódica.  Cabe aclara que igualmente, si fuera el caso de la existencia de ciclos, si estos fueran muy grandes, también sería una señal de caos.

**Acotada:** Se dice que una función es acotada, cuando en iteraciones sucesivas los valores de salida permanecen en un rango finito. (Restrepo. 2004; 57) En los tres casos se observa que la función es acotada. Es decir, que para el agente, en los tres casos dados por valores de α diferentes, las producciones en el tiempo se encuentran limitadas a unos valores máximos y mínimos, develando un acotamiento en la función de producción.

**Determinista:** El comportamiento está definido por una función que no contienen términos aleatorios que afecten su dinámica, (Restrepo. 2004; 57) en el caso de una ecuación en diferencia finita, esto significa que para cada valor de $X_{(t)}$, existe un solo y un único valor $X_{(t+1)}$ dado por $f\left(X_{(t)}\right)$. Para la ecuación (31), es así en cualquiera de los valores de α. La producción desarrollada por el agente en el momento (t), genera sólo un nivel de producción para el momento (t+1) como función de la producción precedente como de la reacción ante lo hecho por su rival.

Para poder determinar entonces, de manera casi que concluyente, un comportamiento caótico de la función, se debe, como ya se ha anotado, recurrir a los exponentes de Lyapunov; los cuales se calculan a partir de los factores de amplificación promedios del error variando el número de iteraciones. Este método es utilizado específicamente para hallar los exponentes en sistemas dinámicos de ecuaciones en diferencia finita, como lo es el presente caso de estudio.

Como lo planteara Restrepo, para determinar los exponentes de Lyapunov para ecuaciones en diferencia finita se debe primero considerar dos condiciones iniciales de la variable de entrada, la una diferente de la otra en una fracción infinitesimal.

$$X_{(0)} \quad \text{y} \qquad Y_{(0)} = X_{(0)} + E_0$$

Si se supone, en general, errores iniciales $E_0$ muy pequeños, el factor de amplificación del error total $\left|\frac{E_t}{E_0}\right|$ estaría descrito por:

$$\left|\frac{E_t}{E_0}\right| = \left|\frac{E_t}{E_{t-1}}\right| * \left|\frac{E_{t-1}}{E_{t-2}}\right| \cdots \left|\frac{E_1}{E_0}\right|$$

Al calcular el promedio de los logaritmos se obtiene la expresión:

$$\frac{1}{t}\ln\left|\frac{E_t}{E_0}\right| = \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{t}\ln\left|\frac{E_k}{E_{k-1}}\right|$$

Se afirma entonces, por el mismo autor, que el factor $\left|\frac{E_k}{E_{k-1}}\right|$ da razón de cuánto, un pequeño error $E_k$ en la k-ésima iteración, afecta al valor de $X_k$, aumentándolo o reduciéndolo en el siguiente periodo. Esta será por consiguiente, la base para el cálculo de los exponentes de Lyapunov

Ahora y en particular para el caso de estudio, se considera un error $E_k = \varepsilon$ en $X_k$.

$$X_k{}^{\varepsilon} = X_k + \varepsilon$$

Como $E_0$ está definido por $E_0 = Y_{(0)} - X_{(0)}$, para este caso:

$$E_{k+1} = X_{k+1}{}^{\varepsilon} - X_{k+1}$$

Es decir, el error en la k-ésima iteración es igual a la diferencia entre el valor de la variable de entrada que contiene un error $E_K$ y la variable sin error, en el momento (k+1). Expresado esto, de forma extensiva como:

$$E_{k+1} = (X_{k+1} + \varepsilon) - X_{k+1} \quad \textbf{Ecuación 32}$$

Retomando la ecuación (31):

$$X_{(t+1)} = \alpha X_{(t)}\left(1 - X_{(t)}\right)$$

Al reemplazar el valor de $X_{(t+1)}$ dado en (31) en la ecuación (32) se obtiene:

$$E_{k+1} = (\alpha X_k(1 - X_k) + \varepsilon) - \alpha X_k(1 - X_k)$$

Operando:

$$E_{k+1} = \left(\alpha\varepsilon(1 - 2X_k)\right) - \alpha\varepsilon^2 \quad \textbf{Ecuación 33}$$

La ecuación (33) muestra el error $E^{\varepsilon}{}_k$, es decir el error en la k-ésima iteración a partir de considerar un error inicial $E_k = \varepsilon$.

Según lo demostrado por Restrepo, ese $E^{\varepsilon}{}_k$ tiene la forma funcional:

$$E^{\varepsilon}{}_{k} = f({X_k}^{\varepsilon}) - f(X_k)$$

$$E^{\varepsilon}{}_{k} = f(X_k + \varepsilon) - f(X_k) \quad \textbf{Ecuación 34}$$

Siendo así, se ha logrado entonces obtener un método para calcular los exponentes de Lyapunov para sistemas dinámicos de la forma $X_{(t+1)} = \alpha X_{(t)}\left(1 - X_{(t)}\right)$ a partir del factor de amplificación promedio de los errores. El exponente estaría dado por:

$$£\left(X_{(t)}\right) = \frac{1}{t}\ln\left|\frac{E_t}{E_0}\right| \cong \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{t}\ln\left|\frac{E^{\varepsilon}{}_{k}}{\varepsilon}\right| \quad \textbf{Ecuación 35}$$

Donde $£\left(X_{(t)}\right)$ es el exponente de Lyapunov en el momento $X_{(t)}$. Para cada grupo de iteraciones, existirá un exponente, el cual convergerá a un valor al variar el número de iteraciones incluidas.

Así entonces, se supone, para el análisis una condición inicial arbitraria dada por $q_{i(0)} = 20$. Este valor de $q_{i(t)}$, tiene asignado un valor en X dependiente del valor de α para cada uno de los casos de estudio y a los cuales se les calcularán los exponentes de Lyapunov. Dicho valor de X está dado por:

$$X_{(0)} = \frac{\beta}{\alpha} q_{i_{(0)}} = \frac{0{,}01}{\alpha} * 20$$

A partir de los tres casos establecidos para el análisis, de diferentes valores de α (0,8; 2,1; 3,99), se tendrían los siguientes exponentes de Lyapunov para las 10 primeras iteraciones.

**Caso I: (α = 0,8)**

La ecuación (31) tomaría la forma:

$$X_{(t+1)} = (0{,}8) X_{(t)}\left(1 - X_{(t)}\right)$$

Con $X_{(0)} = \frac{\beta}{\alpha} q_{i_{(t)}} = \frac{0{,}01}{0{,}8}(20) = 0{,}25$

Ahora se aplica el método de los factores de amplificación promedios del error para determinar el exponente de Lyapunov asociado a la 10 iteración. Para esto se asume un error pequeño $E_k = \varepsilon = 0{,}01$.

Como se mostró anteriormente, los ${E^{\varepsilon}}_k$ se definen por (34).

$$ {E^{\varepsilon}}_k = f(X_k + \varepsilon) - f(X_k) $$

Es decir para el presente caso:

$$ {E^{\varepsilon}}_k = f(X_k + 0{,}01) - f(X_k) $$

**Tabla 10. Valor de $X_{(t)}$ y del error ${E^{\varepsilon}}_k$ en la k-ésima iteración para ($\varepsilon = 0{,}01$ $y$ $\alpha = 0{,}8$)**

| t | $X_{(t)}$ | ${E^{\varepsilon}}_k$ |
|---|---|---|
| 0 | 0,25 | 0,00399936 |
| 1 | 0,15 | 0,00559936 |
| 2 | 0,102 | 0,00636736 |
| 3 | 0,0732768 | 0,00682693 |
| 4 | 0,05432585 | 0,00713015 |
| 5 | 0,04109964 | 0,00734177 |
| 6 | 0,03152837 | 0,00749491 |
| 7 | 0,02442746 | 0,00760852 |
| 8 | 0,01906461 | 0,00769433 |
| 9 | 0,01496092 | 0,00775999 |
| 10 | 0,01178967 | 0,00781073 |

**Fuente:** Elaboración propia

Al aplicar la formula (35) se puede calcular el exponente de Lyapunov para las 10 primeras iteraciones, siendo este:

$$ \pounds\,(0{,}25) = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} \ln\left|\frac{{E^{\varepsilon}}_k}{0{,}01}\right| $$

$$\pounds\,(0{,}25) = \frac{1}{10}\,(-3{,}3847)$$

El exponente de Lyapunov para las 10 primeras iteraciones es: $\pounds\,(0{,}25) = -0{,}33847$
Al obtener como valor de este exponente una cifra negativa, se asume, por consiguiente, la ausencia de caos para el sistema con las condiciones planteadas. ( $\boldsymbol{\varepsilon = 0,01\ y\ \alpha = 0,8}$ )

**Caso II: (α = 2,1)**

La ecuación (31) tomaría la forma:

$$X_{(t+1)} = (2{,}1)X_{(t)}\left(1 - X_{(t)}\right)$$

Con $X_{(0)} = \frac{\beta}{\alpha} q_{i_{(t)}} = \frac{0{,}01}{2{,}1}\,(20) = 0{,}0953$

Ahora se aplicar el método de los factores de amplificación promedios del error para determinar el exponente de Lyapunov asociado a la 10 iteración. Para esto se asume un error pequeño $E_k = \varepsilon = 0{,}01$.

Para el presente caso:

$$E^{\varepsilon}{}_{k} = f(X_k + 0{,}01) - f(X_k)$$

**Tabla 11. Valor de $X_{(t)}$ y del error $E^{\varepsilon}{}_{k}$ en la k-ésima iteración para ( $\boldsymbol{\varepsilon = 0,01\ y\ \alpha = 2,1}$ )**

| t | $X_{(t)}$ | $E^{\varepsilon}{}_{k}$ |
|---|---|---|
| 0 | 0,0953 | 0,01699299 |
| 1 | 0,18105761 | 0,01339117 |
| 2 | 0,31137908 | 0,00791767 |
| 3 | 0,45028651 | 0,00208356 |
| 4 | 0,51981 | -0,00083643 |
| 5 | 0,52417588 | -0,0010198 |
| 6 | 0,52377261 | -0,00100286 |
| 7 | 0,52381321 | -0,00100456 |
| 8 | 0,52380915 | -0,00100439 |
| 9 | 0,52380956 | -0,00100441 |
| 10 | 0,52380952 | -0,00100441 |

**Fuente:** Elaboración propia

Al aplicar la formula (35) se obtiene el exponente de Lyapunov para 10 iteraciones, siendo este:

$$£\,(0{,}0953) = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} \ln\left|\frac{E^{\varepsilon}{}_{k}}{0{,}01}\right|$$

$$£\,(0{,}0953) = \frac{1}{10}\,(-17{,}76649)$$

Para el caso II, se tiene que el exponente de Lyapunov para las 10 primeras iteraciones está dado por: $£\,(0{,}0953) = -1{,}776649$

Igualmente, para este caso, con un exponente de Lyapunov negativo, se descarta la presencia de caos en la función a las condiciones ( $\boldsymbol{\varepsilon = 0,01\ y\ \alpha = 2,1}$ ).

**Caso III: (α = 3,99)**

La ecuación (31) tomaría la forma:

$$X_{(t+1)} = (3{,}99)X_{(t)}\left(1 - X_{(t)}\right)$$

Con $X_{(0)} = \frac{\beta}{\alpha} q_{i_{(t)}} = \frac{0{,}01}{3{,}99}\,(20) = 0{,}050124$

Ahora se aplica el método de los factores de amplificación promedios del error para determinar el exponente de Lyapunov asociado a la 10 iteración. Para esto se asume un error arbitrariamente pequeño $E_k = \varepsilon = 0{,}01$.

Para el presente caso:

$$E^{\varepsilon}{}_{k} = f(X_k + 0{,}01) - f(X_k)$$

**Tabla 12. Valor de $X_{(t)}$ y del error $E^{\varepsilon}{}_{k}$ en la k-ésima iteración para ($\varepsilon = 0{,}01\ y\ \alpha = 3{,}99$)**

| T | $X_{(t)}$ | $E^{\varepsilon}{}_{k}$ |
|---|---|---|
| 0 | 0,050124 | 0,03588418 |
| 1 | 0,18997022 | 0,02472446 |
| 2 | 0,61398733 | -0,00911211 |
| 3 | 0,94565748 | -0,03557939 |
| 4 | 0,20504374 | 0,02352159 |
| 5 | 0,65037321 | -0,0120157 |
| 6 | 0,90727771 | -0,03251668 |
| 7 | 0,33565821 | 0,01309856 |
| 8 | 0,88973718 | -0,03111695 |
| 9 | 0,39143867 | 0,00864727 |
| 10 | 0,95047561 | -0,03596387 |

**Fuente:** Elaboración propia

Al aplicar la formula (35) se obtiene el exponente de Lyapunov para las 10 iteraciones, siendo este:

$$\pounds\,(0{,}050124) = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} \ln\left|\frac{E^{\varepsilon}{}_{k}}{0{,}01}\right|$$

$$\pounds\,(0{,}050124) = \frac{1}{10}\,(6{,}83921)$$

Para el caso II, se tiene que el exponente de Lyapunov para las 10 primeras iteraciones está dado por: $\pounds\,(0{,}050124) = 0{,}683921$

En este caso, el exponente asociado a las 10 iteraciones, dio como resultado un valor positivo, identificando un fundamental síntoma de caos. Se puede asegurar por consiguiente, la presencia de síntomas caóticos para la función con condiciones ( $\boldsymbol{\varepsilon = 0{,}01\ y\ \alpha = 3{,}99}$ ).

**Tabla 13.** Cuadro resumen exponentes de Lyapunov

| | CONDICIONES INÍCIALES | ITERACIONES | EXPONENTE DE LYAPUNOV |
|---|---|---|---|
| **Caso I** | $q_{i(0)} = 20$<br>ε = 0,01<br>α = 0,8 | 10 | -0,33847 |
| **Caso II** | $q_{i(0)} = 20$<br>ε = 0,01<br>α = 2,1 | 10 | -1,77664 |
| **Caso III** | $q_{i(0)} = 20$<br>ε = 0,01<br>α = 3,99 | 10 | 0,68392 |

**Fuente:** Elaboración propia

Como se observa en el cuadro resumen de la tabla 13, el único valor de α al cual se encuentra un exponente de Lyapunov positivo es para α = 3,99. Con esto se puede concluir que, cuando un agente económico desea tener como parámetro de crecimiento de su producción un valor de 3,99; la función (28), que determina el actuar de la firma dentro de un modelo de oligopolio a la Cournot, presenta inestabilidad y alta dependencia a las condiciones o valores iniciales. Dicho de otro modo, la función presenta un comportamiento caótico, definido así a la luz de la teoría del caos; por cuanto no sería posible determinar un punto de equilibrio al estilo cournot-nash, dadas las oscilaciones que comprenden su acción de producción.

Para mostrar la tendencia que asumen los exponentes de Lyapunov en presencia de síntomas caóticos, se calcularán lo valores de éstos exponentes para más iteraciones en el caso específico de α = 3,99 y un error arbitrariamente pequeño ε = 0,01.

**Tabla 14. Exponentes de Lyapunov de la función $\boldsymbol{X_{(t+1)} = (3,99)X_{(t)}\left(1 - X_{(t)}\right)}$ iterada con condiciones iniciales $\boldsymbol{(X_{(0)} = 0,050124\ y\ \varepsilon = 0,01)}$**

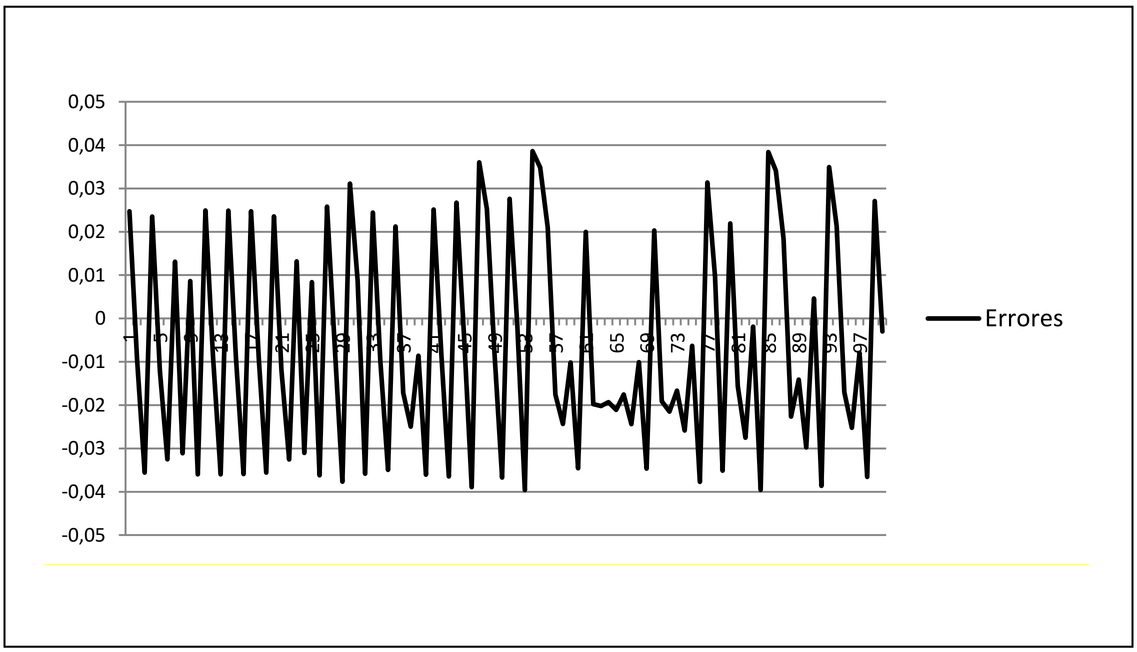
| ITERACIONES | EXPONENTE DE LYAPUNOV £(0,050124) |
|---|---|
| 10 | 0,68392 |
| 30 | 0,69086 |
| 50 | 0,68025 |
| 100 | 0,65887 |
| 150 | 0,67463 |
| 200 | 0,66733 |
| 500 | 0,64829 |
| 1000 | 0,64186 |
| 2000 | 0,64270 |
| 3000 | 0,64487 |

**Fuente:** Elaboración propia

En la tabla se puede apreciar cómo los exponentes de Lyapunov tienden a un valor cercano a 0,643 mientras las iteraciones aumentan.

La gráfica 23, muestra los errores en la k-ésima iteración, a partir de un error pequeño asumido de manera arbitraria ε = 0,01; denotados, estos errores, por ${E^{\varepsilon}}_{k}$. Se representan las primeras 100 iteraciones, donde se hace evidente para el lector, la forma cómo la función amplifica el error inicial, hecho que es usado para el cálculo de los exponentes de Lyapunov para sistemas dinámicos de diferencia finita, tal como lo es, el caso de estudio.

**GRAFICA 23. ERRORES EN LA K-ÉSIMA ITERACIÓN ${\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\boldsymbol{k}}$**




**Fuente:** Elaboración propia

Se observa en la gráfica 23 la secuencia en el tiempo de los errores a partir de una variación infinitesimal. Al iniciar con un valor de 0,0358 que variará y se amplificará en cada momento t, constituyendo una afectación significativa a los valores de salida. En la medida en que transcurre cada periodo, el error acumulado aumenta, creciendo de manera exponencial sin una tendencia determinada más allá de la de su propia amplificación.

En la teoría del caos, esa amplificación de una variación infinitesimal del valor de entrada es la principal característica del caos, dado que esas pequeñas causas originan grandes efectos. Para este ejercicio teórico, la implicación del caos genera no solo consideraciones respecto a las condiciones iniciales en los oligopolios, sino también respecto a su desarrollo temporal, dado la ausencia de un determinismo causal.

En este sentido, la modelación dinámica propuesta del modelo de oligopolio a la Cournot, presenta la influencia que ejerce la determinación de los valores iniciales, como un elemento primordial y definitivo en los posibles casos de equilibrio en un mercado oligopólico, esto por cuanto existen comportamientos o rutas de las funciones de reacción que conduce al caos y a la amplificación de errores o variaciones exponenciales de las trayectorias temporales descritas para cada caso infinitesimalmente distinto.

# CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

## 1. Comportamiento de las trazas temporales y el caos en el modelo de oligopolio a la Cournot

- Los agentes en el modelo de oligopolio a la Cournot se comportan bajo el supuesto de racionalidad económica; y las decisiones de producción de cada empresa se encuentran ligadas entre sí, de tal manera que el nivel de producción de una, se refleja como la reacción ante las decisiones tomadas por la otra. En un sistema que itera en el tiempo, este proceso de determinar el nivel de producción presenta dinámicas diferentes para cada caso en el cual se encuentre enmarcada la decisión de los agentes. Para este caso de estudio, dichas producciones son función en el tiempo de las decisiones tomadas en periodos anteriores y en especial de un factor de crecimiento (decrecimiento) de la producción determinado por las condiciones del entorno, dotación de los factores de producción, escases de recursos, límite de producción, entre otros.

- En el tiempo, el nivel de producción no puede entenderse como constante y único, este nivel es variable, hasta el punto, en el caso de equilibrio estático de Cournot, de converger a un valor de equilibrio de mercado. En este análisis, esos niveles de producción varían en el tiempo, pero, dependiendo de los valores del parámetro $\alpha$, dicho proceso será estable ó caótico, variable y/o aperiódico.

  Es decir, ese proceso de estabilidad de los niveles de producción no es tan común y menos tan natural como Cournot pretendiera presentar; dado que, dicho proceso, depende de factores externos y de expectativas de crecimiento de los agentes, apropiación y disponibilidad de factores, así como del aprendizaje en la historia y la experiencia previa; por citar solo algunos elementos que impiden que las decisiones de producción sean tan lineales como en un modelo de equilibrio estático. Obviamente, para un solo y único momento t, dicho nivel de producción será igualmente único, y al desconocer el factor tiempo, ese valor de producción será dependiente exclusivamente de los determinantes de la producción en ese instante, es decir, de la dotación de factores y de los niveles de uso de los recursos dados en ese momento t, así como de la reacción de su rival, sin repercusiones futuras ni lastres pasados.

- Cuando la producción cambia en el tiempo, se presentan fenómenos que alteran los niveles dependiendo de las condiciones del sistema cerrado en el cual se desarrolla, funcionalmente, la relación de crecimiento (decrecimiento). En otras palabras, esa consecuente variación de los niveles de producción en el tiempo, no responde a comportamientos lineales, sino por el contrario a funcionalidades no-lineales y por consiguiente valores de salida irregulares. Sin la posibilidad de un comportamiento lineal, regular y/o estable de las cantidades a producir en el tiempo, se hace entonces indeterminable un equilibrio o proceso de convergencia, en el corto ni largo plazo, puesto que, no existiría una configuración fija o estable de niveles de producción en la medida que exista no-linealidad en la función de reacción de los agentes.

- El modelo de oligopolio a la Cournot se encuentra seriamente afectado en sus resultados, cuando se involucra en él un comportamiento dinámico o cambiante en el tiempo, en lo que respecta a la producción. Al implementar un modelo no lineal en la función de reacción, los niveles de producción de los agentes presentan rutas temporales diferentes que conllevan a procesos inestables. Según lo mostrado en apartes anteriores, cuando la función $q_{i_{(t+1)}} = \alpha\left(q_{i_{(t)}}\right) - \beta(q_{i_{(t)}})^2$ toma ciertos valores críticos para α, su comportamiento se hace inestable y altamente sensible a variaciones en las condiciones iniciales, así como a presencia de pequeños errores en las determinaciones temporales de cada valor $q_{i_{(t)}}$. Cuando esto sucede, los valores obtenidos en el modelo de Cournot son económicamente inadmisibles e incomprensibles desde la economía, mostrando su falta de funcionalidad ante comportamientos, no solo dinámicos, sino también más complejos, que tratan de retratar modelos cambiantes en el tiempo en el ambiente productivo de los oligopolios.

- El sistema dinámico descrito en (27) solo tiene un comportamiento económicamente significativo para los casos en los cuales no existen síntomas o comportamientos caóticos en la función, es decir, para valores de $0 < \alpha < 3$. Donde la función, dependiendo de la tasa de apropiación del recurso asumida, (parámetro $\alpha$), tendrá comportamientos que indican un proceso creciente o decreciente de la producción de la firma i, así como también, permitirá la determinación de cuál será la firma con mayores niveles de producción. Sin embargo, para valores superiores a 3 del mencionado parámetro $\alpha$, la función se torna oscilante, presentando los primeros síntomas del caos y haciendo inoperante el modelo de Cournot, dado que las cantidades producidas por el agente i son tan variantes en el tiempo que no es posible, si quiera, determinar una tendencia de ese proceso productivo y por ende una convergencia hacia un equilibrio.

- En este caso de estudio, el parámetro $\alpha$ da razón de la tasa de apropiación del recurso y por ende del crecimiento de la producción. Cuando la empresa decide establecer su nivel de producción para un periodo, considera entonces su estimación de crecimiento así como la reacción de su firma oponente. Dependiendo de esas condiciones, la función de producción tendrá comportamientos diferentes que van desde decrecientes, pasando por crecientes y terminando en oscilantes. Al camino que recorre la función, desde sus comportamiento estable hasta el caos se le conoce como la ruta que conduce al caos; en este caso, dicha ruta estará establecida por los valores críticos a los cuales la función (27) cambia considerablemente su comportamiento o presenta alguna bifurcación, con lo que podemos establecer los rangos en los cuales, existen y no comportamientos caóticos o estables.

## 2. La ruta que conduce al caos en el modelo de oligopolio a la Cournot

- En un aparte anterior se determinó el comportamiento de la función (27) logrando con esto determinar la ruta que sigue las trazas temporales de la función, es decir su comportamiento dinámico. Como se presentara, cada trayecto está establecido por los diferentes valores que puede asumir el parámetro α, en la ecuación. Bien se podrá recordar, que dicho parámetro α es la tasa de apropiación del recurso para la producción que desea asumir la firma, dadas unas características de escases y cantidades limitadas de ese recurso. Para este caso, esos valores de α serán siempre positivos dado que no podríamos hablar de apropiación negativa de recursos para la producción. Ahora, se debe entender que para cada valor de α que altera la forma de la función (27), tal que genere una bifurcación, crecimiento o decrecimiento del trazo temporal, se dirá entonces, que existe un cambio de estado, los cuales señalarán la ruta que conducirá al caos en la función, es decir, a los valores de la tasa de apropiación a los cuales la función (27) presente cambios en sus trazas temporales se les denominarán valores críticos de α, y esos cambios en las trazas temporales nos determinarán la ruta que recorre la función para llegar al caos. Esta trayectoria o ruta se comporta, de manera general, de la siguiente forma. La función parte de estados estables ($E_E$), cuando α alcanza un valor crítico, pasa a un comportamiento de ciclos periódicos ($C_P$), hasta que aparecen nuevamente bifurcaciones de la función, nuevamente por valores críticos de esa tasa de apropiación, que llevan a la función, finalmente, al caos (C).

- Como se señala, estos valores, llamados críticos de α se obtienen a partir de las tasas de crecimiento de la producción que generan una bifurcación, un crecimiento o decrecimiento de la función (27). Para el presente caso de estudio, se pudieron establecer como valores críticos y correspondiente comportamiento de la función (27), los siguientes:

Cuando tenemos una tasa de crecimiento de la producción asumida por la firma i que se encuentra en el intervalo ($0 < \alpha < 1$); se dice que la dinámica es estable y que los valores decaerán exponencialmente. Puntualmente, como se observa en el caso de estudio respectivo, cuando $\alpha = 0,8$; es decir se encuentra en el intervalo señalado, las producciones presentan un comportamiento estable como respuesta a esa tasa de crecimiento y en función, igualmente de la respuesta de su rival, la firma j; pero en particular, dicha producción en el momento (t+1) es decreciente. En este punto, la firma i presenta una estrategia subordinada a la firma j dentro de la estrategia de producción. Si la tasa de crecimiento de la producción asumida por el agente i se encuentra entre $0 < \alpha < 1$; existirá un punto de convergencia para un equilibrio de mercado a partir de cantidades producidas en el largo plazo, y en función de las respuestas generadas por su rival ante las acciones de la firma i.

Ahora cuando el valor del parámetro α es igual a 1, la función no presenta crecimiento ni decrecimiento, su dinámica es estable y constante en el tiempo. Es decir, los agentes no alterarán su comportamiento en ningún momento t, siendo éste en particular un punto estático de producción que se prolonga en el tiempo.

- Se tendrá un crecimiento exponencial de la función, cuando la tasa de apropiación, parámetro α, se encuentra dentro del rango ($1< \alpha < 3$). Es este caso, la firma j se posiciona en el mercado, presentando una producción mayor que la firma i; mientras más lejanos se encuentre el parámetro de crecimiento del valor 1, más oscilante se vuelve la función. En los casos presentados en el anterior capítulo, este hace referencia al valor de $\alpha = 2,1$ y el gráfico 12; donde se puede notar el comportamiento de la producción del agente i hasta estabilizarse en un punto en el largo plazo. Ahora, la firma j, presenta un nivel de producción más alto que el de la firma i dadas las expectativas de su rival; este proceso de producción del agente j están en función del valor de α. Ante este escenario, existirá un equilibrio con la coexistencia de las dos firmas, y la permanencia en el tiempo de la producción de los agente i y j.

- Cuando el agente i decide crecer a una tasa con valor dentro del intervalo ($3 < \alpha < 3{,}57$), la dinámica temporal presenta ciclos periódicos. Entre más cerca se encuentre el valor de α de ese valor crítico de 3,57; más grande será el periodo del ciclo, mostrando entonces un comportamiento moderadamente caótico. En este caso, si la firma i decide asumir como factor de crecimiento de su producción un valor de α contenido en el intervalo descrito anteriormente, la dinámica no será estable, salvo en los ciclos del periodo determinado de la función. Este comportamiento moderadamente caótico no permite establecer una tendencia definida, es decir una convergencia o divergencia de los valores a un punto, por esta razón no existirá un equilibrio del sistema con la presencia de los dos agentes.

- Una vez, el valor de la tasa de crecimiento de la producción asumida por el agente i supera el valor de 3,57 ($\alpha > 3{,}57$); la dinámica del sistema se convierte en un proceso inestable y caótico, sin una tendencia definida pero con valores de producción acotados. Este caso fue abordado en el capitulo anterior y se expuso en la gráfica 7, donde se muestra el comportamiento oscilante de las cantidades producidas. La firma j, como seguidora, es nuevamente excluida del mercado, los recursos son acaparados por el agente i y no existe un equilibrio alrededor de estas condiciones de producción. Entre más alto sea el valor α, superior a 3,57; mayor inestabilidad del sistema y mayor sensibilidad a cambios de las condiciones iniciales del mismo. La firma líder se apodera de los recursos, presenta valores muy variables en el tiempo de su nivel de producción y termina excluyendo a la firma seguidora.

- En resumen, cuando las expectativas de crecimiento de la empresa son relativamente pequeñas ($0 < \alpha < 1$), la dinámica es estable, lo que significa que su comportamiento puede ser establecido por el modelo de Oligopolio a la Cournot, y hallar para el momento t en el largo plazo un equilibrio del sistema. Igualmente, cuando esas expectativas de crecimiento están entre ($1< \alpha < 3$), el comportamiento, aunque ya no es considerado como estable, su tendencia creciente permite la configuración de un potencial punto de convergencia en el largo plazo. En el caso de ($3 < \alpha < 3{,}57$), el comportamientos cíclico e inestable, impide nuevamente el establecimiento de un equilibrio único, dado que se podrían conseguir momentos de convergencia y de divergencia en las producciones, eliminando esto, la posibilidad de establecer en el largo plazo una tendencia o equilibrio. Ahora cuando la función ya manifiesta comportamiento caótico definido, es decir para expectativas de crecimiento relativamente elevadas, ($\alpha > 3{,}57$), dicha determinación de convergencia a un equilibrio o punto estable es inconcebible, dado que presenta, de manera más recurrente, bifurcaciones de la función y por consiguiente procesos de convergencias y divergencias con mayor recurrencia en los valores de la producción determinando un comportamiento altamente oscilatorio que no conlleva a la consecución de un posible equilibrio en las producciones de los agentes en el modelo oligopólico.

# BIBLIOGRAFÍA


- Cornejo, Alfonso (2004). Complejidad y Caos: Guía para la Administración del Siglo XXI. Lima. COREIS.

- Chian, Alpha (1987). Fundamentos matemáticos para la Economía. (3ra ed.) México D.F .McGraw –Hill.

- Fernández, Andrés (2000). Dinámica Caotica en economía. (2da ed.) Madrid. McGraw –Hill.

- Fundenberg, Drew (2001). Game Theory. The MIT Press. Massachusetts

- Georgescu – Roegen, N. (1976). Energy and Economic Myths: Institutional and Analytical Economic Essays (2da ed.). Oxford: Pergamon Press.

- Gibbons, Robert (1992). Un primer curso a la teoría de juegos. (1ra ed.). Antoni Bosh, editor, S.A.

- Gravelle – Ray, H. (2004). Microeconomía (3ra ed., 447 -569 pp.). Madrid: Prentice Hall, INC.

- Guirao, J, López M, LLibre J y Martinez R. (2000). On The Bifurcations of Equilibria of a Locally Cournot Economic Model

- Muñoz, P. (1946) *Causalidad filosófica y determinismo científico*, Gregorianum XXVII, 3, Roma. 384-417

- Pindyck, R y Rubinfeld, D. (1995). Microeconomía (3ra ed., 418 – 493 pp.). Madrid: Prentice Hall, INC.

- Poincaré, H. (1893). *New methods of celestial mechanics. Vol. 3,* tómo 13 de *History of Modern Physics and Astronomy*. Ed: American Institute of Physics. New York.

- Salvatore, Dominick. (2009). Microeconomía (4 ed.). México: McGraw – Hill.

- Samuel, P y Nordhaus, W. (2002). Microeconomía (17 ed., pp. ).México D.F: McGraw –Hill.

- Samuelson, Paul A. – Nordhaus William D. (). Economía (18 ed.). Mac Graw Hill

- Schifter, I. (1996). La Ciencia del Caos (1ra ed.). México D.F: Fondo de Cultura Económica.

- Schotter, A. (1996). Microeconomía. Un enfoque moderno (1ra ed., pp. 362 -373). Compañía editorial continental S.A de C.V.

- Sole R, Delgado J, Duque B y Manrubia S. (1996).Complejidad en la frontera del caos Madrid :CINDOC

- Pérez Navarro, Joaquín. (2004). Teoría de Juegos/ Joaquín Pérez Navarro, José Luis Jimeno Pastor, Emilio Cerdá Tena. (1ra ed.). Madrid: Pearson Prentice Hall.

- Restrepo S. Carlos Julio. (2004). Creación de Series de Tiempo Sustitutas y su Análisis utilizando la Teoría del Caos. Universidad del Cauca. Colombia. (monografía)

- ____________ (2007). Teoría del Caos. Sistemas Dinámicos y Series de Tiempo. Editorial Restrepo Saavedra Carlos Julio. Colombia.

- Varian, Hal R (2006). Microeconomía: Un Enfoque Moderno (7ta ed.). Antoni Bosch.

## ANEXO I

**Modelo de Cournot**

$\mathrm{P} = \mathrm{a} - \mathrm{bQ}$ $(1.a)$
$CT_i = C.q_i$ $(2.a)$
$CT_j = C.q_j$ $(3.a)$
$Q = q_i + q_j$ $(4.a)$

Sean los beneficios de la empresa $i$ y $j$, respectivamente:
$\pi_i = P.q_i - C.q_i$ $(5.a)$
$\pi_j = P.q_j - C.q_j$ $(6.a)$

La determinación de las reacciones de las firmas se muestra a continuación:

De la ecuación (5.a), beneficios de la empresa $i$

$$\pi_i = P.q_i - C.q_i$$

En donde:
$\pi_i$ *:* Beneficios de la empresa $i$
$P$: Precio
$q_i$: Cantidades de la empresa $i$
$C$: Costos de la empresa $i$

Introduciendo la ecuación (1.a) en (5.a), se obtiene:

$$\pi_i = [a - b.Q].q_i - C.q_i$$
$$\pi_i = \left[a - b.\left[q_i + q_j\right]\right].q_i - C.q_i$$
$$\pi_i = \left[a - b.q_i - b.q_j\right].q_i - C.q_i$$
$$\pi_i = \left[aq_i - b.q_i^2 - b.q_jq_i\right] - C.q_i \ (7.a)$$

La derivando parcialmente la ecuación (7.a) con respecto a $q_i$ se obtiene:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = a - 2b.q_i - bq_j - C \ (8.a)$$

Despejando $q_i$ de la ecuación (8.a):

$$2b.q_i = a - b.q_j - C$$
$$q_i = \frac{a}{2b} - \frac{bq_j}{2b} - \frac{c}{2b}$$

De esta forma se establece la siguiente función de reacción de la firma $i$.

$$FR_i = \frac{a-C}{2b} - \frac{1}{2}q_j \ (9.a)$$

Aplicando un procedimiento similar la respectiva función de reacción de la empresa j será:

$$FR_j = \frac{a-C}{2b} - \frac{1}{2}q_i \ \ (10.a)$$

La determinación de las cantidades a producir se obtiene:
Introduciendo (10.a) en la ecuación (9.a)

$$q_i = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}\left[\frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}q_i\right]$$
$$q_i = \frac{a-c}{2b} - \frac{a-c}{4b} + \frac{1}{4}q_i$$
$$q_i - \frac{1}{4}q_i = \frac{a-c}{2b} - \frac{a-c}{4b}$$
$$\frac{3}{4}q_i = \frac{a-c}{2b} - \frac{a-c}{4b}$$

De esta forma las cantidades a producir por la firma i es tan determinadas por:

$$q_i = \frac{a-c}{3b} \ (11.a)$$

Las cantidades de la empresa j se obtienen al introducir (9.a) en la ecuación (10.a), se obtiene:

$$q_j = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}\left[\frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}q_j\right]$$
$$q_j = \frac{a-c}{2b} - \frac{a-c}{4b} + \frac{1}{4}q_j$$
$$q_j - \frac{1}{4}q_j = \frac{a-c}{2b} - \frac{a-c}{4b}$$
$$\frac{3}{4}q_j = \frac{a-c}{2b} - \frac{a-c}{4b}$$

Las cantidades a producir por la firma j es tan determinadas por:

$$q_j = \frac{a-c}{3b} \ (12.a)$$

Las cantidades de la industria se obtienen remplazando (11.a) y (12.a) en la ecuación (4.a)

$$Q = q_i + q_j$$

$$Q = \frac{a-c}{3b} + \frac{a-c}{3b}$$

Las cantidades de la industria estarán dadas por:

$$Q = \frac{2}{3}\left[\frac{a-c}{b}\right] \ (13.a)$$

La determinación del precio en modelo se obtiene remplazando (13.a) en la ecuación (1.a):

$$P = a - b.Q$$
$$P = a - b.\left[\frac{2}{3}\frac{a-c}{b}\right]$$
$$P = a - \frac{2}{3}[^{a} - c]$$
$$P = a - \frac{2}{3}{}^{a} + \frac{2}{3}c$$
$$P = \frac{1}{3}{}^{a} + \frac{2}{3}c$$
$$P = c + \frac{1}{3}{}^{a} - \frac{1}{3}c$$

Se obtiene que el precio del oligopolio está determinado por:

$$P = c + \left[\frac{a-c}{3}\right] \ (14.a)$$

Determinación de los beneficios de las empresas $i$ y $j$
Siendo (15.a) los beneficios de la empresa $i$, al introducir (14.a) y (11.a) en dicha ecuación, tenemos que los beneficios para la empresa $i$ están determinados por (16.a)

$$\pi_i = [P - CM_e]q_i \ (15.a)$$
$$\pi_i = \left[c + \frac{a-c}{3} - CM_e\right].\frac{a-c}{3b} \ (16.a)$$

Siendo (17.a) los beneficios de la empresa $j$, al introducir (14.a) y (12.a) en dicha ecuación, tenemos que los beneficios para la empresa $j$ están determinados por (18.a)

$$\pi_j = [P - CM_e]q_j \ (17.a)$$
$$\pi_i = \left[c + \frac{a-c}{3} - CM_e\right].\frac{a-c}{3b} \ (18.a)$$

La determinación de los beneficios de la industria están dados por (19.a), de este modo para el modelo estarán dados por (20.a):

$$\pi_{ij} = \pi_i + \pi_j \ (19.a)$$

$$\pi_{i.j} = \frac{[a-c]^2}{9b} \ (20.a)$$

De este modo se tiene que las cantidades del mercado están determinadas por:

$$Q = q_1 + q_2$$
$$Q = \frac{1 - 2C_1 + C_2}{3} + \frac{1 - 2C_2 + C_1}{3}$$
$$Q = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}C_1 - \frac{1}{3}C_2$$

## ANEXO II

**Modelo de Bertrand: Tercer escenario**

**Supuestos**

- Rendimientos constates a escala
- Bienes heterogéneos
- Costos constantes e iguales $C_i = C_j$

Las funciones de demanda para las empresas $i$ y $j$ se presentan a continuación:

$$q_i = 1 - P_i + bP_j \ (1.c)$$
$$q_j = 1 - P_j + bP_i (2.c)$$

En donde $b > 0$

Los beneficios de la empresa $i$ están dados por:

$$\pi_i = P_i q_i - C_i q_i \ (3.c)$$

Introduciendo (1.c) en la ecuación (3.c), obtenemos

$$\pi_i = P_i(1 - P_i + bP_j) - C_i(1 - P_i + bP_j)$$
$$\pi_i = P_i - P_i^2 + bP_iP_j - C_i + CP_i - CbP_j (4.c)$$

Derivando parcialmente la ecuación (4.c) con respecto a $P_i$, obtenemos

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial P_i} = 1 - 2P_i + bP_j + C \ (5.c)$$

Igualando a cero la ecuación (5.c) y despejando $P_i$, se tiene la función de reacción de la empresa $i$.

$$1 - 2P_i + bP_j + C = 0$$

$$1 + bP_j + C = 2P_i$$

Siendo la función de reacción de la empresa $i$

$$P_i = \frac{1 + bP_j + C}{2} \ (6.c)$$

La determinación de la función de reacción para empresa j implica un procedimiento similar con lo cual tenemos que la función de reacción de la empresa $j$ es:

$$P_j = \frac{1 + bP_i + C}{2} \ (7.c)$$

Remplazando (7.c ) en (6.c), se obtiene:

$$P_i = \frac{1 + b\left[\frac{1 + bP_i + C}{2}\right] + c}{2}$$

$$P_i = \frac{1 + b\left[\frac{1}{2} + \frac{bP_i}{2} + \frac{c}{2}\right] + c}{2}$$

$$P_i = \frac{1 + \frac{b}{2} + \frac{b^2P_i}{2} + \frac{bC}{2} + C}{2}$$

$$P_i = \frac{1}{2} + \frac{b}{4} + \frac{b^2P_i}{4} + \frac{bC}{4} + \frac{C}{2}$$

$$P_i - \frac{b^2P_i}{4} = \frac{1}{2} + \frac{b^2P_i}{4} + \frac{bc}{4} + \frac{C}{2}$$

$$P_i = \frac{\frac{1}{2} + \frac{b^2P_i}{4} + \frac{bC}{4} + \frac{C}{2}}{\left[1 - \frac{b^2}{4}\right]}$$

$$P_i = \frac{\frac{2 + 4b^2 + 4bC + 2C}{1}}{\left[4 - \frac{b^2}{4}\right]}$$

$$P_i = \frac{4[2 + b + bC + 2C]}{(2 + b)(2 - b)}$$

$$P_i = \frac{(2+b)+C(2+b)}{(2+b)(2-b)}$$

$$P_i = \frac{(2+b)+C(2+b)}{(2+b)(2-b)}$$

$$P_i = \frac{(1+C)}{(2-b)} \; (8.c)$$

De igual modo remplazando (6.c ) en (7.c), se obtiene:

$$P_j = \frac{1+b\left[\frac{1+bP_j+C}{2}\right]+c}{2}$$

$$P_j = \frac{1+b\left[\frac{1}{2}+\frac{bP_j}{2}+\frac{c}{2}\right]+c}{2}$$

$$P_j = \frac{1+\frac{b}{2}+\frac{b^2P_j}{2}+\frac{bC}{2}+C}{2}$$

$$P_j = \frac{1}{2}+\frac{b}{4}+\frac{b^2P_j}{4}+\frac{bC}{4}+\frac{C}{2}$$

$$P_j - \frac{b^2P_j}{4} = \frac{1}{2}+\frac{b^2P_j}{4}+\frac{bc}{4}+\frac{C}{2}$$

$$P_j = \frac{\frac{1}{2}+\frac{b^2P_j}{4}+\frac{bC}{4}+\frac{C}{2}}{\left[1-\frac{b^2}{4}\right]}$$

$$P_j = \frac{\frac{2+4b^2+4bC+2C}{1}}{\left[4-\frac{b^2}{4}\right]}$$

$$P_j = \frac{4[2+b+bC+2C]}{(2+b)(2-b)}$$

$$P_j = \frac{(2+b)+C(2+b)}{(2+b)(2-b)}$$

$$P_j = \frac{(2+b)+C(2+b)}{(2+b)(2-b)}$$

$$P_j = \frac{(1+C)}{(2-b)} \; (9.c)$$

Para determinar las cantidades a producir por las empresas $i$ y $j$ introducimos (7.c) y (8.c) en (1.c) respectivamente, con lo cual obtenemos

$$q_i = 1 - P_i + bP_j$$

$$q_i = 1 - \frac{(1+C)}{(2-b)} + b\frac{(1+C)}{(2-b)}$$

$$q_i = 1 - \left[\frac{(1+C)+b(1+C)}{2-b}\right]$$

$$q_i = \left[\frac{(2-b)-(1+C)+b(1+C)}{2-b}\right]$$

$$q_i = \left[\frac{2-b-1-C+b+bC}{2-b}\right]$$

$$q_i = \frac{1+bC-C}{2-b}$$

$$q_i = \frac{1+C(b-1)}{2-b}$$

Las cantidades de la empresa $j$, están determinadas por

$$q_j = 1 - P_j + bP_i$$

$$q_j = 1 - \frac{(1+C)}{(2-b)} + b\frac{(1+C)}{(2-b)}$$

$$q_j = 1 - \left[\frac{(1+C)+b(1+C)}{2-b}\right]$$

$$q_j = \left[\frac{(2-b)-(1+C)+b(1+C)}{2-b}\right]$$

$$q_j = \left[\frac{2-b-1-C+b+bC}{2-b}\right]$$

$$q_j = \frac{1 + bC - C}{2 - b}$$

$$q_j = \frac{1 + C(b - 1)}{2 - b}$$

Los beneficios en el modelo de Bertrand, están determinados por:

$$\pi_i = \left[\frac{1 + c}{2 - b}\right] - \left[\frac{1 + c(b - 1)}{2 - b}\right] - c\left[\frac{1 + c(b - 1)}{2 - b}\right]$$

$$\pi_i = \frac{(1 + c)(1 + c(b - 1))}{(2 - b)(2 - b)} - c\left[\frac{1 + c(b - 1)}{(2 - b)}\right]$$

$$\pi_i = \frac{(2 - b)(1 + C)\big(1 + C(b - 1)\big) - (2 - b)(2 - b)(C(1 + C(b - 1))}{(2 - b)(2 - b)(2 - b)}$$

$$\pi_i = \frac{(2 - b)(1 + C)\big(1 + C(b - 1)\big) - (2 - b)(C(1 + C(b - 1))}{(2 - b)(2 - b)(2 - b)}$$

$$\pi_i = \frac{(1 + C)\big(1 + C(b - 1)\big) - (2 - b)(C\big(1 + C(b - 1)\big))}{(2 - b)(2 - b)}$$

$$\pi_i = \frac{((1 + C) - (2 - b)C)}{(2 - b)} * \frac{(1 + C(b - 1))}{(2 - b)}$$

$$\pi_i = \left[\frac{(1 + C)}{(2 - b)} - \frac{2 - b}{2 - b} * C\right] * q_i$$

$$\pi_i = [P_i - C] * q_i \ (10.c)$$

De igual forma, realizando un proceso similar obtendríamos los beneficios para la empresa *j* obteniendo como resultado

$$\pi_j = \left[P_j - C\right] * q_j (11.c)$$