

**ANÁLISIS COMPARATIVO DE ESQUEMAS LIFTING DE LA TRANSFORMADA
WAVELET PARA LA COMPRESIÓN DE IMÁGENES MÉDICAS DIAGNÓSTICAS**



DAIRO OSWALDO ARCE CEBALLOS

Universidad del Cauca

**Facultad de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones
Departamento de Telecomunicaciones
Grupo de Nuevas Tecnologías en Telecomunicaciones – GNTT
Popayán
2023**

**ANÁLISIS COMPARATIVO DE ESQUEMAS LIFTING DE LA TRANSFORMADA
WAVELET PARA LA COMPRESIÓN DE IMÁGENES MÉDICAS DIAGNÓSTICAS**



DAIRO OSWALDO ARCE CEBALLOS

**Trabajo de grado presentado para optar al título de Ingeniero en
Electrónica y Telecomunicaciones**

**Directora:
MSc. María Manuela Silva Zambrano**

Universidad del Cauca

**Facultad de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones
Departamento de Telecomunicaciones
Grupo de Nuevas Tecnologías en Telecomunicaciones – GNTT
Popayán
2023**

Tabla de Contenido

INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 1: GENERALIDADES DE LA TRANSFORMADA WAVELET	3
1.1. TRANSFORMADA WAVELET	3
1.2. TRANSFORMADA WAVELET CONTINUA EN 1D.....	6
1.3. TRANSFORMADA WAVELET DISCRETA EN 1D.....	10
1.4. ALGORITMO DE MALLAT (FWT).....	14
1.5. FWT EN 2D.....	17
CAPÍTULO 2: ESQUEMAS LIFTING	21
2.1. ALTERNATIVAS PARA LA IMPLEMENTACIÓN DE LA DWT	21
2.2. GENERALIDADES DE LOS ESQUEMAS LIFTING	23
2.3. VARIANTES DE LOS ESQUEMAS LIFTING	30
2.4. TRANSFORMADA WAVELET ENTERA	33
CAPÍTULO 3: DISEÑO	35
3.1. METODOLOGÍA	35
3.2. REQUERIMIENTOS	36
3.3. ANÁLISIS Y DISEÑO DEL SISTEMA.....	37
3.3.1. Selección de la plataforma de desarrollo	37
3.3.2. Caracterización de las familias wavelet.....	38
3.3.3. Selección de imágenes de prueba	44
3.3.4. Selección de los algoritmos de codificación	46
3.3.5. Diagrama de bloques del sistema	48
3.3.6. Diagramas de los esquemas lifting.....	50
3.3.7. Diagramas de flujo de los algoritmos de codificación.....	52
3.4. PLAN DE PRUEBAS	53
3.4.1. Parámetros de desempeño	53
3.4.2. Evaluación del efecto de redondeo	56
3.4.3. Casos de prueba.....	58
CAPÍTULO 4: ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	61
4.1. RESULTADOS CASO 1: ENTROPÍA VS NIVELES DE DESCOMPOSICIÓN.....	61
4.2. RESULTADOS CASO 2: ENTROPIA VS FAMILIA WAVELET	64
4.2.1. Entropía vs familia wavelet – tomografía computarizada (CT)	64
4.2.2. Entropía vs familia wavelet – resonancia magnética (MRI).....	65

4.2.3. Entropía vs familia wavelet – ultra sonido (US).....	66
4.3. RESULTADOS CASO 3: MÉTODOS DE CODIFICACIÓN DE FUENTE VS FAMILIA WAVELET.....	68
4.3.1. Escenario de compresión sin pérdidas.....	68
4.3.1.1. Algoritmo Huffman.....	68
4.3.1.2. Algoritmo LZW.....	74
4.3.1.3. Algoritmo Huffman vs LZW	80
4.3.2. Escenario de compresión con pérdidas	82
4.4. RESULTADOS CASO 4: ESQUEMA LIFTING TRADICIONAL VS ESQUEMAS UPDATE-FIRST	86
4.4.1. Lifting tradicional vs Update-First - compresión sin pérdidas	86
4.4.2. Lifting tradicional vs Update-First - compresión con pérdidas	86
CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS.....	94
5.1. Conclusiones	94
5.2. Trabajos futuros.....	95
REFERENCIAS.....	96
APÉNDICE A: PRUEBAS DWT VS IWT	Error! Bookmark not defined.
APÉNDICE B: ENTROPÍA VS NIVELES DE DESCOMPOSICIÓN	102
APÉNDICE C: ENTROPÍA VS FAMILIA WAVELET	104
APÉNDICE D: RELACIÓN DE COMPRESIÓN POR FAMILIA WAVELET – ALGORITMO HUFFMAN	115
APÉNDICE E: EJEMPLOS COMPRESIÓN SIN PÉRDIDAS.....	122
APÉNDICE F: MSE Y PSNR POR FAMILIA WAVELET - CUANTIFICADOR.....	124
APÉNDICE G: EJEMPLOS COMPRESIÓN CON PÉRDIDAS.....	137

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1. Plano tiempo-frecuencia a) STFT; b) WT	4
Figura 1.2. Wavelet Sombrero Mexicano	6
Figura 1.3. Compresión/dilatación de la wavelet Sombrero Mexicano	7
Figura 1.4. Espectro de magnitud de la wavelet Sombrero Mexicano.....	7
Figura 1.5. Traslación en frecuencia wavelet Sombrero Mexicano	8
Figura 1.6. Espectro wavelet.....	12
Figura 1.7. Espectro <i>wavelet</i> y <i>scaling</i>	13
Figura 1.8. Convolución discreta coeficientes del filtro FIR y flujo de entrada.	15
Figura 1.9. Algoritmo de Mallat (FWT).	16
Figura 1.10. Algoritmo de Mallat inverso.	17
Figura 1.11. Representación de imagen en el dominio de la frecuencia.	18
Figura 1.12. Banco de filtros de análisis FWT 2D.	19
Figura 1.13. Descomposición de una imagen mediante FWT 2D.	19
Figura 1.14. Banco de filtros de síntesis FWT 2D.	20
Figura 2.1. Esquema FLWT.	26
Figura 2.2. Esquema FLWT inverso.....	27
Figura 2.3.(a). Filtrado tradicional. (b) Implementación más eficiente.....	28
Figura 2.4. Esquema <i>Lifting</i> generalizado (tradicional).	29
Figura 2.5. Esquema <i>Lifting</i> inverso.	30
Figura 2.6. Esquema <i>Lifting</i> de actualización primero (Update-First).....	32
Figura 2.7. Diagrama de árbol a) Esquema <i>Lifting</i> generalizado b) Esquema <i>U-F</i> 32	
Figura 2.8. Esquema <i>Lifting</i> IWT.....	34
Figura 3.1. Modelo de ciclo de vida en V.	36
Figura 3.2. Wavelets a) db2; b) db4; c) db6; d) db8 y sus funciones <i>scaling</i>	41
Figura 3.3. Wavelets a) sym2; b) sym4; c) sym6; d) sym8 y sus <i>scaling</i>	42
Figura 3.4. Wavelets a) coif1; b) coif2 y sus funciones <i>scaling</i>	43
Figura 3.5. Wavelets a) bior2.2; b) bior3.1; bior4.4; bior6.8 y sus <i>scaling</i>	44
Figura 3.6. Diagrama de bloques del sistema.	49
Figura 3.7. Diagrama esquema <i>Lifting</i> tradicional 2 niveles de descomposición ..	51
Figura 3.8. Diagramas esquemas <i>Lifting</i> a) db2; b) bior3.1.....	51
Figura 3.9. Diagramas de flujo a) algoritmo Huffman; b) algoritmo LZW.....	52
Figura 3.10. (a). Mapeo enteros-enteros. (b) Mapeo enteros-reales.....	57
Figura 3.11. Valores promedio MSE DWT.	57
Figura 3.12. Valores promedio PSNR DWT.	58
Figura 4.1. Descomposición a dos niveles a) CT; b) MRI; c) US.....	62
Figura 4.2. Entropía vs Niveles de descomposición sobre imágenes CT y MRI. ..	62
Figura 4.3. Entropía vs Niveles de descomposición sobre imágenes US.	63
Figura 4.4. Comparación entropía por familias <i>wavelet</i> sobre imágenes CT.	65
Figura 4.5. Comparación entropía por familias <i>wavelet</i> sobre imágenes MRI.....	66
Figura 4.6. Comparación entropía por familias <i>wavelet</i> sobre imágenes US.....	68
Figura 4.7. Comparación CR familias <i>wavelet</i> sobre imágenes CT- Huffman.....	69
Figura 4.8. Comparación CR familias <i>wavelet</i> sobre imágenes MRI - Huffman....	70
Figura 4.9. Comparación CR familias <i>wavelet</i> sobre imágenes US - Huffman.....	70
Figura 4.10. Comparación ACL familias <i>wavelet</i> sobre imágenes CT - Huffman..	71
Figura 4.11. Comparación ACL familias <i>wavelet</i> sobre imágenes MRI - Huffman.	71

Figura 4.12. Comparación ACL familias <i>wavelet</i> sobre imágenes US - Huffman..	72
Figura 4.13. Comparación eficiencia familias <i>wavelet</i> sobre img. CT-Huffman.....	73
Figura 4.14. Comparación eficiencia familias <i>wavelet</i> sobre img. MRI - Huffman.	73
Figura 4.15. Comparación eficiencia familias <i>wavelet</i> sobre img. US - Huffman...	74
Figura 4.16. Comparación CR familias <i>wavelet</i> sobre imágenes CT - LZW.....	75
Figura 4.17. Comparación CR familias <i>wavelet</i> sobre imágenes MRI - LZW.....	75
Figura 4.18. Comparación CR familias <i>wavelet</i> sobre imágenes US - LZW.	76
Figura 4.19. Comparación ACL familias <i>wavelet</i> sobre imágenes CT - LZW.....	77
Figura 4.20. Comparación ACL familias <i>wavelet</i> sobre imágenes MRI - LZW.	77
Figura 4.21. Comparación ACL familias <i>wavelet</i> sobre imágenes US - LZW.....	78
Figura 4.22. Comparación eficiencia familias <i>wavelet</i> sobre img. CT - LZW.....	78
Figura 4.23. Comparación eficiencia familias <i>wavelet</i> sobre img. MRI - LZW.....	79
Figura 4.24. Comparación eficiencia familias <i>wavelet</i> sobre img. US - LZW.	79
Figura 4.25. Comparación CR Huffman vs LZW sobre imágenes CT.....	80
Figura 4.26. Comparación CR Huffman vs LZW sobre imágenes MRI.	81
Figura 4.27. Comparación CR Huffman vs LZW sobre imágenes US.....	82
Figura 4.28. Comparación MSE familias <i>wavelet</i> sobre CT - Cuantificador.	83
Figura 4.29. Comparación MSE familias <i>wavelet</i> sobre MRI – Cuantificador.	84
Figura 4.30. Comparación MSE familias <i>wavelet</i> sobre US - Cuantificador.....	84
Figura 4.31. Comparación PSNR familias <i>wavelet</i> sobre CT - Cuantificador.....	85
Figura 4.32. Comparación PSNR familias <i>wavelet</i> sobre MRI - Cuantificador.	85
Figura 4.33. Comparación PSNR familias <i>wavelet</i> sobre US - Cuantificador.....	86
Figura 4.34. Funciones <i>wavelet</i> y scaling a) propuesto 1; b) propuesto2.....	88
Figura 4.35. Comparación CR esq. U-F vs tradicional sobre img. CT-Huffman	88
Figura 4.36. Comparación CR esq. U-F vs tradicional sobre img. MRI-Huffman. .	89
Figura 4.37. Comparación CR esq. U-F vs tradicional sobre img. US-Huffman	89
Figura 4.38. Funciones <i>wavelet</i> y scaling a) propuesto 3; b) propuesto 4.....	91
Figura4.39.Comparación PSNR esq. U-F vs trad. sobre img. CT-Cuantificador. ...	91
Figura4.40.Comparación PSNR esq. U-F vs trad. sobre img. MRI-Cuantificador. 92	
Figura 4.41. Comparación PSNR esq. U-F vs trad. sobre img. US-Cuantificador. 92	
Figura C.1. Entropía familia <i>Daubechies</i> sobre CT.	109
Figura C.2. Entropía familia <i>Symlet</i> sobre CT.	109
Figura C.3. Entropía familia <i>Coiflet</i> sobre CT.	110
Figura C.4. Entropía familia <i>Biorthogonal</i> sobre CT.	110
Figura C.5. Entropía familia <i>Daubechies</i> sobre MRI.	111
Figura C.6. Entropía familia <i>Symlet</i> sobre MRI.	111
Figura C.7. Entropía familia <i>Coiflet</i> sobre MRI.	112
Figura C.8. Entropía familia <i>Biorthogonal</i> sobre MRI.	112
Figura C.9. Entropía familia <i>Daubechies</i> sobre US.	113
Figura C.10. Entropía familia <i>Symlet</i> sobre US.	113
Figura C.11. Entropía familia <i>Coiflet</i> sobre US.....	114
Figura D.1. CR familia <i>Daubechies</i> – algoritmo Huffman sobre CT.	115
Figura D.2. CR familia <i>Symlet</i> – algoritmo Huffman sobre CT.	116
Figura D.3. CR familia <i>Coiflet</i> – algoritmo Huffman sobre CT.	116
Figura D.4. CR familia <i>Biorthogonal</i> – algoritmo Huffman sobre CT.	117
Figura D.5. CR familia <i>Daubechies</i> – algoritmo Huffman sobre MRI.....	117
Figura D.6. CR familia <i>Symlet</i> – algoritmo Huffman sobre MRI.....	118

Figura D.7. CR familia <i>Coiflet</i> – algoritmo Huffman sobre MRI.	118
Figura D.8. CR familia <i>Biorthogonal</i> – algoritmo Huffman sobre MRI.	119
Figura D.9. CR familia <i>Daubechies</i> – algoritmo Huffman sobre US.	119
Figura D.10. CR familia <i>Symlet</i> – algoritmo Huffman sobre US.	120
Figura D.11. CR familia <i>Coiflet</i> – algoritmo Huffman sobre US.	120
Figura D.12. CR familia <i>Biorthogonal</i> – algoritmo Huffman sobre US.	121
Figura E.1. Imagen CT reconstruida – bior3.1 – 5 niveles – algoritmo Huffman .	122
Figura E.2. Imagen MRI reconstruida – bior3.3 – 6 niveles – algoritmo Huffman	122
Figura E.3. Imagen US reconstruida – bior2.2 - algoritmo Huffman – 6 niveles..	123
Figura F.1. MSE familia <i>Daubechies</i> sobre CT – Cuantificador.	124
Figura F.2. MSE familia <i>Symlet</i> sobre CT – Cuantificador.	125
Figura F.3. MSE familia <i>Coiflet</i> sobre CT – Cuantificador.	125
Figura F.4. MSE familia <i>Biorthogonal</i> sobre CT – Cuantificador.	126
Figura F.5. MSE familia <i>Daubechies</i> sobre MRI – Cuantificador.....	126
Figura F.6. MSE familia <i>Symlet</i> sobre MRI – Cuantificador.....	127
Figura F.7. MSE familia <i>Coiflet</i> sobre MRI – Cuantificador.	127
Figura F.8. MSE familia <i>Biorthogonal</i> sobre MRI – Cuantificador.	128
Figura F.9. MSE familia <i>Daubechies</i> sobre US – Cuantificador.	128
Figura F.10. MSE familia <i>Symlet</i> sobre US – Cuantificador.	129
Figura F.11. MSE familia <i>Coiflet</i> sobre US – Cuantificador.....	129
Figura F.12. MSE familia <i>Biorthogonal</i> sobre US – Cuantificador.....	130
Figura F.13. PSNR familia <i>Daubechies</i> sobre CT – Cuantificador.	130
Figura F.14. PSNR familia <i>Symlet</i> sobre CT – Cuantificador.	131
Figura F.15. PSNR familia <i>Coiflet</i> sobre CT – Cuantificador.....	131
Figura F.16. PSNR familia <i>Biorthogonal</i> sobre CT – Cuantificador.....	132
Figura F.17. PSNR familia <i>Daubechies</i> sobre MRI – Cuantificador.	132
Figura F.18. PSNR familia <i>Symlet</i> sobre MRI – Cuantificador.	133
Figura F.19. PSNR familia <i>Coiflet</i> sobre MRI – Cuantificador.	133
Figura F.20. PSNR familia <i>Biorthogonal</i> sobre MRI – cuantificador.	134
Figura F.21. PSNR familia <i>Daubechies</i> sobre US – Cuantificador.....	134
Figura F.22. PSNR familia <i>Symlet</i> sobre US – Cuantificador.....	135
Figura F.23. PSNR familia <i>Coiflet</i> sobre US – Cuantificador.....	135
Figura F.24. PSNR familia <i>Biorthogonal</i> sobre US – Cuantificador.....	136
Figura G.1. Img. CT reconstruida–bior2.6–1 nivel–Cuantificador 2048 niveles...	137
Figura G.2. Img. MRI reconstruida–bior3.9–1 nivel–Cuantificador 2048 niveles.	137
Figura G.3. Img. US reconstruida–bior2.4–1 nivel–Cuantificador 128 niveles.....	138

LISTA DE TABLAS

Tabla 3.1. Familias <i>wavelet</i> disponibles.	40
Tabla 3.2. Características de las familias <i>wavelet</i> seleccionadas.	44
Tabla 3.3. Variaciones en los diagramas de los esquemas <i>lifting</i>	50
Tabla 4.1. <i>Wavelets</i> con valores mínimos de entropía para imágenes CT.	64
Tabla 4.2. <i>Wavelets</i> con valores mínimos de entropía para imágenes MRI.	65
Tabla 4.3. <i>Wavelets</i> con valores mínimos de entropía para imágenes US.	67
Tabla 4.4. Familias <i>wavelet</i> que maximizan la CR con el algoritmo de Huffman. .	69
Tabla 4.5. Familias <i>wavelet</i> que maximizan la CR con el algoritmo LZW.	74
Tabla 4.6. Esquemas <i>lifting</i> propuestos, escenario sin pérdidas.	87
Tabla 4.7. Esquemas <i>lifting</i> propuestos, escenario con pérdidas.	90
Tabla A1. Valores de MSE obtenidos para DWT.	100
Tabla A2. Valores de PSNR obtenidos para DWT.	100
Tabla A3. Valores de MSE obtenidos para IWT.	100
Tabla A4. Valores de PSNR obtenidos para IWT.	101
Tabla B.1. Valores de entropía obtenidos para CT.	102
Tabla B.2. Valores de entropía obtenidos para MRI.	103
Tabla B.3. Valores de entropía obtenidos para US.	103
Tabla C.1. Valores promedio de entropía familia <i>Daubechies</i> sobre CT.	104
Tabla C.2. Valores promedio de entropía familia <i>Symlet</i> sobre CT.	104
Tabla C.3. Valores promedio de entropía familia <i>Coiflet</i> sobre CT.	105
Tabla C.4. Valores promedio de entropía familia <i>Biorthogonal</i> sobre CT.	105
Tabla C.5. Valores promedio de entropía familia <i>Daubechies</i> sobre MRI.	106
Tabla C.6. Valores promedio de entropía familia <i>Symlet</i> sobre MRI.	106
Tabla C.7. Valores promedio de entropía familia <i>Coiflet</i> sobre MRI.	106
Tabla C.8. Valores promedio de entropía familia <i>Biorthogonal</i> sobre MRI.	107
Tabla C.9. Valores promedio de entropía familia <i>Daubechies</i> sobre US.	107
Tabla C.10. Valores promedio de entropía familia <i>Symlet</i> sobre US.	108
Tabla C.11. Valores promedio de entropía familia <i>Coiflet</i> sobre US.	108
Tabla C.12. Valores promedio de entropía familia <i>Biorthogonal</i> sobre US.	108

LISTA DE ACRÓNIMOS

ACL	<i>Average Code Length</i> , Longitud de Código Promedio.
CR	<i>Compression Ratio</i> , Relación de Compresión.
CT	<i>Computed Tomography</i> , Tomografía Computarizada.
CWT	<i>Continous Wavelet Transform</i> , Transformada Continua de <i>Wavelet</i> .
DFT	<i>Discrete Fourier Transform</i> , Transformada Discreta de Fourier.
DICOM	<i>Digital Imaging and Communications in Medicine</i> , Imágenes Digitales y Comunicación en Medicina.
DWT	<i>Discrete Wavelet Transform</i> , Transformada Discreta de <i>Wavelet</i> .
FIR	<i>Finite Impulse Response</i> , Respuesta Finita al Impulso.
FT	<i>Fourier Transform</i> , Transformada de Fourier.
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i> , Transformada Rápida de Fourier.
FWT	<i>Fast Wavelet Transform</i> , Transformada Rápida de <i>Wavelet</i> .
FLWT	<i>Fast Lifted Wavelet Transform</i> , Transformada Rápida <i>Wavelet</i> Elevada.
HPF	<i>High Pass Filter</i> , Filtro Pasa Alto.
IWT	<i>Integer Wavelet Transform</i> , Transformada <i>Wavelet</i> Entera.
LPF	<i>Low Pass Filter</i> , Filtro Pasa Bajo.
LWT	<i>Lazy Wavelet Transform</i> , Transformada <i>Wavelet</i> "Perezosa".
MRA	<i>Multiresolution Analysis</i> , Análisis Multiresolución.
MRI	<i>Magnetic Resonance Imaging</i> , Imágenes por Resonancia Magnética.
MSE	<i>Mean Squared Error</i> , Error Cuadrático Medio.
NBIA	<i>National Biomedical Imaging Archive</i> , Archivo Nacional de Imágenes Biomédicas
NIH	<i>National Institutes of Health</i> , Instituto Nacional de Salud.
NCI	<i>National Cancer Institute</i> , Instituto Nacional del Cáncer.
PSNR	<i>Peak Signal-to-Noise Ratio</i> , Relación Máxima de Señal a Ruido.
QMF	<i>Quadrature Mirror Filters</i> , Filtros Espejo en Cuadratura.
RLE	<i>Run-Length Encoding</i> , Codificación por Longitud de Ejecución.
STFT	<i>Short Time Fourier Transform</i> , Transformada de Fourier de Tiempo Corto.
US	<i>Ultra Sound</i> , Ultra Sonido.
WT	<i>Wavelet Transform</i> , Transformada <i>Wavelet</i> .



INTRODUCCIÓN

Desde el descubrimiento de los rayos X en el año 1895, el campo de las imágenes médicas se ha desarrollado hasta convertirse en una amplia disciplina científica que actualmente ofrece oportunidades sin precedentes para el diagnóstico y planificación de tratamientos de diferentes patologías en diversas ramas de la medicina, por lo que hoy en día se hace esencial presentar la información contenida en los datos generados de forma adaptada a cada caso médico específico [1].

En la actualidad existen diversas técnicas para la obtención de imágenes médicas, entre las cuales se destacan, la Tomografía Computarizada (CT, *Computed Tomography*), siendo descrita por Cormack en 1963, para luego ser presentado, en el año 1972 el primer escáner clínico CT gracias al ingeniero inglés Godfrey Hounsfield. Desde entonces, la CT clínica ha revolucionado el campo de las imágenes médicas, y es considerada como el mayor avance en radiología desde el descubrimiento de los rayos X. Otro importante método se trata de las Imágenes por Resonancia Magnética (MRI, *Magnetic Resonance Imaging*), cuya investigación y desarrollo comenzó a principios de la década de los 70s y sus primeros prototipos fueron probados en 1980 [2]. Adicionalmente, la técnica de imágenes de Ultra Sonido (US, *Ultra Sound*) ha sido utilizada para estudiar el cuerpo humano por más de medio siglo. El neurólogo Austriaco Karl Dussik fue el primero en aplicar US como una herramienta de diagnóstico para conseguir imágenes del cerebro. Hoy en día, esta tecnología en medicina es una de las más utilizadas a nivel mundial debido a sus múltiples ventajas como, por ejemplo, su portabilidad, bajo riesgo de radiación y bajo costo en comparación con otras técnicas como CT y MRI [3]. El presente trabajo de grado se enfoca en el estudio de las técnicas de imágenes médicas descritas previamente.

Debido a que la calidad de las imágenes médicas influye directamente en la detección y tratamiento de las diversas patologías estudiadas, se hace necesario contar con métodos de procesamiento que garanticen su fiabilidad y sean transparentes en el proceso de diagnóstico y que además de esto, brinden soluciones ante la demanda de almacenamiento eficiente y transmisión de alta velocidad, especialmente en aplicaciones de telemedicina, para lo cual, la compresión de imágenes médicas resulta crucial [4].

La Transformada *Wavelet* (WT, *Wavelet Transform*) se ha consolidado como un método muy eficiente para la compresión, e incluso, debido a su naturaleza de multiresolución, se hace también ideal para la transmisión progresiva de imágenes. Sin embargo, los filtros *wavelet* comunes suelen tener coeficientes de punto flotante, por lo que, cuando la información de entrada consiste en secuencias de números enteros, tal como ocurre en el caso de las imágenes médicas, se hace necesario contar con un método que permita caracterizar la salida, nuevamente, mediante



números enteros y con ello obtener una reconstrucción perfecta de la información original. Lo anterior es posible gracias a una técnica flexible que ha sido aplicada a la construcción de *wavelets* a través de procesos iterativos de actualización y predicción, esta técnica se conoce como esquema *lifting*, el cual permite la aplicación práctica de la Transformada Wavelet Entera (IWT, *Integer Wavelet Transform*) [5].

En el presente trabajo de grado se lleva a cabo la aplicación de la IWT a través de esquemas *lifting*, para la compresión de imágenes médicas diagnósticas, se evalúan métodos de codificación de fuente con y sin pérdidas y se efectúa un análisis comparativo con el fin de establecer las configuraciones que permiten obtener los mejores desempeños de acuerdo a parámetros establecidos.

El presente documento está estructurado en 5 capítulos de la siguiente manera: el capítulo 1 aborda los fundamentos teóricos de la WT necesarios para el desarrollo del trabajo. En el capítulo 2 se expone la teoría relacionada a los esquemas *lifting* y la IWT. En el capítulo 3, se realiza el diseño del sistema y se definen las métricas de evaluación de su desempeño. En el capítulo 4 se exponen y analizan los resultados obtenidos y finalmente, en el capítulo 5 se presentan las conclusiones y trabajos futuros.



CAPÍTULO 1: GENERALIDADES DE LA TRANSFORMADA WAVELET

En este capítulo se exponen definiciones, conceptos y bases teóricas relacionadas con la transformada *wavelet*, con el fin de que sirvan como punto de partida para entender el esquema *lifting*, el cual es el tema central de este trabajo de grado y se aborda en el siguiente capítulo. Inicialmente se explican los fundamentos de la transformada *wavelet* en su forma continua y discreta, posteriormente se presenta la Transformada *Wavelet* Rápida (FWT, *Fast Wavelet Transform*) en una y dos dimensiones (1D y 2D).

1.1. TRANSFORMADA WAVELET

Tradicionalmente, en el campo del procesamiento de señales e imágenes ha predominado la implementación de la Transformada de Fourier (FT, *Fourier Transform*), con el fin de efectuar la transición entre los dominios del tiempo y la frecuencia, haciendo de esta transformación matemática una herramienta fundamental a la hora de obtener información que no es manifiesta en las señales en el dominio del tiempo; sin embargo, en la FT se utilizan sinusoides (senos y cosenos) como funciones base¹, las cuales son de duración infinita, por lo que no permiten relacionar la información temporal y frecuencial de las señales analizadas.

El análisis basado en la FT es apropiado para señales estacionarias, es decir, señales cuyas propiedades estadísticas no cambian en el tiempo. No obstante, a fin de analizar señales cuyas propiedades estadísticas y frecuenciales son inconstantes en el tiempo se hace necesaria una representación conjunta de los dominios tiempo-frecuencia, por lo cual es preciso efectuar una transformación que permita estudiar la información de las señales tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia. Dos alternativas para relacionar estos dos dominios son la Transformada de Fourier de Tiempo Corto (STFT, *Short Time Fourier Transform*) y la WT.

Ya que el dominio de la frecuencia y el dominio del tiempo se complementan, existe un balance entre la resolución temporal y la resolución frecuencial, de forma tal que el aumento de una implica la disminución de la otra de manera proporcional. Esto significa que, si se desea obtener información detallada del espectro de frecuencia de una señal, se tiene que sacrificar su información temporal y, si se busca caracterizar con detalle una señal en el dominio del tiempo, se pierde la información frecuencial de la misma. De acuerdo con lo anterior, no es posible tener

¹ El término *funciones base* se refiere a un grupo de funciones, las cuales son usadas para descomponer una señal. La señal analizada se puede representar por medio de una suma ponderada de estas funciones base.



un perfecto conocimiento de lo que ocurre en los dominios del tiempo y la frecuencia de manera simultánea.

Dicha relación existente entre el dominio del tiempo y la frecuencia se analiza mediante un concepto compartido entre diferentes ramas de la ciencia, conocido como el principio de incertidumbre o relación de indeterminación de Heisenberg. Dicho principio establece que no es posible medir con total exactitud un par de magnitudes físicas conjugadas, es decir, donde una es la FT de la otra, por lo que la resolución temporal y la resolución frecuencial son inversamente proporcionales y con la finalidad de aumentar una, es necesario compensar dicho aumento con la disminución de la otra [6].

La STFT logra realizar una descripción de la evolución temporal al aplicar una función ventana, la cual se desplaza sobre la señal analizada. Es importante destacar que la forma y la longitud de la función ventana permanecen constantes durante el análisis, por lo cual la resolución tiempo-frecuencia de la STFT también permanece constante [6], como se observa en la Figura 1.1. a.

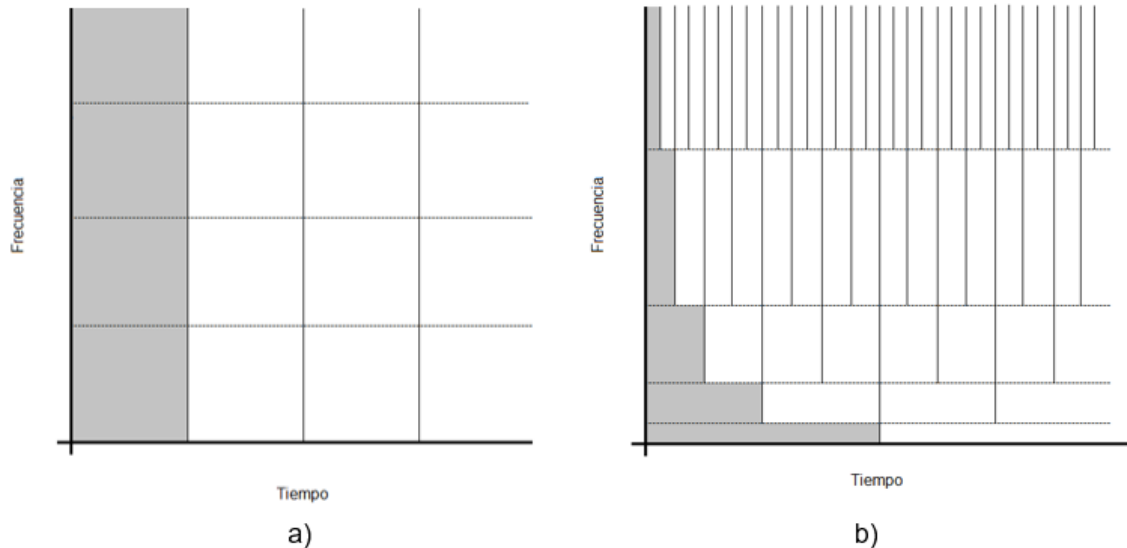


Figura 1.1. Plano tiempo-frecuencia a) STFT; b) WT.

En la STFT las sinusoides complejas $e^{-j2\pi ft}$ se encuentran multiplicadas por una función ventana $g(t)$ de tamaño fijo centrada alrededor de un tiempo de referencia τ , así, la STFT matemáticamente se define como el producto interno entre una señal $s(t)$ y la función base $K_{\tau,f}(t)$, donde $K_{\tau,f}(t) = g(t - \tau)e^{-j2\pi ft}$ [6], como es descrito en la ecuación 1.1.



$$\tilde{s}(\tau, f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)K_{\tau,f}(t)dt. \quad (1.1)$$

Por otra parte, la WT realiza una descomposición de la señal en un conjunto de versiones escaladas de una función común llamada *wavelet* madre. Las *wavelets* asociadas a las altas frecuencias son de corta duración y las *wavelets* de baja frecuencia son, en comparación, más largas en duración, haciendo a esta transformada ideal para el análisis de señales que contienen componentes de frecuencia altas y bajas, lo cual corresponde a la mayoría de señales encontradas en la práctica [6].

La WT puede verse como una evolución de la STFT dado que su estructura de ventana variable permite ajustar la resolución que se tiene en los dominios del tiempo y la frecuencia. La cobertura del plano tiempo-frecuencia de la WT es mostrada en la figura 1.1. b.

Por otra parte, también es posible expresar la WT en términos de sus funciones base, conocidas como *wavelets*, de manera similar a la descripción provista por la ecuación 1.1. teniendo en cuenta que, a diferencia de la STFT, la WT cuenta con ventanas variables, cuyas variaciones (dilataciones y traslaciones) se simbolizan mediante las variables a y b que representan los cambios en escala y tiempo respectivamente [6]. Las bases *wavelet*, $\varphi_{b,a}(t)$, son obtenidas como se observa en la ecuación 1.2.

$$\varphi_{b,a}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \varphi\left(\frac{t-b}{a}\right). \quad (1.2)$$

Las bases *wavelet* son equivalentes a las ventanas de la STFT, esto es, $K_{b,a}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \varphi^*\left(\frac{t-b}{a}\right)$, donde φ^* representa el complejo conjugado², así, la Transformada *Wavelet Continua* (CWT, *Continuous Wavelet Transform*) se define como

$$\tilde{s}(b, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \varphi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \quad (1.3)$$

donde $\tilde{s}(b, a)$ corresponde a la superficie de valor complejo formada por la WT al ser ésta una función de los factores a y b .

² La mayoría de referencias consultadas emplean valores reales para los sistemas *wavelet*, sin embargo, en la definición general de la CWT, la *wavelet* madre puede ser una función compleja.



1.2. TRANSFORMADA WAVELET CONTINUA EN 1D

La CWT se define matemáticamente mediante la ecuación 1.3, la cual es función de dos variables, a y b , donde la variable a se denomina *factor de escala* y solamente toma valores positivos mayores que cero, por su parte, la variable b es denominada *factor de traslación* y no tiene restricción sobre sus posibles valores. En la CWT las ventanas en el tiempo se obtienen gracias al factor de escala a , permitiendo que ésta se comporte como un ‘microscopio matemático’ al ajustar el ancho de la ventana temporal, dilatándose para información a gran escala (baja frecuencia) y comprimiéndose para contenido de pequeña escala (alta frecuencia), es decir, la WT, a diferencia de la FT, realiza un acercamiento a los finos detalles de la señal analizada y un alejamiento para ‘ver’ los rasgos más generales de la misma [7].

Para ilustrar la propiedad de adaptación de la WT se toma como referencia un ejemplo estándar de *wavelet* madre conocida como *wavelet* de Ricker o Sombrero Mexicano (*Mexican Hat*), la cual se define matemáticamente como $\varphi(t) = (1 - t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}$ y su gráfica se muestra en la Figura 1.2.

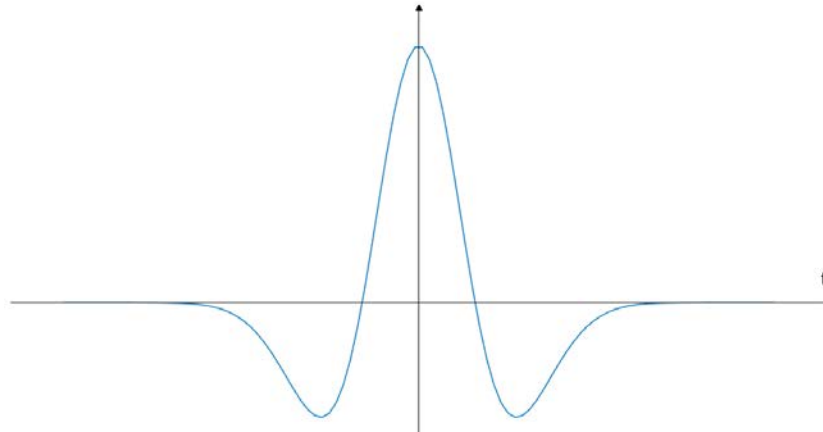


Figura 1.2. Wavelet Sombrero Mexicano.

La CWT puede verse como un filtrado de la señal analizada por una versión dilatada de la función *wavelet* madre, este cambio de escala corresponde a una traslación en frecuencia, a diferencia de la STFT que utiliza modulación [7]. En la Figura 1.3 se observa el cambio de escala de la *wavelet* de referencia.

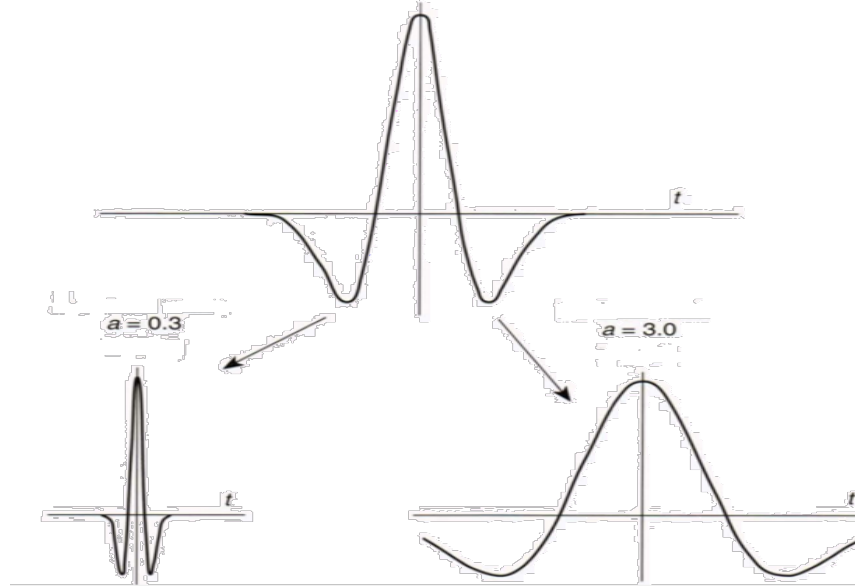


Figura 1.3. Compresión/dilatación de la *wavelet* Sombrero Mexicano. Adaptado de [7].

Mediante la Figura 1.3 es posible observar que las variaciones en el factor de escala a generan la contracción o dilatación de la *wavelet* analizada, donde, si se tiene que $a > 1$, la *wavelet* se expande a lo largo del eje temporal, por el contrario, si $a < 1$, la *wavelet* se contrae en el tiempo.

Posterior al análisis de los efectos del factor de escala en el dominio del tiempo, es de interés analizar lo que sucede en el dominio frecuencial al variar este parámetro. Para este fin, es necesario obtener una representación en el dominio de la frecuencia de la CWT mediante el uso de la FT.

En la Figura 1.4 se muestra la representación en frecuencia de la *wavelet* Sombrero Mexicano.

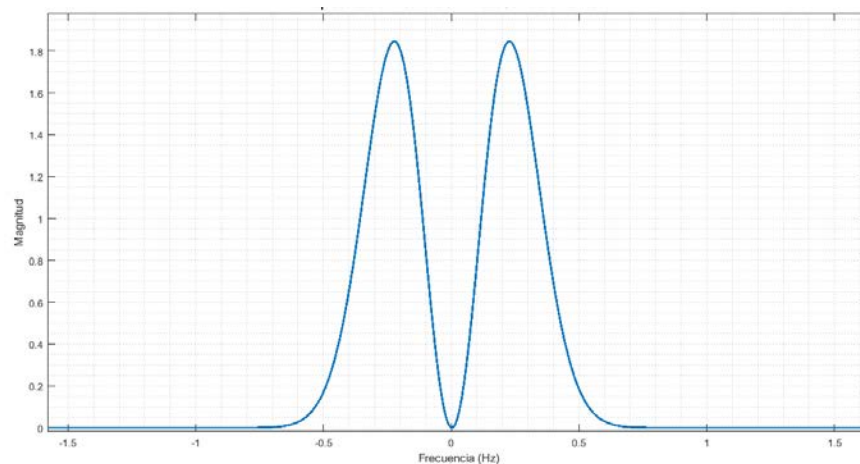


Figura 1.4. Espectro de magnitud de la *wavelet* Sombrero Mexicano.



Ya que el dominio del tiempo y la frecuencia son complementarios, es de esperarse que los efectos de la variación del factor de escala a en el dominio frecuencial sean opuestos a los observados en el dominio del tiempo. La Figura 1.5 muestra cómo para diferentes valores del factor de escala, la *wavelet* Sombrero Mexicano se traslada en frecuencia.

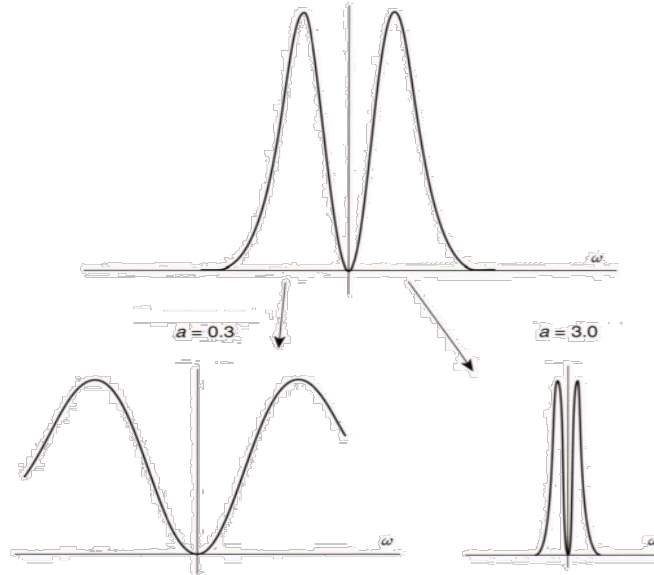


Figura 1.5. Traslación en frecuencia *wavelet* Sombrero Mexicano. Adaptado de [2].

Como se observa en la Figura 1.5, las funciones *wavelet* pueden verse como filtros en el dominio de la frecuencia, en el caso donde el factor de escala $a \gg 1$, el filtro corresponde a zonas pequeñas de frecuencia baja del espectro. Por otra parte, con un valor pequeño para el factor de escala, es decir, $a \ll 1$, el filtro se expande y posee una banda ancha sobre las zonas de alta frecuencia del espectro [7].

Posterior al estudio de los efectos de la variación del factor de escala de la *wavelet* madre, es preciso analizar las propiedades más importantes para las *wavelets* en general, las condiciones de regularidad y admisibilidad, las cuales garantizan que una función *wavelet* tenga la capacidad de reconstruir fielmente una señal a partir de los coeficientes calculados en el proceso de transformación [8]. Esto es:

- Tener un valor promedio nulo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = 0. \quad (1.4)$$

En la ecuación 1.4 se establece matemáticamente que el valor promedio de la función *wavelet* en el dominio del tiempo debe ser cero, es decir, que la función



oscilatoria toma igual cantidad de valores positivos y negativos, lo que implica que $\varphi(t)$ es una onda y se puede considerar como una función pasa banda [8].

- Tener energía finita

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2 dt < \infty. \quad (1.5)$$

De la ecuación 1.5 se infiere que la función $\varphi(t)$ es de energía finita, por lo que tiene una representación en el dominio de la frecuencia y en infinito sus valores tienen a cero. Cabe destacar que las señales analizadas en la práctica son de energía finita.

- Cumplir con la condición de admisibilidad

$$C_{\varphi} = \int_0^{\infty} \frac{|\hat{\varphi}(f)|^2}{f} df < \infty, \quad (1.6)$$

donde $\hat{\varphi}(f)$ representa la FT de la función $\varphi(t)$.

Las ecuaciones 1.4, 1.5 y 1.6 definen matemáticamente las condiciones que debe cumplir una función para ser clasificada como *wavelet* admisible. Con el fin de garantizar la recuperación de la señal original $s(t)$ a partir de la superficie resultante de aplicar la CWT se aplica el proceso inverso definido por la siguiente expresión

$$s(t) = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \check{s}(b, a) \varphi_{b,a}(t) da db. \quad (1.7)$$

Luego de haber definido teóricamente las principales características de la WT, es preciso conocer los métodos para llevarla a la práctica, para esto, cabe notar que la implementación de esta transformada tal como se define mediante la ecuación 1.3 supone varios inconvenientes, los cuales hacen inviable su desarrollo en una aplicación real. El primero de ellos se relaciona con la redundancia de la CWT, ya que ésta es calculada mediante el desplazamiento continuo de una función escalable sobre la función de interés y el posterior cálculo de la correlación entre ambas. Estas funciones escaladas no forman una base ortogonal y, por lo tanto, los coeficientes *wavelet* resultantes son redundantes [8]. De forma similar a lo que



ocurre con el parámetro b , la CWT considera infinitas variaciones del parámetro de escala a . Por lo anterior, la implementación computacional de la CWT no es posible y sus aproximaciones implican una alta carga computacional y gran consumo de memoria de almacenamiento.

La implementación práctica de la WT busca eliminar la redundancia presente en la CWT al definir un número finito de funciones *wavelet*. Por lo expuesto anteriormente, y con el objetivo de lograr una eficiente implementación de la WT, se hace uso de la Transformada *Wavelet* Discreta (DWT, *Discrete Wavelet Transform*) en escenarios prácticos.

1.3. TRANSFORMADA WAVELET DISCRETA EN 1D

La DWT es una función que puede ser aplicada sobre un grupo de datos finito y en la práctica puede compararse con la Transformada Discreta de Fourier (DFT, *Discrete Fourier Transform*), ya que al igual que ésta, la DWT es ortogonal. Ambas transformaciones se basan en convoluciones y asumen a la señal de entrada como un conjunto de muestras discretas en el tiempo [9].

A pesar de que la DWT es una de las tantas herramientas utilizadas en el procesamiento digital de señales e imágenes, y de que es un campo de investigación relativamente reciente, se ha establecido como una de las herramientas más importantes para la compresión de información. En aplicaciones de compresión de imágenes su efectividad ha sido ampliamente demostrada [9].

Se ha mostrado previamente que, para la CWT, se considera la familia de funciones definida mediante la ecuación 1.2, donde el factor de traslación b puede tomar cualquier valor dentro de los números reales, el factor de dilatación a toma valores reales positivos distintos de cero y la función φ se considera admisible. En el caso de la DWT, con el principal objetivo de eliminar la redundancia en la representación tiempo-escala y realizar una descripción de la señal de interés con el menor número de componentes posibles, se hace necesario restringir los valores de los factores a y b a valores discretos de tal forma que el factor de escala está dado por $a = a_0^j$, donde $j \in \mathbb{Z}$ se denomina nivel de resolución, y $a_0 \neq 0$ es un valor fijo, que por conveniencia se asume $a_0 > 1$. El factor de traslación b depende a su vez del factor de escala de manera que $b = kb_0a = kb_0a_0^j$ con nivel de traslación $k \in \mathbb{Z}$ y un valor constante $b_0 > 0$ [10]. Reemplazando los nuevos valores de los factores a y b en la ecuación 1.2 se obtiene que

$$\varphi_{j,k}(t) = a_0^{-\frac{j}{2}} \varphi(a_0^{-j}t - kb_0); \quad j, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.8)$$

En implementaciones prácticas de la DWT se suele escoger $a_0 = 2$ con el fin de que el muestreo en el eje de la frecuencia corresponda a un muestreo diádico. Para el factor de traslación es conveniente escoger $b_0 = 1$ de tal forma que también



se tenga un muestreo diádico en el eje temporal [8]. Reemplazando en la ecuación 1.8 estos valores para a_0 y b_0 se obtiene

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}}\varphi(2^{-j}t - k); \quad j, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.9)$$

Con base en lo anterior, la DWT se define matemáticamente mediante la ecuación 1.10.

$$S_{j,k}(j, k) = 2^{-\frac{j}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\varphi(2^{-j}t - k) dt. \quad (1.10)$$

Al implementar la DWT para transformar una señal continua se obtiene una serie de coeficientes, este proceso se conoce como descomposición en series *wavelet*. Al momento de efectuar este esquema de descomposición es de vital importancia tener en cuenta el proceso de reconstrucción de la señal original, con este fin, en [10] se prueba que la condición necesaria y suficiente para garantizar la reconstrucción estable de la señal original a partir de los coeficientes *wavelet* generados en el proceso de transformación mediante la aplicación de la DWT es que la energía de dichos coeficientes ha de estar acotada entre dos límites positivos de la siguiente forma

$$A|s|^2 \leq \sum_{j,k} |\langle s, \varphi_{j,k} \rangle|^2 \leq B|s|^2, \quad (1.11)$$

donde $|s|^2$ corresponde a la energía de la señal $s(t)$, $A > 0$, $B < \infty$, A y B son independientes de $s(t)$. Cuando la ecuación 1.11 se satisface, la familia *wavelet* $\varphi_{j,k}(t)$ es denominada un *frame wavelet* con límites A y B . Cuando la relación B/A tiende a la unidad, se garantiza una reconstrucción numéricamente más estable de la señal original. Cuando se cumple que $A = B$, el *frame wavelet* se considera como un *tight frame* y la familia de funciones *wavelet* se comporta como una base ortonormal [8]. La ecuación 1.11 también puede interpretarse como una condición de admisibilidad para la DWT, ya que, si esta ecuación es satisfecha, se garantiza una reconstrucción estable de la señal original a partir de sus coeficientes *wavelet*.

En el proceso de reconstrucción de la señal original, donde se utiliza una familia *wavelet* ortonormal como base en el proceso de transformación, una señal $s(t)$ se puede reconstruir sumando las funciones *wavelet* base ortogonales ponderadas por los coeficientes de la DWT y se cumple que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{j,k}(t)\varphi_{m,n}(t) dt = \begin{cases} 1, & j = m; k = n \\ 0, & \text{en otros casos} \end{cases}. \quad (1.12)$$



Con la satisfacción de las ecuaciones 1.11 y 1.12 es posible recuperar la señal $s(t)$ original mediante el proceso inverso para la transformada *wavelet* discreta definido en la expresión 1.13.

$$s(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-\frac{j}{2}} S_{j,k}(j, k) \varphi(2^{-j}t - k). \quad (1.13)$$

Si bien mediante la implementación de la DWT es posible obtener un número finito de funciones *wavelet* y eliminar la redundancia presente en la CWT, por lo que aún existe un inconveniente a resolver para implementar la WT de forma práctica. Incluso con la DWT son necesarias infinitas traslaciones y dilataciones para describir a la señal de interés mediante esta transformada. Utilizar un número finito de niveles de resolución plantea un interrogante sobre la calidad de la transformada resultante y la posibilidad de reducir el número de *wavelets* necesarias para analizar una señal de interés y aun así lograr una caracterización y recuperación eficientes de la misma [8].

Para resolver el interrogante planteado anteriormente, es posible remontarse a la teoría de Fourier de donde se sabe que la expansión de una señal pasa banda en el tiempo es equivalente a una compresión y un desplazamiento de su espectro, con lo cual una expansión en el tiempo por un factor de 2 comprime el espectro de la *wavelet*, modificando los valores en los que está definido, desplazando todos sus componentes de frecuencia por el mismo factor. Usando este principio es posible cubrir el espectro finito de la señal de interés, de la misma forma en la que se cubre la señal en el dominio del tiempo con *wavelets* trasladadas. Adicionalmente, como las *wavelets* son funciones pasa banda de duración aproximadamente limitada, una serie de *wavelets* puede verse entonces como un banco de filtros pasa banda [8].

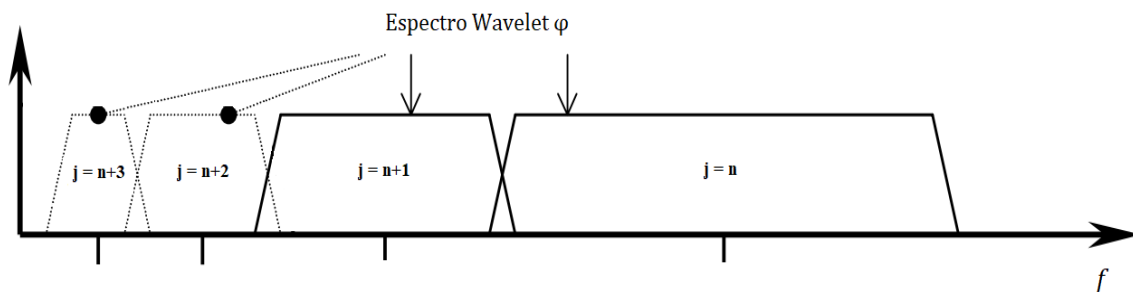


Figura 1.6. Espectro *wavelet*. Adaptado de [8].

Con el fin de cubrir todo el espectro de la señal de interés con el espectro de funciones *wavelet* sería necesario emplear un número infinito de éstas, ya que, por cada ensanchamiento en el dominio del tiempo por un factor de dos, el ancho de banda de las *wavelets* se dividirá a la mitad y no se llegará a cubrir completamente el espectro de la señal, esto puede observarse gráficamente en la Figura 1.6. La solución que se ha planteado para lograr cubrir completamente la señal analizada y limitar a un número finito la cantidad de *wavelets* necesarias para



caracterizarla es la utilización de una función con un espectro tipo pasa bajo la cual sea de utilidad para cubrir la porción espectral alrededor del origen y llenar el vacío dejado por el espectro *wavelet*, ésta se conoce como función *scaling* (ζ) [8]. En la Figura 1.7 se observa la forma en como una serie infinita de *wavelets* es reemplazada por una función *scaling* con lo cual se limita su número a un valor finito.

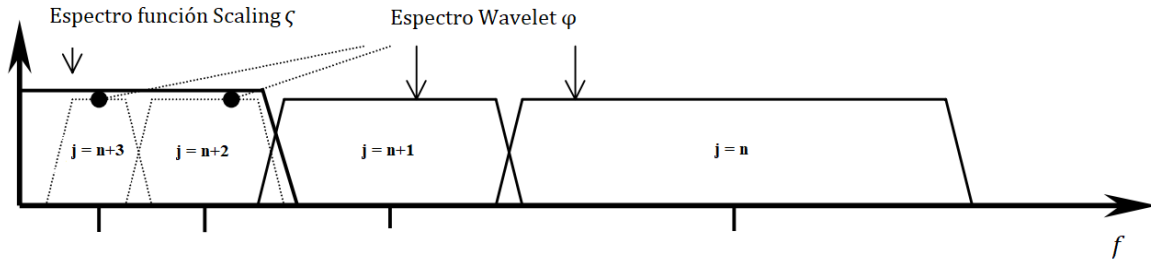


Figura 1.7. Espectro *wavelet* y *scaling*. Adaptado de [8].

Las funciones *scaling* que se asocian a un nivel de resolución j generan un subespacio *scaling* de dicha resolución, tal como se muestra en la ecuación 1.14.

$$\zeta_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \zeta(2^{-j}t - k); \quad j, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.14)$$

Los coeficientes *scaling* son obtenidos mediante la aplicación de la expresión 1.15.

$$\tilde{u}^j(k) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \zeta_{j,k}(t) dt. \quad (1.15)$$

El producto escalar entre una función *wavelet* y una *scaling* en un mismo nivel de resolución j tiene como resultado un valor nulo, con lo cual se puede decir que estas dos funciones son ortogonales para un mismo nivel de resolución [11], por lo que se cumple que

$$\langle \varphi_{j,k}, \zeta_{j,l} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{j,k}(t) \zeta_{j,l}(t) dt = 0. \quad (1.16)$$

Por otro lado, como la función *scaling* contiene a las funciones *wavelet* de niveles de resolución superior, entonces de forma general se cumple que

$$\langle \varphi_{i,k}, \zeta_{j,l} \rangle = \begin{cases} 0 & ; i \leq j \\ c, c \neq 0; & i > j \end{cases} \quad (1.17)$$

La introducción de la función *Scaling* hace posible la implementación práctica de la DWT mediante el Análisis Multiresolución (MRA, *Multiresolution Analysis*),



donde coeficientes *wavelet* y *scaling* son sumados con el fin de aproximar una función $s(t)$ en distintos niveles de resolución, esto es,

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{u}^0(k) \zeta_{0,k}(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_{j,k}(j, k) \varphi_{j,k}(t). \quad (1.18)$$

1.4. ALGORITMO DE MALLAT (FWT)

De la misma manera en que gracias a la Transformada Rápida de Fourier (FFT, *Fast Fourier Transform*) es posible la implementación computacional de la FT, la WT se hace práctica de implementar computacionalmente gracias al algoritmo introducido por el matemático francés Stéphane Mallat en el año 1989, este algoritmo es también conocido como Transformada *Wavelet* Rápida (FWT, *Fast Wavelet Transform*).

La FWT es un algoritmo iterativo para el cálculo de la WT, donde se asume que la función $s(t)$ de entrada es una secuencia de muestras discretas, muestreada a 2^j puntos por intervalo, dichos puntos pueden verse como los productos internos de la función *scaling* $\zeta(t)$ y $s(t)$.

En la FWT, la WT se puede implementar con un par especial de filtros de Respuesta Finita al Impulso (FIR, *Finite Impulse Response*) conocidos como Filtros Espejo en Cuadratura (QMF, *Quadrature Mirror Filters*) usados principalmente en aplicaciones de análisis de voz digital y descomposición espectral. Un filtro FIR realiza el producto interno entre sus coeficientes y las muestras discretas en la línea de retardo, es decir, se efectúa una convolución discreta de la señal con los coeficientes del filtro [12], esto puede verse en la Figura 1.8.

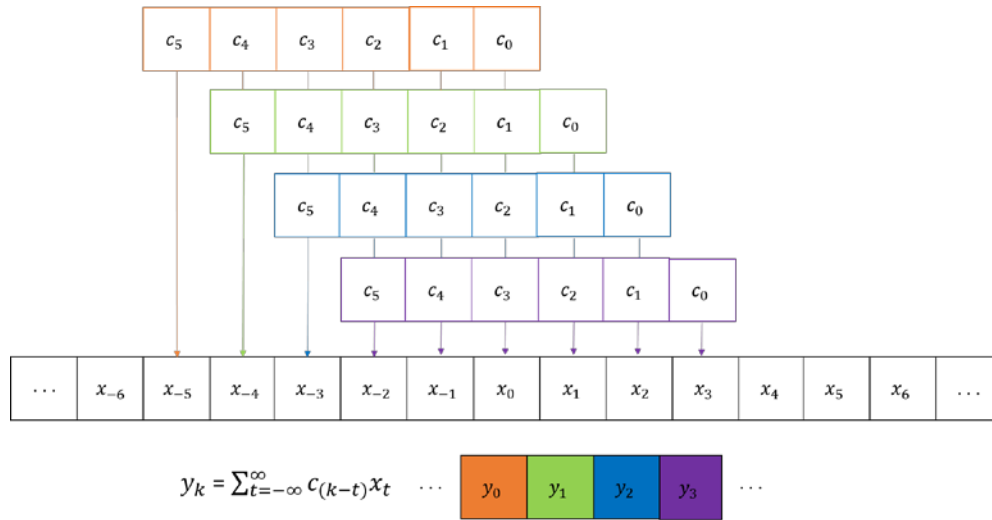


Figura 1.8. Convolución discreta coeficientes del filtro FIR y flujo de entrada.

Mediante la implementación de un banco de filtros QMF se logra dividir la señal de entrada en dos bandas y separar sus componentes de alta frecuencia a través de un Filtro Pasa Alto (HPF, *High Pass Filter*) y sus componentes de baja frecuencia con un Filtro Pasa Bajo (LPF, *Low Pass Filter*). Las salidas del par QMF son sub-muestreadas por un factor de dos, lo que equivale a conservar una de cada dos muestras y descartar las restantes. El algoritmo de Mallat se implementa de forma recursiva o piramidal, de tal forma que la salida del LPF de cada nivel de descomposición es alimentada a la entrada de otro par de QMF idénticos, además de esto, usa los coeficientes *wavelet* y *scaling* como coeficientes de los filtros QMF, donde el LPF se asocia a los componentes de la función *scaling* generando los coeficientes de aproximación cA y el HPF se asocia a los componentes de la función *wavelet*, generando los coeficientes de detalle cD . Los coeficientes de aproximación de cada etapa son usados para generar los coeficientes de detalle y aproximación de la siguiente [12], como puede observarse en la Figura 1.9.

En la ecuación 1.19 se observa la expresión mediante la cual es posible obtener los coeficientes $h[n]$ del LPF, y en la ecuación 1.20 se detalla la ecuación para el cálculo de los coeficientes $g[n]$ correspondientes al HPF.

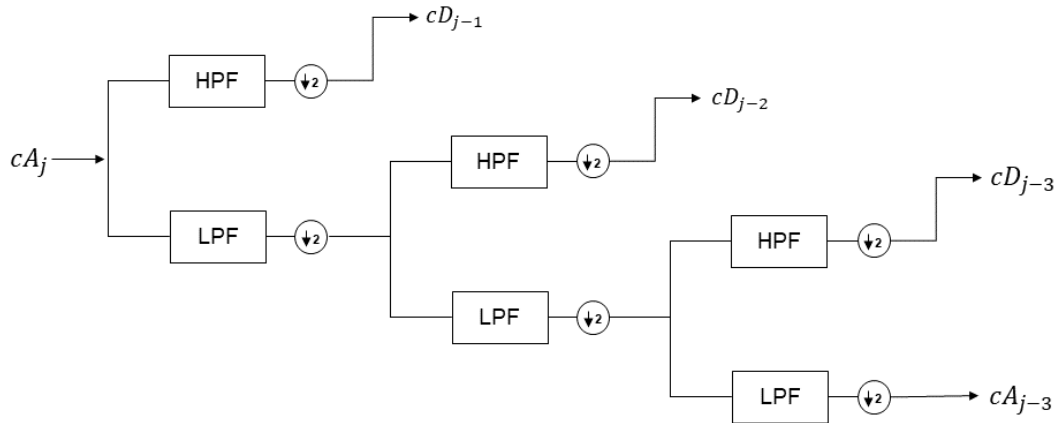


Figura 1.9. Algoritmo de Mallat (FWT).

$$h[n] = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(t)\zeta(2t - n)dt, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1.19)$$

$$g[n] = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\zeta(2t - n)dt, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.20)$$

Es importante aclarar que las expresiones para los coeficientes $h[n]$ y $g[n]$ deben satisfacer las condiciones de ortogonalidad definidas mediante las expresiones 1.21, 1.22 y 1.23 [11].

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]h[n - 2m] = \delta[m], \quad (1.21)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n]g[n - 2m] = \delta[m], \quad (1.22)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]g[n - 2m] = 0, \quad (1.23)$$

Con respecto al proceso de reconstrucción o síntesis de la señal de entrada, la FWT esencialmente realiza las mismas operaciones asociadas al proceso de análisis, pero en este caso, de forma inversa, es decir, los coeficientes de aproximación y detalle son combinados con los coeficientes de detalle del nivel superior con el fin de reconstruir la señal original. En lugar de diezmar, las señales son interpoladas o sobre muestreadas, esto es, se agregan ceros entre cada



muestra de aproximación y detalle y las señales son luego pasadas a través de los LPF y HPF. Los ceros intermedios son reemplazados por estimaciones derivadas de las circunvoluciones, luego, las salidas de los filtros son sumadas para obtener los coeficientes de aproximación para el siguiente nivel de resolución. El conjunto final de coeficientes de aproximación en el nivel superior de la pirámide que representa las etapas de la transformación inversa es entonces una reconstrucción de la señal de entrada original [12]. En la Figura 1.10 puede observarse el proceso para la obtención de la señal original al aplicar el algoritmo de Mallat en sentido inverso.

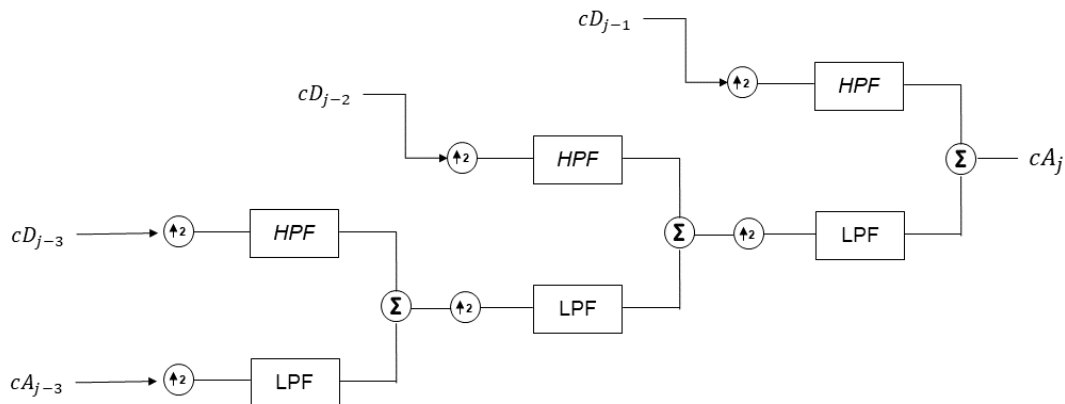


Figura 1.10. Algoritmo de Mallat inverso.

1.5. FWT EN 2D

El modelo de la FWT puede ser sencillamente extendido a cualquier dimensión $d > 0$, en este apartado se estudia el caso bidimensional, donde la señal a analizar es ahora una función de energía finita $I(x, y)$. La aproximación de una señal $I(x, y)$ a una resolución j es equivalente a su proyección ortogonal sobre un espacio vectorial V_{2j} . La FWT en 2D es aplicada principalmente al análisis de imágenes, ya que estas matrices pueden ser tratadas como señales bidimensionales. El caso 2D introduce, de forma similar al caso unidimensional, una función *scaling* $\zeta(x, y)$ la cual puede expresarse de la siguiente forma [13],

$$\zeta(x, y) = \zeta(x)\zeta(y). \quad (1.24)$$

En la ecuación 1.24 puede observarse que $\zeta(x)$ y $\zeta(y)$ son funciones *scaling* unidimensionales, en este caso, se logra una aproximación multiresolución separable, mediante la cual se le da especial importancia a las direcciones horizontal y vertical de las imágenes analizadas y la FWT puede verse como una transformada unidimensional a lo largo de los ejes x y y , ya que ha sido demostrado que una FWT bidimensional se puede calcular con una extensión separable del algoritmo de descomposición unidimensional.



Para el caso bidimensional se toman las bases *wavelet* usadas para el análisis en una dimensión y se generan productos separables de las funciones *scaling* y *wavelet*. Si se tiene que $\varphi(x)$ es la función *wavelet* unidimensional asociada con la función *scaling* $\zeta(x)$, entonces se definen tres *wavelets* de la siguiente manera:

$$\varphi^1(x, y) = \zeta(x)\varphi(y), \quad (1.25)$$

$$\varphi^2(x, y) = \varphi(x)\zeta(y), \quad (1.26)$$

$$\varphi^3(x, y) = \varphi(x)\varphi(y), \quad (1.27)$$

luego,

$$2^{-j}\varphi^k(x - 2^{-j}n, y - 2^{-j}m), \quad 1 \leq k \leq 3, (n, m) \in \mathbb{Z}^2 \quad (1.28)$$

forma una base ortonormal de R^2 .

Ya que la descomposición *wavelet* se puede interpretar como una descomposición de la señal en un conjunto de canales de frecuencia espacialmente orientados e independientes, es posible analizar una imagen I_0 en el dominio de la frecuencia, donde ésta cubre cierto rango frecuencial, tal como se muestra en la Figura 1.11.

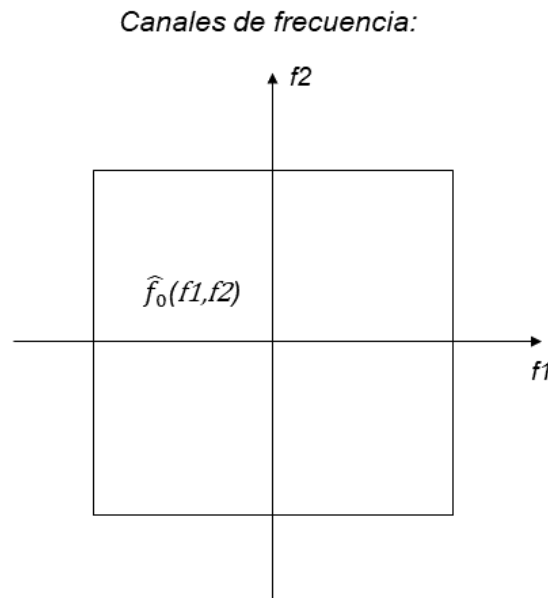


Figura 1.11. Representación de imagen en el dominio de la frecuencia.

De la misma manera que en la FWT en una dimensión, la FWT en 2D puede implementarse mediante filtros digitales y diezmadore. Gracias a las funciones *wavelet* y *scaling* separables, simplemente se aplica la FWT unidimensional a lo

largo de las filas de la imagen y posteriormente a lo largo de las columnas resultantes. La Figura 1.12 muestra el diagrama para el banco de filtros utilizado en el análisis de una función bidimensional o imagen mediante la FWT en 2D.

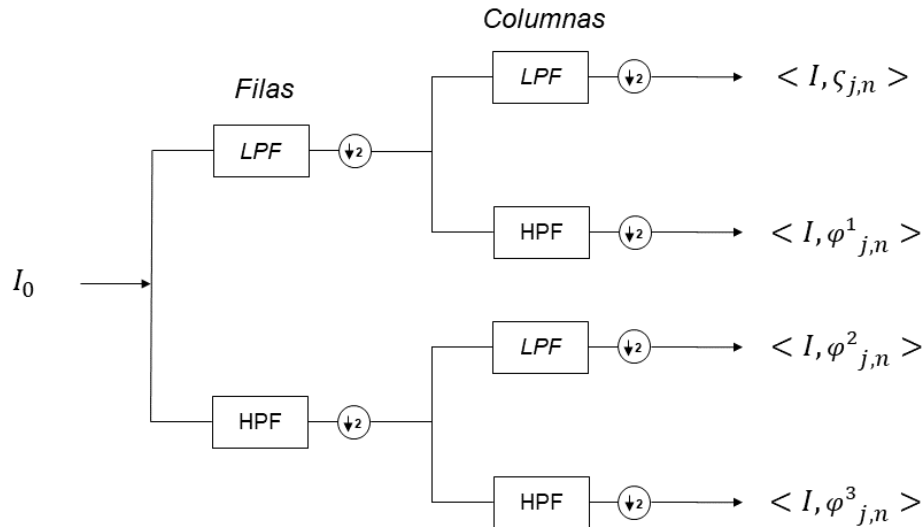


Figura 1.12. Banco de filtros de análisis FWT 2D.

Al aplicar el banco de filtros mostrado en el diagrama de la Figura 1.12, mediante la convolución de las filas con los LPF, los HPF y el diezmo de las columnas es posible obtener dos *pseudo* imágenes cuyas resoluciones horizontales son reducidas por un factor de dos, posteriormente, ambas imágenes son filtradas a lo largo de las columnas y sus filas son diezgadas por un factor de dos para producir cuatro *pseudo* imágenes de salida. Los componentes de detalle relacionados al HPF caracterizan la información de alta frecuencia de la imagen mientras que los componentes de aproximación relacionados al LPF contienen su información de baja frecuencia. En la Figura 1.13 se observa la descomposición resultante al aplicar la FWT bidimensional sobre una imagen I_0 de entrada.

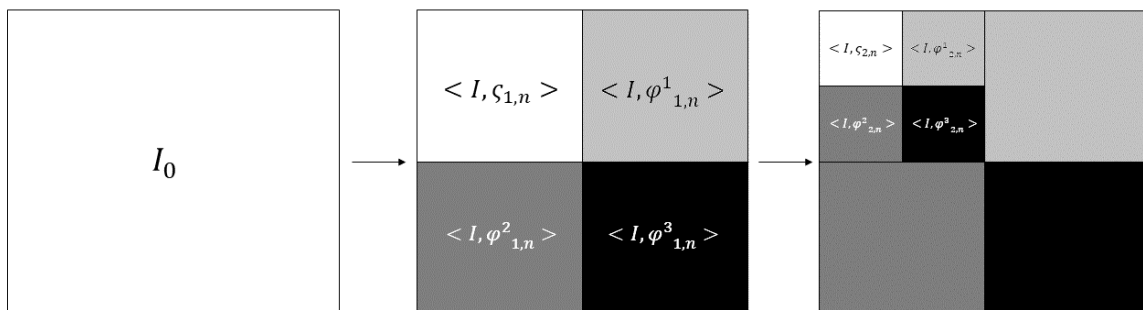


Figura 1.13. Descomposición de una imagen mediante FWT 2D.



En la Figura 1.13 se observa la descomposición resultante al aplicar el algoritmo de Mallat en 2D con dos niveles de resolución. La imagen de entrada I_0 es descompuesta en los coeficientes de aproximación $\zeta_{1,n}$ y en tres canales de frecuencia $\varphi^1_{1,n}$, $\varphi^2_{1,n}$ y $\varphi^3_{1,n}$, los cuales representan los coeficientes de detalle en sentido vertical, horizontal y diagonal de la imagen respectivamente. El proceso se repite descomponiendo los coeficientes de aproximación I_1 para obtener los canales de frecuencia que definen los coeficientes de detalle $\varphi^1_{2,n}$, $\varphi^2_{2,n}$ y $\varphi^3_{2,n}$.

Con el objetivo de realizar la reconstrucción de una imagen a partir de su descomposición *wavelet*, en el proceso de síntesis, para un nivel de resolución j se tienen los coeficientes de aproximación y detalle obtenidos en el proceso de descomposición y se cuenta con dos conjuntos de filtros unidimensionales, uno operando sobre las columnas de las *pseudo* imágenes definidas por los coeficientes y otro operando sobre las filas. Los coeficientes de los filtros HPF y LPF son sumados en un proceso iterativo con el fin de reconstruir la imagen original. La Figura 1.14 muestra el diagrama del banco de filtros para la FWT bidimensional inversa.

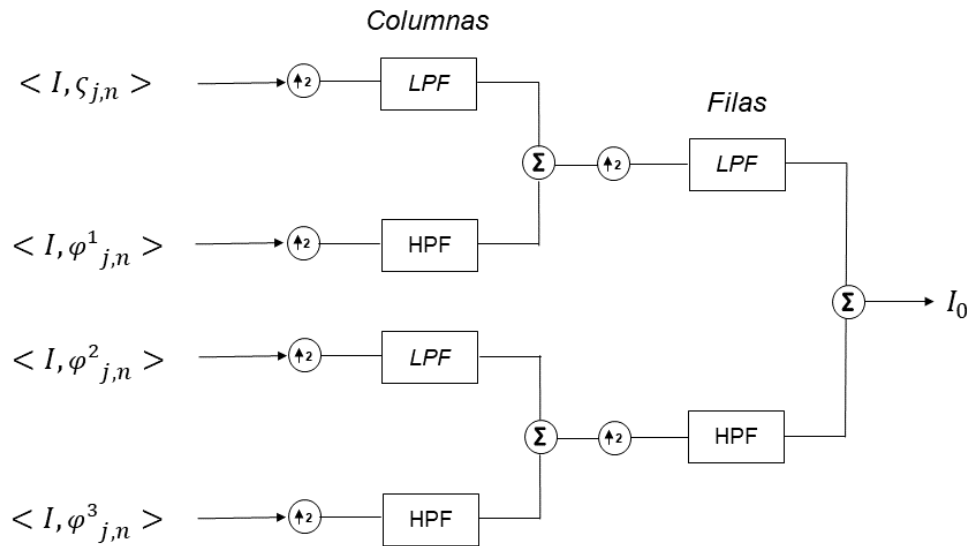


Figura 1.14. Banco de filtros de síntesis FWT 2D.



CAPÍTULO 2: ESQUEMAS LIFTING

En este capítulo se explican los fundamentos teóricos de los esquemas *lifting*, tema central del presente trabajo de grado. En primer lugar, se exponen los métodos alternativos para la implementación práctica de la DWT que dan lugar a las denominadas *wavelets de segunda generación*, posteriormente se detallan las generalidades sobre los esquemas *lifting* y sus principales variantes y en la sección final se presenta la IWT, de fundamental importancia en el desarrollo del presente trabajo de grado.

2.1. ALTERNATIVAS PARA LA IMPLEMENTACIÓN DE LA DWT

Hasta el momento se ha cubierto la teoría general sobre la WT y se han introducido los métodos que hacen posible su aplicación práctica. Según lo visto, en esencia, es posible ver a las *wavelets* como “bloques de construcción” mediante los cuales se pueden representar señales, datos o imágenes. El atractivo particular de las *wavelets* se deriva principalmente de que los conjuntos de coeficientes resultantes permiten relacionar el tiempo y la frecuencia. Por otro lado, tiene una alta eficiencia computacional³, ya que las representaciones *wavelet* pueden ser calculadas de forma rápida gracias a la implementación del MRA [14].

Tradicionalmente, las *wavelets* se definen como traslaciones y dilataciones de una función particular denominada *wavelet madre*. Dicho enfoque tradicional, el cual ha sido expuesto en el capítulo 1, trabaja con familias conocidas como *wavelets de primera generación*, las cuales se construyen a partir de la FT. A pesar de la gran versatilidad para la implementación de las familias *wavelet* tradicionales, en muchos casos se presenta la necesidad de efectuar representaciones de funciones jerárquicas, en las cuales las *wavelets* no sean creadas necesariamente a partir de traslaciones y dilataciones de una *wavelet* madre [15].

La necesidad de mejora de las *wavelets* proviene de una deficiencia inherente a su construcción, principalmente el hecho de que las *wavelets de primera generación* funcionen de forma adecuada para señales infinitas o periódicas, pero no sean muy convenientes para su uso sobre señales finitas o sobre un dominio acotado, debido a que las *wavelets* pueden verse como oscilaciones localizadas alrededor de un punto central por lo que pueden presentar cierta dificultad para manejar los bordes de una señal, generando imprecisiones en el análisis en sus límites, lo cual genera un problema conocido como efectos de borde (*edge effects*).

³ La FWT y la FFT tienen el mismo valor en la notación O grande, esto es $O(M \cdot \log(M))$, donde M es el número de muestras de la señal de entrada.



El principal interrogante ha sido cómo mantener las propiedades eficaces de las *wavelets*, por ejemplo, la localización en frecuencia-tiempo y su eficiencia computacional, logrando que sea posible mejorar su aplicación para analizar señales de longitud finita. La respuesta a esta incógnita ha sido abandonar el modelo de la primera generación, es decir, la creación de las familias *wavelet* basándose en el análisis de Fourier y las traslaciones y dilataciones de la *wavelet* madre.

La necesidad de una generalización y mejoramiento en la teoría *wavelet de primera generación* es ilustrada en diversas aplicaciones, donde se evidencian las siguientes deficiencias y se parte de éstas para proponer un modelo generalizado que permita solventarlas, preservando las propiedades deseables de las *wavelets* en su modelo clásico [16]:

- (i) Las *wavelets de primera generación* son herramientas eficientes cuando se trabaja con funciones en espacios de varias dimensiones; sin embargo, cuando se busca analizar datos en áreas específicas como curvas o superficies, se hacen necesarias *wavelets* especialmente adaptadas para ello.
- (ii) Las *wavelets de primera generación*, por lo general proveen bases solamente para espacios con mediciones invariantes a la traslación.
- (iii) Muchos problemas de la vida real requieren algoritmos que se adapten a datos muestreados de forma irregular, es decir, información que es recolectada en intervalos no uniformes. Las *wavelets de primera generación* asumen/requieren un muestreo regular de los datos.

Gracias a los trabajos de los autores Lounsbery [17] y Stollnitz [18] fue posible introducir *wavelets* construidas en distintos tipos de dominios mediante funciones de escalado, haciendo uso de la teoría del MRA, por lo que no son aplicadas las técnicas de Fourier para su construcción. Este enfoque fue posteriormente utilizado por Sweldens [19] con el fin de proponer un método flexible para la construcción de familias *wavelet*, mediante el uso de operadores de predicción lineal para implementar la DWT y, adicionalmente, hacerla reversible.

Los trabajos realizados con el fin de solventar las deficiencias del enfoque tradicional permitieron el surgimiento de las *wavelets de segunda generación*, cuya filosofía se basa en el objetivo de construir *wavelets* con todas las propiedades deseables (buena localización en tiempo y frecuencia, bajo costo computacional en su construcción) adaptadas a configuraciones más generales que las realizadas sobre la recta real (recta numérica), como, por ejemplo, *wavelets* sobre curvas y superficies.

La noción de que una función base puede ser escrita como una combinación lineal finita de funciones base a un nivel más fino (más subdividido) se mantiene y



es la clave detrás de la transformada rápida. La construcción de *wavelets* adaptativas se basa en la comprensión de que las traslaciones y dilataciones no son fundamentales para obtener *wavelets* con propiedades deseadas. La principal diferencia con las *wavelets de primera generación* es que los coeficientes de los filtros de las *wavelets de segunda generación* no son estáticos, sino que pueden cambiar de forma local con el fin de reflejar la naturaleza cambiante de la superficie y su medida [20].

En el caso de las *wavelets* clásicas, sus filtros están contruidos con la ayuda de la FT, con la razón subyacente de que las traslaciones y dilataciones se convierten en operaciones algebraicas después de la aplicación de la FT. En la configuración de las *wavelets de segunda generación*, las traslaciones y dilataciones no pueden ser usadas y, por lo tanto, la FT se convierte en una herramienta de construcción sin utilidad, por lo que una alternativa para la construcción de *wavelets de segunda generación* es provista por el denominado esquema *lifting* [20].

El esquema *lifting* es una técnica alternativa para implementar la DWT mediante el uso de familias *wavelet* cuyos principales aportes a la teoría *wavelet* son:

- (i) Permitir el diseño personalizado de *wavelets* dependiendo de las necesidades impuestas por el campo de aplicación específico.
- (ii) Proveer una nueva idea con el fin de hacer el cálculo de la WT de forma más rápida y eficiente, superando incluso en desempeño a la FWT.
- (iii) Proveer una generalización a configuraciones no invariantes a la traslación/dilatación de la WT, lo cual es definitivo para el desarrollo de las *wavelets de segunda generación*.

2.2. GENERALIDADES DE LOS ESQUEMAS LIFTING

El esquema *lifting* se presenta como una herramienta sencilla; sin embargo, poderosa para construir *wavelets de segunda generación*. Este esquema fue inspirado inicialmente por trabajos donde se presenta la idea de *wavelets* construidas a partir de herramientas alternativas en lugar de basar su construcción en la FT [16].

La idea básica que inspira el nombre del esquema *lifting* es empezar por un MRA simple o trivial, y avanzar gradualmente hasta llegar a un MRA con propiedades particulares. Mediante este esquema es posible diseñar los filtros necesarios en los algoritmos de la transformación dependiendo de la aplicación particular que se maneje, es decir, provee una forma novedosa de abordar la construcción de *wavelets* biortogonales, lo cual permite un diseño personalizado de las familias *wavelet* [16].



En la construcción de una familia *wavelet* típicamente se hace necesario satisfacer simultáneamente dos grupos de restricciones, en primer lugar, las relaciones de biortogonalidad y en segunda instancia otros condicionamientos como la regularidad⁴, momentos de desvanecimiento⁵, localización en frecuencia y forma. El esquema *lifting* se basa en una relación sencilla entre todos los MRA que comparten la misma función *scaling*. Esto, por tanto, aísla los grados de libertad que quedan luego de fijar las relaciones de biortogonalidad. Luego se tiene total control sobre los grados de libertad restantes para satisfacer las restricciones relacionadas con momentos de desvanecimiento, localización en frecuencia y forma [19].

La idea general del esquema *lifting* es comenzar desde un MRA básico y construir a partir de este uno más eficiente, esto implica construir un MRA donde las funciones base son más suaves o las *wavelets* tienen un mayor número de momentos de desvanecimiento. En el caso de contar con filtros de base finitos, éstos seguirán siendo finitos luego de la aplicación del *lifting*.

Con el fin de analizar el esquema *lifting*, se parte desde un conjunto inicial de operadores de filtros biortogonales $\{h, \hat{h}^0, g^0, \hat{g}\}$. Posteriormente, es posible construir un nuevo conjunto de filtros biortogonales $\{h, \hat{h}, g, \hat{g}\}$ de la siguiente forma:

$$\hat{h}(f) = \hat{h}^0(f) + \hat{g}(f)\overline{\hat{S}(2f)} \quad (2.1)$$

$$\hat{g}(f) = \hat{g}^0(f) - \hat{h}(f)\hat{S}(2f), \quad (2.2)$$

donde $\hat{S}(f)$ es un polinomio trigonométrico y después de su escogencia los nuevos filtros serán automáticamente biortogonales y, por lo tanto, conducirán a una transformación invertible. Las variables \hat{h}^0 y \hat{h} corresponden, respectivamente, a los coeficientes de los filtros duales asociados a la función *scaling* dual antes y después de aplicar el esquema *lifting*. Las variables g^0 y g representan, respectivamente, los coeficientes asociados a la función *wavelet* primaria antes y después de aplicar el esquema *lifting*. La función *scaling*, $\zeta(t)$, es la misma en el MRA original y en el MRA posterior a la aplicación del esquema *lifting*, mientras que las funciones *scaling* dual $\hat{\zeta}(t)$ y *wavelets* $\varphi(t)$ y $\hat{\varphi}(t)$ cambian. Luego de aplicar el esquema *lifting*, se satisfacen las siguientes expresiones conocidas como relaciones de refinamiento:

⁴ Se dice que una función *wavelet* es regular si sus derivadas cambian de forma suave y predecible a medida que esta se escala o se traslada.

⁵ Los momentos de desvanecimiento se refieren a la capacidad de las *wavelets* para cancelar ciertos componentes de frecuencia o suavizar partes de una señal. Entre más momentos de desvanecimiento tenga una *wavelet*, mejor será su capacidad para capturar detalles finos en una señal.



$$\varphi(t) = \varphi^0(t) - \sum_k S_k \zeta(t - k). \quad (2.3)$$

$$\zeta(t) = 2 \sum_k \dot{h}_k \zeta(2t - k) + \sum_k S_{-k} \dot{\varphi}(t - k). \quad (2.4)$$

$$\dot{\varphi}(t) = 2 \sum_k \dot{g}_k \zeta(2t - k). \quad (2.5)$$

Ya que las funciones *scaling* son las mismas que en el MRA inicial, lo único que se desconoce son los coeficientes S_k , los cuales pueden escogerse a conveniencia con el fin de reforzar alguna propiedad deseada en las *wavelets*, como, por ejemplo, aumentar su número de momentos de desvanecimiento o hacer que éstas se asemejen a una forma particular.

A pesar de su similitud, las expresiones 2.3 y 2.4 son esencialmente diferentes, ya que en la expresión 2.3 las funciones *scaling* al lado derecho de la ecuación no cambian posterior a la aplicación de *lifting*, mientras que en la expresión 2.4, las funciones al lado derecho cambian luego de aplicar este esquema y no se proporciona información detallada sobre la forma en la que cambia la función *scaling* dual $\zeta(t)$ y por tanto no ofrece mucha ayuda al momento de calcular los coeficientes S_k . Por otro lado, la expresión 2.3 detalla con precisión lo que pasa con la *wavelet* $\varphi(t)$ luego de aplicar *lifting* y es por esto que se convierte en la clave para hallar los coeficientes S_k [19].

Una de las aplicaciones prácticas más útiles del esquema *lifting* se lleva a cabo con el fin de hacer más sencilla, rápida y eficiente la implementación de la FWT, dando origen de esta forma a lo que se conoce como FLWT (*Fast Lifted Wavelet Transform*). La idea básica en la implementación de la FLWT reside en no construir de forma explícita los filtros \dot{h} y \dot{g} y en su lugar trabajar con el conjunto de filtros iniciales $\{h, \dot{h}^0, g^0, \dot{g}\}$ y los coeficientes S_k , con lo cual es posible reducir el número de operaciones en comparación con el algoritmo de la FWT original. Partiendo de la ecuación 2.4 es posible expresar los coeficientes *scaling* o de aproximación obtenidos posteriormente a la aplicación de *lifting* de la siguiente forma:

$$\lambda_{j,l} = \sqrt{2} \sum_k \dot{h}_{k-2l}^0 \lambda_{j+1,k} + \sum_k S_{l-k} \gamma_{j,k} \quad (2.6)$$

La ecuación 2.6 implica que con el fin de calcular los coeficientes *scaling* $\lambda_{j,l}$ es necesario el previo cálculo de los coeficientes *wavelet* $\gamma_{j,l}$ mediante la siguiente expresión:

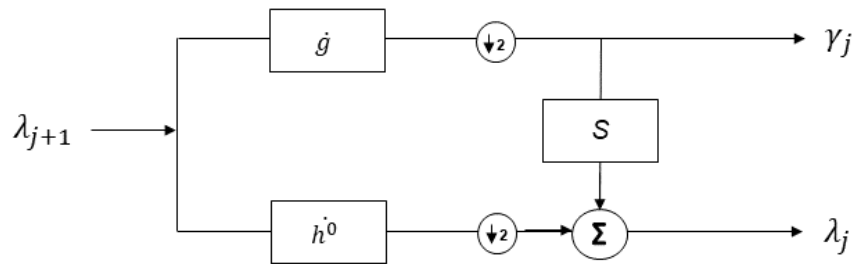


$$\gamma_{j,l} = \sqrt{2} \sum_k \dot{g}_{k-2l} \lambda_{j+1,k} \quad (2.7)$$

La implementación de la FLWT puede entonces resumirse en los siguientes pasos:

- (i) Efectuar una división de sub-banda clásica mediante el uso de los filtros \dot{h}^0 y \dot{g} .
- (ii) Aplicar el filtro S definido por los coeficientes S_k sobre los coeficientes *wavelet* o de detalle $\gamma_{j,l}$ y actualizar (levantar) los coeficientes *scaling* $\lambda_{j,l}$ o de aproximación.

En la Figura 2.1 se observa el diagrama de bloques que representa la implementación de la FLWT.



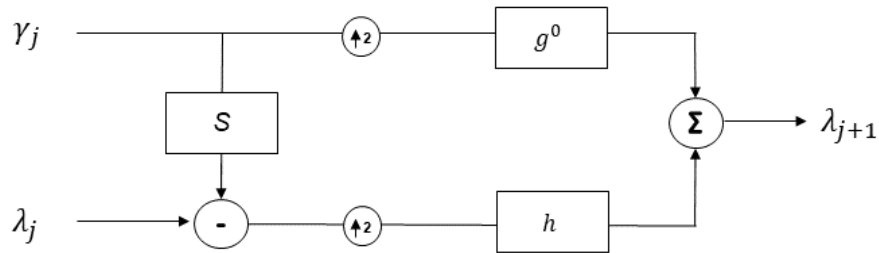
15 Figura 2.1. Esquema FLWT.

Como se observa en la Figura 2.1, la idea principal en la implementación de la FLWT es realizar primero una división de sub-banda tal como se hace en la FWT tradicional y posteriormente realizar un “levantamiento” (*lifting*) o actualización de la sub-banda baja, es decir, los coeficientes *scaling* con la ayuda de la sub-banda alta, o sea, los coeficientes *wavelet*, esto se conoce como un paso de elevación primario (*primal lifting step*).

Con el fin de realizar el proceso de transformación inverso para la FLWT, este resulta a partir de la inversión de cada paso en la transformación directa y se tiene inicialmente una etapa donde se invierte el proceso de actualización (*lifting*) y posteriormente se efectúan procesos de sobremuestreo, filtrado y combinación, lo cual es equivalente a aplicar la FWT inversa usando los filtros h y g^0 . La ecuación 2.8 es usada para el cálculo de la FLWT inversa. El esquema que representa la FLWT inversa puede verse en la Figura 2.2.



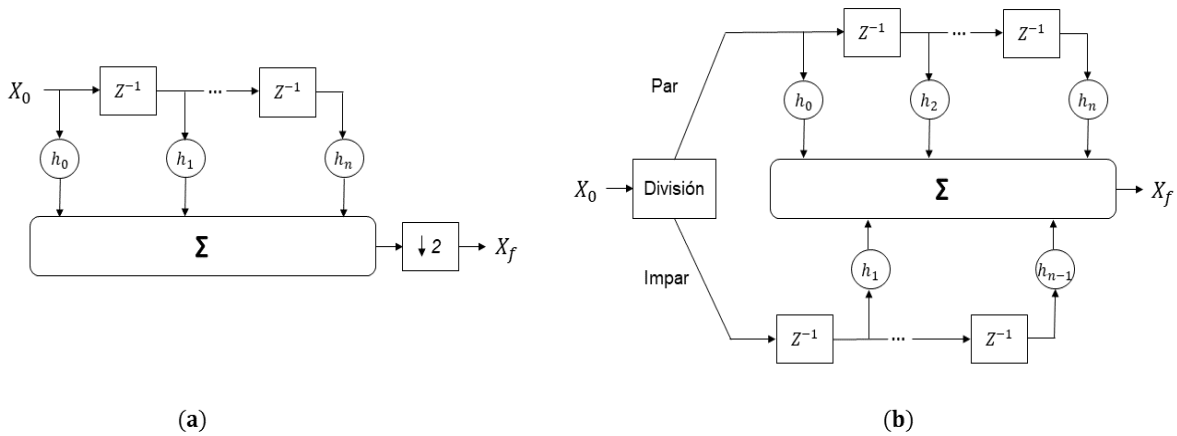
$$\lambda_{j+1,k} = \sqrt{2} \sum_l h_{k-2l} (\lambda_{j,l} - \sum_m S_{l-m} \gamma_{j,m}) + \sqrt{2} \sum_l g^0_{k-2l} \gamma_{j,l} \quad (2.8)$$



16Figura 2.2. Esquema FLWT inverso.

Anteriormente se ha descrito la forma en cómo es posible actualizar la sub-banda baja con ayuda de la sub-banda alta, sin embargo, es posible realizar el proceso contrario, lo cual equivale a actualizar los coeficientes *wavelet* con ayuda de los coeficientes *scaling*, es decir, actualizar la sub-banda alta con los coeficientes de la sub-banda baja, lo cual es conocido como paso de elevación dual (*dual lifting step*). En el caso de un paso de elevación dual, la función *scaling* dual no cambia, mientras que la función *scaling* primaria, *wavelet* primaria y *wavelet* dual cambian. El *lifting* dual puede usarse para mejorar las propiedades de la *wavelet* dual o de forma equivalente, las propiedades de la función *scaling* primaria [19]. Para el caso de un paso de elevación dual se parte de un conjunto inicial de operadores de filtros $\{h^0, \hat{h}, g, \hat{g}^0\}$ y se obtiene un nuevo conjunto $\{h, \hat{h}, g, \hat{g}\}$. El polinomio trigonométrico involucrado en las operaciones de un paso de elevación dual es denotado como $\hat{S}(f)$.

En la Figura 2.1 se observa que inicialmente se implementa un proceso de filtrado y posteriormente un submuestreo sobre la señal de entrada, con lo cual se descarta la mitad de las muestras filtradas y sólo se conservan aquellas muestras con índice par. La implementación del esquema *lifting* propende por solventar esta inconveniencia efectuando el proceso de submuestreo antes del filtrado con el fin de hacer un cálculo de la WT de forma más eficiente al ahorrar tiempo de procesamiento[21]. En la Figura 2.3 se observa el proceso de filtrado y submuestreo estándar (a) y una implementación que resulta más eficiente (b).



17Figura 2.3. (a). Filtrado y submuestreo tradicional. (b) Implementación más eficiente.

A partir de la imagen (b) en la Figura 2.3, es posible definir las muestras pares e impares de la señal de entrada X_0 como X_p y X_i respectivamente y los coeficientes de filtrado pares como h_p y coeficientes impares como h_i . Posteriormente se puede expresar la señal de salida X_f de la siguiente manera,

$$X_f = h_p X_p + z^{-1} h_i X_i. \quad (2.9)$$

En la expresión 2.9, el factor z^{-1} representa el retardo existente entre las muestras pares e impares. Si se aplica el modelo de filtrado mostrado en la imagen (b) de la Figura 2.3 sobre el esquema de la FWT clásica considerando los filtros h^0 y g es posible obtener dos ecuaciones similares a la expresión 2.9, una por cada filtro usado, de tal forma que, expresado en notación matricial, se tiene:

$$\begin{bmatrix} \lambda_j \\ \gamma_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^0_p & h^0_i \\ g_p & g_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_p \\ z^{-1} X_i \end{bmatrix} = \mathbb{M} \begin{bmatrix} X_p \\ z^{-1} X_i \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

En la expresión 2.10, \mathbb{M} se conoce como *Matriz Polifase*, término usado para describir la división de un conjunto de muestras en varios subconjuntos los cuales pueden procesarse en paralelo. Si se establecen los coeficientes h^0_i y g_p en cero y los coeficientes h^0_p y g_i en uno, la *Matriz Polifase* \mathbb{M} es una matriz unitaria o identidad y la WT resultante en ese caso se conoce como Transformada *Wavelet* "Perezosa" (LWT, *Lazy Wavelet Transform*) ya que no hace más que dividir la señal de entrada en muestras pares e impares y es por esto que es de gran ayuda para el procesamiento rápido y con baja carga computacional de la WT mediante el esquema *lifting*.

Hasta el momento se han expuesto los conceptos básicos que definen la teoría de los esquemas *lifting*, conceptos como FLWT, paso de elevación primario, paso de elevación dual y LWT son claves al momento de comprender el esquema *lifting* generalizado, el cual se compone por tres etapas, que son, primero, una etapa



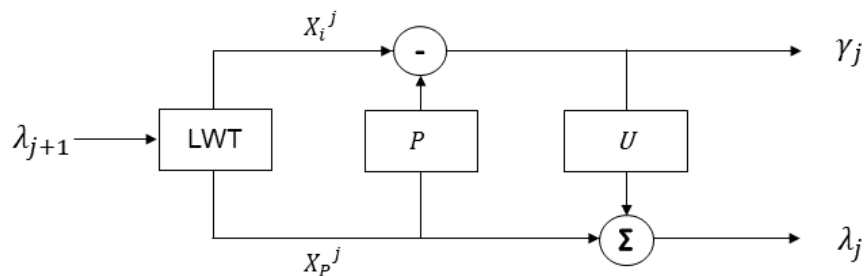
de división de la señal de entrada en dos conjuntos disjuntos de muestras, donde un grupo consiste en las muestras pares y el otro se compone de las muestras impares y como fue expuesto anteriormente, esto se logra por medio de la implementación de la LWT, con lo cual esta se convierte en la primera operación efectuada en el esquema *lifting*, obteniendo el conjunto de muestras pares X_p y el conjunto de muestras impares X_i . Posteriormente, se tiene en cuenta que las señales suelen tener una estructura de correlación local, es decir, las muestras contiguas suelen estar altamente correlacionadas, con lo que se hace posible, dado un conjunto de muestras, predecir el otro con precisión, por lo que, en la segunda etapa del esquema *lifting* se efectúa una predicción del conjunto de muestras impar a partir del conjunto par, lo que es equivalente a implementar un paso de elevación dual el cual se conoce también como paso de predicción[22]. Los coeficientes de detalle son calculados a partir de la diferencia entre las muestras impares y su predicción, entonces puede definirse un operador de predicción P tal que,

$$\gamma_j = X_i^j - P(X_p^j). \quad (2.11)$$

Para el tercer paso del esquema *lifting* generalizado, se efectúa una actualización de los coeficientes de aproximación a partir de los coeficientes de detalle, lo cual corresponde a un paso de elevación primario, también conocido como paso de actualización. Se define el operador de actualización U , así,

$$\lambda_j = X_p^j + U(\gamma_j). \quad (2.12)$$

Una de las propiedades más útiles del esquema *lifting* es el hecho de poder realizar su implementación *in-situ*, es decir, se pueden sobrescribir las muestras pares con los coeficientes de aproximación y las muestras impares con los coeficientes de detalle calculados, en otras palabras, las localizaciones de memoria de la información original pueden ser sobrescritas con los coeficientes *wavelet* y *scaling* calculados sin la necesidad de requerirse memoria adicional. La figura 2.4 muestra el esquema *lifting* generalizado, el cual es la base para las aplicaciones que se llevarán a cabo en el presente trabajo de grado. Cabe aclarar que el esquema *lifting* generalizado puede consistir en más de una secuencia alternada de pasos de elevación primarios y duales posteriores a una etapa de división de la señal, es decir, luego de un paso de actualización, puede seguir un nuevo paso de predicción[23].



18Figura 2.4. Esquema *lifting* generalizado (tradicional).



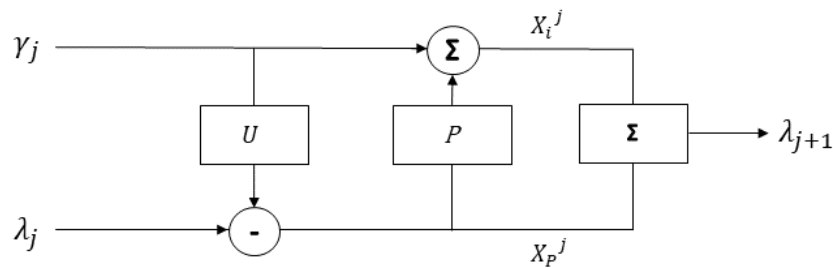
Luego de haber definido el esquema *lifting* en su forma directa, es posible introducir su forma inversa de manera sencilla, ya que esta puede hallarse simplemente invirtiendo los signos y el orden de las operaciones realizadas en la transformación directa, por lo que también se tendrán tres etapas en el esquema *lifting* inverso, las cuales son, primero, realizar la inversión del paso de actualización, donde dados los coeficientes λ_j y γ_j es posible recuperar las muestras pares sustrayendo la información de actualización, esto se describe en la expresión 2.13.

$$X_p^j = \lambda_j - U(\gamma_j). \quad (2.13)$$

Posteriormente se realiza un paso de predicción inverso, donde se recuperan las muestras impares agregando la información de predicción tal como se describe en la ecuación 2.14.

$$X_i^j = \gamma_j + P(X_p^j). \quad (2.14)$$

Luego de haber recuperado las muestras pares e impares, el último paso consiste en unirlos, lo que equivale a calcular la LWT inversa con el fin de recuperar la señal original. En la Figura 2.5 se detalla el esquema *lifting* inverso.



19Figura 2.5. Esquema *lifting* inverso.

2.3. VARIANTES DE LOS ESQUEMAS LIFTING

Hasta el momento se ha presentado la forma generalizada del esquema *lifting*, la cual es la base para la mayoría de sus aplicaciones; sin embargo, con el objetivo de realizar mejoras en su desempeño, han sido propuestas algunas variantes sobre el esquema tradicional que propenden por un diseño de *wavelets* más precisas y eficientes.

El esquema *lifting* generalizado o tradicional, mediante el cual es posible construir bases que utilizan funciones *scaling* y *wavelets* suaves, puede verse como una configuración en dos pasos u operaciones, predecir y actualizar ($P-U$). Los operadores de predicción amplios, es decir, aquellos que son capaces de predecir polinomios de altos grados corresponden a funciones base más suaves y, por lo tanto, trabajan de manera óptima cuando la señal bajo estudio también es suave. No obstante, la mayoría de las imágenes consisten en regiones de suavidad y



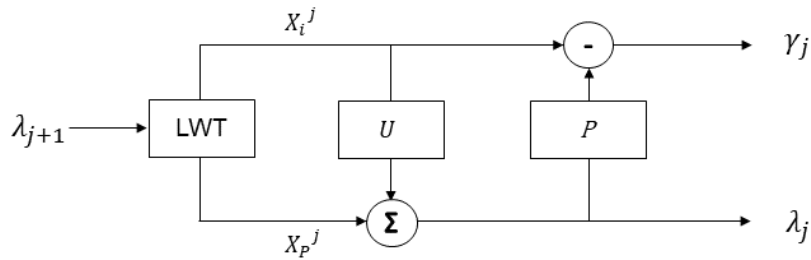
textura separadas por discontinuidades conocidas como bordes (*edges*). Aquellas discontinuidades no pueden ser eficientemente representadas por medio de funciones base suaves debido a que los operadores de predicción presentan falencias cerca de los bordes, cuando la discontinuidad se encuentra dentro de los datos que son utilizados para efectuar la predicción [24].

La mayoría de las propuestas que buscan mejorar el esquema *lifting* generalizado se enfocan en adaptar su aplicación en dos dimensiones, específicamente en imágenes. Estas propuestas se centran especialmente en la optimización de los operadores de actualización, U , y de predicción, P . Es importante señalar que el interés principal se encuentra en mejorar el operador de predicción. Lo anterior conlleva al surgimiento del denominado esquema *lifting adaptativo*.

El principal objetivo de los trabajos centrados en la optimización del operador de predicción P ha sido introducir un mecanismo que haga posible su selección con base a las propiedades locales de la imagen bajo análisis. Esta variación causa que el operador de predicción sea dependiente de los datos de entrada y, por lo tanto, se convierta en no lineal difiriendo del esquema *lifting* tradicional. En zonas localmente suaves de las imágenes es posible usar operadores de predicción de orden superior, mientras que cerca de los bordes se adapta y disminuye su longitud y por tanto también su orden [24].

Tal como se muestra en el esquema de la Figura 2.4, la representación de aproximación de la señal o imagen de entrada depende tanto del operador P como de U , por lo que después de una primera iteración $P-U$ todas las predicciones posteriores estarán basadas en coeficientes actualizados, por lo que se hace necesario prestar atención a la estructura del operador de actualización U para asegurar que se conserve la propiedad de localización en frecuencia cuando se realizan predicciones con base a un operador P no lineal.

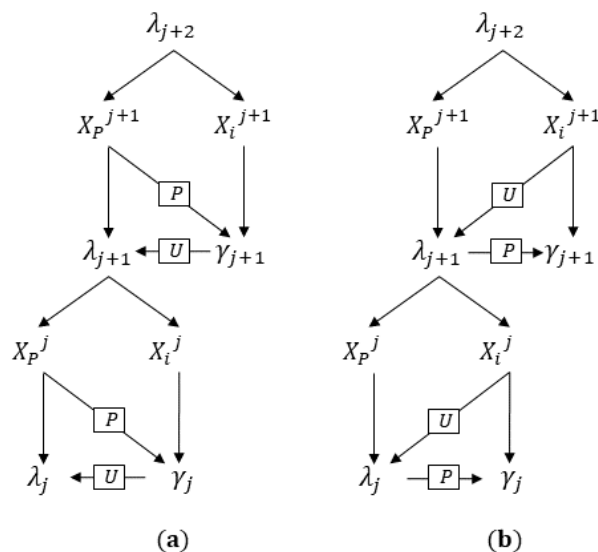
La señal de aproximación obtenida mediante la descomposición con el esquema *lifting* tradicional es función de la señal de detalle, la cual a su vez depende de qué filtros han sido usados para efectuar el proceso de predicción, por esta causa, en aplicaciones de *lifting* no es posible obtener los valores de la señal par, X_p^j , hasta que se seleccione un predictor y no puede seleccionarse un predictor sin obtener previamente los coeficientes pares, por lo que se propone una solución para evitar problemas relacionados a la estabilidad de *lifting*, la cual consiste en implementar un paso de predicción no lineal e intercambiar el orden de los pasos de predicción y actualización dando origen al esquema *lifting* de actualización primero (*Update-First*), lo que equivale a una secuencia en dos pasos, actualizar-predicir ($U-P$). El esquema descrito se muestra en la Figura 2.6 [24].



20 Figura 2.6. Esquema *lifting* de actualización primero (*Update-First*).

Al implementar el esquema propuesto en la Figura 2.6, primero se actualizan las muestras pares con base en las muestras impares generando así los coeficientes de aproximación. Posteriormente, se reusan los coeficientes de aproximación para predecir las muestras impares y con éstas calcular los coeficientes de detalle. La razón de efectuar primero la actualización es que de esta manera todos los coeficientes de aproximación a lo largo de una implementación en cascada o piramidal dependen linealmente de los datos y no se ven afectados por la naturaleza del predictor [24].

En la Figura 2.7 se pueden observar los diagramas de árbol para los esquemas *lifting* tradicional y de actualización primero (*Update-First*). El diagrama de árbol de la izquierda muestra que en el esquema *lifting* generalizado o tradicional no es posible crear los coeficientes de aproximación sin hacer uso en primera instancia del operador de predicción para crear los coeficientes de detalle. Por el contrario, en el diagrama correspondiente al esquema *lifting* de actualización-primero (*Update-First*) se observa que los operadores de predicción no están dentro del bucle y de esta manera la predicción sólo se basa en los coeficientes de aproximación, que se calculan de la misma manera que en la WT clásica.



21 Figura 2.7. Diagrama de árbol a) Esquema *lifting* generalizado b) Esquema *lifting* de actualización primero (*Update-First*).



2.4. TRANSFORMADA WAVELET ENTERA

En múltiples aplicaciones de la transformada *wavelet* donde la información de entrada consiste en secuencias de números enteros, las salidas filtradas resultantes estarán compuestas por coeficientes de punto flotante y en muchos casos, especialmente en el procesamiento de imágenes, se hace necesario tener la posibilidad de caracterizar la salida completamente con enteros nuevamente.

Se sabe que cualquier transformada *wavelet* puede ser obtenida mediante el cálculo de la LWT seguida por un número finito de pasos de elevación duales y primarios y, dado que es posible representar cualquier WT usando *lifting*, por consiguiente, si en cada paso de elevación se aplica un operador de redondeo Q sobre la salida del filtro justo antes de sumar o sustraer se tendrá como resultado lo que se denomina Transformada Wavelet Entera (IWT, *Integer Wavelet transform*), conservando su característica de invertibilidad al revertir las operaciones y signos. Cabe aclarar que la IWT no implica necesariamente aritmética de números enteros en el cálculo de la transformación, ya que los filtros del esquema *lifting* pueden usar aritmética de punto flotante; sin embargo, se garantiza una salida entera gracias al proceso de redondeo [25].

La versión más antigua de la transformada *wavelet* de entero a entero se conoce como la transformada S, la cual es una versión entera de la transformación de Haar, a la que posteriormente se le agregó un proceso de predicción lineal sobre los coeficientes de aproximación para de esta forma generar un nuevo conjunto de coeficientes de detalle luego de una transformación S, ésta se conoce como la transformada S + P[5].

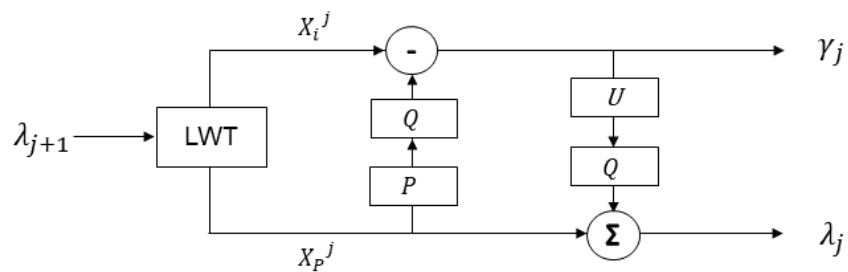
La implementación de la IWT implica una serie de ventajas y desventajas que deben tenerse en cuenta. Dentro de las ventajas se tiene que es más rápida que la WT basada en aritmética de punto flotante ya que ésta efectúa el tratamiento de datos de mayor longitud que los procesados mediante la IWT. Otro beneficio importante de la IWT es que garantiza la invertibilidad y las señales o imágenes tratadas pueden ser reconstruidas sin pérdidas, ya que todos los coeficientes son enteros y pueden ser almacenados sin errores de redondeo. El principal inconveniente de la IWT es la no linealidad introducida por los operadores de redondeo, lo cual puede llegar a deteriorar ciertas propiedades deseables de los filtros y además de esto hace a la aplicación en dos dimensiones pseudo no separable, ya que el resultado de una transformación en dos dimensiones depende del orden de la descomposición de filas y columnas, esto significa que el orden con el que se efectúa la descomposición de una imagen es un factor clave a ser considerado, a diferencia del caso separable, donde el orden en que se aplican las transformaciones a lo largo de las filas y las columnas no es un factor relevante [26].

La IWT se hace relevante principalmente gracias a sus importantes aplicaciones en la compresión de imágenes sin pérdidas, especialmente en campos donde se requiere el tratamiento de imágenes de alta fidelidad y se buscan métodos



que puedan soportar el almacenamiento y transmisión de imágenes de manera fidedigna y adaptable a las diferentes necesidades de los usuarios finales, tal como es el caso del procesamiento de imágenes médicas y la telemedicina.

Hacer uso de la IWT permite obtener la representación sin pérdida de los píxeles de las imágenes a tratar y posibilita la transmisión progresiva de las mismas, es decir, la transmisión de versiones de menor resolución primero, seguidas por transmisiones de detalles sucesivos, lo cual es de gran relevancia cuando se tienen escenarios con ancho de banda limitado, grandes tamaños de imagen y la compresión con pérdidas considerables no es deseable [25]. La Figura 2.8 muestra el diagrama de la IWT construida a partir del esquema *lifting*.



22Figura 2.8. Esquema *lifting* IWT.



CAPÍTULO 3: DISEÑO

En este capítulo se lleva a cabo el diseño del sistema propuesto para la compresión de imágenes médicas diagnósticas, se plantea la metodología a implementar, los requerimientos y los parámetros de desempeño a ser empleados para medir el rendimiento de éste.

3.1. METODOLOGÍA

Para el desarrollo del presente trabajo de grado se utilizó la Metodología en V, que está basada en la conocida Metodología en Cascada pero que soluciona algunos de los problemas observados en ésta, es un enfoque metodológico donde se efectúa un desarrollo constante del objetivo propuesto mediante el seguimiento de etapas ordenadas de forma secuencial con la inclusión de mejoras que permiten encontrar de forma temprana los defectos o errores dentro del desarrollo del proyecto al incluir una etapa de pruebas y validaciones [26].

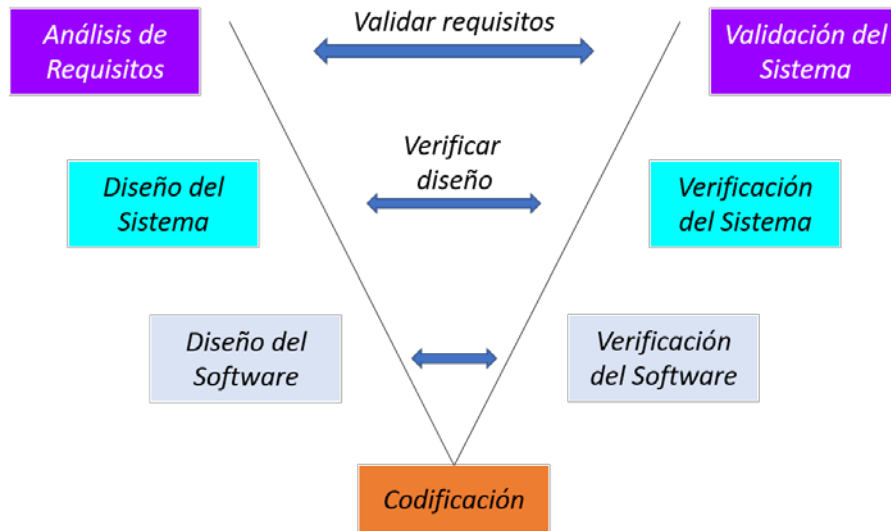
Se aplica la metodología en V en el presente trabajo de grado con el principal objetivo de mejorar el control sobre la ejecución del proyecto y permitir una detección temprana de las desviaciones y riesgos y mejorar la gestión del proceso de desarrollo. Esta metodología también permite garantizar la calidad, al asegurar que los resultados obtenidos sean acordes a los requerimientos establecidos.

Al inicio del proyecto el modelo en V contempla un análisis de las especificaciones y la definición de los requisitos funcionales y no funcionales del sistema, posteriormente en la etapa de diseño del sistema se planifican las componentes y las interfaces de éste. Más adelante, en la fase de implementación se procede con el desarrollo práctico del sistema previamente diseñado. En la etapa final, que es una fase de integración y pruebas se llevan a cabo los procesos de verificación y validación, donde se realiza un control de calidad, se identifican posibles fallos y se determina la etapa donde se han producido, para de esta manera realizar correcciones que garanticen la calidad del sistema final. El desarrollo de las etapas de esta metodología se hace de forma secuencial, retornando, de ser necesario, a la etapa específica donde se han detectado defectos o errores con el fin de corregirlos [26].

El modelo en V establece que las pruebas han de empezarse lo más pronto posible en el ciclo de vida y que éstas no se basan solamente en la ejecución, sino que existen varias actividades a realizar antes de finalizar la fase de codificación. Este enfoque ilustra cómo las actividades de prueba (verificación y validación) pueden ser integradas en cada fase del ciclo de vida. Dentro de las ventajas del enfoque en V cabe destacar que las pruebas de validación tienen lugar especialmente durante las etapas tempranas, es un modelo de implementación sencilla y con alta oportunidad de éxito debido al desarrollo de planes de prueba y



suele funcionar de manera óptima en proyectos con requerimientos bien definidos [26]. En la Figura 3.1 se observa el diagrama del ciclo de vida para el modelo en V.



23Figura 3.1. Modelo de ciclo de vida en V.

El lado izquierdo del modelo del ciclo de vida en V representa la descomposición de los requisitos y la creación de las especificaciones del sistema, mientras que el lado derecho representa la integración de partes y su verificación. En general el modelo en V puede resumirse en “Validación y Verificación” [26].

3.2. REQUERIMIENTOS

El sistema por implementar debe cumplir con los siguientes requerimientos funcionales, los cuales son acordes a los objetivos planteados en el presente trabajo de grado:

1. Debe ser un sistema capaz de procesar imágenes médicas que cumplan con el formato de Imágenes Digitales y Comunicación en Medicina (DICOM, *Digital Imaging and Communication in Medicine*).
2. El sistema debe contar con una etapa de transformación de las imágenes DICOM de entrada desde el dominio espacial al dominio *wavelet* aplicando la IWT mediante el esquema *lifting*.
3. Se debe implementar diferentes métodos robustos de compresión con y sin pérdidas los cuales garanticen una representación detallada de las imágenes a procesar.
4. El sistema ha de efectuar la recuperación de las imágenes médicas comprimidas, conservando su resolución y calidad para su visualización y análisis.



5. El sistema debe proporcionar métricas y herramientas para evaluar la eficiencia de la compresión de las imágenes médicas procesadas y medir su desempeño en general.

3.3. ANÁLISIS Y DISEÑO DEL SISTEMA

3.3.1. Selección de la plataforma de desarrollo

Con el fin de desarrollar el sistema de procesamiento de imágenes médicas descrito en el presente trabajo de grado, se requiere una plataforma que ofrezca una amplia gama de herramientas y funciones para implementar la transformada *wavelet* y algoritmos de compresión relacionados con la codificación de fuente. Adicionalmente, se busca que proporcione una interfaz intuitiva y sencilla de usar y asimismo que sea de uso libre o se cuente con una licencia para su utilización.

Teniendo en cuenta los anteriores criterios y contando con experiencia previa en su manejo, MATLAB ha sido elegida como la plataforma de desarrollo para este trabajo de grado debido a su flexibilidad y capacidad de programación. Al tratarse de un lenguaje de alto nivel, se adapta a la implementación de algoritmos de compresión aplicados a imágenes médicas diagnósticas y proporciona una amplia gama de funciones y estructuras de datos que facilitan la implementación de algoritmos complejos, permitiendo un desarrollo eficiente, además de esto, se cuenta con una licencia educativa adquirida por la Universidad del Cauca para hacer uso de la plataforma y sus extensiones, denominadas *Toolbox*, sin incurrir en un coste adicional.

En el ámbito específico del procesamiento de imágenes y señales, MATLAB ofrece un conjunto de herramientas y funciones integradas que resultan indispensables para este trabajo de grado. Extensiones como *Image Processing Toolbox* y *Wavelet Toolbox* proveen funciones y algoritmos predefinidos para el procesamiento de imágenes y el manejo de la transformada *wavelet*. Asimismo, la inclusión del *Communications Toolbox* puede ser beneficioso para el procesamiento de señales y la compresión de datos en el contexto de imágenes médicas diagnósticas.

Con el fin de implementar el sistema de procesamiento de imágenes médicas propuesto en el presente trabajo de grado, en primer lugar, se debe preparar los datos, cargando las imágenes médicas diagnósticas de prueba obtenidas y realizando la descomposición *wavelet* mediante el esquema *Lifting* utilizando las funciones proporcionadas por el *Wavelet Toolbox* de MATLAB. Luego, se procede a implementar los métodos de codificación seleccionados, desarrollando el código necesario para su aplicación sobre los coeficientes *wavelet* obtenidos en el paso anterior. A través de estos pasos, se logra la implementación del trabajo de grado, aprovechando las ventajas y herramientas que MATLAB ofrece para el procesamiento y compresión de imágenes médicas diagnósticas.



3.3.2. Caracterización de las familias *wavelet*

Como paso previo al diseño del sistema y con el fin de realizar una correcta interpretación de los resultados que sean obtenidos en las pruebas a realizar, se hace necesaria la caracterización de las familias *wavelet* a ser usadas para construir los esquemas *lifting* de prueba. Esto permite evaluar y comparar las propiedades de diferentes familias *wavelet*, con la finalidad de facilitar la selección de las familias más adecuadas para el proceso de compresión de imágenes médicas diagnósticas.

La caracterización es de ayuda para entender cómo cada familia *wavelet* se comporta en términos de preservación de detalles, rendimiento del método de compresión y calidad de la imagen recuperada; proporcionando una base para comparar y analizar las diferentes familias *wavelet* en términos de su respuesta en la descomposición e idoneidad para la compresión de las imágenes médicas de prueba. Además, la caracterización permite comprender cómo los cambios en los parámetros de las *wavelets* pueden afectar el rendimiento del sistema propuesto, respaldando así el análisis de resultados y las conclusiones de este trabajo de grado. A continuación, se exponen las principales características y propiedades de las *wavelets*.

- **Momentos de desvanecimiento:** El concepto de momentos de desvanecimiento es importante al crear funciones *wavelet*. Para implementaciones de la FWT, la señal de entrada se divide en dos partes, donde una parte es analizada mediante la función *scaling* y la otra parte mediante la función *wavelet*. Si la señal de entrada es ortogonal a la función *wavelet*, i.e. $\int x(t)\varphi(t) dt = 0$, entonces toda la señal estará representada por la función *scaling*, lo cual no impide que se realice una reconstrucción perfecta, siendo esto de gran importancia para aplicaciones como la compresión. Por lo anterior, una medida de la calidad de la función *wavelet* es con respecto a cuantas funciones esta es ortogonal [27]. Desde el punto de vista de la forma de las *wavelets* cabe notar que, al incrementar el número de momentos de desvanecimiento, estas funciones se vuelven más suaves, aumentando su capacidad para detectar detalles más finos y complejos en la información bajo análisis.

Una *wavelet* con N momentos de desvanecimiento cumple que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{\delta} \varphi(t) dt = 0; \quad 0 \leq \delta \leq N - 1. \quad (3.1)$$

Si la función *wavelet*, $\varphi(t)$, tiene un cierto número de momentos de desvanecimiento, entonces es posible usar versiones discretamente desplazadas de la función *scaling* para reconstruir todos los polinomios que son ortogonales a la función *wavelet*, $\varphi(t)$ [27].



- **Tamaño del soporte:** Otra importante característica es el soporte compacto, el cual se refiere a la región en el dominio del tiempo donde la *wavelet* tiene un valor distinto de cero. El tamaño del soporte, el cual está directamente relacionado con el número de momentos de desvanecimiento, es de interés al caracterizar una *wavelet* ya que para N momentos de desvanecimiento, se tendrá un tamaño de soporte de $2N - 1$ [28].
- **Regularidad:** Esta propiedad representa la suavidad de una *wavelet*, es una medida de cómo ésta cambia o varía a medida que se desplaza en el tiempo. Esta propiedad es de importancia cuando se desea determinar la capacidad que tiene una *wavelet* para analizar diferentes características de una señal, ya que, a mayor regularidad, más suave y precisa será la representación de las señales analizadas, facilitando así la detección de características sutiles [28].
- **Simetría:** Esta propiedad se refiere a la simetría de las *wavelets* en su forma o perfil en el dominio del tiempo con respecto a un eje central. Si se ve una función *wavelet* como un filtro, entonces, si ésta es simétrica se puede decir que tiene fase lineal, de lo contrario, se introduce distorsión en la fase. Esta propiedad es de interés para aplicaciones de audio e imágenes [28].
- **Función *scaling*:** Se trata de una función ortogonal a la *wavelet* que junto con ésta constituyen una base ortonormal del espacio. Para aplicaciones de la DWT, es necesario que la *wavelet* madre seleccionada cuente con una función *scaling* definida [28].
- **Longitud del filtro:** Esta propiedad se refiere al número de coeficientes utilizados para describir la *wavelet*, se puede entender como la longitud o tamaño del filtro utilizado en la operación de convolución que la define [28].

Mediante el uso del *Wavelet Toolbox* de MATLAB es posible implementar el esquema *lifting*, el cual puede ser construido a partir de las familias *wavelet* mostradas en la Tabla 3.1.



Tabla 3.1. Familias *wavelet* disponibles.

Familia <i>wavelet</i>	<i>Wavelet</i>
Daubechies	'haar', 'db1', 'db2', 'db3', 'db4', 'db5', 'db6', 'db7' y 'db8'
Symlet	'sym2', 'sym3', 'sym4', 'sym5', 'sym6', 'sym7' y 'sym8'
Cohen-Daubechies-Feauveau	'cdf1.1', 'cdf1.3', 'cdf1.5', 'cdf2.2', 'cdf2.4', 'cdf2.4', 'cdf2.6', 'cdf3.1', 'cdf3.3', 'cdf3.5', 'cdf4.2', 'cdf4.4', 'cdf4.6', 'cdf5.1', 'cdf5.3', 'cdf5.5', 'cdf6.2', 'cdf6.4' y 'cdf6.6'
Coiflet	'coif1' y 'coif2'
Biorthogonal	'bior1.1', 'bior1.3', 'bio1.5', 'bior2.2', 'bior2.4', 'bior2.6', 'bior2.8', 'bior3.1', 'bior3.3', 'bior3.5', 'bior3.7', 'bior3.9', 'bior4.4', 'bior5.5', 'bior6.8', 'bs3' y '9.7'
Reverse Biorthogonal	'rbs3', 'r9.7', 'rbio1.1', 'rbio1.3', 'rbio1.5', 'rbio2.2', 'rbio2.4', 'rbio2.6', 'rbio2.6', 'rbio2.8', 'rbio3.1', 'rbio3.3', 'rbio3.5', 'rbio3.7', 'rbio3.9', 'rbio4.4', 'rbio5.5' y 'rbio6.8'

Debido a su extensa implementación en el procesamiento de imágenes y la amplia documentación existente, se han escogido las familias *Daubechies*, *Symlet*, *Coiflet* y *Biorthogonal* para construir los diferentes esquemas *lifting* que serán implementados y probados en el presente trabajo de grado. A continuación, se exponen las características más importantes de cada una de las cuatro familias *wavelet* seleccionadas.

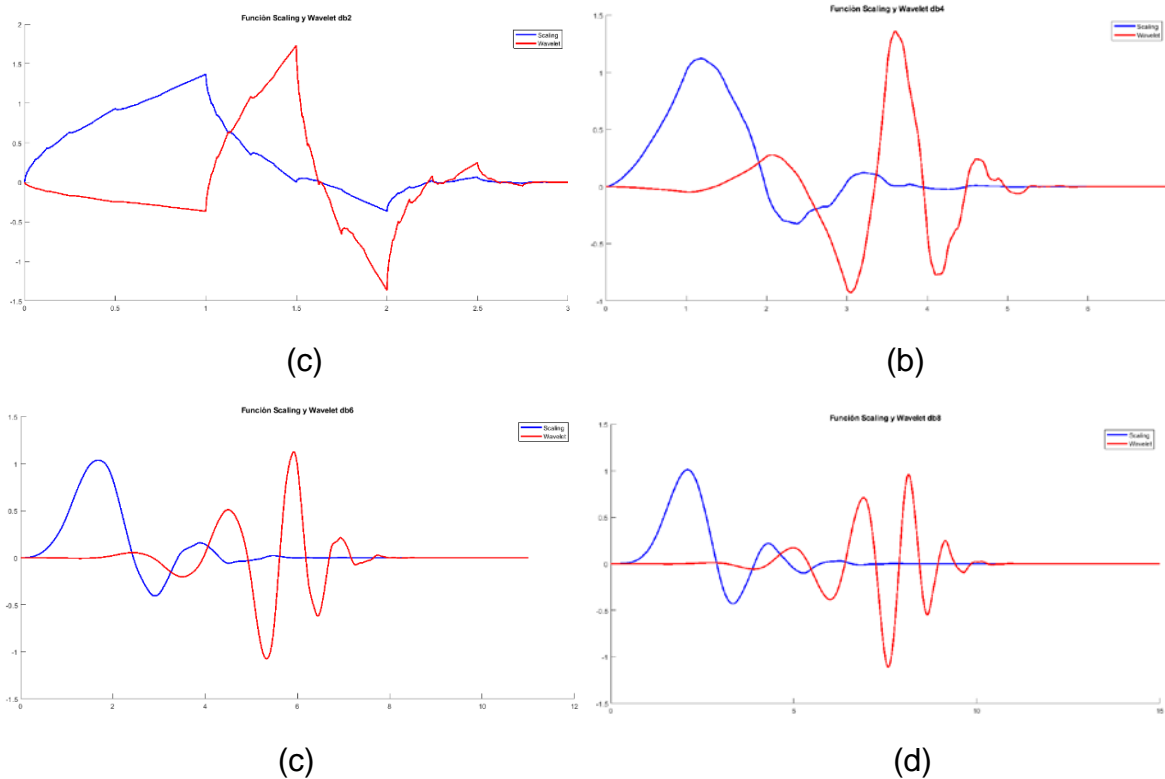
1. *Daubechies*

La matemática belga Ingrid Daubechies, definió lo que son las llamadas *wavelets* ortonormales con soporte compacto, las cuales han hecho el análisis *wavelet* discreto más atractivo y aplicable. Las *wavelets* de *Daubechies* no pueden explicarse mediante una expresión matemática cerrada. Fundamentalmente, una función *scaling* es derivada al iterar una ecuación con $2N$ coeficientes, y es a partir de esta función *scaling* de donde se deriva la función *wavelet*, de igual manera con $2N$ coeficientes. Los nombres de las *wavelets* de la familia *Daubechies* se escriben de la forma *dbN*, donde la letra *N* representa el orden de la *wavelet*, es decir, el número de momentos de desvanecimiento para cada una en particular. En general,



N puede ser un entero entre 1 y 45 [29], aunque con el esquema *lifting* sólo se puede trabar con valores de N entre 1 y 8.

Las *wavelets* de *Daubechies* son ortogonales, biortogonales, pero no son simétricas y su regularidad aumenta conforme mayor es su orden. Su soporte compacto, es decir, el rango sobre el cual son diferentes de cero es $[0, 2N - 1]$. En la Figura 3.2 se observan las *wavelets* $db2$, $db4$, $db6$ y $db8$ (en color rojo) junto con sus correspondientes funciones *scaling* (en color azul).



24Figura 3.2. *Wavelets* a) $db2$; b) $db4$; c) $db6$; d) $db8$ (en color rojo) y sus funciones *scaling* (en color azul).

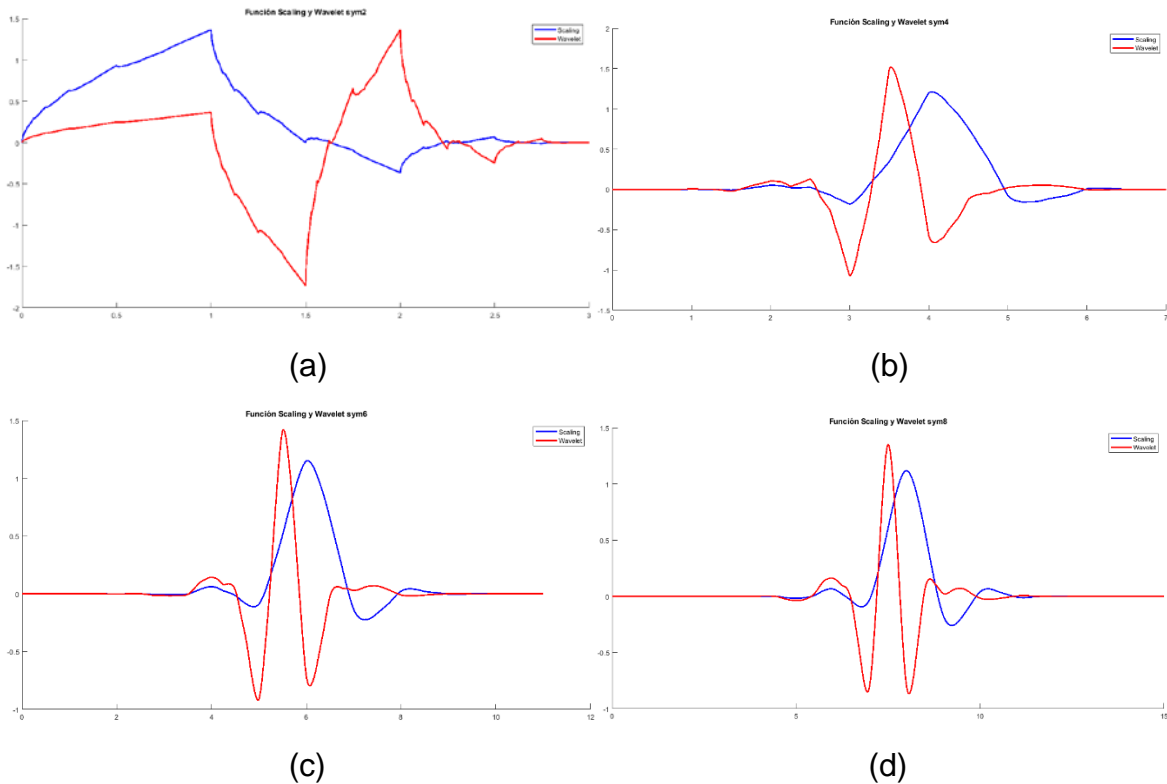
Las famosas *wavelets* de Haar son de hecho parte de la familia *Daubechies*. La *wavelet* de Haar equivale a la *wavelet* de *Daubechies* de primer orden, $db1$. Ya que la *wavelet* de Haar tiene orden $N = 1$, tendrá un momento de desvanecimiento, adicionalmente es una *wavelet* no regular con soporte compacto de rango $[0,1]$, ortogonal, con longitud de filtro $L = 2$, simétrica y con una función *scaling* definida [29].

2. *Symlet*

Las *wavelets* de la familia *Symlet*, abreviada *sym*, fueron igualmente propuestas por Ingrid Daubechies como una modificación a la familia *Daubechies*, por lo que presentan propiedades muy similares a estas, la principal diferencia entre



las *wavelets* de la familia *db* y las *sym* radica en su simetría, ya que las *Symlets* presentan una simetría aproximada, lo cual ayuda a reducir la distorsión de fase en el proceso de descomposición y reconstrucción de señales [30]. Las demás propiedades de las *wavelets* de la familia *Symlet* son iguales a las expuestas anteriormente para la familia *Daubechies*. En la Figura 3.3 se observan las *wavelets* (color rojo) *sym2*, *sym4*, *sym6* y *sym8* junto con sus respectivas funciones *scaling* (color azul).



25Figura 3.3. *Wavelets* a) *sym2*; b) *sym4*; c) *sym6*; d) *sym8* (en color rojo) y sus funciones *scaling* (en color azul).

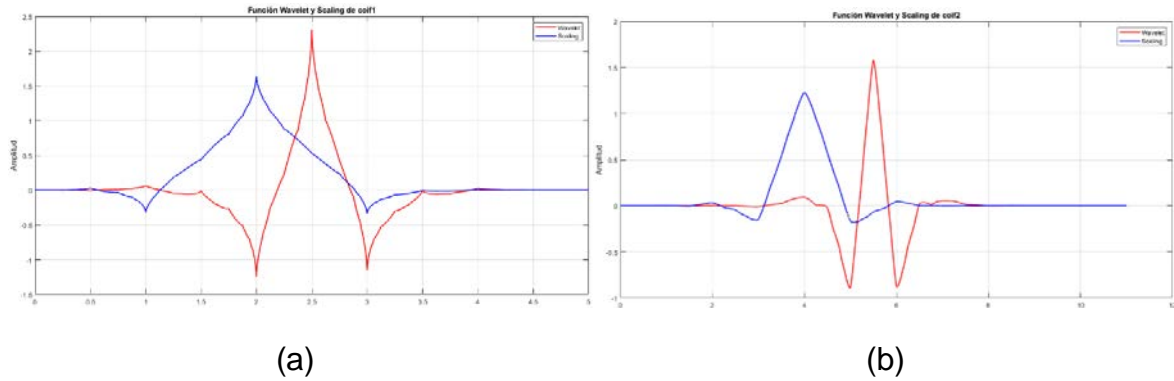
3. *Coiflet*

Las *wavelets* de la familia *Coiflet*, abreviadas *coif*, fueron también diseñadas por la matemática Ingrid Daubechies a petición del matemático Ronald Coifman, en honor a quien estas *wavelets* toman su nombre. Las *Coiflet* de orden N , tienen $2N$ momentos de desvanecimiento. En la práctica, es posible implementar estas familias *wavelet* hasta el quinto orden y solamente hasta el segundo orden para implementaciones mediante el esquema *lifting* [30].

Las *wavelets Coiflet* son ortogonales, biortogonales, con soporte compacto en $[0, 6N - 1]$ y presentan una simetría aproximada, aumentan su regularidad



conforme al aumento de su orden, tienen una longitud del filtro $L = 6N$ y una función *scaling* definida. En la Figura 3.4 se observan las *wavelets* *coif1* y *coif2* junto con sus respectivas funciones *scaling*.

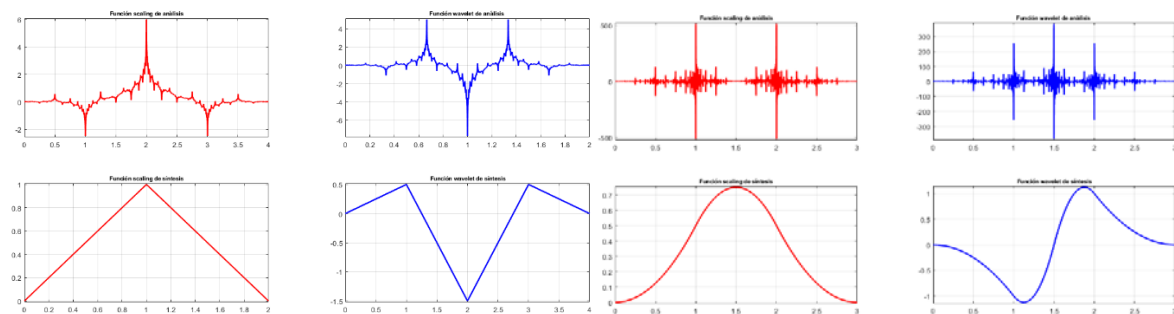


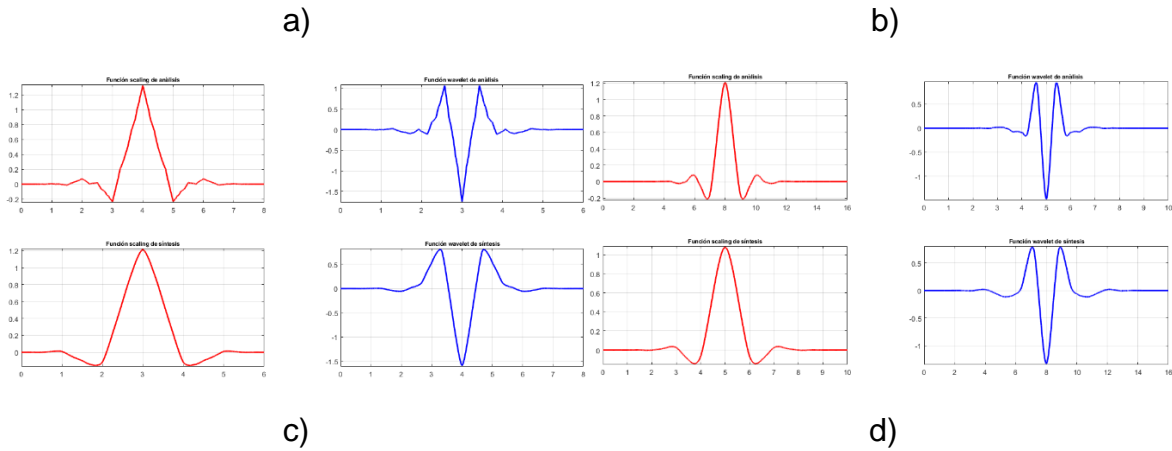
26Figura 3.4. *Wavelets* a) *coif1*; b) *coif2* (en color rojo) y sus funciones *scaling* (en color azul).

4. *Biorthogonal*

Si bien, la anteriormente mencionada *wavelet* de Haar es la única *wavelet* ortogonal con fase lineal, es posible diseñar *wavelets* biortogonales con fase lineal. Las *wavelets* de la familia *Biorthogonal*, abreviada *bior*, cuentan con un par de funciones *scaling* asociadas, una para análisis y otra para síntesis. De igual manera, cuentan con un par de funciones *wavelet* asociadas, una a la descomposición (análisis) y otra a la reconstrucción (síntesis) de la señal. Las *wavelets* de análisis y síntesis pueden tener diferentes números de momentos de desvanecimiento y propiedades de regularidad [30].

Las *wavelets* de la familia *Biorthogonal* tienen orden N_r para la síntesis y N_d para el análisis, siendo notadas como $bior_{N_r . N_d}$, son *wavelets* simétricas, biortogonales, no ortogonales, con soporte compacto de tamaño $2N_d + 1$ para el análisis y $2N_r + 1$ para síntesis. La Figura 3.5 muestra las funciones *scaling* (color rojo) y *wavelet* (color azul) de análisis y síntesis para *bior2.2*, *bior3.1*, *bior4.4* y *bior6.8*.





27Figura 3.5. Wavelets a) *bior2.2*; b) *bior3.1*; *bior4.4*; *bior6.8* (en color rojo) y sus funciones *scaling* (en color azul).

La Tabla 3.2 muestra las principales características y propiedades de las cuatro familias *wavelet* seleccionadas para la implementación del esquema *lifting* en el presente trabajo de grado.

Tabla 3.2. Características de las familias *wavelet* seleccionadas.

	Haar (haar)	Daubechies (dbN)	Symlet (symN)	Coiflet (coifN)	Biertogonal ($biorN_r \cdot N_d$)
Orden	1	$N = 1, 2, \dots, 45^6$	$N = 1, 2, \dots, 45$	$N = 1, 2, \dots, 5$	$N_r \cdot N_d = 1, 1, 1.3, \dots 6.8$
Regularidad	No	Relativa ⁷	Relativa	Relativa	Relativa
Tamaño del soporte	1	$2N - 1$	$2N - 1$	$6N - 1$	$2N_d + 1$
Longitud del filtro	2	$2N$	$2N$	$6N$	Variable ⁸
Simetría	Sí	No	Aproximada	Aproximada	Sí
Momentos de desvanecimiento	1	N	N	$2N$	N_r
Función scaling	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí

3.3.3. Selección de imágenes de prueba

Con el fin de realizar el desarrollo práctico del presente trabajo de grado, es necesario contar con un conjunto de imágenes médicas de prueba, las cuales estén

⁶ Matemáticamente existen órdenes superiores, sin embargo, se muestran aquellos disponibles en MATLAB. Los órdenes disponibles para construir el esquema *lifting* son mostrados en la Tabla 3.1.

⁷ Regularidad relativa se refiere al hecho de que esta aumenta conforme se incrementa el orden.

⁸ No existe una expresión definida, para saber el orden específico de cada *wavelet* puede usarse el comando `waveinfo('bior')` en la consola de comandos de MATLAB.



en el formato DICOM y sobre las que se apliquen los métodos implementados en el sistema diseñado y posteriormente se analice su calidad de acuerdo con ciertos parámetros de desempeño, con el fin de evaluar el rendimiento general del sistema.

Con la finalidad de obtener las imágenes médicas de prueba más adecuadas, se realizó una búsqueda de bibliotecas de imágenes DICOM gratuitas que están enfocadas en la difusión de estos archivos con el fin de hacer un aporte a la investigación, la ingeniería y la medicina. En el presente trabajo se tuvieron en cuenta dos bibliotecas de imágenes médicas gratuitas debido a su amplio contenido, calidad y diversidad, también por la sencillez en el proceso de descarga de las imágenes. La primera biblioteca utilizada se trata de la base de datos pública del Instituto Nacional de Salud (NIH, *National Institutes of Health*), que es el principal organismo perteneciente al gobierno de los Estados Unidos, responsable de la biomedicina e investigación en salud pública. Adscrito al NIH se encuentra el Instituto Nacional del Cáncer (NCI, *National Cancer Institute*), organismo encargado de administrar una aplicación de código abierto conocida como el Archivo Nacional de Imágenes Biomédicas (NBIA, *National Biomedical Imaging Archive*) donde, gracias a la aplicación *NBIA Data Retriever 4.4* es posible descargar libremente imágenes que cumplen con el estándar DICOM.

En segundo lugar, se hizo uso de la biblioteca de imágenes *DICOM Library*, que es un servicio gratuito en línea para la difusión de archivos de imágenes médicas con fines educativos y científicos. Las imágenes en el formato DICOM pueden ser descargadas por medio de la página oficial de *DICOM Library*, donde también es posible hacer la carga de imágenes que deseen compartirse y es la fuente de archivos de la biblioteca. Cabe aclarar que todas las imágenes que se obtienen de las tres fuentes mencionadas han pasado previamente por un proceso de anonimización, donde la información personal del paciente es eliminada o modificada con el fin de proteger su privacidad y cumplir con las regulaciones de confidencialidad y seguridad de datos médicos.

Existen diversos tipos de imágenes médicas disponibles dentro de las bibliotecas consultadas, siendo de gran interés para el presente trabajo, en primer lugar, las imágenes de Tomografía Computarizada (CT), obtenidas por medio de un proceso en el cual un haz estrecho de rayos X es dirigido a un paciente y es rotado alrededor de su cuerpo produciendo señales que son posteriormente procesadas para generar imágenes transversales, que pueden verse como rebanadas, que al apilarse conjuntamente son capaces de formar una imagen tridimensional (3D) del paciente, permitiendo una mejor identificación de estructuras internas, haciendo posible el diagnóstico de varias condiciones médicas. Este tipo de imágenes proporcionan una alta resolución y, al ser ampliamente usadas para el diagnóstico de diversas patologías, se cuenta con una gran cantidad de ellas en las bibliotecas DICOM consultadas.

Como segunda medida, se usaron imágenes de Resonancia Magnética (MRI), la cual se trata de una tecnología no invasiva que utiliza campos magnéticos



y ondas de radio, con el fin de producir imágenes anatómicas detalladas en tres dimensiones (3D). Este tipo de imágenes médicas proporciona un excelente contraste de tejidos blandos, lo que permite la visualización de órganos, tejidos y anomalías con gran detalle. Las MRI son uno de los tipos de imágenes más comunes y eficientes para la evaluación y diagnóstico en medicina, por lo que existen grandes cantidades de ellas disponibles para ser usadas con propósitos de investigación.

Por último, se usaron Imágenes de Ultra Sonido (US) que se trata de una técnica de diagnóstico, donde, por medio de sondas llamadas transductores, se producen ondas sonoras con frecuencias superiores al umbral de audición humana (20 KHz), aunque la mayoría de los transductores actuales operan a frecuencias más altas (en el rango de los MHz). Los transductores de US pueden también detectar los ecos ultrasónicos reflejados por los tejidos analizados y de esta forma generar imágenes en tiempo real. La mayoría de sondas de US son colocadas sobre la piel del paciente. Mediante esta técnica de diagnóstico es posible obtener imágenes de órganos internos de forma no invasiva.

3.3.4. Selección de los algoritmos de codificación

Con el fin de almacenar y realizar el envío de archivos multimedia como videos o imágenes a través de la red, se hace necesario poder representar dichos archivos de formas más eficientes de manera que se reduzca su tamaño, y que simultáneamente se conserve la calidad y fidelidad de la información original. Este es el caso de la telemedicina, donde se requiere almacenar y tratar con un gran volumen de imágenes médicas diagnósticas, las cuales usualmente se encuentran en formato DICOM y se caracterizan por su gran tamaño, por lo cual se requiere una forma eficiente de representar su información, i.e., algoritmos de compresión sin pérdidas.

Por lo anterior, se hace necesario implementar métodos de compresión que permitan realizar la representación de imágenes médicas de tal forma que no se altere su información diagnóstica original, ya que ésta es crítica en la detección de posibles anomalías y generación del dictamen médico. En el presente trabajo de grado se busca implementar métodos de compresión que garanticen la conservación de la información de las imágenes procesadas, por lo cual se realiza un estudio sobre las técnicas de compresión sin pérdidas más eficientes en la actualidad.

En [31] se realiza una revisión sobre los métodos de compresión sin pérdidas más implementados y se determina cual resulta más eficiente mediante la comparación de métricas como: tiempo de codificación y decodificación, longitud de código promedio y relación de compresión. Inicialmente, se expone el algoritmo de Codificación de Longitud de Ejecución (RLE, *Run-Length Encoding*), el cual es una técnica donde un conjunto de píxeles idénticos es representado como un valor único y un conteo que indica el número de repeticiones consecutivas; sin embargo, la idoneidad de este algoritmo está supeditada a la imagen, dado que no todas las



imágenes tienen largas secuencias de datos repetitivos, lo que se considera una de las principales limitaciones de la codificación RLE. Para abordar esta cuestión, se han propuesto técnicas de codificación de entropía con el objetivo de resolver este inconveniente.

Los algoritmos de codificación de entropía asignan palabras código de diferentes longitudes a los símbolos fuente de una imagen de entrada en función de sus probabilidades de ocurrencia. Los tres algoritmos de codificación de entropía más destacados son, la codificación Shannon-Fano, la codificación Huffman y la codificación aritmética [31].

Inicialmente, fuentes consultadas en el estudio [31] demuestran que la codificación Shannon-Fano proporciona resultados un 30.64% mejores para la compresión de imágenes, en comparación con la codificación RLE. Sin embargo, diferentes autores afirman que Shannon-Fano suele generar dos códigos diferentes para el mismo símbolo y no garantiza códigos óptimos, que son los dos problemas principales del algoritmo. Desde estas perspectivas, la codificación Shannon-Fano es una técnica ineficiente de compresión de datos. Por su parte, la codificación Huffman resuelve varios de los inconvenientes de la codificación Shannon-Fano y es una técnica que consiste en determinar los símbolos o píxeles con mayor probabilidad de ocurrencia y representarlos con palabras código más cortas, lo cual permite una representación más compacta y eficiente. Al asignar palabras código más cortas a los símbolos más comunes se logra una reducción significativa en el tamaño de los datos codificados, optimizando así el almacenamiento y la transmisión de la información. La codificación Huffman es ampliamente utilizada en la compresión de datos sin pérdidas, especialmente en aplicaciones como la compresión de imágenes y archivos de audio.

El método de codificación de entropía y sin pérdida, conocido como codificación aritmética, ofrece códigos promedio más cortos en comparación con la codificación Huffman. Se han propuesto técnicas modificadas de codificación aritmética que calculan la probabilidad precisa entre los bloques actuales y los bloques vecinos utilizando un modelo estadístico, lo cual resulta en una disminución de la tasa de bits. La codificación aritmética proporciona una mejor relación de compresión, pero puede ser lenta y además de esto puede corromper toda una imagen por un solo error de bit, debido a su baja tolerancia a errores. En comparación, la codificación Huffman ofrece una compresión ligeramente inferior, pero es más rápida, es más adecuada para la compresión dinámica y su uso no está sujeto a patentes [31].

Tanto imágenes médicas generadas por computadora como imágenes médicas reales fueron usadas en [31] para evaluar la eficiencia de los métodos de compresión anteriormente presentados. Además, se usaron métricas estándar como: tiempo de codificación, tiempo de decodificación, Longitud Promedio de Código (ACL, *Average Code Length*), relación de compresión (CR, *Compression Ratio*), eficiencia y Relación Máxima de Señal a Ruido (PSNR, *Peak Signal-to-*



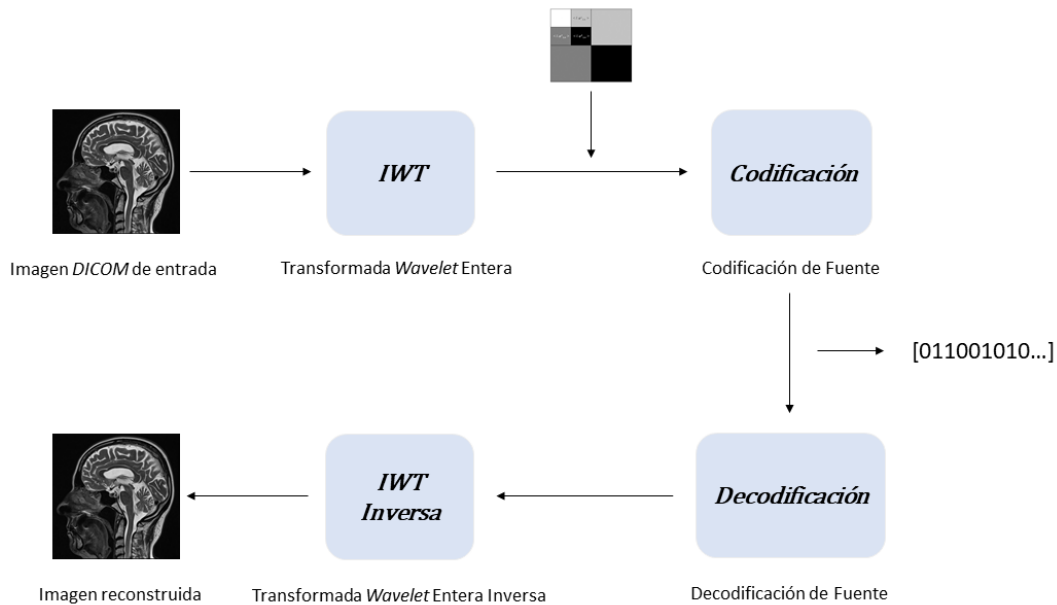
Noise Ratio) para medir la superioridad de estas técnicas. La revisión consultada concluye que el algoritmo Huffman supera a las demás técnicas de compresión presentadas con respecto a las métricas seleccionadas, por lo cual es recomendable su implementación en aplicaciones de compresión sin pérdidas como es el caso del presente trabajo de grado, donde se elige como el principal método de compresión a ser desarrollado. Adicionalmente, en [31] se presenta el algoritmo LZW (Lempel-Ziv-Welch) como un método eficiente de compresión de datos sin pérdidas, el cual está basado en diccionario, al igual que en el caso del algoritmo Huffman. El principio de funcionamiento de este algoritmo, para el caso de imágenes, se basa en leer secuencias repetitivas de píxeles y luego agruparlas en forma de cadenas que son agregadas al diccionario para posteriormente ser codificadas. Uno de los principales retos en la implementación del algoritmo LZW es el tiempo de procesamiento, debido a la complejidad del llenado del diccionario y las búsquedas a realizar en éste al momento decodificar la información. Cabe destacar que la eficiencia de este algoritmo está condicionada por las características de las imágenes a ser procesadas, ya que este método está concebido principalmente para la compresión de entradas con gran cantidad de información repetitiva [31].

Adicionalmente, es de interés en el presente trabajo de grado, realizar la implementación de un método de codificación con pérdidas, con el fin de extender el análisis de los esquemas *lifting* sobre imágenes médicas más allá del escenario sin pérdidas relacionado al diagnóstico médico y, de esta forma, abarcar una gama de aplicaciones más amplia donde la calidad de las imágenes no sea un factor crítico y pueda ser factible y conveniente obtener mayores tasas de compresión a expensas de una reducción en la calidad. Con base en lo expuesto anteriormente, se opta por implementar los algoritmos Huffman y LZW como métodos de codificación sin pérdidas y un cuantificador, diseñado mediante el algoritmo Lloyd-Max, como método de codificación con pérdidas para la compresión de imágenes médicas diagnósticas.

3.3.5. Diagrama de bloques del sistema

En la Figura 3.6 se muestra el diagrama de bloques del sistema de compresión de imágenes médicas desarrollado⁹.

⁹ Con el fin de acceder al código y realizar pruebas del sistema desarrollado, es posible acceder a los archivos e imágenes médicas utilizadas mediante el siguiente enlace al repositorio de GitHub: <https://github.com/arcedairo/Analisis-de-esquemas-Lifting.git>



28Figura 3.6. Diagrama de bloques del sistema.

- **Bloque *IWT*:** Este bloque recibe una imagen *DICOM* de entrada y aplica sobre ella la descomposición *wavelet*, tomando como base: la *wavelet* madre, número de niveles de descomposición y demás parámetros del esquema *lifting*. Como salida de este bloque se obtiene un conjunto de coeficientes *wavelet* que se compone por la representación de aproximación y por cada nivel de descomposición: detalles horizontales, verticales y diagonales.
- **Bloque de Codificación:** Este bloque a su entrada recibe los coeficientes *wavelet* obtenidos a la salida del bloque *IWT* y aplica sobre ellos el método de codificación de fuente, e.g., el algoritmo Huffman, el algoritmo LZW o una compresión con pérdidas basada en un cuantificador y un codificador de fuente. La salida de este bloque es un flujo de bits que representa a la imagen de entrada.
- **Bloque de Decodificación:** Este bloque realiza el proceso inverso al realizado por el bloque de codificación, ya que recibe como entrada el flujo de bits que representa a la imagen procesada y como salida proporciona el conjunto de coeficientes *wavelet* (aproximación y detalles) que se usa para la reconstrucción de la imagen.
- **Bloque de *IWT* Inversa:** En este bloque se tiene como entrada el conjunto de coeficientes *wavelet* resultante del proceso de decodificación. Aplicando sobre este conjunto la *IWT* inversa basada en el esquema *lifting* usado para la descomposición se obtiene la reconstrucción de la imagen médica.



3.3.6. Diagramas de los esquemas *lifting*

Cada *wavelet* dentro de cada una de las familias seleccionadas tendrá asociado un esquema *lifting* que defina los pasos de predicción y actualización necesarios para calcular los coeficientes de aproximación y detalles resultantes a partir del proceso de transformación. El diagrama de referencia es el mostrado en la Figura 2.4, donde se cuenta con un paso de predicción seguido por un paso de actualización, esto es a lo que se denomina: esquema *lifting* tradicional.

El número de pasos de predicción y actualización para construir la transformada depende de cada *wavelet* en particular y este número aumenta a medida que se incrementa el orden, es decir, dentro de una misma familia, *wavelets* con órdenes superiores tendrán un número de pasos *lifting* mayor que las *wavelets* de ordenes inferiores. Adicionalmente, es importante recordar que en los diagramas correspondientes al esquema *lifting* tradicional se tiene un paso de predicción luego de la etapa de LWT, mientras que en el esquema *Update-First* se tiene un paso de actualización posterior a esta etapa.

En la Tabla 3.3 se detalla cómo cambia el número de pasos (predicción y actualización) en los esquemas *lifting* al variar las *wavelets* asociadas a su construcción.

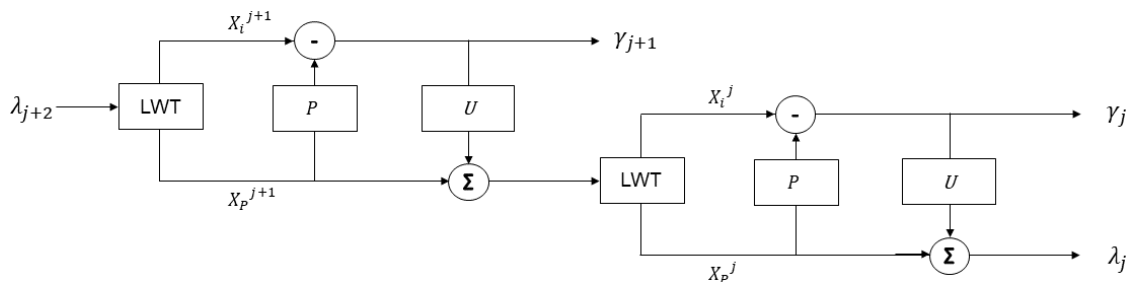
Tabla 3.3. Variaciones en los diagramas de los esquemas *lifting*.

	Daubechies	Symlet	Coiflet	Biortogonal	
Orden	$N=1,2,\dots, 8$	$N=2,3,\dots,8$	$N=1,2$	$Nr.Nd = 1.1$ $Nr.Nd = 1.3$ $Nr.Nd = 1.5$	$Nr.Nd = 3.1$ $Nr.Nd = 3.3$ $Nr.Nd = 3.5$ $Nr.Nd = 3.7$ $Nr.Nd = 3.9$
Número de pasos <i>lifting</i>	$N + 1$	$N + 1$	$4 \rightarrow N=1$ $7 \rightarrow N=2$	$2 \rightarrow Nr.Nd = 1.1, 1.3, 1.5, 2.2, 2.4, 2.6, 2.8$ $4 \rightarrow Nr.Nd = 4.4$ $6 \rightarrow Nr.Nd = 5.5, 6.8$	3
Tipo de esquema <i>lifting</i>	Tradicional (excepto $N=7$) ¹⁰	Tradicional (excepto $N=7$)	Tradicional	Tradicional	Update First

¹⁰ Las transformaciones asociadas a las *wavelets* *db7* y *sym7* se construyen mediante un esquema *lifting* de actualización primero (*Update-First*).

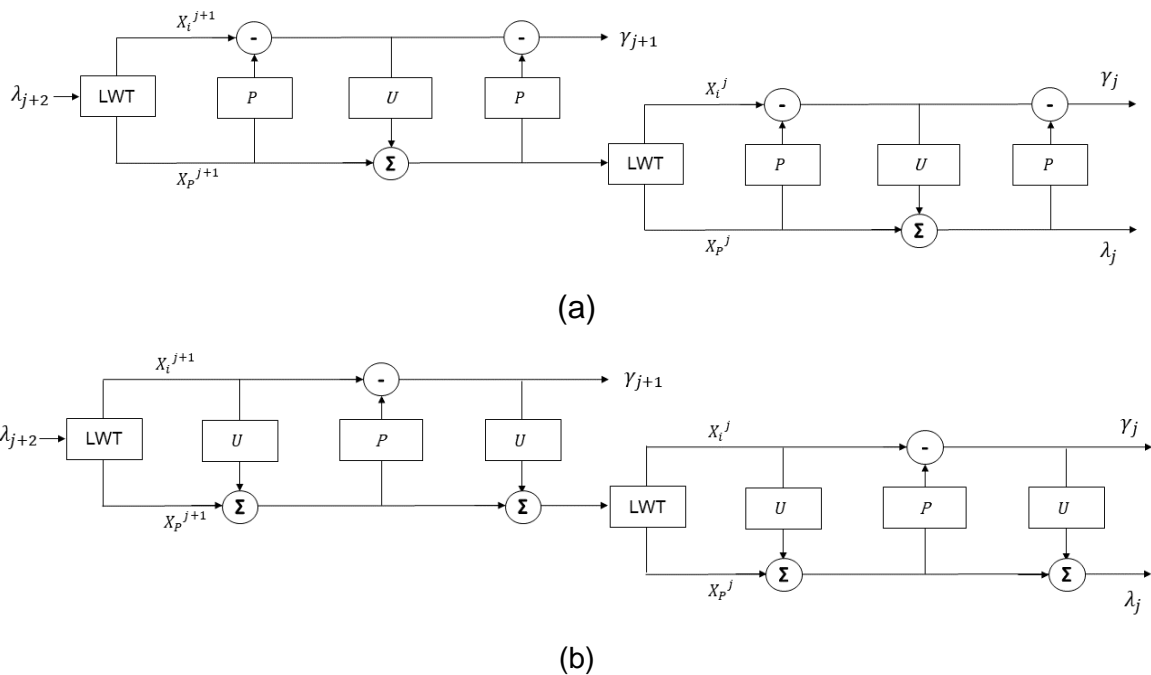


Otro factor para considerar al momento de elaborar los diagramas de los esquemas *lifting* es el número de niveles de descomposición para la transformada, por ejemplo, el esquema de la Figura 2.4 representa una transformación con un paso de predicción y un paso de actualización para un nivel de descomposición. Si se desea representar una transformación para un mayor número de niveles de descomposición, se toma la representación de aproximación resultante del nivel actual como entrada para el siguiente nivel de descomposición. La Figura 3.7 ilustra el esquema *lifting* tradicional para una transformación con dos niveles de descomposición.



29Figura 3.7. Diagrama esquema *lifting* tradicional con 2 niveles de descomposición.

La Figura 3.8 ilustra dos ejemplos de diagramas de los esquemas *lifting* para diferentes familias *wavelet* y tipo de esquema *lifting* considerando dos niveles de descomposición.

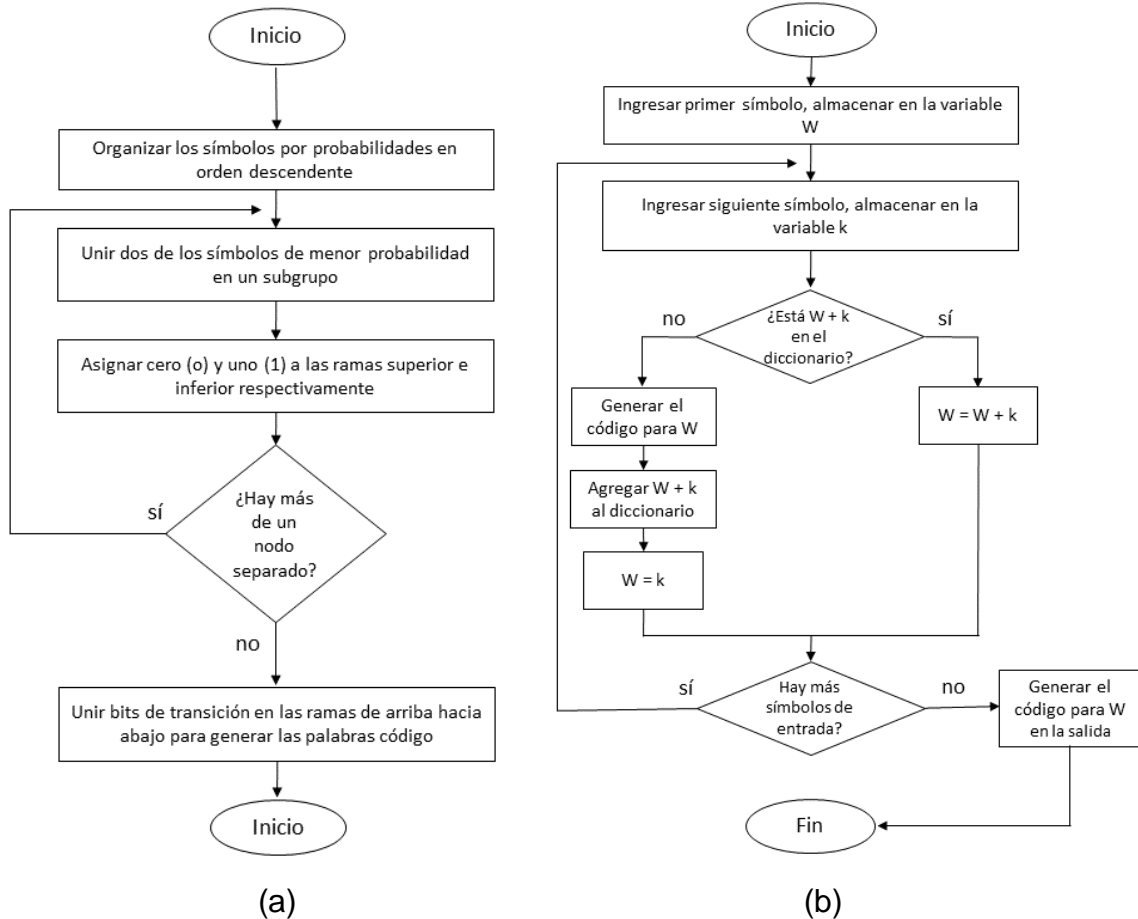


30Figura 3.8. Diagramas esquemas *lifting* a) *db2*; b) *bior3.1*.



3.3.7. Diagramas de flujo de los algoritmos de codificación

Para comprender de una mejor manera el funcionamiento de los métodos de codificación implementados en el presente trabajo de grado, en la Figura 3.9, se presentan los diagramas de flujo para los algoritmos desarrollados.



31 Figura 3.9. Diagramas de flujo a) algoritmo Huffman; b) algoritmo LZW. Adaptado de [32].

Para el diseño del cuantificador se considera el algoritmo de Lloyd-Max, el cual permite construir un cuantificador escalar *pseudo* óptimo, ya que éste se basa en la distribución estadística de los símbolos, cuantificando con mayor precisión aquellos con probabilidades más altas, minimizando así el error de cuantificación, lo cual conlleva a una alta calidad de las imágenes reconstruidas. En MATLAB se implementa este método mediante la función *Lloyds*. Para codificar los coeficientes cuantificados se usa codificación de longitud fija, donde la longitud de palabra código depende del número de niveles de cuantificación. En el presente trabajo se establecen 2048 niveles para imágenes CT y MRI y 128 niveles para imágenes US.



3.4. PLAN DE PRUEBAS

Con el fin de evaluar el desempeño del sistema de compresión de imágenes médicas aplicando el esquema *lifting* es necesario llevar a cabo una etapa de pruebas, donde se valide su funcionalidad y eficacia. Para tal fin se seleccionan diferentes tipos de imágenes médicas diagnósticas de prueba, con diferentes tamaños y características, con el fin de poder realizar posteriormente un análisis comparativo.

En el presente plan de pruebas se establecen métricas de evaluación para medir el rendimiento del sistema, con el fin de estimar el impacto de los esquemas *lifting* de la WT y los métodos de compresión implementados sobre la calidad de las imágenes reconstruidas, y a partir de estos resultados analizar las configuraciones más convenientes para los diferentes escenarios.

Para la realización de las pruebas, se utiliza el entorno de desarrollo de MATLAB, aprovechando las bibliotecas y *toolboxes* especializados en procesamiento de imágenes y manipulación de señales. Estas herramientas ofrecen las funcionalidades necesarias para llevar a cabo la implementación de los algoritmos de compresión, descomposición de las imágenes de prueba utilizando el esquema *lifting* de la WT y su posterior recuperación, así como también permiten realizar el cálculo de los parámetros de evaluación y brindan la posibilidad de efectuar su análisis de forma comparativa, lo cual es el objetivo del presente trabajo de grado.

Durante las pruebas se desea verificar la correcta descomposición de las imágenes médicas mediante el esquema *lifting* de la WT, analizando la calidad de los coeficientes generados y su precisión en la representación de la imagen original. Además, se quiere evaluar la eficiencia de los algoritmos de compresión implementados en la representación de las imágenes médicas de prueba y se desea verificar la calidad de la reconstrucción de éstas después de aplicar la compresión con y sin pérdidas.

3.4.1. Parámetros de desempeño

Para evaluar el desempeño del sistema desarrollado, se debe emplear métricas que permitan determinar el rendimiento de los esquemas *lifting* implementados, así como también de los métodos de compresión con y sin pérdidas aplicados sobre los coeficientes producto del análisis de las imágenes médicas de prueba con la IWT.

Las métricas más utilizadas para medir el rendimiento de una técnica de compresión son: Entropía, Longitud de Código Promedio (ACL, *Average Code Length*), Eficiencia de Codificación, Relación de Compresión (CR, *Compression Ratio*), Error Cuadrático Medio (MSE, *Mean Squared Error*) y Relación Máxima de Señal a Ruido (PSNR, *Peak Signal-to-Noise Ratio*). Los anteriores parámetros se relacionan entre sí y permiten obtener información sobre cómo se comporta la



descomposición *wavelet* de las imágenes de entrada y cómo las variaciones en los esquemas *lifting* implementados influyen en el desempeño de los algoritmos de compresión aplicados sobre el conjunto de coeficientes *wavelet* (aproximación y detalles) obtenido. A continuación, se exponen los parámetros de desempeño a emplear y se definen las expresiones mediante las cuales pueden ser calculados.

- **Entropía:** El concepto de entropía en el campo de la teoría de la información fue desarrollado a partir del primer teorema de Shannon, gracias al cual se establece un límite inferior teórico para la compresión de una fuente de datos. La entropía representa la incertidumbre o aleatoriedad presente en un conjunto de datos, en este caso, los coeficientes obtenidos después de la descomposición *wavelet*, es decir, tiene una relación directa con el número de valores únicos que conforman los coeficientes y la distribución de sus probabilidades [33].

Ya que mediante la descomposición *wavelet* una imagen puede representarse como un conjunto de coeficientes de aproximación y detalles, es posible definir un alfabeto de M símbolos que representan los valores únicos presentes en el conjunto de coeficientes. Si cada símbolo¹¹ tiene asociada una probabilidad $\Pr\{s_i\}$, entonces, mediante la expresión 3.2 se obtiene el valor de la entropía para el conjunto de coeficientes resultante de la descomposición *wavelet*.

$$H = - \sum_{i=1}^M \Pr\{s_i\} \log_2(\Pr\{s_i\}). \quad (3.2)$$

La entropía representa una cota inferior para la longitud promedio de palabra código y se puede utilizar como una forma de medir la eficiencia del codificador de fuente en función de su cercanía con este límite teórico.

- **Longitud de Código Promedio (ACL):** Este parámetro corresponde a la media aritmética de la longitud de las palabras código obtenidas al aplicar una técnica de codificación sobre el conjunto de coeficientes *wavelet*. Provee información sobre el número promedio de bits con el que se representan los símbolos del alfabeto, lo cual es de utilidad para examinar el rendimiento del algoritmo de codificación [31]. Mediante la expresión 3.3 se obtiene el parámetro *ACL*, donde $\Pr\{s_i\}$ representa la probabilidad del símbolo i -ésimo, y $Lng\{s_i\}$ corresponde a la longitud de palabra código del i -ésimo símbolo.

$$ACL = \sum_{i=1}^M \Pr\{s_i\} Lng\{s_i\}. \quad (3.3)$$

¹¹ Se entiende como símbolo a cada uno de los valores únicos que se encuentran en el conjunto de coeficientes resultantes de la descomposición *wavelet*.



- **Eficiencia de Codificación:** Esta medida se refiere a la capacidad que tiene un algoritmo de asignar códigos a los símbolos de un alfabeto de manera efectiva, logrando una reducción significativa en el tamaño de los datos originales. La *Eficiencia de Codificación*, E , puede verse como la relación entre la *Entropía*, H , y la *ACL*, i.e., da información sobre qué tan cerca se encuentra el algoritmo implementado de alcanzar el valor mínimo de longitud de palabra código determinado por la Entropía [31]. La expresión 3.4 permite calcular la *Eficiencia de Codificación*.

$$E = \frac{H}{ACL} * 100\% . \quad (3.4)$$

Valores de E superiores al 100% indican que se ha perdido información en el proceso de codificación o que el código empleado no es completamente decodificable.

- **Relación de Compresión (CR):** La CR se refiere a la relación entre el tamaño en bits de la imagen original y el tamaño en bits de su representación luego de aplicar un algoritmo de compresión [31]. Es una medida sobre cuanto se ha logrado comprimir una imagen de entrada al aplicar una técnica de compresión determinada y es una métrica fundamental en la evaluación del desempeño de los algoritmos de codificación de fuente en relación con las variaciones de los parámetros de los esquemas *lifting* utilizados en la descomposición *wavelet* de las imágenes de prueba. La ecuación 3.5 permite el cálculo de la CR .

$$CR = \frac{\#bits_imagen_original}{\#bits_imagen_comprimida} . \quad (3.5)$$

- **Error Cuadrático Medio (MSE):** Este parámetro se calcula tomando la diferencia cuadrada entre cada valor de pixel en la imagen original y su correspondiente valor en la imagen reconstruida. El MSE proporciona una medida cuantitativa de la diferencia entre la imagen original y la imagen reconstruida después de efectuar el proceso de decodificación y aplicación de la WT inversa. Para técnicas de compresión sin pérdidas, se espera un MSE nulo, ya que se asume reconstrucción perfecta, i.e., sin errores en la recuperación de la imagen, por lo tanto, el MSE es de mayor relevancia al evaluar y comparar el desempeño de métodos de compresión con pérdidas. Mediante la expresión 3.6 se calcula el MSE .

$$MSE = \frac{1}{A * B} \sum_{q=1}^A \sum_{r=1}^B (OR(q,r) - REC(q,r))^2 , \quad (3.6)$$

donde A , B representan el largo y ancho de la imagen, $OR(q,r)$ es la imagen original y $REC(q,r)$ es la imagen reconstruida.



- **Relación Máxima de Señal a Ruido (PSNR):** Esta medida expresada en decibeles (dB) representa la relación entre el valor máximo posible para un píxel en la imagen original y la *MSE*. La *PSNR* proporciona una estimación de la calidad de la reconstrucción de la imagen comprimida, donde un valor alto para esta métrica indica una reconstrucción más precisa y un mejor rendimiento de los métodos de compresión [31]. La expresión 3.7 permite determinar el valor de la *PSNR*.

$$PSNR = 10 \log_{10} \frac{\text{Max}^2}{MSE}, \quad (3.7)$$

donde Max corresponde al valor máximo de la variación en el conjunto de datos de entrada, es decir, representa el valor máximo que puede tomar un píxel en la imagen, por ejemplo, para imágenes de tipo *uint8*, donde cada píxel es representado con 8 bits, el valor de Max sería de $2^8 - 1 = 255$. Para la evaluación de algoritmos de compresión sin pérdidas, donde se espera un valor de *MSE* nulo, se tiene que la *PSNR* tiende a infinito, por lo que esta métrica tiene mayor sentido al evaluar y comparar el rendimiento de algoritmos en escenarios de compresión con pérdidas.

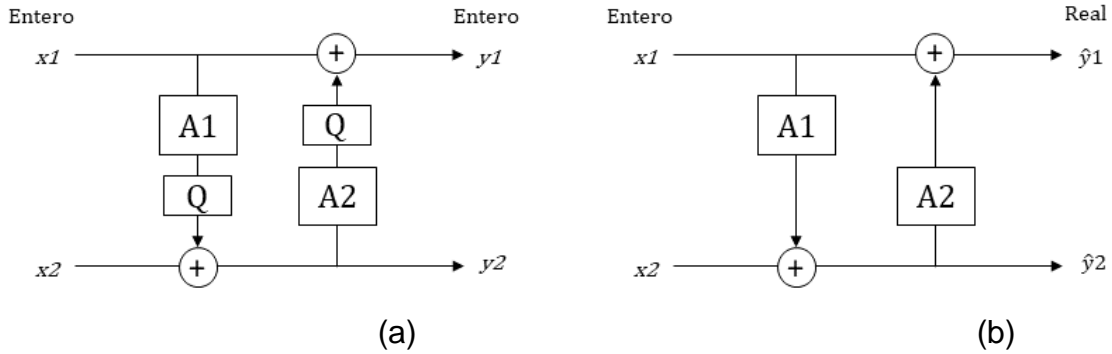
3.4.2. Evaluación del efecto de redondeo

En aplicaciones de procesamiento de imágenes médicas como la implementada en el presente trabajo, se hace necesaria la utilización de un método de descomposición *wavelet* que garantice la conservación de los detalles diagnósticos de las imágenes procesadas sin introducir distorsiones en ellas, es decir, donde se garantice la reconstrucción perfecta. Las imágenes generadas desde datos médicos como las US, CT y MRI contienen información crucial en la toma de decisiones y dictámenes clínicos precisos, por lo que es requerido que cualquier método de transformación o compresión utilizado no degrade su calidad e información esenciales.

Aunque la DWT tradicional ha demostrado ser una herramienta efectiva para aplicaciones de compresión de imágenes, muchos de los filtros utilizados en esta transformada contienen coeficientes de punto flotante, lo cual puede representar un inconveniente al descomponer imágenes médicas que consisten en secuencias de números enteros, ya que se generarían coeficientes *wavelet* de punto flotante y al hacer el proceso de reconstrucción, esto implicaría la necesidad de efectuar operaciones de redondeo para obtener de nuevo coeficientes enteros que representen la imagen original [34]. Este proceso introduciría ruido de redondeo causando errores en la reconstrucción de las imágenes transformadas. Por lo anterior, en el presente trabajo de grado se hace uso de la IWT con el fin de efectuar el mapeo de valores de entrada enteros a coeficientes *wavelet* enteros, eliminando así el efecto del redondeo y garantizando reconstrucción perfecta de las imágenes descompuestas mediante el esquema *lifting*. La Figura 3.10 ilustra el mapeo de



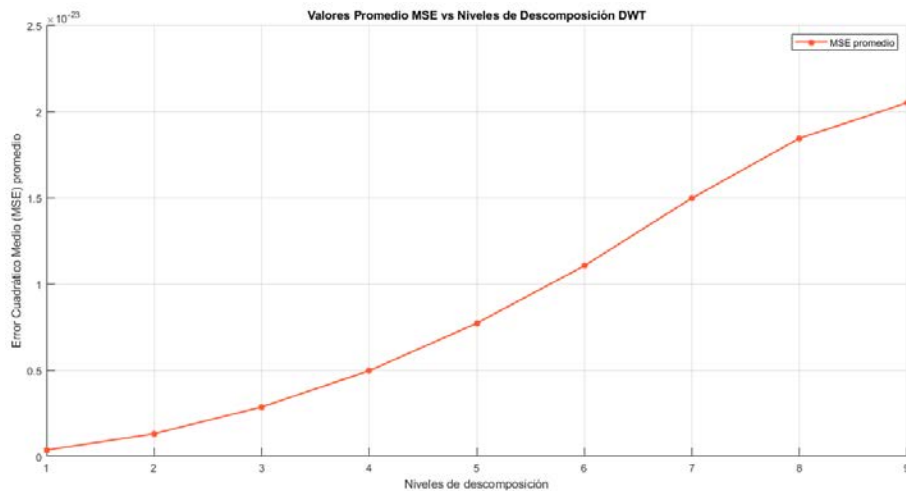
enteros a enteros y mapeo de enteros a números reales, donde $A1$ y $A2$ representan los coeficientes de los bancos de filtros y Q representa un operador de redondeo.



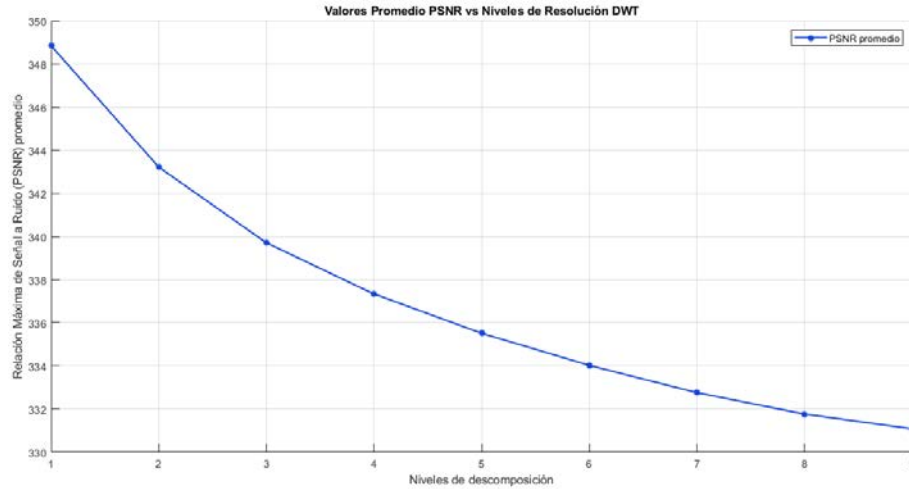
32Figura 3.10. (a). Mapeo de enteros a enteros. (b) Mapeo de enteros a números reales.

Con el fin de evaluar el efecto del redondeo en el análisis de imágenes con la DWT tradicional y comparar sus resultados con la descomposición de imágenes médicas mediante la IWT, se realiza la descomposición *wavelet* de un grupo compuesto por 10 imágenes médicas, usando tanto la DWT como la IWT. El grupo de prueba incluye imágenes CT y MRI. Adicionalmente, se usa la *wavelet* de Haar como *wavelet* madre y se establecen 9 niveles de descomposición. Posteriormente, se aplica el proceso inverso sobre las imágenes para verificar el error producido en la reconstrucción en ambos casos y se usan el *MSE* y la *PSNR* para evaluar la calidad de las imágenes reconstruidas. Los resultados obtenidos se muestran en las Tablas A.1 y A.2 del Apéndice A.

Las Figuras 3.11 y 3.12 muestran las gráficas de los resultados obtenidos para la *MSE* y *PSNR* respectivamente al efectuar la descomposición de las imágenes de prueba con DWT.



33Figura 3.11. Valores promedio *MSE* DWT.



34Figura 3.12. Valores promedio *PSNR* DWT.

En la Figura 3.11 se aprecia que el *MSE* para la descomposición de las imágenes de prueba mediante la DWT exhibe un comportamiento creciente a medida que aumentan los niveles de descomposición. Este comportamiento sugiere que a medida que se utilizan más niveles de descomposición, el error en la reconstrucción de la imagen también se incrementa. No obstante, es importante resaltar que la escala de la *MSE* está en el orden de 10^{-23} , lo cual indica que, si bien existe un error en la reconstrucción, este es extremadamente pequeño y prácticamente imperceptible a simple vista; sin embargo, existe y abre la posibilidad de errores en la interpretación de las imágenes y en el dictamen médico entregado al paciente tratado. De forma complementaria, la Figura 3.12 muestra el comportamiento de la *PSNR*, que como se espera, presenta una tendencia decreciente, lo cual confirma que la calidad de las imágenes reconstruidas disminuye al aumentar el número de niveles de descomposición. Se observa que se obtienen valores de *PSNR* muy altos, con lo cual el efecto del ruido causado por el redondeo al reconstruir las imágenes de prueba mediante la DWT es muy pequeño.

Al evaluar el efecto del redondeo sobre la descomposición *wavelet* con la DWT se concluye que, si bien, el error en la reconstrucción de las imágenes de prueba es muy pequeño, éste podría aumentar en función de las características de la imagen bajo análisis y el número de niveles de descomposición, lo que abre la posibilidad a obtener errores significativos en la reconstrucción, por lo que el uso de la IWT, que garantiza un error nulo, es necesario para asegurar la calidad y fidelidad en el procesamiento de imágenes médicas diagnósticas.

3.4.3. Casos de prueba

Con el fin de evaluar el desempeño de los esquemas *lifting* propuestos con relación a los métodos de compresión implementados y teniendo en cuenta los



parámetros de desempeño definidos anteriormente, se establecen los siguientes casos de prueba.

1. Entropía de coeficientes *wavelet* vs niveles de resolución

El objetivo de esta prueba es analizar el comportamiento de la entropía del conjunto de coeficientes (aproximación y detalles) resultantes de la descomposición *wavelet* al variar el número de niveles de descomposición usados en los esquemas *lifting* aplicados sobre una imagen médica de entrada.

Esta prueba se aplica sobre los tres diferentes tipos de imágenes médicas de estudio, es decir, CT, MRI y US, donde por cada tipo se cuenta con 10 imágenes de prueba y se obtiene un promedio luego de aplicar la prueba sobre cada una de las imágenes, esto con el fin de obtener resultados con mayor peso estadístico. Se usa la *wavelet* de Haar como *wavelet* madre para construir el esquema *lifting* y se varía el número de niveles de resolución de forma incremental, desde uno hasta el valor máximo determinado por $\text{Log}_2 \text{Dim}$, donde *Dim* corresponde a la dimensión de la imagen (cuadrada) bajo análisis. Con esta prueba se espera observar la tendencia de la entropía de los coeficientes *wavelet* a ser codificados en función de las variaciones en el número de niveles de descomposición en los esquemas *lifting*.

2. Entropía de coeficientes *wavelet* vs familia *wavelet*

El objetivo de esta prueba es analizar el comportamiento de la entropía de los coeficientes resultantes de la descomposición en una imagen médica al variar las familias *wavelet* utilizadas en los esquemas *lifting*. Para esto se utilizan las cuatro familias definidas en la sección 3.3.2. Inicialmente, se determina el orden que minimiza la entropía de los coeficientes *wavelet* para cada familia. Posteriormente, se comparan los mejores rendimientos para determinar la familia *wavelet* y el orden que producen el valor mínimo de entropía.

Al igual que para la prueba número 1, se usan grupos de imágenes US, CT y MRI, compuestos por 10 muestras de cada una y se calcula el promedio de la entropía para cada grupo.

3. Métodos de codificación de fuente vs familia *wavelet*

En este caso de prueba se quiere analizar el desempeño de los diferentes métodos de compresión implementados en el presente trabajo de grado con respecto a las métricas definidas, se desea evaluar cuál de los algoritmos permite obtener una mayor relación de compresión y mejor calidad de las imágenes médicas procesadas y se quiere determinar la familia *wavelet* y configuración del esquema *lifting* que permiten obtener el mejor desempeño general del sistema propuesto. Para lo anterior se plantean escenarios de prueba considerando compresión con y sin pérdidas.

En primer lugar, para el escenario de compresión sin pérdidas, sobre los tres grupos de imágenes de prueba se aplican los esquemas *lifting* y los métodos de



compresión desarrollados y se determina cuál es la familia *wavelet* y el orden que maximiza el rendimiento de cada uno de los métodos y posteriormente se hace una comparación entre los resultados obtenidos para seleccionar el que permita el mejor desempeño del sistema. Posteriormente, se prueba el escenario de compresión con pérdidas, implementando el cuantificador diseñado, con el fin de determinar la robustez del esquema *lifting* frente a la reconstrucción con coeficientes distorsionados a causa del cuantificador y cómo esto impacta sobre la calidad de las imágenes procesadas, se espera determinar las *wavelets* que introducen menor distorsión en las imágenes analizadas para un escenario de compresión con pérdidas.

4. Esquema *lifting* tradicional vs esquema *lifting Update-First*

La finalidad principal de este caso de prueba es comparar el desempeño del sistema al implementar tanto el esquema *lifting* tradicional como el *lifting Update-First* expuesto en la sección 2.3. Se quiere determinar si al aplicar el esquema *lifting* de actualización primero (*Update-First*) se puede obtener una mejora en la compresión y calidad de las imágenes procesadas y cuál es la configuración que maximiza el rendimiento del sistema implementado para cada uno de los algoritmos de compresión desarrollados.

La ejecución de esta prueba consiste en proponer construcciones personalizadas del esquema *lifting* adaptativo (*Update-First*) para la descomposición *wavelet* de los tres grupos de imágenes de prueba. Posteriormente se busca comparar los valores en los parámetros obtenidos con los resultados del caso de prueba 3 para determinar las ventajas o desventajas del esquema *lifting* adaptativo sobre el esquema *lifting* tradicional.



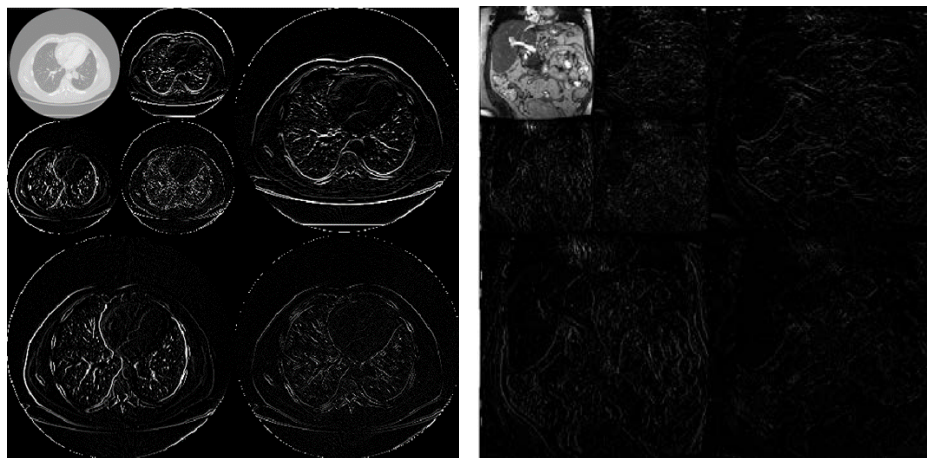
CAPÍTULO 4: ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este capítulo se presentan y analizan los resultados obtenidos al realizar las pruebas definidas mediante los casos de prueba propuestos en el capítulo de diseño. Se presentan las gráficas obtenidas para cada uno de los escenarios de prueba y se efectúan las diferentes comparaciones a partir de ellas con el fin de determinar los mejores desempeños de las diferentes configuraciones de los esquemas *lifting* analizados con respecto a los parámetros de desempeño definidos.

4.1. RESULTADOS CASO 1: ENTROPÍA VS NIVELES DE DESCOMPOSICIÓN

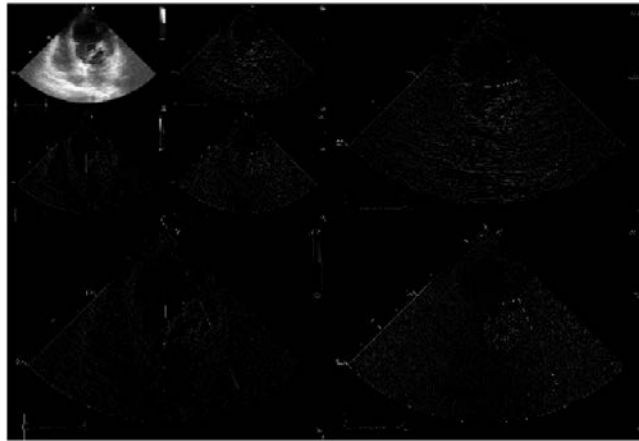
Aplicar el esquema *lifting* tradicional asociado con la *wavelet* madre de Haar (*db1*) sobre cada una de las imágenes de tipo CT, MRI y US permite obtener el conjunto de coeficientes que representa cada imagen de prueba en el dominio *wavelet*. Se tienen dimensiones de 512x512 pixeles para las imágenes CT y MRI, con lo cual se podrá tener 9 niveles de descomposición como máximo. Estas imágenes son de tipo *uint16*, por lo que son representadas con 16 bits/pixel, además, se debe tener en cuenta que están en escala de grises, es decir, cuentan con un solo canal de color.

Por su parte, los archivos US de prueba cuentan con cuatro dimensiones, dos dimensiones espaciales de 636x434, una dimensión representando los tres canales de color (RGB) y una cuarta dimensión que representa cada fotograma presente en el archivo. Es posible descomponer estas imágenes para 7 niveles como máximo y son representadas con 8 bits/pixel (*uint8*). Para las pruebas realizadas sobre imágenes US se selecciona el primer canal de color (R) y el primer fotograma. La Figura 4.1 muestra un ejemplo de la descomposición *wavelet* a dos niveles para imágenes CT, MRI y US.



(a)

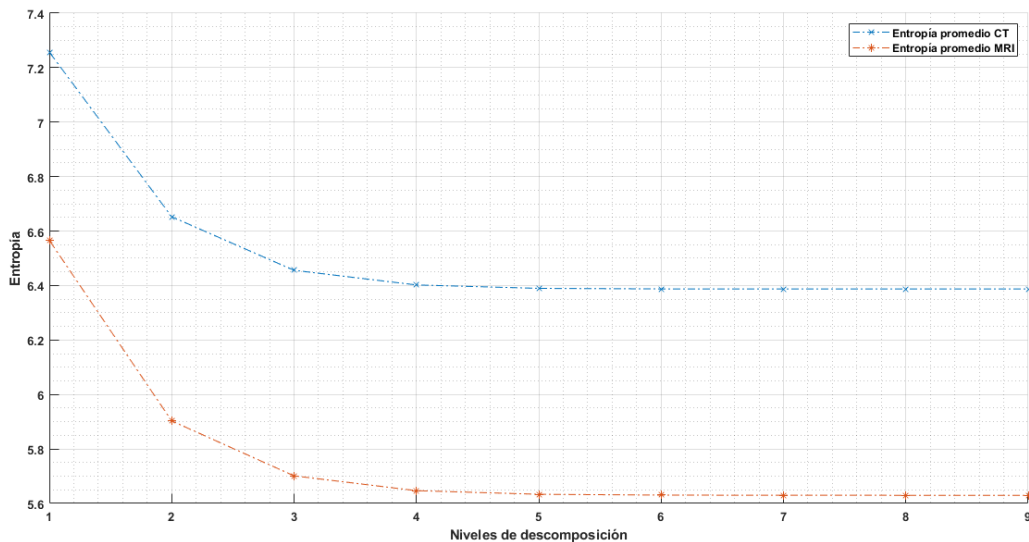
(b)



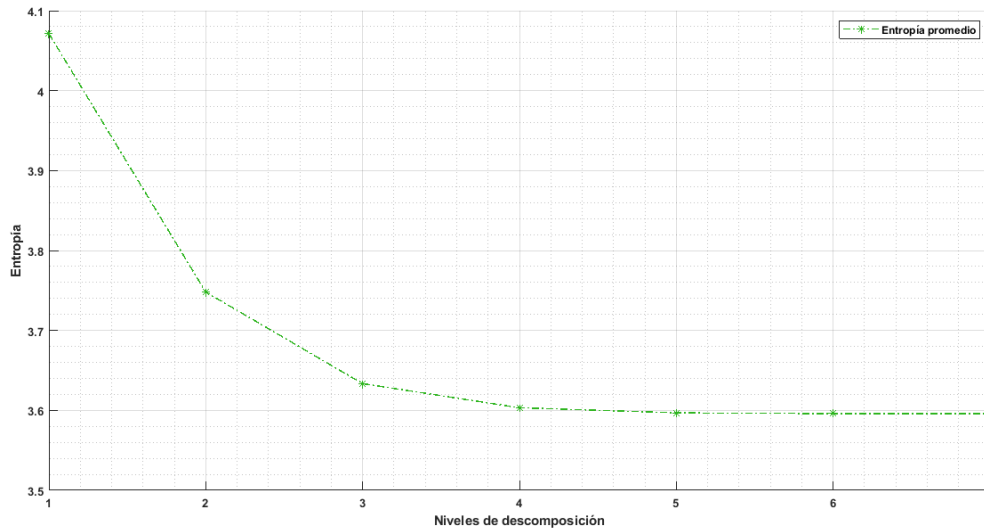
(c)

35 Figura 4.1. Descomposición a dos niveles a) CT; b) MRI; c) US.

Sobre el conjunto de coeficientes obtenidos a partir de la transformación, se calcula su entropía mediante la ecuación 3.2. Se itera sobre el número de niveles de descomposición y se tabulan los valores obtenidos. Los datos de entropía para las imágenes CT, MRI y US se detallan en el Apéndice B, mediante las Tablas B.1, B.2 y B.3, respectivamente. La Figura 4.2 muestra el comportamiento de la entropía promedio de los coeficientes *wavelet* con respecto a las variaciones en el número de niveles de descomposición para imágenes CT y MRI. En la Figura 4.3 se observa el comportamiento de la entropía para imágenes US.



36 Figura 4.2. Entropía vs Niveles de descomposición sobre imágenes CT y MRI.



37Figura 4.3. Entropía vs Niveles de descomposición sobre imágenes US.

Se observa que la entropía de los coeficientes *wavelet* tiende a disminuir con el aumento del número de niveles de descomposición, presentando un decrecimiento más pronunciado entre los niveles 1 y 4 y, posteriormente, exhibiendo un comportamiento asintótico. Este comportamiento es debido principalmente a que, al aumentar el número de niveles de descomposición, se tiende a aumentar la frecuencia de aparición de ciertos valores en el grupo de coeficientes, con lo cual las probabilidades se cargan hacia estos valores, haciendo que se tenga un conjunto de coeficientes *wavelet* con menor grado de incertidumbre.

Para imágenes CT se obtiene un valor de 6.38968, para imágenes MRI se obtiene una entropía de 5.63364 para 5 niveles de descomposición, en el caso de las imágenes US, se obtiene un mínimo de 3.5969. Esto muestra que la entropía promedio obtenida para las imágenes CT de prueba es aproximadamente 1.13 veces más alta que en el caso de imágenes MRI cuando en ambos casos se consideran los valores mínimos. La entropía promedio obtenida para imágenes US es aproximadamente 1.77 veces menor en comparación con imágenes CT, mientras que es alrededor de 1.56 veces menor en comparación a imágenes MRI.

Los resultados de la entropía permiten inferir que para minimizar la *ACL* y maximizar la *CR*, es necesario aumentar el número de niveles de descomposición; no obstante, en las Figuras 4.2 y 4.3 se observa que existe poca diferencia en los valores de entropía obtenidos para niveles de descomposición superiores a cinco, por lo que puede plantearse que en la práctica lo más conveniente sería utilizar entre 4 y 5 niveles de descomposición. Al comparar con diferentes autores, en [36], se determina 4 niveles como valor óptimo para la compresión de imágenes radiológicas con la transformada *wavelet*, mientras que en [37] y [38] se determina 5 niveles como óptimos para efectuar la descomposición *wavelet* de imágenes médicas. Para los casos de prueba subsiguientes se tiene como uno de los



principales objetivos comprobar de forma práctica las deducciones teóricas aquí expuestas.

4.2. RESULTADOS CASO 2: ENTROPIA VS FAMILIA WAVELET

En este escenario de prueba se busca identificar la familia y el respectivo orden que consigue minimizar la entropía de los coeficientes *wavelet*, para lo cual, para cada tipo de imagen médica bajo análisis, se implementan los esquemas *lifting* relacionados a las *wavelets* de estudio definidas en el plan de pruebas. A continuación, se muestran los resultados obtenidos.

4.2.1. Entropía vs familia *wavelet* – tomografía computarizada (CT)

Sobre el conjunto de imágenes CT de prueba, se aplica la descomposición mediante el esquema *lifting* asociado a cada una de las familias *wavelet* de prueba, iniciando con la familia *Daubechies*, posteriormente la familia *Symlet*, *Coiflet* y finalmente *Biorthogonal*. Para cada familia se varía el orden de acuerdo a los disponibles en la plataforma MATLAB y que son mostrados en la Tabla 3.1. Lo anterior se hace con el objetivo de determinar las dos *wavelets* (una en el caso de las *Coiflet*) con valores más bajos de entropía para cada una de las cuatro familias, para posteriormente efectuar la comparación y determinar la familia *wavelet* y ordenes donde la entropía de los coeficientes resultantes a partir de la transformación presenta valores mínimos. En el Apéndice C se detallan los valores obtenidos al realizar las pruebas de entropía vs familia *wavelet*, también se observan las figuras comparativas de los diferentes ordenes dentro de cada familia.

La Tabla 4.1 presenta las *wavelets* con valores de entropía más bajos por familia para el análisis sobre imágenes de tipo CT.

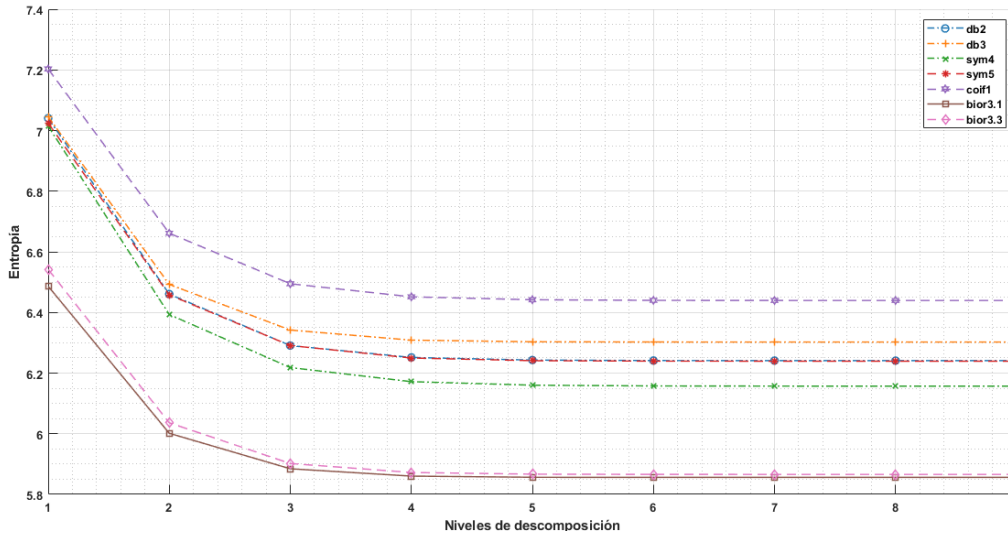
Tabla 4.1. *Wavelets* con valores mínimos de entropía para imágenes CT.

Familia <i>wavelet</i>	<i>Wavelets</i> con entropía mínima
<i>Daubechies</i>	<i>db2, db3</i>
<i>Symlet</i>	<i>sym4, sym5</i>
<i>Coiflet</i>	<i>coif1</i>
<i>Biorthogonal</i>	<i>bior3.1, bior3.3</i>

De acuerdo con la Tabla 4.1, al descomponer imágenes CT, las *wavelets* de *Daubechies* de orden 2 y 3, *Symlet* de orden 4 y 5, *Coiflet* de orden 1 y *Biorthogonal* de orden 3.1 y 3.3, presentan los valores más bajos de entropía para los coeficientes *wavelet*, por lo cual es de interés efectuar la comparación entre ellas y



determinar la familia que minimiza la entropía para imágenes CT y observar más adelante la relación existente entre los resultados obtenidos en este caso de prueba y el rendimiento de los algoritmos de compresión implementados.



38Figura 4.4. Comparación entropía por familias *wavelet* sobre imágenes CT.

En la Figura 4.4 se observa la comparación entre las *wavelets* de la Tabla 4.1 con respecto a su entropía. Los valores mínimos de entropía para los coeficientes *wavelet* resultantes al analizar imágenes CT se obtienen al descomponer las imágenes mediante los esquemas *lifting* relacionados con las *wavelets* *bior3.1* y *bior3.3*, siendo 5.85644 el valor mínimo obtenido con la *wavelet* *bior3.1*. Aunque los resultados de las dos *wavelets* pertenecientes a la familia *Biorthogonal* no son muy diferentes entre ellos, sí se distancian de forma significativa de las 5 *wavelets* restantes, lo que indica que para este caso las *wavelets* de la familia *Biorthogonal* generan algunos valores de coeficientes con probabilidades de ocurrencia altas.

4.2.2. Entropía vs familia *wavelet* – resonancia magnética (MRI)

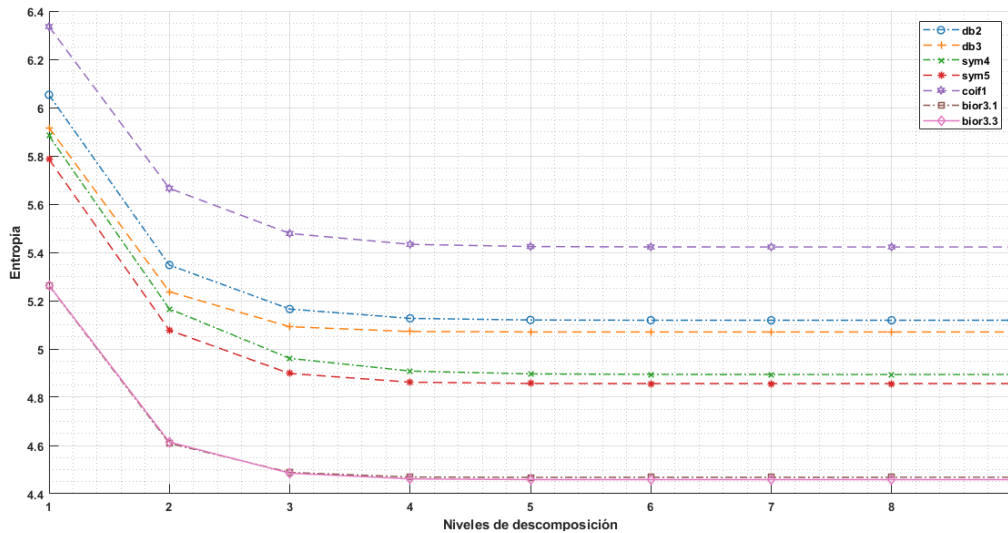
Se sigue el proceso anterior para analizar las imágenes MRI y se obtienen los valores mínimos de entropía por familia *wavelet*, mostrados en la Tabla 4.2.

Tabla 4.2. *Wavelets* con valores mínimos de entropía para imágenes MRI.

Familia <i>wavelet</i>	<i>Wavelets</i> con entropía mínima
Daubechies	<i>db2, db3</i>
Symlet	<i>sym4, sym5</i>
Coiflet	<i>coif1</i>
Biorthogonal	<i>bior3.1, bior3.3</i>



Se puede ver que las *wavelets* que arrojan menores valores de entropía al momento de analizar imágenes CT son también las que presentan entropía mínima al momento de descomponer las imágenes MRI de prueba, esto es debido a que estos dos tipos de imágenes tienen características muy similares y esto ocasiona que la naturaleza de los coeficientes *wavelet* generados tras la transformación sea semejante. En la Figura 4.5 se observa la comparación entre las *wavelets* de la Tabla 4.2.



39Figura 4.5. Comparación entropía por familias *wavelet* sobre imágenes MRI.

Es posible comprobar mediante la Figura 4.5 que el comportamiento de la entropía para imágenes MRI de las *wavelets* analizadas es similar al presentado para imágenes CT; sin embargo, se observan diferencias, la más relevante es que, en este caso, la *wavelet* que minimiza la entropía de los coeficientes es la *bior3.3* (para imágenes CT es la *bior3.1*), obteniendo un valor mínimo de 4.45851. Otra diferencia importante es que la entropía promedio al analizar imágenes MRI es menor que la obtenida para el caso de las imágenes CT, aproximadamente 1.31 veces más bajo, con lo cual es posible decir que los coeficientes obtenidos al analizar estas imágenes son más predecibles, i.e., presentan un menor grado de incertidumbre. No obstante, nuevamente, son las familias *Biorthogonal* las que permiten minimizar la entropía de los coeficientes *wavelet*.

4.2.3. Entropía vs familia *wavelet* – ultra sonido (US)

Finalmente, se analizan las imágenes US y se obtienen las *wavelets* con las cuales se minimiza la entropía por familia, los resultados se sintetizan en la Tabla 4.3.

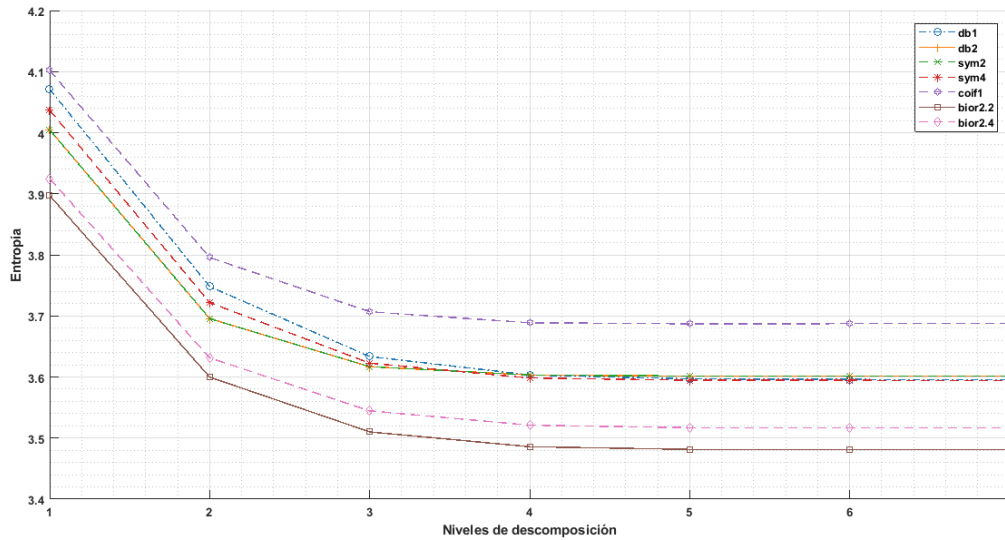


Tabla 4.3. *Wavelets* con valores mínimos de entropía para imágenes US.

Familia <i>wavelet</i>	<i>Wavelets</i> con entropía mínima
<i>Daubechies</i>	<i>db1, db2</i>
<i>Symlet</i>	<i>sym2, sym4</i>
<i>Coiflet</i>	<i>coif1</i>
<i>Biorthogonal</i>	<i>bior2.2, bior2.4</i>

De la Tabla 4.3 se observa que en el caso de las imágenes US, las *wavelets* que presentan valores más bajos de entropía en sus coeficientes difieren de las obtenidas para imágenes CT y MRI y, adicionalmente, los órdenes de éstas son menores. Lo anterior puede deberse principalmente a que, estructuralmente, las imágenes CT y MRI de estudio son más complejas y variables, por el contrario, para el caso de las imágenes US se tienen zonas altamente redundantes (de poca variabilidad), adicionalmente, el rango dinámico de estas imágenes es menor, dado que están representadas con 8 bits en lugar de 16, como sucede para los otros dos tipos de imágenes analizadas. Lo anterior muestra que para analizar imágenes con estructuras menos complejas puede ser más conveniente implementar esquemas *lifting* relacionados a *wavelets* de ordenes bajos, en contraparte, cuando se tienen imágenes con alta variabilidad y complejidad estructural, implementar la descomposición con esquemas *lifting* basados en *wavelets* de ordenes más altos permite minimizar la entropía de los coeficientes obtenidos. En la Figura 4.6 se muestra la comparación entre las *wavelets* de la Tabla 4.3.

En la Figura 4.6 se observa que los valores promedio de entropía obtenidos al analizar imágenes US son menores que los presentados para los otros tipos de imágenes analizadas, obteniendo un valor mínimo de 3.48137, con lo cual se entiende que los coeficientes *wavelet* generados son más predecibles, siendo estos resultados consistentes con las características estructurales de las imágenes US. Para este tipo de imágenes, al igual que en los casos anteriores, la familia *Biorthogonal* permite minimizar la entropía, siendo la *bior2.2* la que presenta un valor promedio menor.



40Figura 4.6. Comparación entropía por familias *wavelet* sobre imágenes US.

4.3. RESULTADOS CASO 3: MÉTODOS DE CODIFICACIÓN DE FUENTE VS FAMILIA WAVELET

4.3.1. Escenario de compresión sin pérdidas

4.3.1.1. Algoritmo Huffman

Con el fin de evaluar el desempeño del algoritmo Huffman implementado para la compresión de imágenes médicas sin pérdidas, como paso posterior a la obtención de los coeficientes *wavelet* de las imágenes analizadas y el cálculo de su entropía, se procede a codificar dichos coeficientes mediante el algoritmo Huffman y se evalúa su desempeño con respecto a las métricas definidas en la etapa de diseño, específicamente, la *eficiencia de codificación*, *ACL* y *CR* se toman como referencia para efectuar la evaluación del rendimiento del algoritmo, haciendo énfasis en la *CR*, ya que se desea maximizar este parámetro, con el fin de obtener un mayor grado de compresión para las imágenes procesadas.

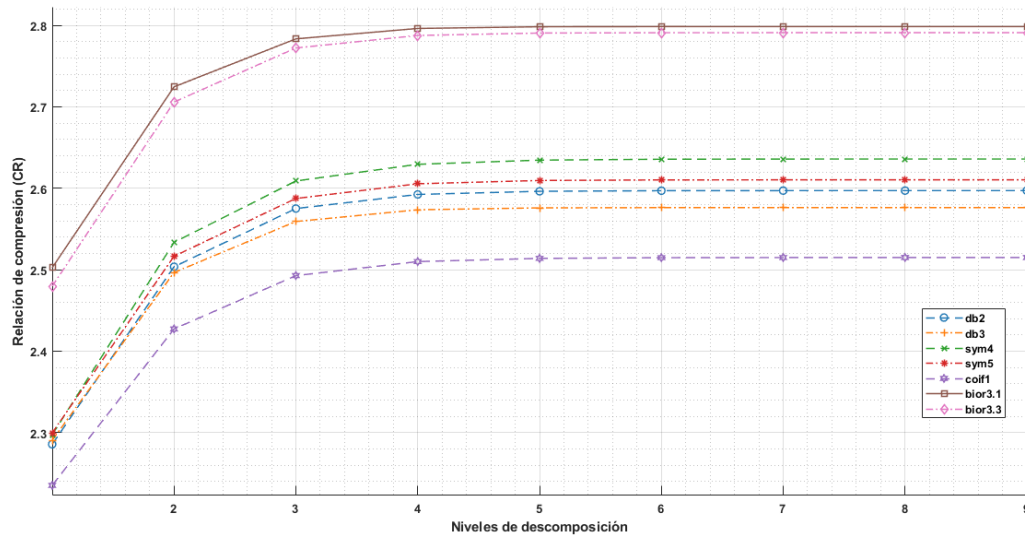
Inicialmente, se efectúa la evaluación del desempeño del algoritmo Huffman para cada una de las familias *wavelet* en estudio, con el fin de determinar aquellas que logran las tasas de compresión más altas. Los gráficos comparativos de *CR* obtenidos para cada una de las familias pueden consultarse en el Apéndice D. Posteriormente, se seleccionan las dos *wavelets* que permiten alcanzar valores de *CR* más altos dentro de cada familia, al hacer esto, se obtienen los resultados mostrados en la Tabla 4.4.



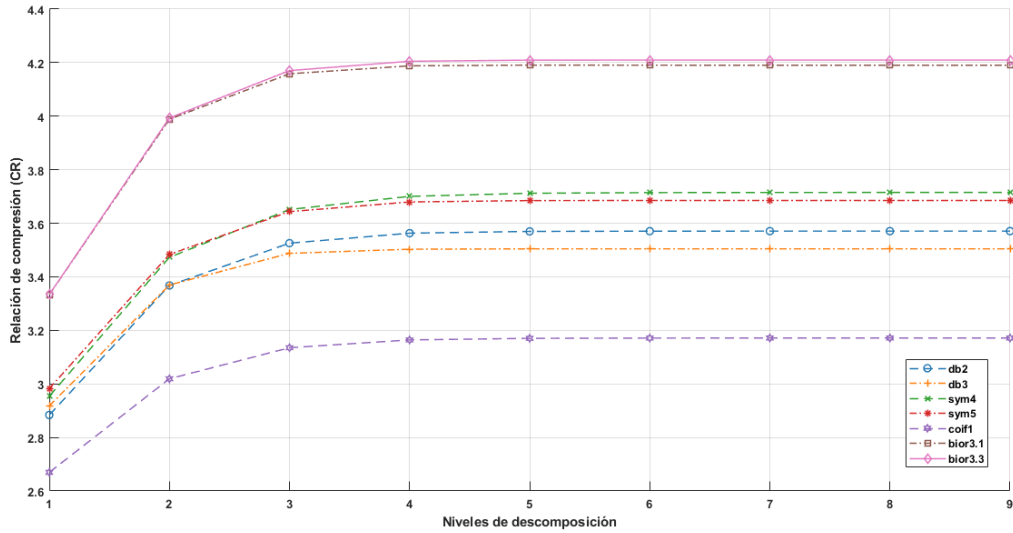
Tabla 4.4. Familias *wavelet* que maximizan la *CR* con el algoritmo de Huffman.

Familia <i>wavelet</i>	Máxima <i>CR</i>		
	CT	MRI	US
Daubechies	<i>db2, db3</i>	<i>db2, db3</i>	<i>db1, db2</i>
Symlet	<i>sym4, sym5</i>	<i>sym4, sym5</i>	<i>sym2, sym4</i>
Coiflet	<i>coif1</i>	<i>coif1</i>	<i>coif1</i>
Biorthogonal	<i>bior3.1, bior3.3</i>	<i>bior3.1, bior3.3</i>	<i>bior2.2, bior2.4</i>

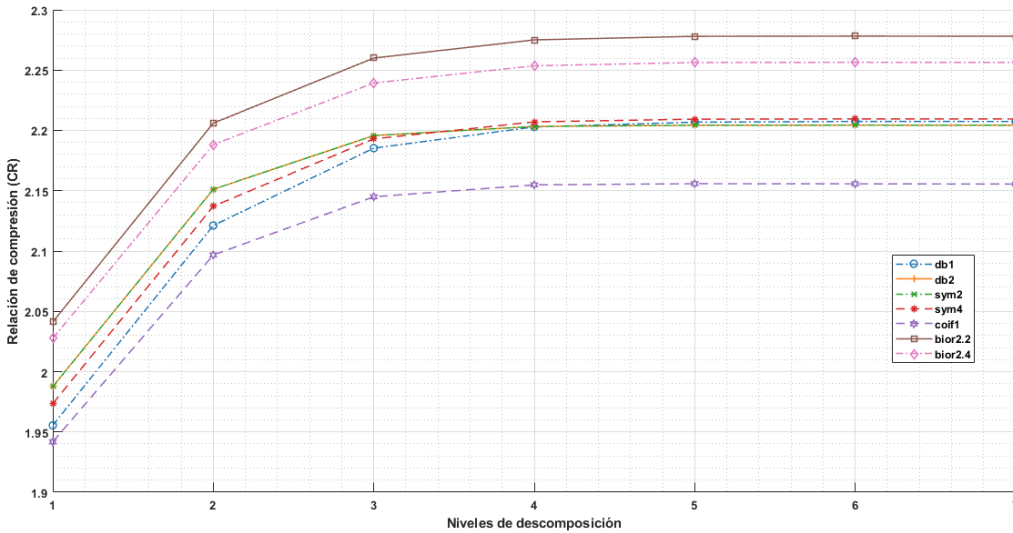
En las Figuras 4.7, 4.8 y 4.9 se observa la comparación entre las familias *wavelet* que obtuvieron *CR* más altas para imágenes CT, MRI y US respectivamente.



41Figura 4.7. Comparación *CR* para familias *wavelet* sobre imágenes CT – Huffman.



42Figura 4.8. Comparación *CR* para familias *wavelet* sobre imágenes MRI - Huffman.



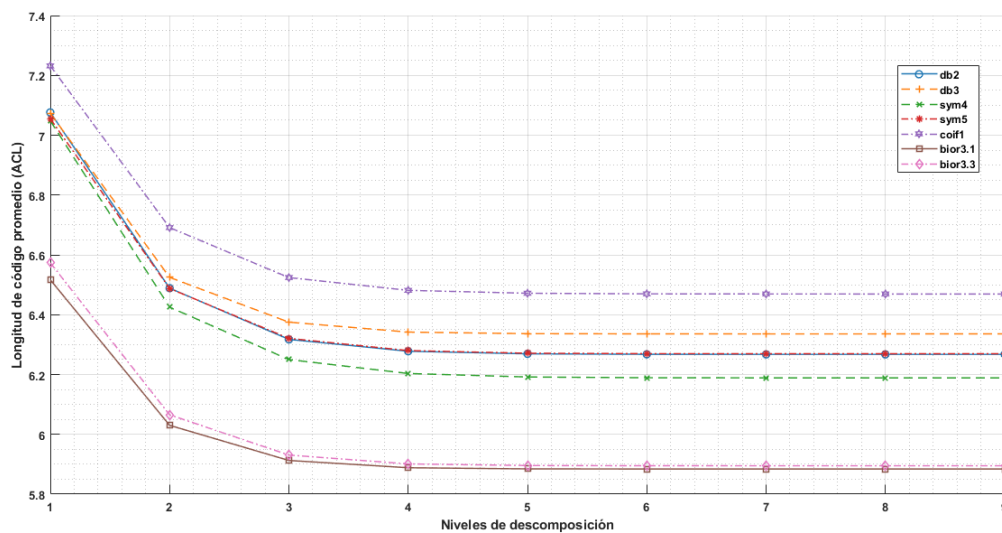
43Figura 4.9. Comparación *CR* para familias *wavelet* sobre imágenes US - Huffman.

Se comprueba que las *wavelets* que obtuvieron menores entropías en sus coeficientes para cada tipo de imagen son también las que consiguen un valor de *CR* más alto, esto quiere decir que la entropía es una métrica fundamental al momento de evaluar el rendimiento del algoritmo Huffman, ya que, independientemente del tipo de imagen y del valor de entropía obtenido, el algoritmo de Huffman tiende al límite máximo de compresión dado por este valor. Al hacer un análisis comparativo según el tipo de imagen se observa que las imágenes MRI son las que tienen tasas de compresión más altas con el algoritmo de Huffman, obteniendo un máximo de 4.21, lo cual se logra mediante el esquema *lifting* asociado a la *wavelet* *bior3.3* de la familia *Biorthogonal*. Para imágenes CT

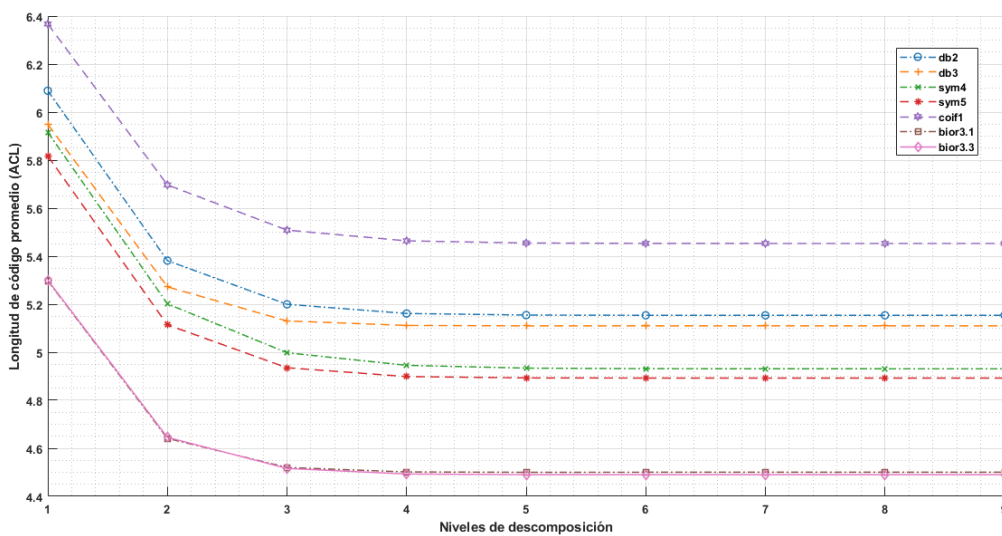


se logra una relación de compresión máxima de 2.7982 y para imágenes US se obtiene 2.278 como relación de compresión máxima.

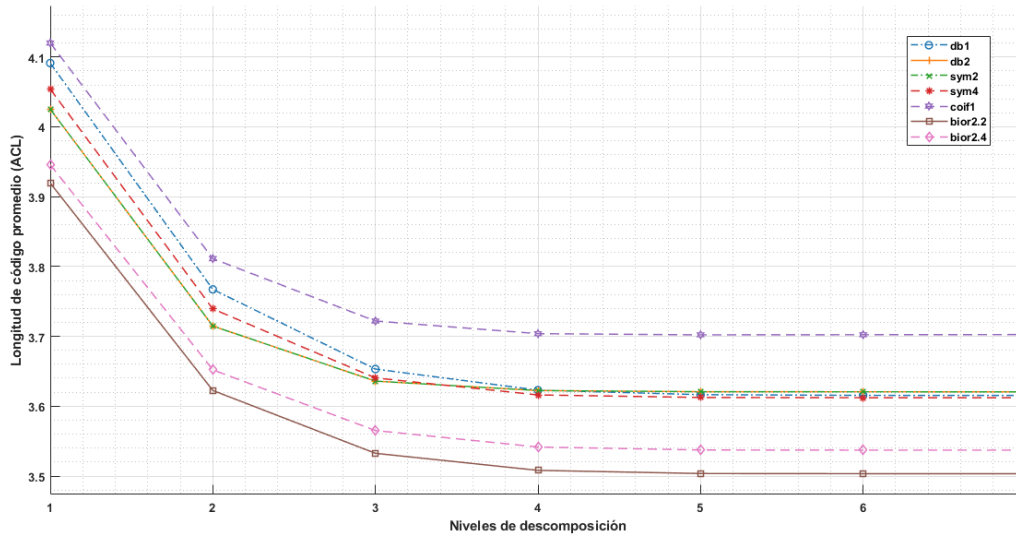
Otro parámetro importante al momento de evaluar el desempeño del algoritmo Huffman implementado es la *ACL*, la cual proporciona información sobre la longitud promedio de las palabras código que se obtiene al codificar los coeficientes *wavelet*, naturalmente, el objetivo al implementar este algoritmo ha sido obtener el valor más bajo de *ACL* posible, ya que esto equivale a maximizar la compresión de las imágenes analizadas. Las Figuras 4.10, 4.11 y 4.12 muestran las *ACL* promedio obtenidas para las imágenes CT, MRI y US respectivamente.



44Figura 4.10. Comparación *ACL* para familias *wavelet* sobre imágenes CT - Huffman.

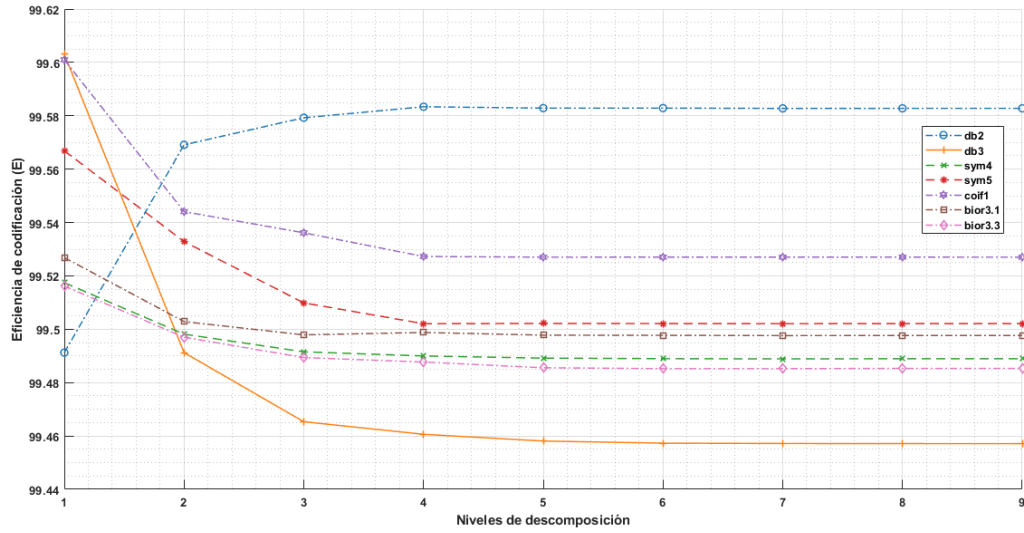


45Figura 4.11. Comparación *ACL* para familias *wavelet* sobre imágenes MRI - Huffman.

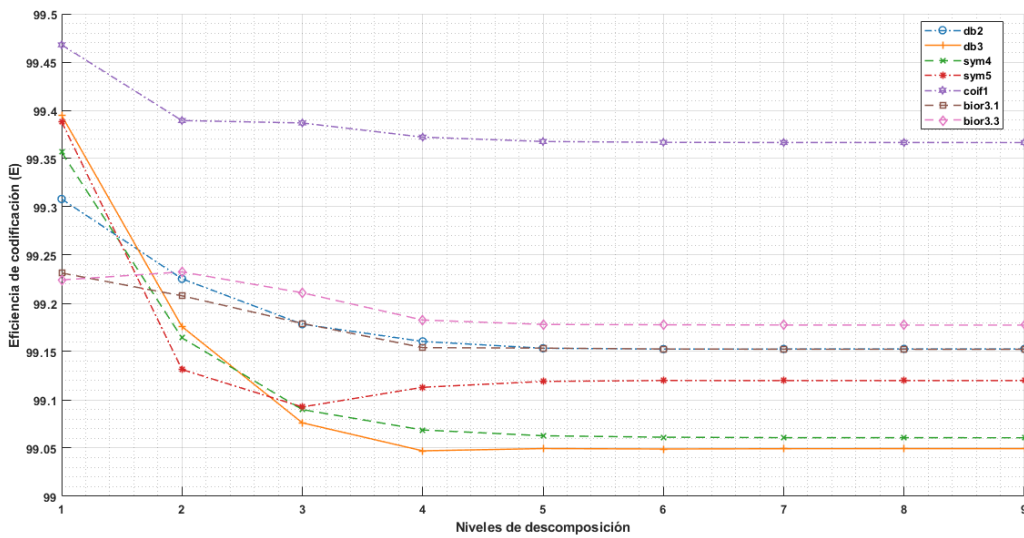


46Figura 4.12. Comparación *ACL* para familias *wavelet* sobre imágenes US - Huffman.

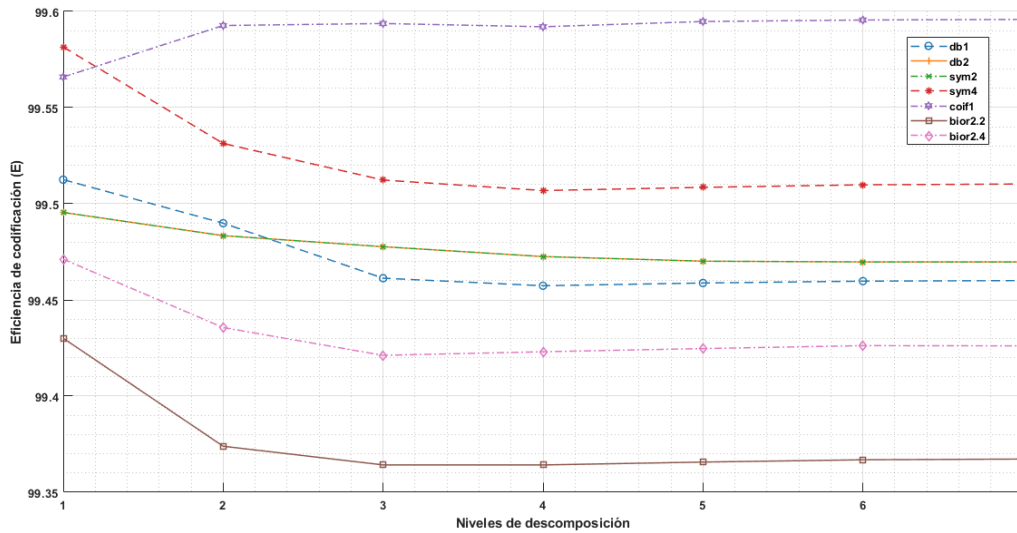
Se observa que, para los tres tipos de imágenes, se obtienen medidas de *ACL* muy cercanas al valor de la entropía en cada caso, y teniendo en cuenta que la entropía es el límite teórico hasta el cual puede minimizarse la longitud promedio de las palabras código obtenidas en una representación sin pérdida de información, se obtiene que el algoritmo Huffman implementado presenta un alto desempeño para la compresión de las imágenes de prueba tipo CT, MRI y US, logrando alcanzar *CR* cercanas al máximo valor teórico y eficiencias superiores al 99%, lo cual se puede comprobar mediante las Figuras 4.13, 4.14 y 4.15, que muestran los valores de *eficiencia* promedio obtenidos para imágenes CT, MRI y US respectivamente. Los valores mínimos de *ACL* obtenidos para imágenes CT, MRI y US fueron 5.88454, 4.49009 y 3.50358 respectivamente. Los mayores valores de eficiencia obtenidos mediante el algoritmo de Huffman son de 99.6031%, 99.4679% y 99.5958% para imágenes CT, MRI y US respectivamente.



47Figura 4.13. Comparación *eficiencia* para familias *wavelet* sobre imágenes CT - Huffman.



48Figura 4.14. Comparación *eficiencia* para familias *wavelet* sobre imágenes MRI - Huffman.



49Figura 4.15. Comparación *eficiencia* para familias *wavelet* sobre imágenes US - Huffman.

4.3.1.2. Algoritmo LZW

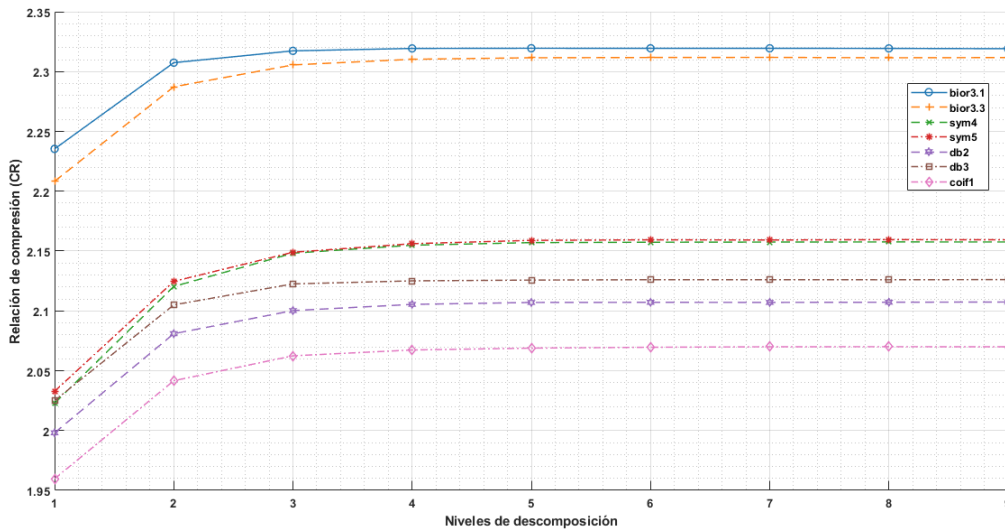
La evaluación del desempeño del algoritmo LZW implementado se hace de manera análoga a lo realizado anteriormente con el algoritmo Huffman y con base a los mismos parámetros. Como primera medida, se obtienen los valores de *CR* y se seleccionan las dos *wavelets* que permiten obtener valores más altos para cada familia. En el Apéndice E pueden consultarse los gráficos comparativos para cada una de las *wavelets* implementadas. La Tabla 4.5 muestra las *wavelets* que permiten obtener las *CR* más altas al codificar los coeficientes *wavelet* con el algoritmo LZW.

Tabla 4.5. Familias *wavelet* que maximizan la *CR* con el algoritmo LZW.

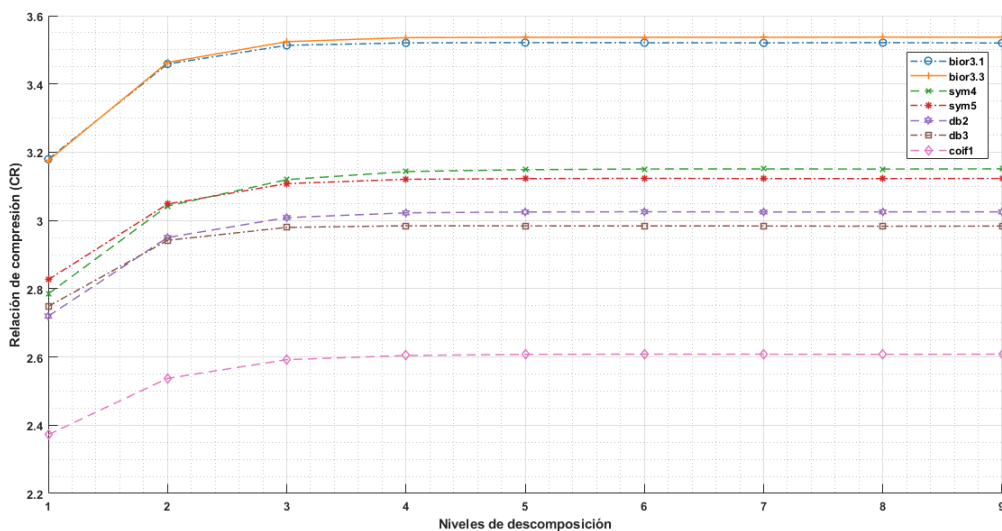
Familia <i>wavelet</i>	Máxima <i>CR</i>		
	CT	MRI	US
Daubechies	<i>db2, db3</i>	<i>db2, db3</i>	<i>db1, db2</i>
Symlet	<i>sym4, sym5</i>	<i>sym4, sym5</i>	<i>sym2, sym4</i>
Coiflet	<i>coif1</i>	<i>coif1</i>	<i>coif1</i>
Biorthogonal	<i>bior3.1, bior3.3</i>	<i>bior3.1, bior3.3</i>	<i>bior2.2, bior4.4</i>



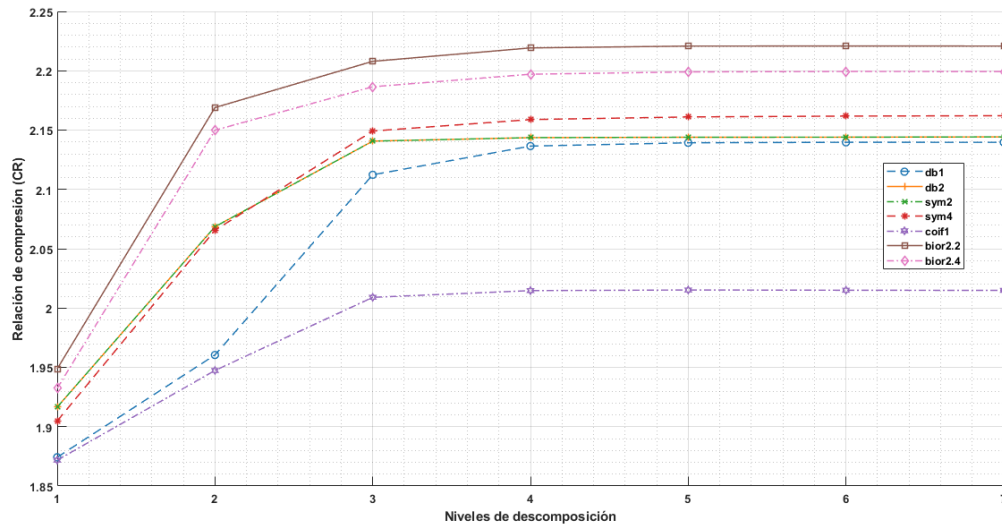
Las *wavelets* que permiten obtener las *CR* más altas al implementar el algoritmo LZW, son las mismas que fueron obtenidas para el algoritmo Huffman, es decir, el método LZW también presenta una alta dependencia de los valores de entropía en los coeficientes resultantes, exhibiendo mejores rendimientos en cuanto a compresión cuando los valores de entropía son menores. En las Figuras 4.16, 4.17 y 4.18 se observa la comparación entre las *wavelets* que al implementar el algoritmo de codificación LZW obtuvieron las *CR* más altas para imágenes CT, MRI y US respectivamente.



50 Figura 4.16. Comparación *CR* para familias *wavelet* sobre imágenes CT - LZW.



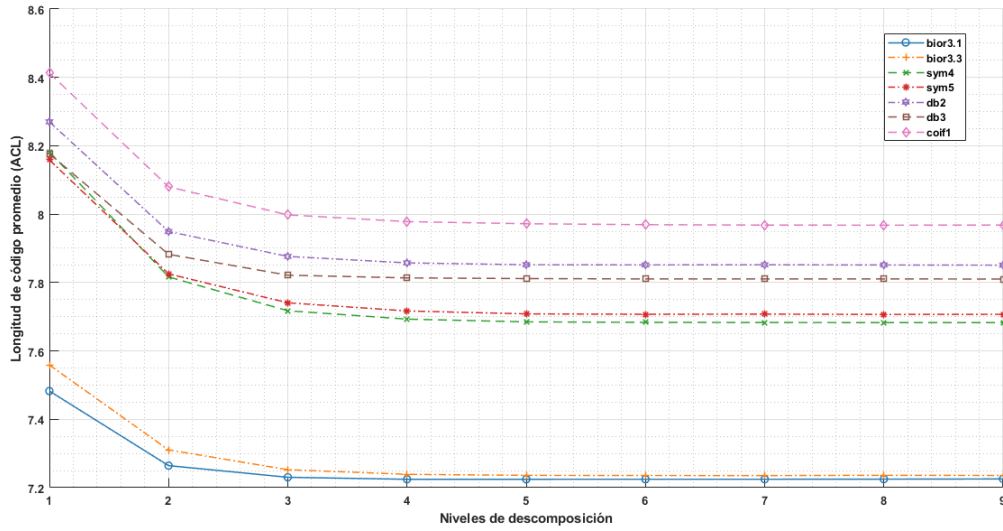
51 Figura 4.17. Comparación *CR* para familias *wavelet* sobre imágenes MRI - LZW.



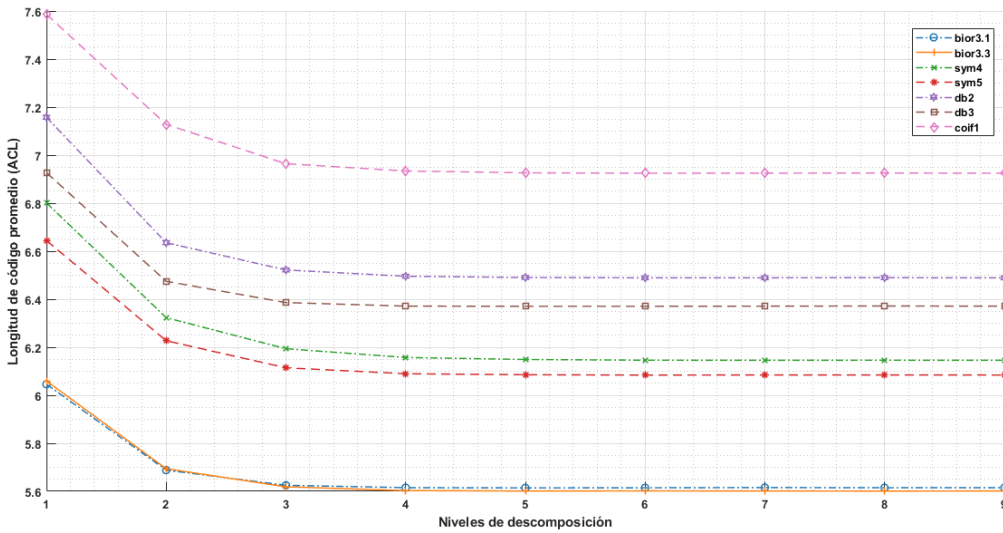
52Figura 4.18. Comparación CR para familias *wavelet* sobre imágenes US - LZW.

El comportamiento de la CR al implementar el algoritmo LZW para la codificación de los coeficientes de las diferentes *wavelets* comparadas es muy similar al presentado en el análisis del algoritmo Huffman, ya que se obtienen CR máximas para las *wavelets* con valores de entropía mínimos y al alcanzar el cuarto nivel de descomposición se tiene un comportamiento asintótico, donde no es posible seguir aumentando el grado de compresión. La principal diferencia en términos de CR entre la implementación del algoritmo Huffman y LZW es que mediante el primer algoritmo se logra una compresión más alta de las imágenes analizadas, por lo que el algoritmo Huffman resulta una mejor opción que LZW al momento de comprimir imágenes médicas de tipo CT, MRI y US. Con LZW se obtienen máximos de CR de 2.31934, 3.53574 y 2.21925 para CT, MRI y US respectivamente.

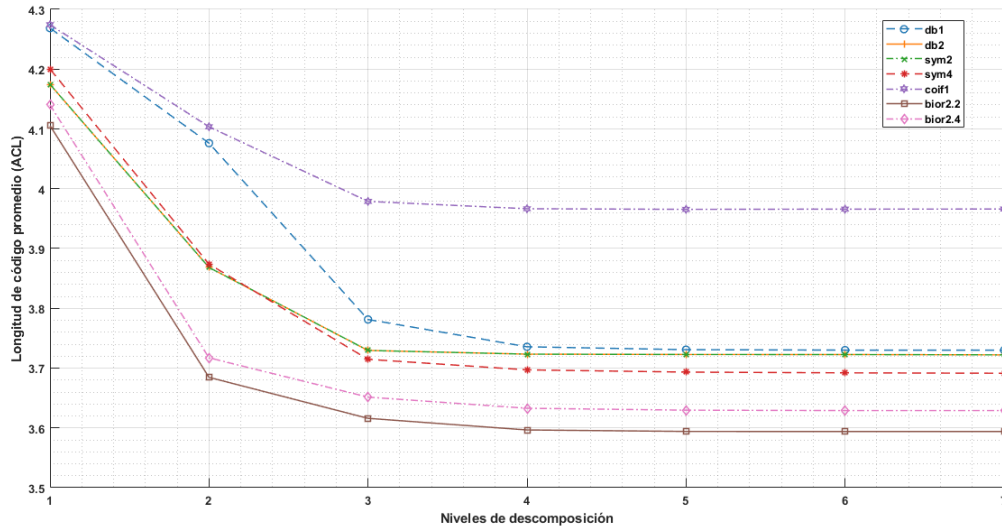
En las Figuras 4.19, 4.20 y 4.21 se muestran las comparativas de ACL obtenidas con el algoritmo LZW para imágenes CT, MRI y US respectivamente. Puede verse que, de manera general el comportamiento de la *eficiencia* es decreciente, es decir que, a medida que aumenta el número de niveles de descomposición es más difícil alcanzar el valor de la entropía ya que esta se hace cada vez menor, también se tiene que para los tres tipos de imágenes, con el algoritmo LZW, las ACL de las palabras código generadas son mayores que las obtenidas con el algoritmo Huffman, i.e., el algoritmo LZW logra acercarse en menor proporción al valor teórico establecido por la entropía de los coeficientes *wavelet*, con lo que puede decirse que el método de codificación LZW implementado es menos eficiente que el método Huffman para la compresión de imágenes médicas CT, MRI y US. Lo anterior se confirma mediante los valores de *eficiencia* obtenidos para este método de codificación, donde se obtuvo un máximo de 97.7035% para imágenes US, 91.421% para imágenes MRI y 88.181% para imágenes CT, estos valores se muestran en las Figuras 4.22, 4.23 y 4.24.



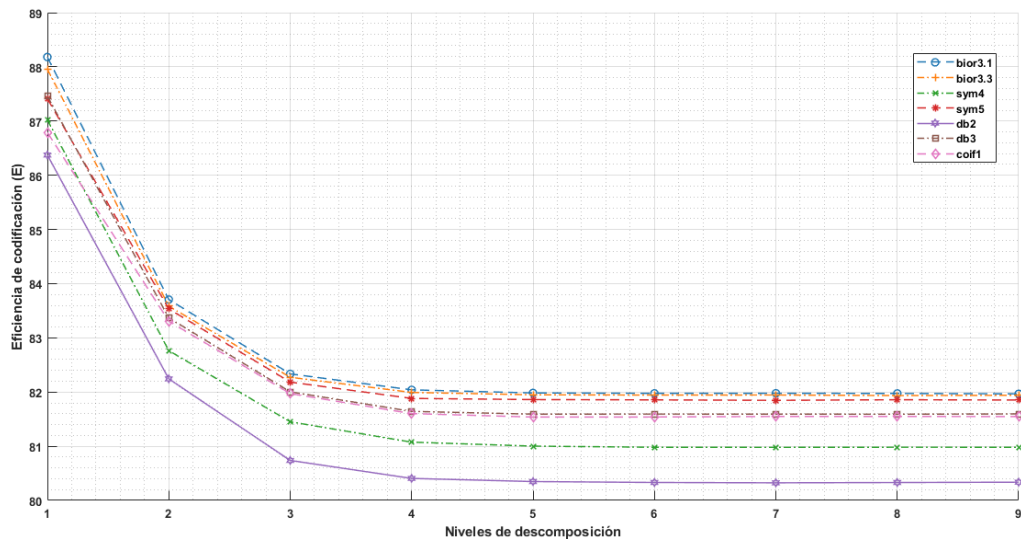
53Figura 4.19. Comparación *ACL* para familias *wavelet* sobre imágenes CT - LZW.



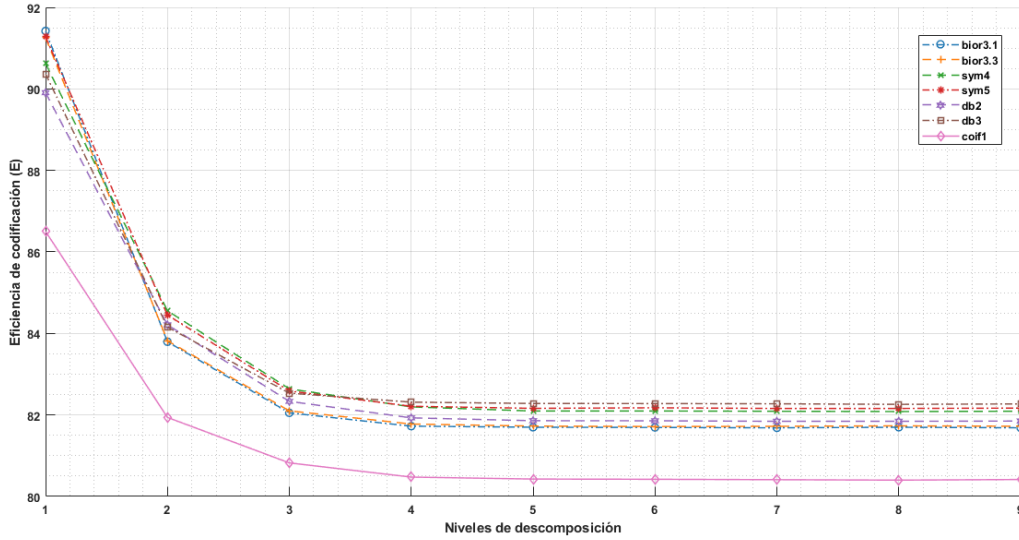
54Figura 4.20. Comparación *ACL* para familias *wavelet* sobre imágenes MRI - LZW.



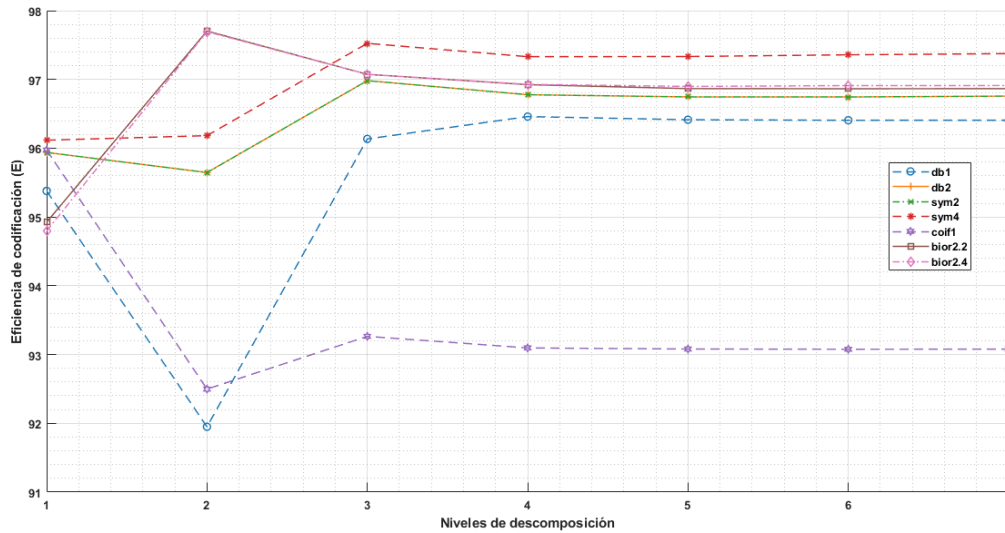
55Figura 4.21. Comparación *ACL* para familias *wavelet* sobre imágenes US - LZW.



56Figura 4.22. Comparación *eficiencia* para familias *wavelet* sobre imágenes CT - LZW.



57Figura 4.23. Comparación *eficiencia* para familias *wavelet* sobre imágenes MRI - LZW.



58Figura 4.24. Comparación *eficiencia* para familias *wavelet* sobre imágenes US - LZW.

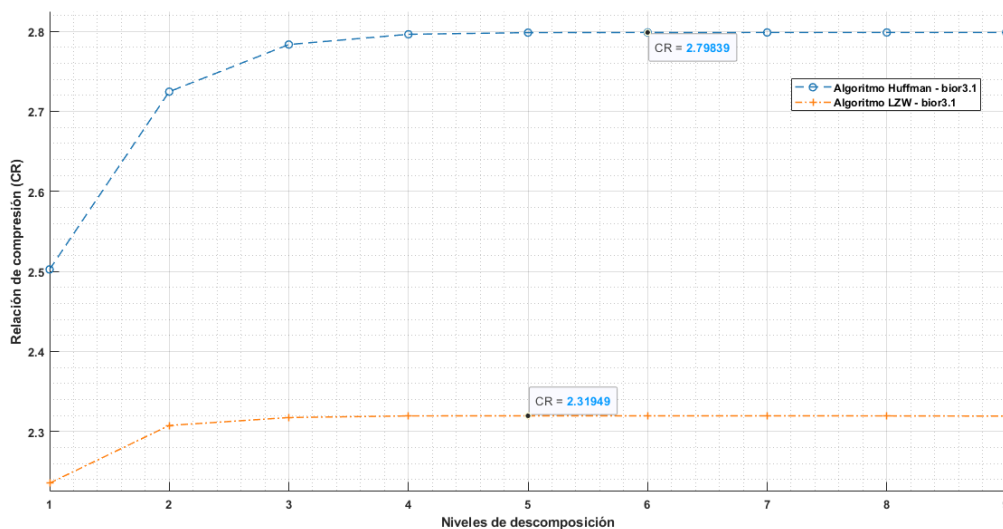
En la Figura 4.24 puede verse que, para imágenes US, la *eficiencia* de LZW presenta un comportamiento distinto al obtenido para imágenes CT y MRI, se puede deducir que, para casos donde la entropía es baja, el aumento del número de niveles de descomposición tiende a favorecer la disminución de la *ACL* en una mayor proporción, por lo que la *eficiencia* irá en aumento. Además del valor de entropía de los coeficientes *wavelet*, también debe tenerse en cuenta la forma en cómo estos están repartidos, ya que, con el fin de maximizar el rendimiento del método LZW se hace necesario que se tengan valores repetitivos y que estos sean contiguos ya que entonces se logrará crear concatenaciones de símbolos más largas y reducir la *ACL*, con lo cual se logra una mayor *CR*. Se observa que la



eficiencia del algoritmo LZW implementado se maximiza al codificar imágenes de tipo US, llegando a valores de hasta 97.7%, lo que indica que este método obtiene mejores resultados para imágenes con regiones con características estructurales repetitivas y donde la entropía presenta valores bajos.

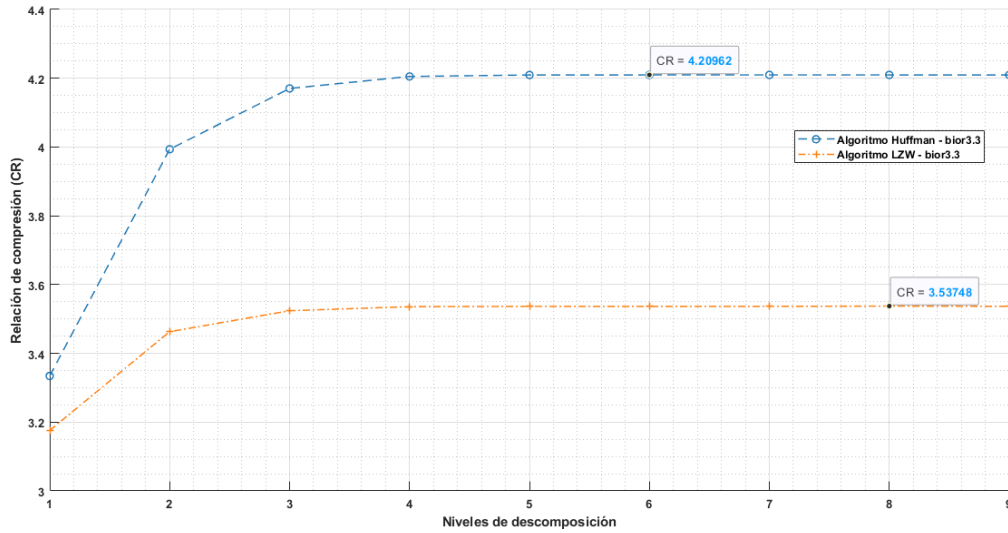
4.3.1.3. Algoritmo Huffman vs LZW

Finalmente, en el proceso de evaluación del desempeño de los diferentes esquemas *lifting* de la IWT para la compresión de imágenes médicas CT, MRI y US en un escenario sin pérdidas, se efectúa la comparación de los mejores rendimientos en términos de *CR*, esto con el fin de determinar las mejores configuraciones del esquema *lifting* y el algoritmo de codificación más propicio para la compresión de cada tipo de imagen. En las Figuras 4.25, 4.26 y 4.27 se comparan los mejores rendimientos obtenidos, donde en color azul se presentan los resultados para el algoritmo Huffman y en color naranja los resultados para el algoritmo LZW.



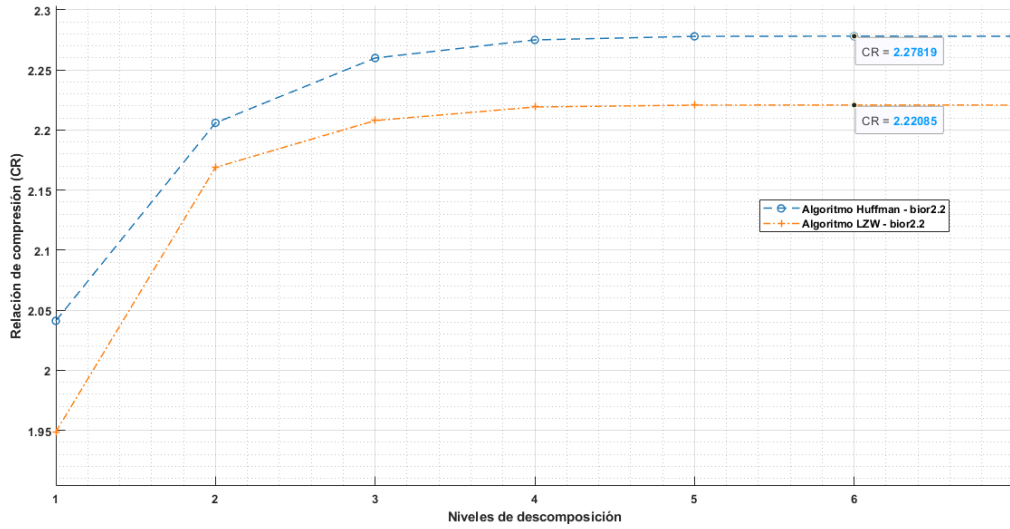
59Figura 4.25. Comparación *CR* Huffman vs LZW sobre imágenes CT.

Se observa de la Figura 4.25 que, sobre el conjunto de imágenes CT de prueba, se logró una *CR* promedio máxima de 2.7984, alcanzada por el algoritmo Huffman al descomponer las imágenes con el esquema *lifting* relacionado a la *wavelet bior3.1* a seis niveles de descomposición. Por otra parte, para el algoritmo LZW, se obtuvo una *CR* máxima de 2.3195, para 5 niveles de descomposición con la *wavelet bior3.1*. La *CR* obtenida por el algoritmo Huffman es aproximadamente 1.2 veces más alta que la obtenida por LZW para comprimir imágenes de tipo CT. Aunque LZW requiere de un menor número de niveles de descomposición para estabilizarse en un valor máximo, se tiene que, por ejemplo, para un valor de entropía de 5.856, la *ACL* es de 5.8842 con el algoritmo Huffman, mientras que con LZW este valor es de 7.2246. Con lo anterior se reafirma la ventaja del método Huffman sobre LZW para imágenes con una alta variabilidad en su estructura.



60Figura 4.26. Comparación *CR* Huffman vs LZW sobre imágenes MRI.

Para las imágenes MRI se obtuvo una *CR* promedio máxima de 4.2096 al realizar la descomposición mediante el esquema *lifting* relacionado a la *wavelet bior3.3* a seis niveles de descomposición para el algoritmo Huffman, mientras que con el algoritmo LZW se alcanza una *CR* máxima de 3.5375 a 8 niveles para la *wavelet bior3.3*. En la Figura 4.26, en color azul se muestra el mejor desempeño obtenido mediante el algoritmo Huffman para imágenes MRI, logrado con la *wavelet bior3.3*. Por otro lado, en color naranja se grafica el mejor rendimiento del algoritmo LZW obtenido con la misma *wavelet*. Se observa que para el caso de las imágenes MRI, la diferencia entre el desempeño del algoritmo Huffman y LZW es ligeramente menor que en el caso de las imágenes CT, esto debido a que el valor promedio de entropía en este caso es más bajo, lo cual favorece el desempeño de LZW, esto es, los valores de *ACL* se acercan en mayor medida al límite establecido por la entropía, por lo que la *eficiencia* de este algoritmo de codificación aumenta con respecto a los valores obtenidos para imágenes CT. Se obtiene que la *CR* máxima obtenida por el método Huffman es aproximadamente 1.19 veces más alta que la obtenida por LZW para comprimir imágenes de tipo MRI. Para los tres tipos de imágenes estudiados en el presente trabajo, se obtuvieron los mejores rendimientos en cuanto a relación de compresión mediante las *wavelets* de la familia Biorthogonal, lo cual es similar a lo obtenido en [36] donde se obtuvo que el mejor rendimiento para la compresión de imágenes radiológicas en escala de grises fue alcanzado por la *wavelet bior6.8*, la cual pertenece a la familia *Biorthogonal*.



61Figura 4.27. Comparación CR Huffman vs LZW sobre imágenes US.

Tal como se muestra en la Figura 4.27, en la compresión sin pérdidas de imágenes tipo US es donde el algoritmo LZW logra alcanzar el desempeño más cercano al obtenido por el algoritmo Huffman, esto se debe a que la *eficiencia* de este método resulta favorecida por la naturaleza de este tipo de imágenes, las cuales presentan una estructura altamente repetitiva. La *wavelet bior2.2* maximiza la *CR*, para 6 niveles de descomposición, alcanzando valores de 2.2782 y 2.2209 para Huffman y LZW respectivamente, con lo que Huffman alcanza una *CR* que es aproximadamente 1.025 veces más alta que la obtenida por LZW.

Según los resultados obtenidos, entre menor sea la entropía, el algoritmo LZW alcanza un mejor rendimiento debido a la redundancia presente en las imágenes analizadas y se acerca más al desempeño de Huffman, en otras palabras, la diferencia entre el desempeño del algoritmo Huffman y LZW disminuye a medida que la entropía de los coeficientes *wavelet* decrece.

Con el fin de verificar la calidad de la reconstrucción, en el Apéndice E se muestran ejemplos de imágenes tipo CT, MRI y US comprimidas y reconstruidas sin pérdidas mediante las mejores configuraciones anteriormente descritas.

4.3.2. Escenario de compresión con pérdidas

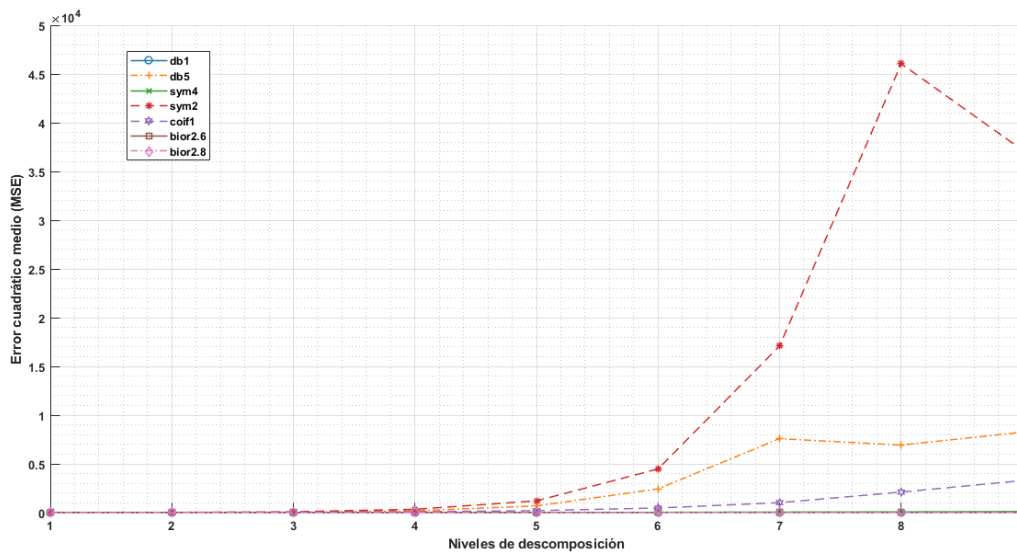
Aunque el principal objetivo del presente trabajo de grado es efectuar un estudio sobre el desempeño de diferentes construcciones del esquema *lifting* en un escenario de compresión sin pérdidas para imágenes médicas diagnósticas, se realiza una extensión del estudio llevado a cabo hacia escenarios de compresión con pérdidas relacionados con aplicaciones diferentes al diagnóstico médico, donde la fidelidad de las imágenes no es un factor tan crítico y puede hacerse conveniente alcanzar mayores tasas de compresión a expensas de la reducción de la acuidad de las mismas.



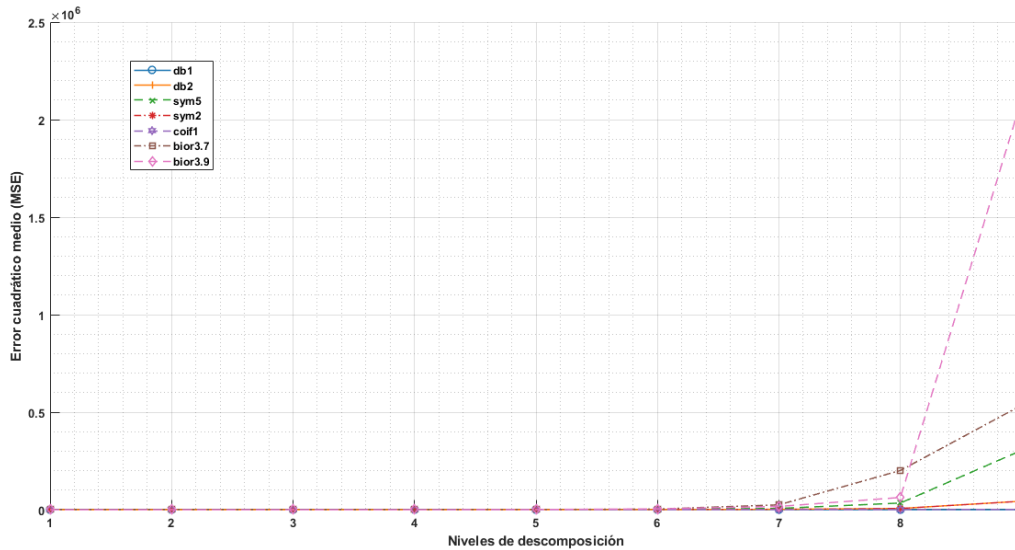
De acuerdo con lo anterior, se implementa un cuantificador con el fin de reducir el número de valores únicos en los coeficientes *wavelet* y con ello la cantidad de información a codificar, de tal forma que se logre una mayor compresión de las imágenes analizadas y que a la par se garantice una buena calidad de éstas sin comprometer su información estructural más relevante.

Para la implementación del escenario de compresión con pérdidas se usó el método de Lloyd-Max, el cual permite construir un cuantificador no uniforme que minimiza el error de cuantificación, i.e., busca minimizar el parámetro *MSE*, el cual proporciona una medida de la distorsión introducida en la imagen. Al minimizar el *MSE* se maximiza la *PSNR*, siendo ésta el parámetro objetivo para determinar los mejores rendimientos en el escenario de compresión con pérdidas para los diferentes tipos de imágenes y construcciones del esquema *lifting*. Las imágenes CT y MRI se cuantifican a 2048 niveles (11 bits por pixel) y las imágenes US son cuantificadas con 128 niveles (7 bits por pixel). Posterior a la cuantificación se realiza una codificación de longitud fija sobre los valores obtenidos.

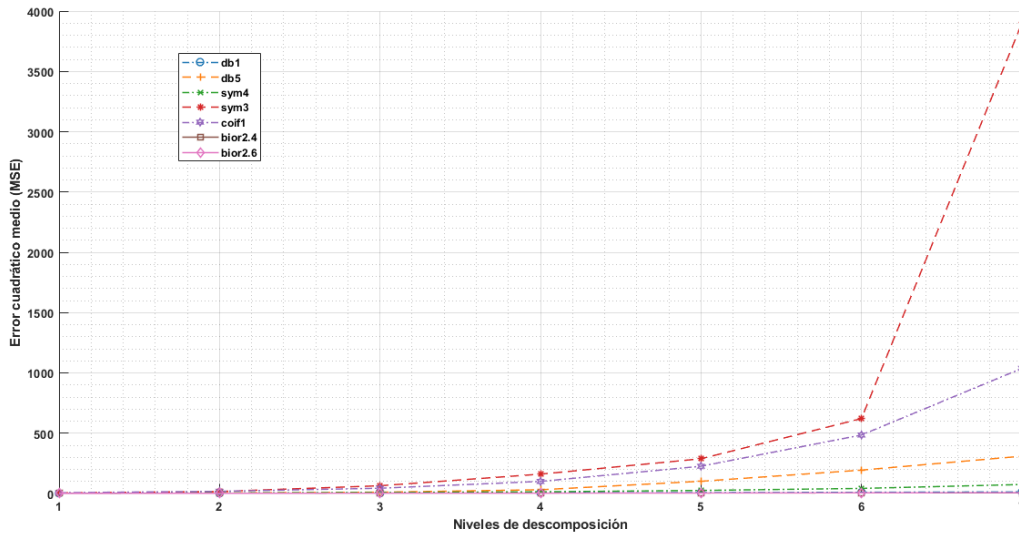
Para cada familia *wavelet* se determinan los dos órdenes que minimizan el *MSE*, y por tanto maximizan la *PSNR*, las gráficas obtenidas para cada familia y tipo de imagen pueden verse en el Apéndice F. Las Figuras 4.28, 4.29 y 4.30 muestran la comparación de las *wavelets* con valores de *MSE* más bajos para imágenes CT, MRI y US respectivamente.



62Figura 4.28. Comparación *MSE* para familias *wavelet* sobre CT - Cuantificador.



63Figura 4.29. Comparación *MSE* para familias *wavelet* sobre MRI – Cuantificador.



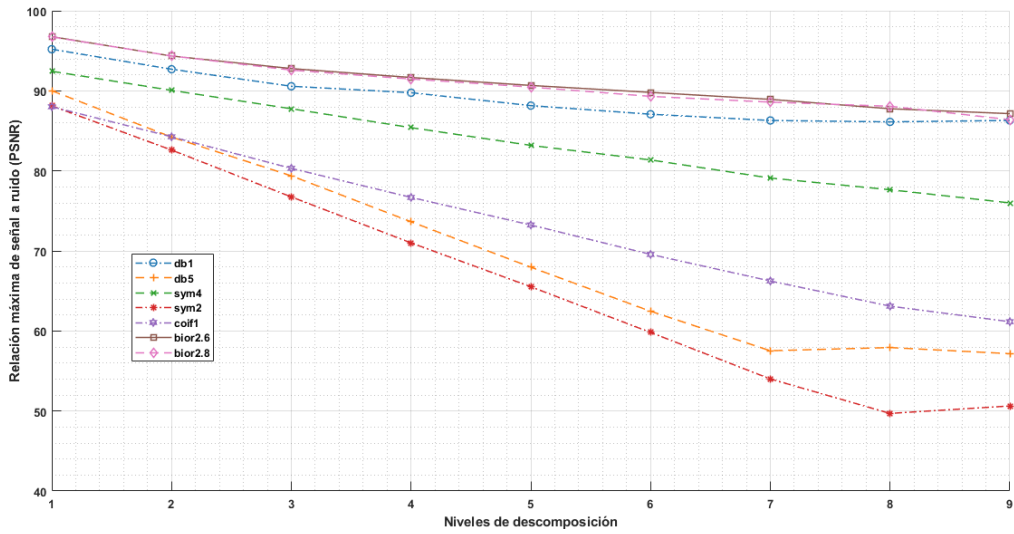
64Figura 4.30. Comparación *MSE* para familias *wavelet* sobre US - Cuantificador.

Se observa que, para los tres tipos de imágenes, el *MSE* presenta un comportamiento creciente a medida que se incrementa el número de niveles de descomposición, lo cual quiere decir que, al contrario de el escenario de compresión sin pérdidas, para la compresión con pérdidas, resulta más conveniente analizar las imágenes de prueba con un número bajo de niveles de descomposición, ya que esto garantiza que la distorsión que se introduce en las imágenes reconstruidas es la menor posible.

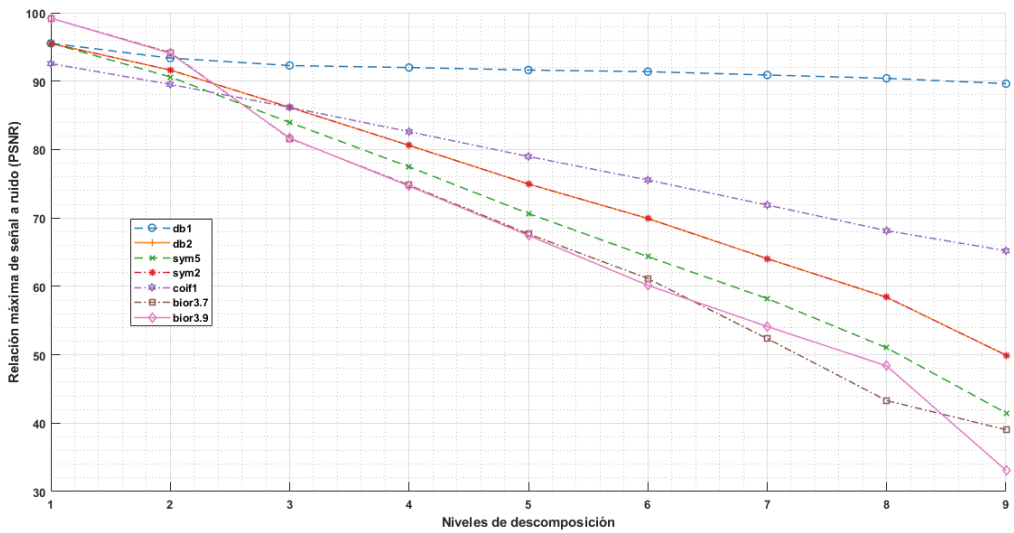
Las Figuras 4.31, 4.32 y 4.33 muestran las mejores *PSNR* obtenidas, gracias a las cuales se determinan las *wavelets* que maximizan el rendimiento del



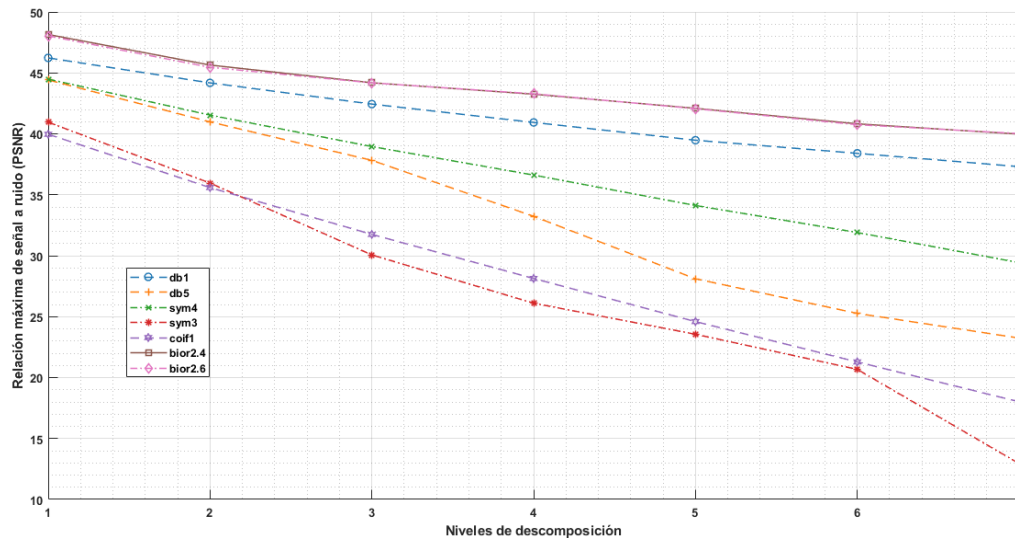
cuantificador implementado y logran la mejor calidad en la reconstrucción para cada uno de los tipos de imágenes de prueba.



65Figura 4.31. Comparación *PSNR* familias *wavelet* sobre CT - Cuantificador.



66Figura 4.32. Comparación *PSNR* para familias *wavelet* sobre MRI - Cuantificador.



67Figura 4.33. Comparación *PSNR* para familias *wavelet* sobre US - Cuantificador.

Para imágenes CT, el mejor desempeño del cuantificador se obtiene con la *wavelet bior2.6*, alcanzando una *PSNR* máxima de 96.7652 dB a 1 nivel de descomposición. En el caso de las imágenes MRI, se obtiene una *PSNR* máxima de 99.1996 dB con la *wavelet bior3.9* a 1 nivel de descomposición. Finalmente, sobre imágenes US se obtiene una *PSNR* máxima de 48.1519 dB con la *wavelet bior2.4* a 1 nivel de descomposición. A partir de estos resultados se puede inferir que en todos los casos la familia *Biorthogonal* maximiza el rendimiento del cuantificador implementado y lo más recomendable es realizar una descomposición a 1 nivel, dado que hace posible que la distorsión introducida en las imágenes recuperadas presente el menor valor posible. En el Apéndice G se muestran algunos ejemplos de imágenes CT, MRI y US comprimidas y reconstruidas mediante el método de compresión con pérdidas implementado en el presente trabajo de grado.

4.4. RESULTADOS CASO 4: ESQUEMA LIFTING TRADICIONAL VS ESQUEMAS UPDATE-FIRST

En el presente caso de prueba se proponen cuatro construcciones del esquema *lifting Update-First*, dos de ellas para el escenario de compresión sin pérdidas y dos para compresión con pérdidas, esto con el fin de realizar la evaluación del desempeño de los esquemas propuestos con respecto a los esquemas *lifting* en su configuración tradicional evaluados en los casos de prueba anteriores.

4.4.1. Lifting tradicional vs *Update-First* - compresión sin pérdidas

Para el escenario de compresión sin pérdidas se prueban los esquemas *lifting Update-First* propuestos solamente para el método Huffman, ya que el



objetivo de este caso de prueba es comparar el efecto de variar la construcción del esquema *lifting* y el análisis para el algoritmo LZW puede extraerse a partir de éste.

La construcción de los esquemas *Update-First* propuestos se realiza a partir de un enfoque experimental, combinando diferentes pasos de actualización y predicción ya presentes en las construcciones de los esquemas *lifting* proporcionadas por la herramienta MATLAB y usando el sistema propuesto para evaluar las métricas objetivo, en este caso la *CR* para determinar los mejores desempeños.

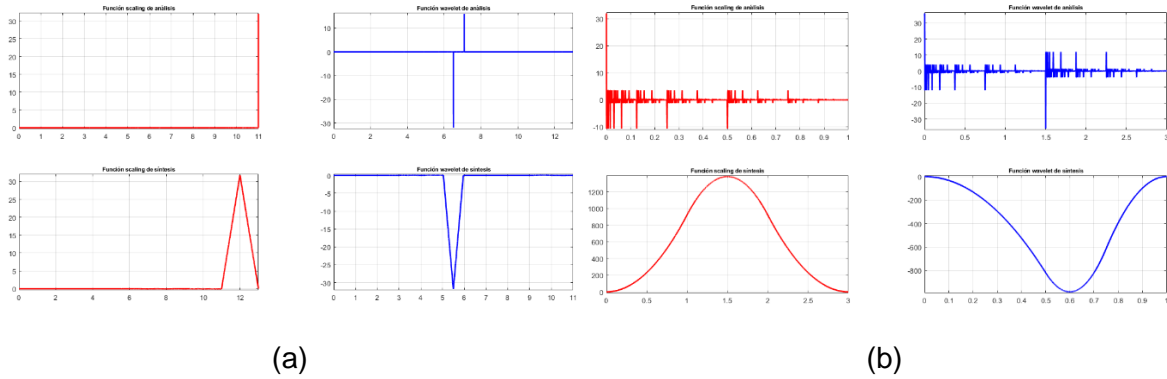
Los dos esquemas propuestos para el escenario de compresión sin pérdidas se construyen mediante los pasos *lifting* mostrados en la Tabla 4.6.

Tabla 4.6. Esquemas *lifting* propuestos, escenario sin pérdidas.

		Pasos <i>lifting</i>	Coefficientes	<i>MaxOrder</i>
Esquema propuesto 1	1	<i>Update</i>	[-5.0873e-04, 0.0019]	5
	2	<i>Predict</i>	[-0.5, -0.5]	1
		Pasos <i>lifting</i>	Coefficientes	<i>MaxOrder</i>
Esquema propuesto 2	1	<i>Update</i>	-0.3333	-1
	2	<i>Predict</i>	[-0.3748, -1.1248]	1

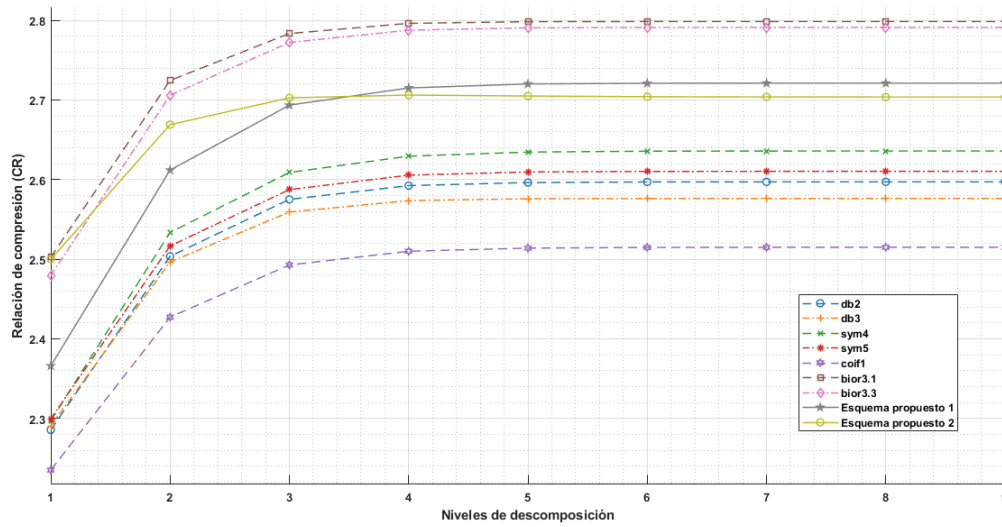
Los parámetros *NormalizationFactors* y *MaxOrder* se dejan sin modificaciones en ambos casos. Los coeficientes que definen el paso de predicción se modifican ligeramente en el segundo esquema propuesto con el fin de mejorar la *CR* alcanzada por dicho esquema.

La Figura 4.34 muestra las formas de las funciones *wavelet* y *scaling* para los esquemas propuestos.

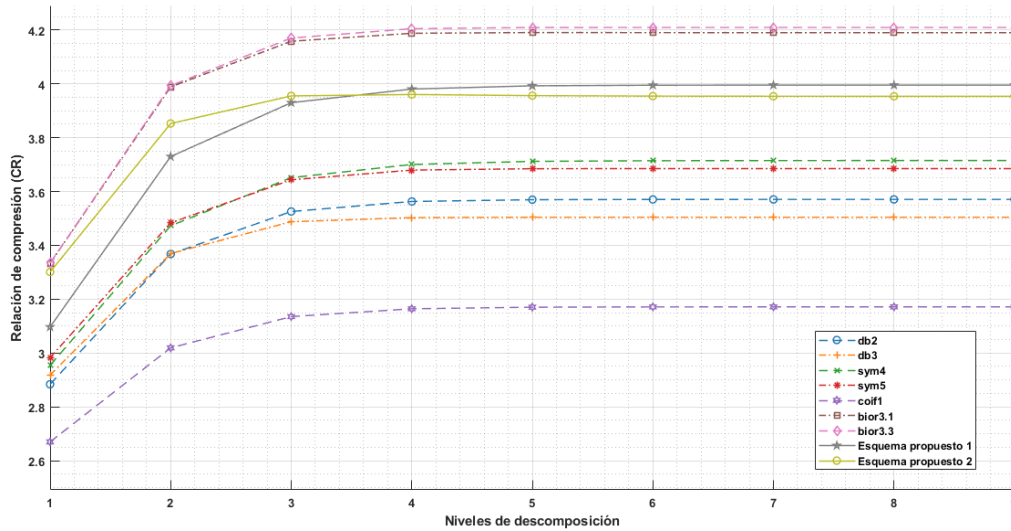


68Figura 4.34. Funciones *wavelet* y *scaling* a) propuesto 1; b) propuesto 2.

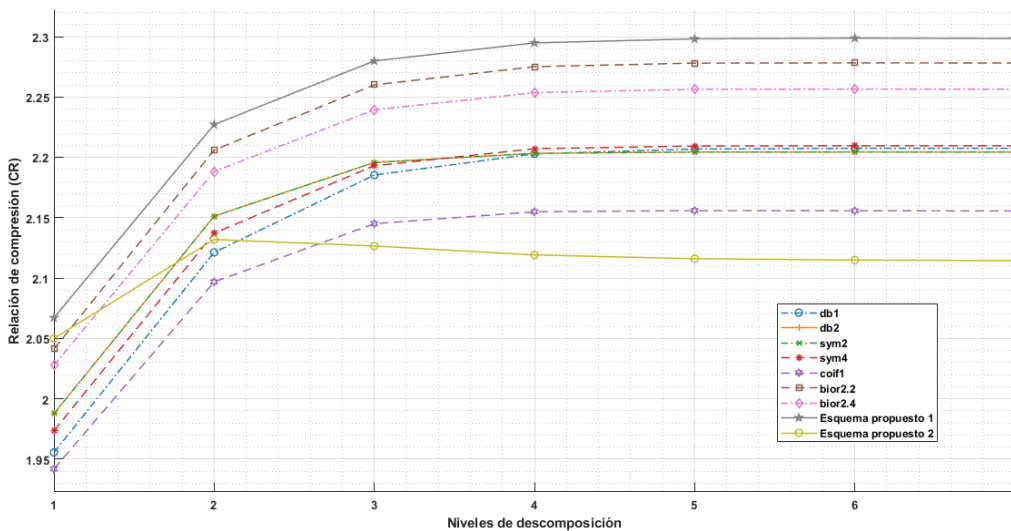
Las Figuras 4.35, 4.36 y 4.37 muestran la comparación en cuanto a *CR* entre los esquemas propuestos y los mejores rendimientos obtenidos en el caso de prueba 3, para la compresión sin pérdidas de imágenes CT, MRI y US respectivamente.



69Figura 4.35. Comparación *CR* esquemas *Update-First* propuestos vs tradicional sobre imágenes CT - Huffman.



70 Figura 4.36. Comparación *CR* esquemas *Update-First* propuestos vs tradicional sobre imágenes MRI - Huffman.



71 Figura 4.37. Comparación *CR* esquemas *Update-First* propuestos vs tradicional sobre imágenes US - Huffman.

Se observa que los esquemas *lifting Update-First* propuestos 1 y 2 presentan una *CR* de 2.71977 y 2.7087, estando cercanos a los mejores desempeños para imágenes CT y MRI (mejor que 5 de las 7 *wavelets*). Por otro lado, para imágenes tipo US es el esquema propuesto 1 el que tiene mejor desempeño para la compresión, en comparación con los esquemas tradicionales, alcanzando una *CR* de 2.29813, mientras que el esquema propuesto 2 no presenta un buen desempeño para la compresión de estas imágenes, aunque sí lo presenta para los otros tipos de imágenes. Esto da a entender que, el diseño y análisis de los esquemas *lifting* debe abordarse para cada caso específico, dado que las características



estructurales de las imágenes analizadas son un factor clave a considerar, ya que, según lo obtenido, no hay un esquema con el mejor desempeño para todos los tipos de imágenes.

Finalmente, es importante aclarar que, aunque los esquemas propuestos siguen la estructura *Update-First*, no son las únicas *wavelets* probadas en este trabajo que tienen esta estructura, siendo las *wavelets bior3.1* y *bior3.3* (ver Tabla 3.3) dos ejemplos sobresalientes. Dado que estas *wavelets* permiten obtener los mejores resultados de *CR* para los tres tipos de imágenes de prueba, es posible concluir que esta variante del esquema *lifting* presenta ventajas con respecto al esquema tradicional en la compresión sin pérdidas y es eficiente principalmente sobre imágenes con estructuras complejas como CT y MRI.

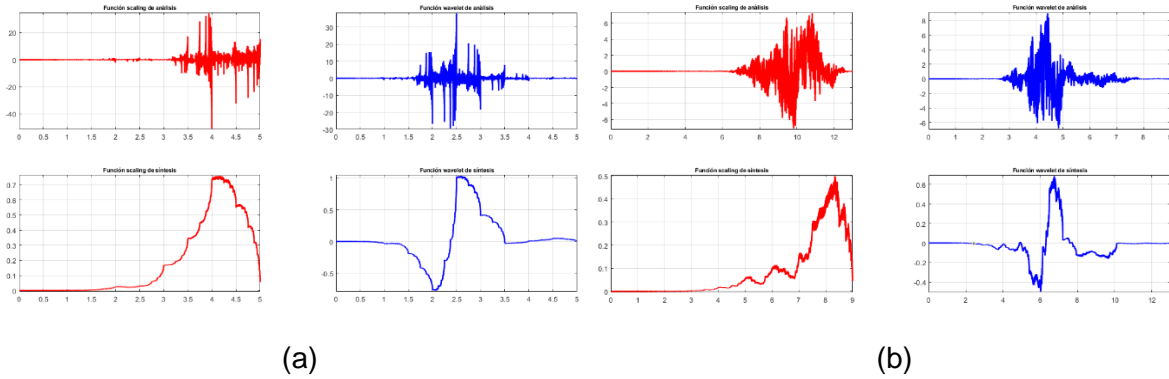
4.4.2. *Lifting* tradicional vs *Update-First* - compresión con pérdidas

Los dos esquemas propuestos para el escenario de compresión con pérdidas se construyen mediante los pasos *lifting* mostrados en la Tabla 4.7.

10Tabla 4.7. Esquemas *lifting* propuestos, compresión con pérdidas.

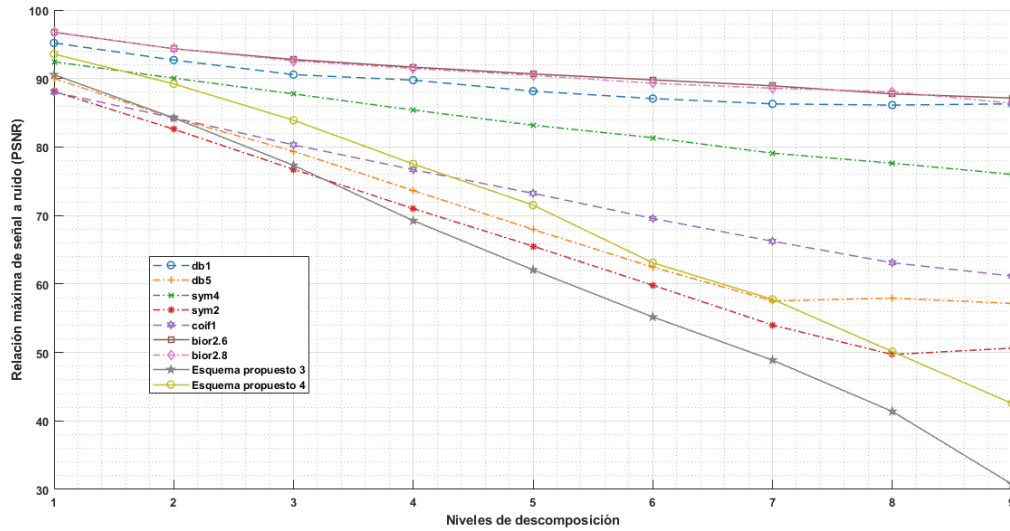
		Pasos <i>lifting</i>	Coeficientes	MaxOrder
Esquema propuesto 3	1	<i>Update</i>	[-0.1172, -0.2057]	1
	2	<i>Predict</i>	[-0.3750, -1.1250]	1
	3	<i>Update</i>	0.5	0
		Pasos <i>lifting</i>	Coeficientes	MaxOrder
Esquema propuesto 4	1	<i>Update</i>	[-0.0447, -0.2332]	3
	2	<i>Predict</i>	[-0.3750, -1.1250]	1
	3	<i>Update</i>	[-0.0833, 0.4444, 0.0833]	1

La Figura 4.38 muestra las formas de las funciones *wavelet* y *scaling* para los esquemas propuestos 3 y 4.

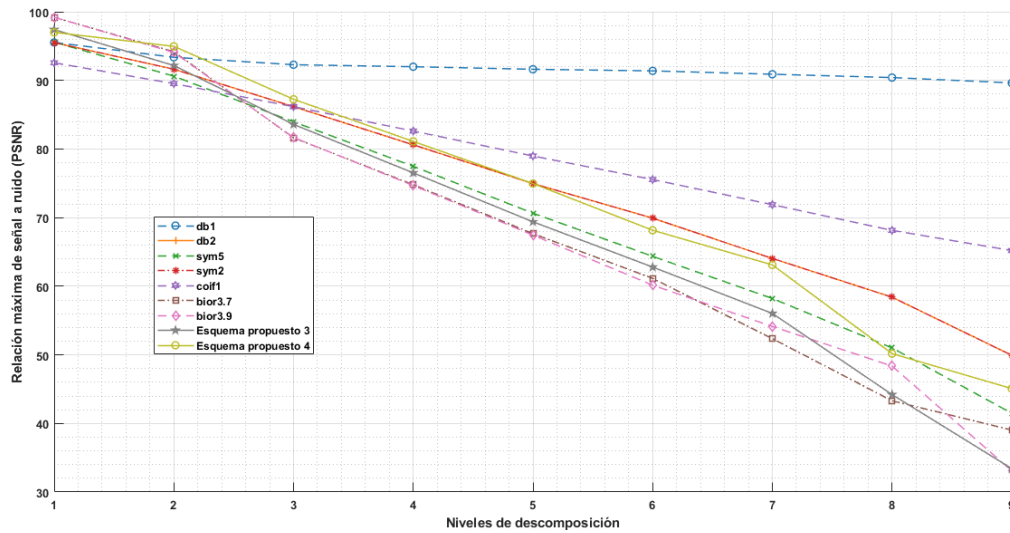


72Figura 4.38. Funciones *wavelet* y scaling a) propuesto 3; b) propuesto 4.

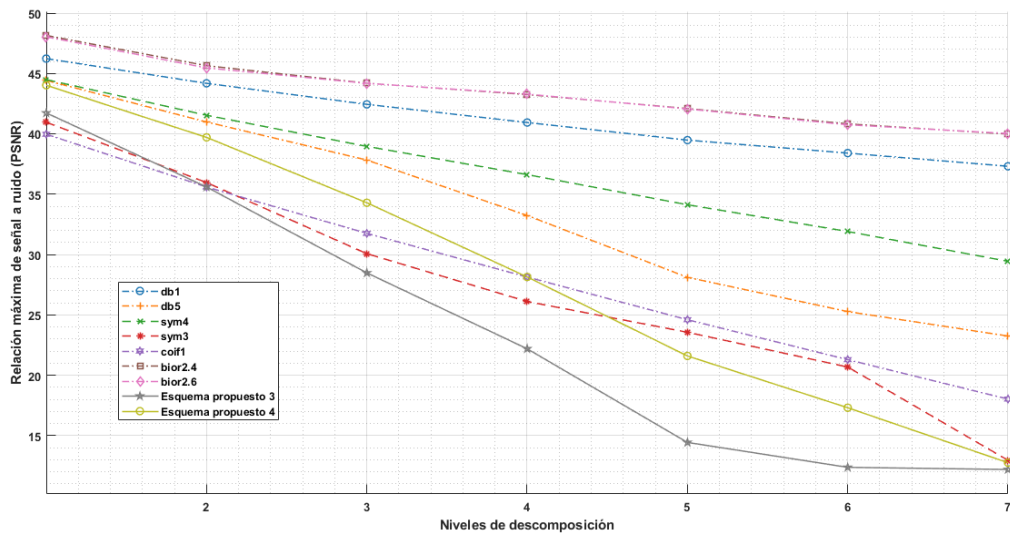
Las Figuras 4.39, 4.40 y 4.41 muestran la comparación en cuanto a *PSNR* entre los esquemas propuestos y los mejores rendimientos obtenidos en el caso de prueba 3 para la compresión con pérdidas de imágenes CT, MRI y US respectivamente.



73Figura 4.39. Comparación *PSNR* esquemas *Update-First* propuestos vs tradicional sobre imágenes CT - Cuantificador.



74Figura 4.40. Comparación *PSNR* esquemas *Update-First* propuestos vs tradicional sobre imágenes MRI - Cuantificador.



75Figura 4.41. Comparación *PSNR* esquemas *Update First* propuestos vs tradicional sobre imágenes US - Cuantificador.

Se obtiene que el esquema *lifting Update-First* presenta valores altos de *PSNR* cuando se considera un número bajo de niveles de descomposición; sin embargo, no se observa una clara ventaja de la implementación de esta variante de los esquemas *lifting* en el escenario de compresión con pérdidas de imágenes médicas CT, MRI o US, de hecho, pudo observarse que, con el aumento del número de niveles de descomposición, el esquema *Update-First* es más propenso a generar una alta distorsión en las imágenes reconstruidas, por lo que se puede decir que en escenarios de compresión con pérdidas es de preferencia contar con una implementación del esquema *lifting* en su configuración tradicional. También pudo



observarse en la etapa de diseño, que la configuración en dos pasos U-P (*Update-Predict*) con la cual se logró buenos desempeños en el escenario de compresión sin pérdidas no tuvo un buen rendimiento en la compresión con pérdidas, por lo cual fue necesario agregar un tercer paso de actualización a los esquemas propuestos, lo que indica una mayor complejidad al diseñar esquemas *Update-First* en este escenario, ya que deben considerarse factores diferentes a la entropía y se requiere un mayor número de pasos *lifting* con el fin de alcanzar una mayor calidad en la reconstrucción de las imágenes de prueba.



CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

En este capítulo se presentan las conclusiones derivadas del desarrollo del presente trabajo de grado. También se plantean diferentes trabajos futuros, los cuales pretenden extender lo aquí obtenido y basarse en las implementaciones prácticas aquí realizadas.

5.1. Conclusiones

- La aplicación del esquema *lifting* para la compresión de imágenes médicas diagnósticas requiere considerar características claves en las imágenes bajo análisis, principalmente, su complejidad estructural, simetría y rango dinámico, ya que éstas resultan determinantes en el desempeño de los esquemas *lifting* y los métodos de codificación implementados.
- En escenarios de compresión sin pérdidas, es conveniente realizar la descomposición *wavelet* considerando un alto número de niveles, el cual se establece entre 4 y 5 para las imágenes analizadas, ya que esto permite minimizar la entropía de los coeficientes en el dominio transformado, lo cual conlleva a maximizar la relación de compresión obtenida por los métodos de codificación de fuente.
- En escenarios de compresión con pérdidas, la distorsión introducida sobre las imágenes procesadas aumenta conforme se incrementa el número de niveles de descomposición, por lo que con el fin de maximizar la calidad de las imágenes reconstruidas se debe considerar sólo 1 nivel de descomposición *wavelet*.
- El esquema *Update-First* es una variante de los esquemas *lifting* que permite obtener un mejor desempeño en comparación al esquema *lifting* tradicional para la compresión sin pérdidas de imágenes médicas tipo CT, MRI y US.
- El método de codificación Huffman en conjunto con la IWT es altamente efectivo en la compresión sin pérdidas de imágenes médicas tipo CT, MRI y US, superando al método LZW en cuanto a grado de compresión, eficiencia de codificación y tiempo de procesamiento.
- La elección de la familia *wavelet* y su respectivo orden, i.e., el esquema *lifting* implementado, tiene un impacto significativo en la compresión de imágenes médicas diagnósticas. En particular, las *wavelets* de ordenes bajos demostraron ser más efectivas para la minimización de la entropía de los coeficientes y la maximización de la relación de compresión en escenarios de compresión sin pérdidas.



- La familia *wavelet Biorthogonal* posee características óptimas que permiten obtener los mejores desempeños en la compresión de imágenes CT, MRI y US con la IWT en escenarios con y sin pérdidas.

5.2. Trabajos futuros

A partir de los resultados y conclusiones obtenidos mediante el desarrollo del presente trabajo de grado, se plantean los siguientes trabajos futuros:

- Evaluar el desempeño de esquemas *lifting* para la compresión de diversos tipos de imágenes médicas considerando las familias *wavelet Reverse Biorthogonal* y *Cohen-Daubechies-Feauveau*.
- Evaluar comparativamente el desempeño de esquemas *lifting* de la IWT sobre diferentes señales e imágenes en campos como la ingeniería civil, biomedicina, ingeniería mecánica, ingeniería aeroespacial, geofísica, etc.
- Considerar técnicas de Aprendizaje Automatizado para implementar un algoritmo de diseño de nuevos esquemas *lifting* personalizados, con el fin de mejorar la compresión de imágenes médicas diagnósticas.



REFERENCIAS

- [1] Ritter, Felix, et al. Medical image analysis. IEEE pulse, vol. 2, no 6, p. 60-70, 2011.
- [2] Kasban, Hany; EL-BENDARY, M. A. M.; SALAMA, D. H. A comparative study of medical imaging techniques. International Journal of Information Science and Intelligent System, vol. 4, no 2, p. 37-58, 2015.
- [3] V. Chan and A. Perlas, "Basics of ultrasound imaging," in *Atlas of Ultrasound-Guided Procedures in Interventional Pain Management*, Springer, pp. 13–19, 2011.
- [4] Tian, Da-Zeng; HA, Ming-Hu. Applications of wavelet transform in medical image processing. In Proceedings of 2004 international conference on machine learning and cybernetics (IEEE Cat. No. 04EX826). IEEE, p. 1816-1821, 2004.
- [5] Calderbank, A. Robert, et al. "Lossless image compression using integer to integer wavelet transforms." Proceedings of International Conference on Image Processing. Vol. 1. IEEE, 1997.
- [6] Bentley, Paul M., and J. T. E. McDonnell. "Wavelet transforms: an introduction." Electronics & communication engineering journal 6.4: 175-186, 1994.
- [7] Sadowsky, John. The continuous wavelet transform: A tool for signal investigation and understanding. Johns Hopkins APL Technical Digest, vol. 15, p. 306-306, 1994.
- [8] Valens, Clemens. A really friendly guide to wavelets, 1999.
- [9] Edwards, Tim. Discrete wavelet transforms: Theory and implementation. Universidad de, vol. 1991, p. 28-35, 1991.
- [10] Daubechies, Ingrid. Ten lectures on wavelets. Society for industrial and applied mathematics, 1992.
- [11] M. Manuela S. Zambrano, "Cuantificación De Señales De Voz Utilizando Wavelets.", 2022.
- [12] Cody, Mac A. The fast wavelet transform: Beyond Fourier transforms. Dr. Dobb's Journal, vol. 17, no 4, 1992.
- [13] Mallat, Stephane G. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. IEEE transactions on



- pattern analysis and machine intelligence, vol. 11, no 7, p. 674-693, 1989.
- [14] Daubechies, Ingrid, et al. Wavelets on irregular point sets. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, vol. 357, no 1760, p. 2397-2413, 1999.
- [15] Boscardín, Liliana Beatriz; Castro, Liliana Raquel; Castro, Silvia Mabel. Wavelets definidas sobre grillas tetraédricas. En VI Congreso Argentino de Ciencias de la Computación, 2000.
- [16] Sweldens, Wim. The lifting scheme: A construction of second-generation wavelets. SIAM journal on mathematical analysis, vol. 29, no 2, p. 511-546, 1998.
- [17] Lounsbery, Michael; Derosé, Tony D.; Warren, Joe. Multiresolution analysis for surfaces of arbitrary topological type. ACM Transactions on Graphics (TOG), vol. 16, no 1, p. 34-73, 1997.
- [18] Stollnitz, Eric J.; Derosé, Anthony D.; Salesin, David H. Wavelets for computer graphics: a primer. 1. IEEE computer graphics and applications, vol. 15, no 3, p. 76-84, 1995.
- [19] Sweldens, Wim. The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets. Applied and computational harmonic analysis, vol. 3, no 2, p. 186-200, 1996.
- [20] Schroder, Peter; Sweldens, Wim. Spherical wavelets: Efficiently representing functions on the sphere. In Proceedings of the 22nd annual conference on Computer graphics and interactive techniques. p. 161-172, 1995.
- [21] Valens, Clemens. The fast lifting wavelet transform. En The Math Forum. p. 10-12, 1999.
- [22] Sweldens, Wim. Building your own wavelets at home. Technical Report, Industrial Mathematics Initiative, 1995.
- [23] Jansen, Maarten; Damerval, Christophe. Multiscale kernel smoothing using a lifting scheme. In 2009 17th European Signal Processing Conference. IEEE. p. 403-407, 2009.
- [24] R. L. Claypoole, G. M. Davis, W. Sweldens, and R. G. Baraniuk, "Nonlinear wavelet transforms, for image coding via lifting," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 12, no. 12, pp. 1449–1458, Dec. 2003.



- [25] Calderbank, A. Robert, et al. Wavelet transforms that map integers to integers. *Applied and computational harmonic analysis*, vol. 5, no 3, p. 332-369, 1998.
- [26] Inteco, L. N. Ingeniería del software: metodologías y ciclos de vida. I. N. Inteco, ingeniería del software: metodologías y ciclos de vida (págs. 49-50). España, 2009.
- [27] D. Com, Blogs, and V. Herrmann, “Wavelets II-Vanishing Moments and Spectral Factorization,” 2016.
- [28] E. Gómez-Luna, D. Silva, and G. Aponte, “Selección de una wavelet madre para el análisis frecuencial de señales eléctricas transitorias usando WPD - Selection of a mother wavelet for frequency analysis of transient electrical signals using WPD,” 2013.
- [29] G. Lindfield and J. Penny, “Analyzing Data Using Discrete Transforms,” in *Numerical Methods*, Elsevier, pp. 383–431, 2019.
- [30] Cedeño Pozo, Antonio; Trujillo, Rafael Arturo. Algoritmos para la reducción de ruido en señales industriales mediante la Transformada Wavelet Discreta, 2015.
- [31] M. A. Rahman and M. Hamada, “Lossless image compression techniques: A state-of-the-art survey,” *Symmetry*, vol. 11, no. 10. MDPI AG, Oct. 01, 2019.
- [32] A. Odat, M. A. Otair, M. Otair, and M. Al-Khalayleh, “Comparative study between LM-DH technique and Huffman coding technique Network Security, Neural network, NLP and AI, Data Mining and Big Data View Project Comparative Study between LM-DH Technique and Huffman Coding Technique,” 2015.
- [33] Bromiley, P. A.; Thacker, N. A.; Bouhova-Thacker, E. Shannon entropy, Renyi entropy, and information. *Statistics and Inf. Series* (2004-004), vol. 9, p. 2-8, 2004.
- [34] Strutz, Tilo; Rennert, Ines. Two-dimensional integer wavelet transform with reduced influence of rounding operations. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, vol. 2012, p. 1-18, 2012.
- [35] F. A. Binti Hamzah, S. Minewaki, T. Yoshida, and M. Iwahashi, “Reduction of rounding noise and lifting steps in non-separable four-dimensional quadruple lifting integer wavelet transform,” *EURASIP J Image Video Process*, vol. 2018, no. 1, Dec. 2018.



- [36] Tello Portillo, Juan Pablo. Compresión de imágenes radiológicas empleando transformada Wavelet, 2005.
- [37] Azpiroz-Leehan, J.; Lerallut, J.-F. Selection of biorthogonal filters for image compression of MR images using wavelet packets. *Medical engineering & physics*, vol. 22, no 5, p. 335-343, 2000.
- [38] Manduca, Armando; Said, Amir. Wavelet compression of medical images with set partitioning in hierarchical trees. En *Medical Imaging: Image Display*. SPIE, p. 192-200, 1996.



APÉNDICE A: PRUEBAS DWT VS IWT

A continuación, se muestran los valores de *MSE* y *PSNR* obtenidos para la DWT (Tablas A.1 y A.2) e IWT (Tablas A.3 y A.4).

11Tabla A.1. Valores de *MSE* obtenidos para DWT.

Wavelet	Número de niveles de descomposición								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Haar	2,08519E-26	7,33368E-26	1,65442E-25	2,83278E-25	4,29615E-25	6,19557E-25	8,42836E-25	1,04601E-24	1,36165E-24
	2,67291E-24	9,58199E-24	2,063E-23	3,572E-23	5,6055E-23	8,0431E-23	1,09375E-22	1,3336E-22	1,43821E-22
	9,68565E-26	4,49916E-25	1,07835E-24	1,92386E-24	2,93045E-24	3,86078E-24	4,96239E-24	5,66323E-24	5,66323E-24
	3,52183E-25	1,21129E-24	2,72037E-24	4,69728E-24	7,09833E-24	1,03255E-23	1,38002E-23	1,79971E-23	2,29627E-23
	4,37093E-26	1,30559E-25	2,75349E-25	4,89077E-25	8,00618E-25	1,24862E-24	1,79184E-24	2,60046E-24	3,05837E-24
	7,97397E-28	2,77666E-27	6,3868E-27	1,06457E-26	1,57662E-26	2,24803E-26	2,93323E-26	3,98541E-26	5,12315E-26
	6,11092E-27	2,14016E-26	4,68191E-26	7,88198E-26	1,17309E-25	1,55989E-25	1,9851E-25	2,48837E-25	2,92725E-25
	2,52491E-26	8,82082E-26	1,89511E-25	3,21347E-25	4,63675E-25	6,1518E-25	8,13595E-25	9,33852E-25	1,11774E-24
	1,00166E-25	4,67893E-25	1,13014E-24	2,01956E-24	3,05355E-24	4,17368E-24	5,56535E-24	6,75419E-24	6,75419E-24
	3,04251E-25	1,05789E-24	2,37642E-24	4,06607E-24	6,2185E-24	9,0184E-24	1,2359E-23	1,57391E-23	1,99059E-23
	Promedio	3,04251E-25	1,05789E-24	2,37642E-24	4,06607E-24	6,2185E-24	9,0184E-24	1,2359E-23	1,57391E-23

12Tabla A.2. Valores de *PSNR* obtenidos para DWT.

Wavelet	Número de niveles de descomposición								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Haar	353,13802	347,6762	344,1430203	341,8073303	339,998668	338,4086562	337,0720331	336,1341018	334,9888253
	332,0596234	326,5149088	323,184475	320,8003537	318,8433228	317,2752328	315,9402892	315,0792167	314,7512365
	346,4681801	339,7981526	336,0018766	333,4877293	331,6601201	330,4627178	329,3725608	328,7988228	328,7988228
	340,8617835	335,496989	331,9831825	329,611	327,817904	326,1903458	324,930602	323,7774395	322,7192412
	349,9237288	345,1714001	341,9306237	339,4356964	337,2952146	335,3651718	333,7964777	332,1789687	331,4745686
	367,3127191	361,8942451	358,2766349	356,0577197	354,3521983	352,8114463	351,6560084	350,3247355	349,234093
	358,4684023	353,0250106	349,6252368	347,3631146	345,6361396	344,3985129	343,3516468	342,3703204	341,6648732
	352,3070088	346,8743752	343,5531252	341,2597293	339,6673265	338,4394427	337,2253855	336,6266839	335,8460748
	346,3222511	339,628002	335,7981478	333,2769006	331,4814151	330,124275	328,8745388	328,0337345	328,0337345
	341,4971492	336,085063	332,5702311	330,2377183	328,3926131	326,7781734	325,4096353	324,3596695	323,3396582
	Promedio	341,4971492	336,085063	332,5702311	330,2377183	328,3926131	326,7781734	325,4096353	324,3596695

13Tabla A.3. Valores de *MSE* obtenidos para IWT.



Wavelet	Número de niveles de descomposición								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Haar	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Promedio	0	0	0	0	0	0	0	0	0

14Tabla A.4. Valores de *PSNR* obtenidos para IWT.

Wavelet	Número de niveles de descomposición								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Haar	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf
	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf
	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf
	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf
	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf
	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf
	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf
	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf
	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf
	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf



APÉNDICE B: ENTROPÍA VS NIVELES DE DESCOMPOSICIÓN

Las Tablas B.1, B.2 y B.3 muestran los valores de entropía obtenidos para imágenes CT, MRI y US respectivamente.

15Tabla B.1. Valores de entropía obtenidos para CT.

Wavelet	Número de niveles de descomposición								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Haar	7,38445 0749	6,681255 758	6,4600997 29	6,3984691 85	6,3833650 8	6,3796783 45	6,3791350 93	6,379021228	6,37891679 9
	8,56077 503	8,119828 984	7,9536223 71	7,9048335 43	7,8927557 44	7,8909942 64	7,8910005 23	7,890979324	7,89096541 7
	7,11869 9339	6,589019 627	6,4126250 48	6,3612315 85	6,3477711 58	6,3450153 7	6,3445485 9	6,344502153	6,34441399 7
	6,92290 8241	6,326313 276	6,1438012 54	6,0980152 46	6,0884442 75	6,0875853 98	6,0873891 18	6,087398041	6,08739767
	6,81359 9964	6,175182 282	5,9730592 29	5,9211977 13	5,9101134 8	5,9087855 22	5,9085927 13	5,908628351	5,90858813 3
	6,24538 4108	5,617802 874	5,4138779 03	5,3571609 76	5,3437574 5	5,3413787 63	5,3410452 68	5,341147114	5,34104973 2
	6,85579 9824	6,239621 081	6,0381656 12	5,9845628 86	5,9728648 78	5,9714561 67	5,9712263 97	5,971255697	5,97124430 1
	7,02911 0081	6,358364 707	6,1522473 54	6,1006737 89	6,0906043 53	6,0895355 44	6,0894696 24	6,089498658	6,08952051 3
	8,50397 4189	8,027641 317	7,8499298 02	7,7964947 26	7,7833158 57	7,7811668 58	7,7811467 93	7,781127037	7,78111355
	7,13554 6107	6,390596 156	6,1622747 39	6,0993266 97	6,0838014 92	6,0806051 02	6,0800273 89	6,080027305	6,07996020 5
	Promedio	7,13554 6107	6,390596 156	6,1622747 39	6,0993266 97	6,0838014 92	6,0806051 02	6,0800273 89	6,080027305



16Tabla B.2. Valores de entropía obtenidos para MRI.

Wavelet	Número de niveles de descomposición									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Haar	7,6141 6578	7,1151956 89	6,9688986 51	6,9338462 42	6,9259803 85	6,9247170 12	6,9247391 15	6,92474845 1	6,924699876	
	3,7823 47082	3,1667949 55	2,9916629 35	2,9437049 65	2,9321799 5	2,9292295 12	2,9286528 37	2,92860569 3	2,928505224	
	11,318 25963	10,485423 53	10,224658 85	10,153575 65	10,136403 66	10,132804 03	10,132103 58	10,1319192 2	10,13185647	
	7,5544 86324	6,7767385 61	6,5124865 43	6,4397294 8	6,4221916 72	6,4183355 89	6,4176697 52	6,41760114	6,417535458	
	6,1788 64081	5,6151619 75	5,4404333 7	5,3982246 09	5,3890712 62	5,3873500 19	5,3868029 23	5,38678017 3	5,386755359	
	6,7448 89228	6,1284157 54	5,9447720 1	5,8937425	5,8808207 7	5,8776469 57	5,8772259 63	5,87713623 2	5,877048039	
	5,2587 14078	4,6301056 67	4,4620917 54	4,4152178 13	4,4031446 92	4,4000558 18	4,3993548 26	4,39932665 2	4,39936867	
	6,6865 08814	6,1398040 49	5,9703277 08	5,9262810 3	5,9154179 03	5,9128837 88	5,9126781 72	5,91273415 7	5,912698662	
	5,9017 2872	5,1957249 62	4,9701150 34	4,9069215 01	4,8913002 75	4,8878965 11	4,8868679 42	4,88658113 9	4,886473311	
	4,6205 52253	3,7762408 21	3,5281095 25	3,4579290 92	3,4398647 23	3,4354175 44	3,4339684 85	3,43367372	3,433555738	
	Promedio	4,6205 52253	3,7762408 21	3,5281095 25	3,4579290 92	3,4398647 23	3,4354175 44	3,4339684 85	3,43367372	3,433555738

17Tabla B.3. Valores de entropía obtenidos para US.

Wavelet	Número de niveles de descomposición						
	1	2	3	4	5	6	7
Haar	3,4137323	3,17336930	3,09584783	3,078808771	3,07646658	3,07667528	3,076750398
	4,05295035	3,73361055	3,61822386	3,586910712	3,58011135	3,57909839	3,579118669
	3,45496343	3,20110899	3,11530430	3,094602026	3,09105688	3,09095239	3,091011864
	2,55935721	2,39479175	2,34133034	2,331005241	2,33002830	2,33042883	2,330649797
	3,26425570	3,03209028	2,94960367	2,929356092	2,92593199	2,92596797	2,926047783
	2,58068990	2,41852139	2,36620145	2,355743072	2,35486679	2,35531746	2,355508597
	4,09223468	3,77206942	3,65918421	3,630479837	3,62472204	3,62385408	3,623792128
	4,05387316	3,72650674	3,60899358	3,577796912	3,57101079	3,57008498	3,57010888
	2,58068990	2,41852139	2,36620145	2,355743072	2,35486679	2,35531746	2,355508597
	4,0547705	3,7294287	3,6130589	3,58231771	3,5757719	3,5748853	3,57481727
Promedio	3,41075172	3,16000185	3,07339496	3,052276345	3,04848335	3,04825822	3,048331398



APÉNDICE C: ENTROPÍA VS FAMILIA WAVELET

En las Tablas C.1, C.2, C.3 y C.4 se detallan los valores promedio obtenidos para las familias *Daubechies*, *Symlet*, *Coiflet* y *Biorthogonal* respectivamente sobre imágenes CT.

18Tabla C.1. Valores promedio de entropía familia *Daubechies* sobre CT.

Wavelet	Número de niveles de descomposición								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
db1	7,257024 763	6,6525626 06	6,4559703 04	6,40219663 5	6,3896793 77	6,3876201 33	6,38735815 1	6,38735849 1	6,38731703 2
db2	7,040633 102	6,4606008 01	6,2907608 21	6,25160372 4	6,2429689 84	6,2413953 36	6,24116078 6	6,24114692 1	6,24114564 4
db3	7,045561 415	6,4924599 77	6,3419415 26	6,30873122 3	6,3033202 79	6,3025300 09	6,30242059 1	6,30244217 7	6,30244224 8
db4	7,221276 423	6,6694814 36	6,5119348 94	6,48669921 6	6,4848522 48	6,4847794 39	6,48477762 5	6,48477762 5	6,48477762 5
db5	7,267833 926	6,7244621 83	6,5690188 85	6,54314332 4	6,5409258 83	6,5408395 68	6,54083575 3	6,54083575 3	6,54083575 3
db6	7,149168 99	6,7017862 28	6,6116682 02	6,60125656	6,6022778 76	6,6027119 12	6,60274984 7	6,60274984 7	6,60274984 7
db7	7,547635 707	7,0307416 92	6,9515369 37	6,95236917 4	6,9523468 54	6,9523468 54	6,95234685 4	6,95234685 4	6,95234685 4
db8	7,221740 44	6,8427823 15	6,7740686 46	6,77327842	6,7750887 46	6,7752617 64	6,77526176 4	6,77526176 4	6,77526176 4

19Tabla C.2. Valores promedio de entropía familia *Symlet* sobre CT.

Wavelet	Número de niveles de descomposición								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
sym2	7,040633 102	6,4606008 01	6,2907608 21	6,25160372 4	6,2429689 84	6,2413953 36	6,24116078 6	6,24114692 1	6,24114564 4
sym3	7,314076 051	6,7726136 83	6,6309909 1	6,61627957 5	6,6164152 07	6,6164083 27	6,61640832 7	6,61640832 7	6,61640832 7
sym4	7,014637 942	6,3930723 52	6,2182644 95	6,17176276 3	6,1601458 24	6,1576183 71	6,15713424	6,15704668 1	6,15705821
sym5	7,024509 29	6,4578947 46	6,2908285 69	6,2497507	6,2409606 98	6,2394995 6	6,23931948 5	6,23931051 2	6,23930731 3
sym6	7,078510 419	6,5242396 29	6,3581990 19	6,31336092	6,3021456 75	6,2997707 54	6,29929018 8	6,29919492	6,29920413 2
sym7	7,198277 629	6,7000084 76	6,5599016 1	6,52456079 3	6,5178095 27	6,5170580 42	6,51704227	6,51706113 7	6,51706043 7
sym8	7,554872 439	7,0355431 87	6,9137291 67	6,90508112 4	6,9048602 32	6,9048594 69	6,9048594 69	6,9048594 69	6,9048594 69



20Tabla C.3. Valores promedio de entropía familia *Coiflet* sobre CT.

Wavelet	Número de niveles de descomposición								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
coif1	7,20302988 2	6,66131426 8	6,49461300 7	6,45152010 5	6,44191111 1	6,43987672 4	6,43949596 3	6,43940689 8	6,43941413
coif2	7,77837529 1	7,90241866 7	7,93368621 5	7,93368621 5	7,93368621 5	7,93368621 5	7,93368621 5	7,93368621 5	7,93368621 5

21Tabla C.4. Valores promedio de entropía familia *Biorthogonal* sobre CT.

Wavelet	Número de niveles de descomposición								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
bior1.1	7,257024763	6,652562606	6,455970304	6,402196635	6,389679377	6,387620133	6,387358151	6,387358491	6,387317032
bior1.3	7,326493413	6,760888803	6,581395338	6,534802018	6,524222393	6,522478756	6,522264513	6,522272441	6,522231512
bior1.5	7,366398909	6,814118426	6,642300187	6,598020731	6,588200262	6,586384486	6,586217159	6,586231695	6,586195026
bior2.2	6,799241804	6,206574053	6,03218612	5,987899283	5,978711304	5,976856813	5,976609869	5,976540178	5,976543921
bior2.4	6,861249555	6,272823559	6,101088363	6,056731381	6,047385451	6,045573967	6,045357732	6,045307355	6,045305574
bior2.6	6,896230376	6,317291275	6,147437386	6,103404185	6,093949421	6,09213817	6,091959982	6,091908111	6,091900421
bior2.8	6,922246706	6,349666975	6,181919322	6,138376266	6,128934859	6,127188303	6,127019478	6,126964821	6,126961928
bior3.1	6,486505821	6,001502825	5,884481813	5,860291344	5,856442423	5,856096774	5,856122913	5,856121523	5,856124709
bior3.3	6,5420592	6,0361799	5,9018697	5,8722406	5,8667002	5,8659521	5,8658734	5,8658430	5,8658409
bior3.5	6,5758198	6,0652655	5,9251206	5,893356	5,8871810	5,8863322	5,8862243	5,8861902	5,8861934
bior3.7	6,5991402	6,0876878	5,9462536	5,9134394	5,9071104	5,9061793	5,9060690	5,9060383	5,9060438
bior3.9	6,6138929	6,1058121	5,9642881	5,9312079	5,9248650	5,9239132	5,9237957	5,9237684	5,9237723
bior4.4	7,0183330	6,4129680	6,2181730	6,1674466	6,1580717	6,1566179	6,1565115	6,1564992	6,1564937
bior5.5	7,3475809	6,7375716	6,5296490	6,4806276	6,4733100	6,4726083	6,4725551	6,4725517	6,4725517
bior6.8	7,0514371	6,4447909	6,2681466	6,2216048	6,2131272	6,2119341	6,2118444	6,2118472	6,2118439

En las Tablas C.5, C.6, C.7 y C.8 se detallan los valores promedio obtenidos para las familias *Daubechies*, *Symlet*, *Coiflet* y *Biorthogonal* respectivamente sobre imágenes MRI.



22Tabla C.5. Valores promedio de entropía familia *Daubechies* sobre MRI.

Wavelet	Número de niveles de descomposición								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
db1	6,56605159 9	5,90296059 6	5,70135563 8	5,64691728 8	5,63363752 9	5,63063367 8	5,63000636	5,62991065 8	5,62984968 1
db2	6,05269832 3	5,34764867 1	5,16519004 3	5,12660312 4	5,11985825 3	5,11887932 9	5,11874688 4	5,11873098 2	5,11872853 6
db3	5,91665575 7	5,23704515 7	5,09195825 2	5,07218234 3	5,07042963 4	5,07037184 1	5,07040085 6	5,07041133	5,07041604 2
db4	6,14890321 4	5,55188183 5	5,39688426 5	5,36574104 4	5,36274255 3	5,36285010 1	5,36285071 9	5,36284578 8	5,36284578 8
db5	6,05514125	5,46029308 6	5,30687306 5	5,27559176 7	5,27272743 7	5,27278193 1	5,27278200 6	5,27278182 5	5,27278182 5
db6	5,98150559 3	5,5146167	5,47770456	5,48103540 5	5,48207656 3	5,48216866 8	5,48217697 8	5,48217697 8	5,48217697 8
db7	6,55141856 8	6,02166447 8	5,92450530 2	5,92168623 8	5,92267260 6	5,92270645 4	5,92270645 4	5,92270645 4	5,92270645 4
db8	6,03175368	5,68526732 3	5,68420883 3	5,69072905 4	5,69161875 9	5,69164155 4	5,69164345 6	5,69164345 6	5,69164345 6

23Tabla C.6. Valores promedio de entropía familia *Symlet* sobre MRI.

Wavelet	Número de niveles de descomposición								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
sym2	6,05269832 3	5,34764867 1	5,16519004 3	5,12660312 4	5,11985825 3	5,11887932 9	5,11874688 4	5,11873098 2	5,11872853 6
sym3	6,30238989 4	5,74905890 3	5,61103147 5	5,59236129 1	5,59185298 5	5,59207460 3	5,59209159	5,59209159	5,59209159
sym4	5,88340612 8	5,16602059	4,96097482 8	4,90832716 9	4,89656013	4,89417107 7	4,89369362 3	4,89358159 7	4,89357041 7
sym5	5,78607556 4	5,07755802 3	4,89818691 9	4,86228305 5	4,85704005 9	4,85648835 8	4,85645473	4,85646086 9	4,85646109 8
sym6	6,17740206 2	5,52722223 5	5,34148972 2	5,29545226 8	5,28580187 8	5,28404083 5	5,28375940 9	5,28369625 7	5,28369339 2
sym7	6,20391504 9	5,62605272 2	5,50616412 8	5,48896234 9	5,48781738 6	5,48795867 2	5,48801040 9	5,48802497 8	5,48802943 2
sym8	6,51963442 6	5,97628538 6	5,84822979 9	5,83608100 4	5,83639482 5	5,83643690 7	5,83643801 4	5,83643801 4	5,83643801 4

24Tabla C.7. Valores promedio de entropía familia *Coiflet* sobre MRI.

Wavelet	Número de niveles de descomposición								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
coif1	7,20302988 2	6,66131426 8	6,49461300 7	6,45152010 5	6,44191111 1	6,43987672 4	6,43949596 3	6,43940689 8	6,43941413
coif2	7,77837529 1	7,90241866 7	7,93368621 5	7,93368621 5	7,93368621 5	7,93368621 5	7,93368621 5	7,93368621 5	7,93368621 5



25Tabla C.8. Valores promedio de entropía familia *Biorthogonal* sobre MRI.

Wavelet	Número de niveles de descomposición								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
bior1.1	6,56605159 9	5,90296059 6	5,70135563 8	5,64691728 8	5,63363752 9	5,63063367 8	5,63000636	5,62991065 8	5,62984968 1
bior1.3	6,58585957 5	5,96419726 5	5,78069934 3	5,73257891 5	5,72161664 8	5,71941447 5	5,7190257	5,71897895	5,71893153 9
bior1.5	6,59284781	5,98612739 4	5,80868646 9	5,76266839	5,75242908 9	5,75046904 6	5,75012147 6	5,75009142 4	5,75004290 8
bior2.2	5,76156804 1	5,07507450 7	4,89732461 2	4,85088504 2	4,84082810 7	4,83900606 9	4,83878367 8	4,83873899 3	4,83875754 4
bior2.4	5,77030668 8	5,10299720 5	4,93122250 1	4,88685457 1	4,87734522 2	4,87574319 8	4,87555561 4	4,87551069	4,87552483 5
bior2.6	5,77610563 2	5,12097230 6	4,95274529 6	4,90974464 3	4,90056673 6	4,89906158 5	4,89886620 1	4,89882527 8	4,89883915 5
bior2.8	5,78139999 3	5,13517008 3	4,96956610 6	4,92735736	4,91857322 2	4,91717064 8	4,91696740 3	4,91692878 9	4,91694810 6
bior3.1	5,26168349 6	4,60903424 6	4,48842522	4,46925728	4,46772828 2	4,46795176 5	4,46807053 3	4,46809586 6	4,46809773 7
bior3.3	5,26396621 3	4,61419712 6	4,48522916 6	4,46142812 4	4,45851300 1	4,45836064 5	4,45837140 9	4,45837675 7	4,45837852 6
bior3.5	5,26802962 2	4,62533287 5	4,49534706 7	4,47096994 9	4,46788099 1	4,46769423 3	4,46768199 5	4,46769059 8	4,46769029 8
bior3.7	5,27191281 9	4,63619147 4	4,50636042 9	4,48195220 4	4,47887618 7	4,47867611 9	4,47867725 4	4,47868094 3	4,47868116 9
bior3.9	5,27513470 5	4,64440287 4	4,51543037 4	4,49121054 1	4,48813772 3	4,48795157 9	4,48795389	4,48796746 4	4,48796702 7
bior4.4	5,84810453 5	5,16050603 2	4,96301908 9	4,91057000 6	4,89970427 9	4,89807390 4	4,89787778 5	4,89785815 1	4,89785492 3
bior5.5	6,31402304 3	5,62208931	5,41103638 2	5,35886478 6	5,35001431 1	5,34909313 6	5,34899160 8	5,34898180 5	5,34898107 6
bior6.8	5,98769448 6	5,32035404 5	5,13258233 5	5,08545353 3	5,07608521 6	5,07488828 4	5,07479876 6	5,07477404 8	5,07477483 1

En las Tablas C.9, C.10, C.11, C.12 se detallan los valores promedio obtenidos para las familias *Daubechies*, *Symlet*, *Coiflet* y *Biorthogonal* respectivamente sobre imágenes US.

26Tabla C.9. Valores promedio de entropía familia *Daubechies* sobre US.

Wavelet	Número de niveles de descomposición						
	1	2	3	4	5	6	7
db1	4,0712166	3,74799762	3,633463402	3,60330306	3,596912684	3,59594068	3,595895342
db2	4,0047855	3,6955903	3,616891822	3,60327892	3,601540488	3,60139840	3,601349669
db3	4,0086436	3,73326533	3,676481853	3,66758585	3,667485958	3,66786223	3,667944497
db4	4,0796967	3,85143315	3,808305712	3,82107140	3,834069077	3,83566206	3,836233689
db5	4,0950634	3,86375004	3,827232642	3,83970034	3,852005749	3,85324828	3,853803115
db6	4,1217276	3,93833774	3,92488399	3,92908627	3,93079762	3,93082743	3,930718728
db7	4,2438727	4,10650656	4,186583701	4,24568397	4,249924372	4,24992437	4,250476257
db8	4,2022339	4,08137196	4,091482029	4,09913183	4,099710984	4,09971098	4,099597444



27Tabla C.10. Valores promedio de entropía familia *Symlet* sobre US.

Wavelet	Número de niveles de descomposición						
	1	2	3	4	5	6	7
sym2	4,00478552	3,6955903	3,616891822	3,60327892	3,601540488	3,60139840	3,601349669
sym3	4,06208130	3,8524344	3,830793471	3,85863912	3,873655164	3,87490569	3,875469688
sym4	4,03696652	3,7217046	3,622680185	3,59830195	3,594719745	3,59445355	3,594412594
sym5	4,03019017	3,7246281	3,653823845	3,64118948	3,639603476	3,63954868	3,639470229
sym6	4,16665492	3,8803921	3,801204456	3,78655410	3,785515987	3,78542803	3,785456662
sym7	4,15891910	3,9209888	3,887134006	3,88920101	3,892307899	3,89336938	3,89354825
sym8	4,27197133	4,1119152	4,130876496	4,16862975	4,175009576	4,17501162	4,175568134

28Tabla C.11. Valores promedio de entropía familia *Coiflet* sobre US.

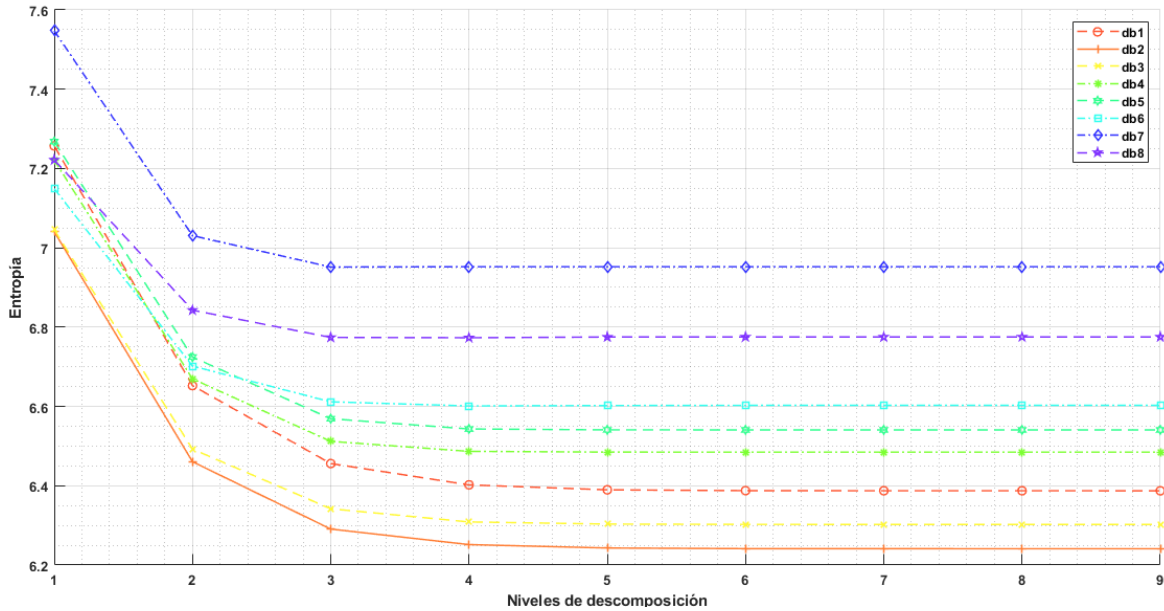
Wavelet	Número de niveles de descomposición						
	1	2	3	4	5	6	7
coif1	4,10209234	3,79570526	3,70681590	3,68871224	3,687137081	3,68736264	3,687566385
coif2	4,46327279	4,43775949	4,43421009	4,43315564	4,433155645	4,43315564	4,433023876

29Tabla C.12. Valores promedio de entropía familia *Biorthogonal* sobre US.

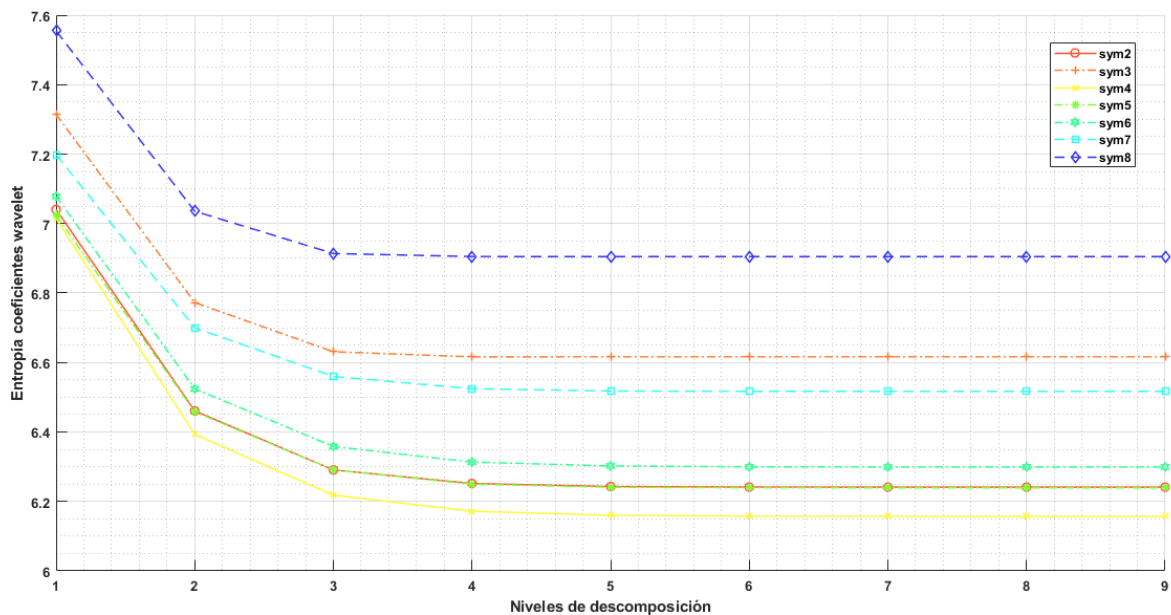
Wavelet	Número de niveles de descomposición						
	1	2	3	4	5	6	7
bior1.1	4,071216642	3,74799762	3,63346340	3,603303065	3,59691268	3,59594068	3,595895342
bior1.3	4,106861837	3,80985465	3,70993347	3,684095339	3,67965727	3,679299504	3,679147498
bior1.5	4,132556169	3,84701045	3,75211854	3,727155863	3,72333220	3,722889805	3,722753747
bior2.2	3,897091956	3,59980853	3,51009410	3,485836723	3,48136675	3,481182083	3,481189286
bior2.4	3,924808885	3,63139972	3,5445363	3,521136937	3,51695569	3,516764095	3,516791887
bior2.6	3,941470692	3,65251025	3,56797628	3,545215858	3,54111653	3,540956406	3,540979218
bior2.8	3,957160277	3,67286194	3,59048394	3,568049283	3,56412983	3,563947582	3,563986907
bior3.1	3,821451637	3,58441846	3,54955269	3,548581177	3,54948963	3,549943402	3,550007032
bior3.3	3,823712451	3,57218015	3,52690471	3,520793736	3,52007875	3,520134216	3,520144454
bior3.5	3,83439638	3,57514444	3,52709916	3,519862292	3,51904904	3,519086511	3,519076167
bior3.7	3,84699228	3,587373	3,53780566	3,530260194	3,52938673	3,529533997	3,529507118
bior3.9	3,856644001	3,59774732	3,54867380	3,540802591	3,53994172	3,540067986	3,540043609
bior4.4	4,03072964	3,72627264	3,63225978	3,607693439	3,60506030	3,605816238	3,606273116
bior5.5	4,21379269	3,91653407	3,82565911	3,811286284	3,81303309	3,813985463	3,814469312
bior6.8	4,142033645	3,86953575	3,79381308	3,777337284	3,77472228	3,775623131	3,776201945



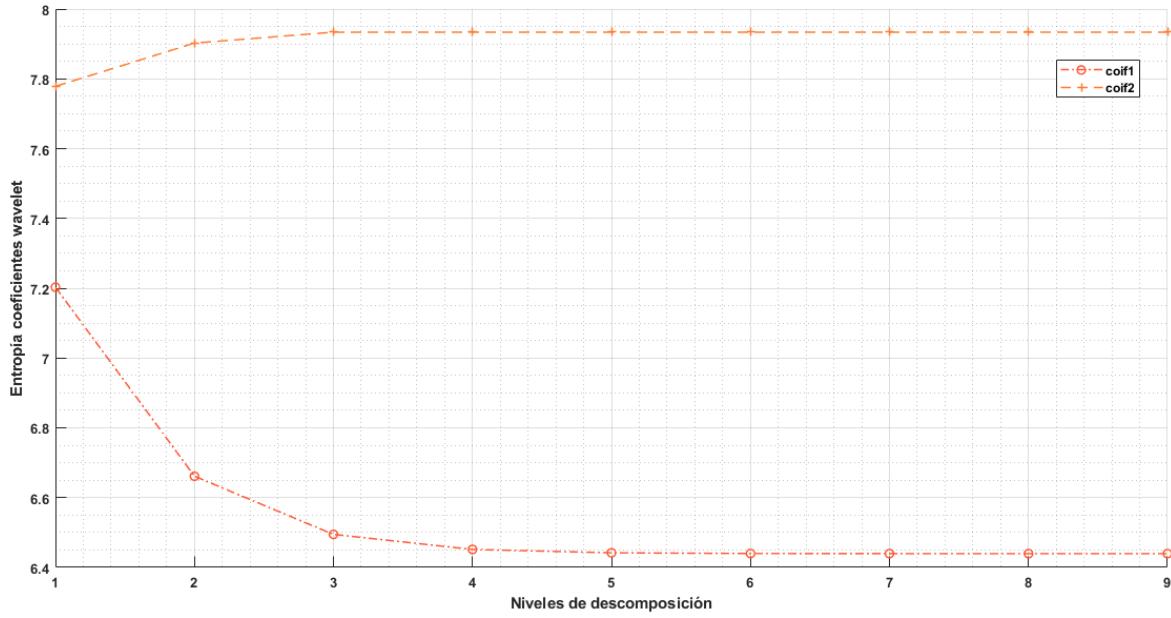
De las Figuras C.1 a C.11 se muestra las gráficas comparativas de los valores de entropía obtenidos para las familias *Daubechies*, *Symlet*, *Coiflet* y *Biorthogonal* para los tres tipos de imágenes analizadas.



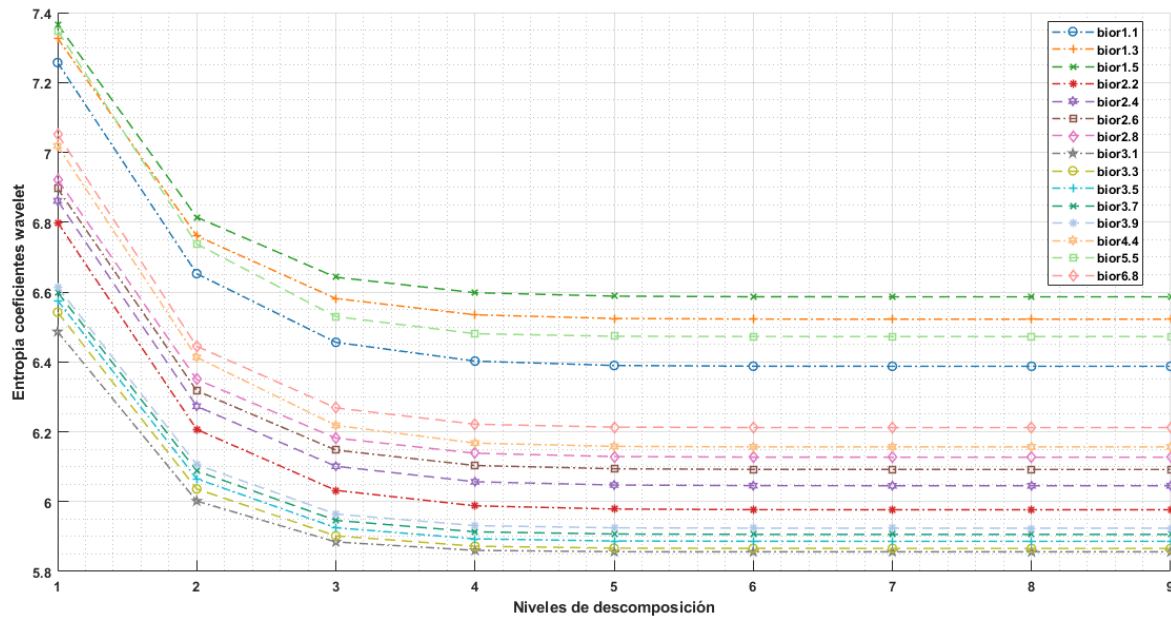
76Figura C.1. Entropía familia *Daubechies* sobre CT.



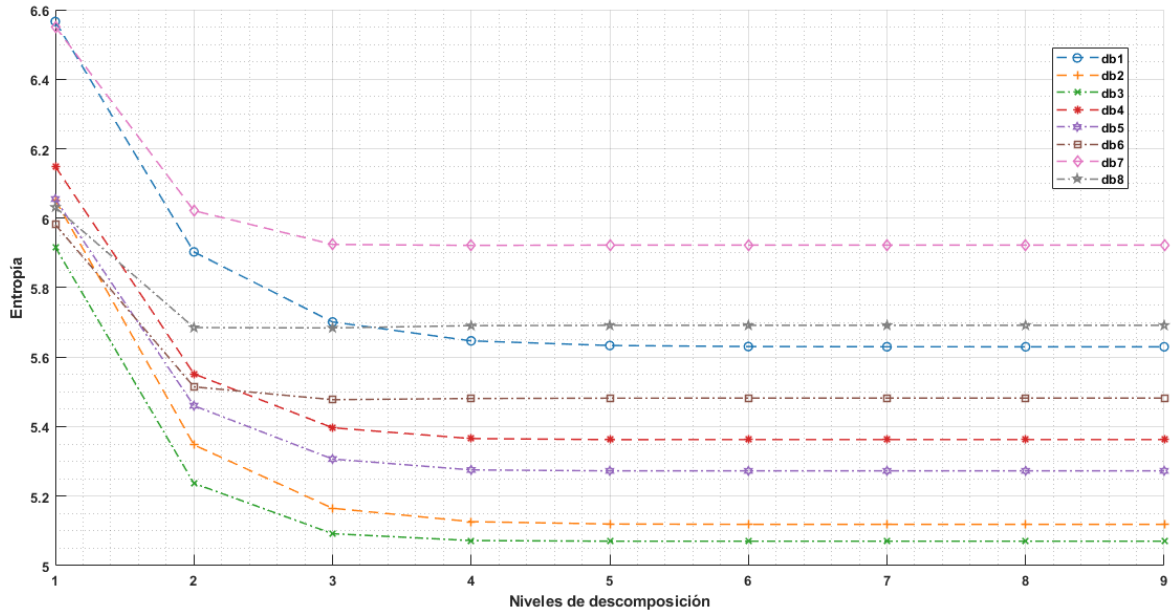
77Figura C.2. Entropía familia *Symlet* sobre CT.



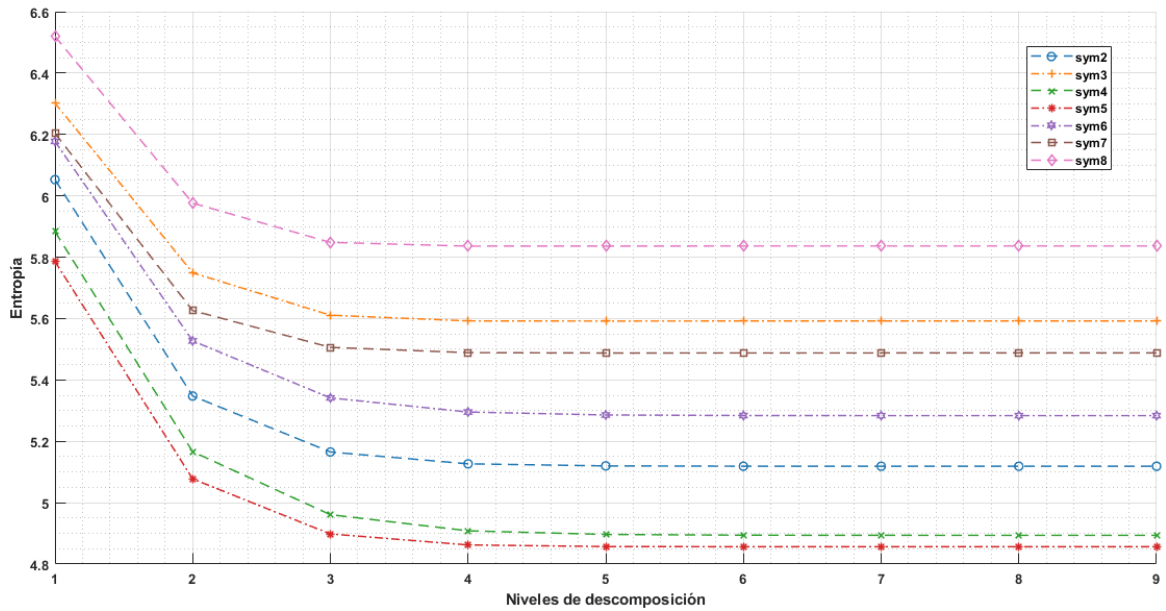
78Figura C.3. Entropía familia *Coiflet* sobre CT.



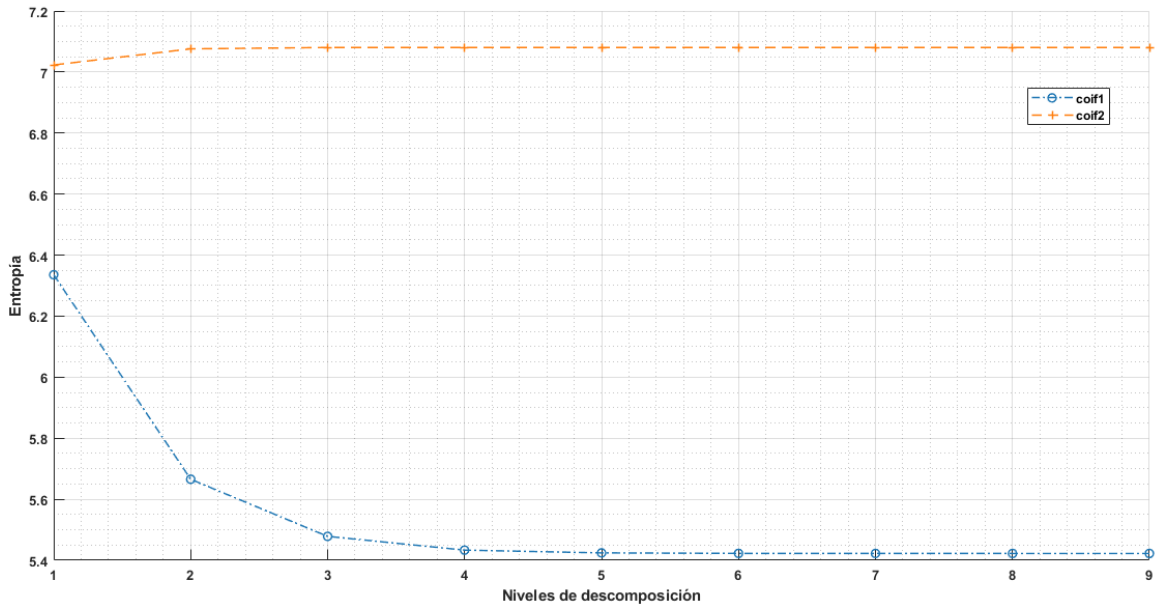
79Figura C.4. Entropía familia *Biorthogonal* sobre CT.



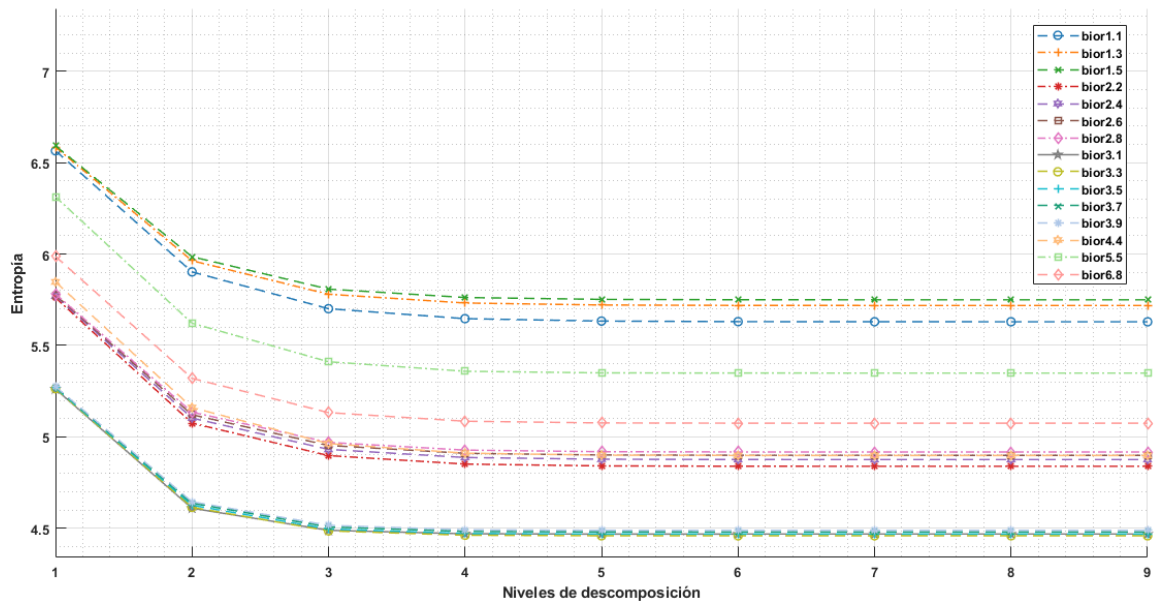
80Figura C.5. Entropía familia *Daubechies* sobre MRI.



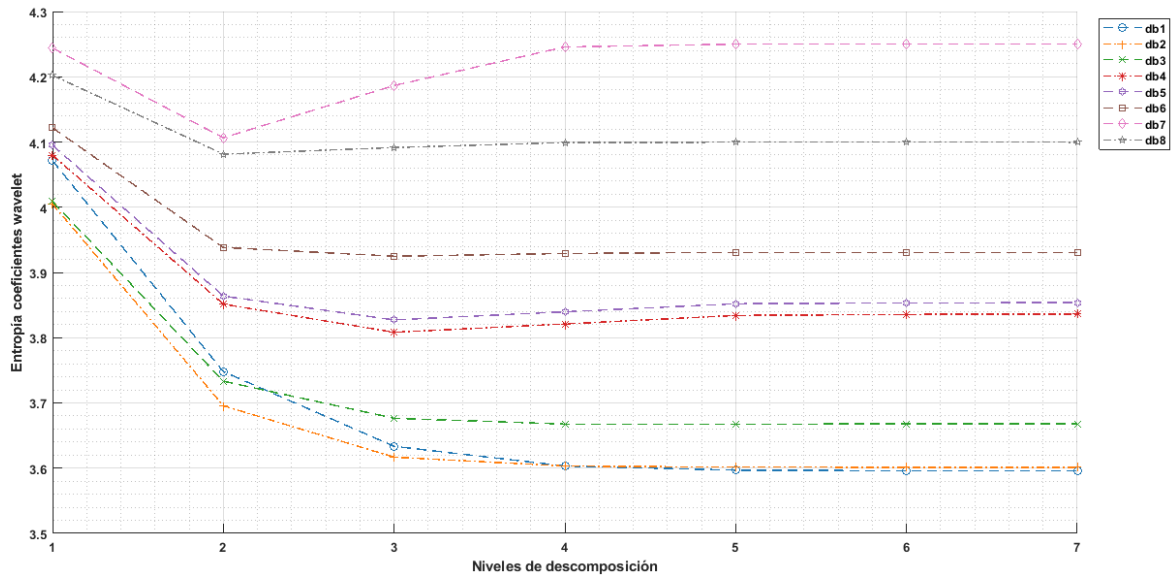
81Figura C.6. Entropía familia *Symlet* sobre MRI.



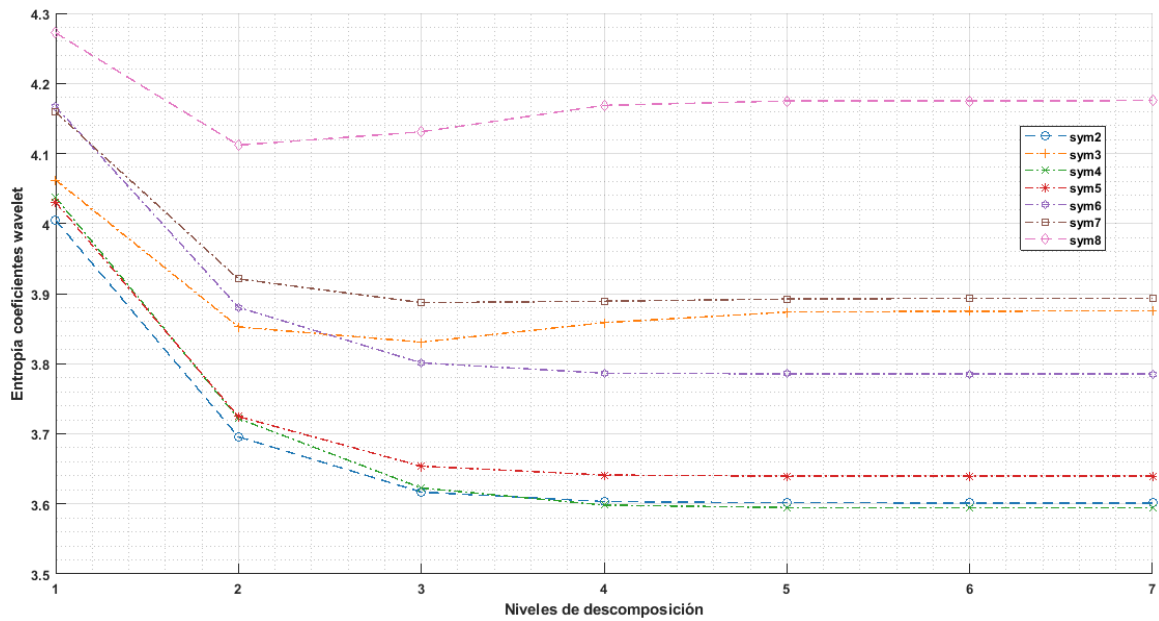
82Figura C.7. Entropía familia *Coiflet* sobre MRI.



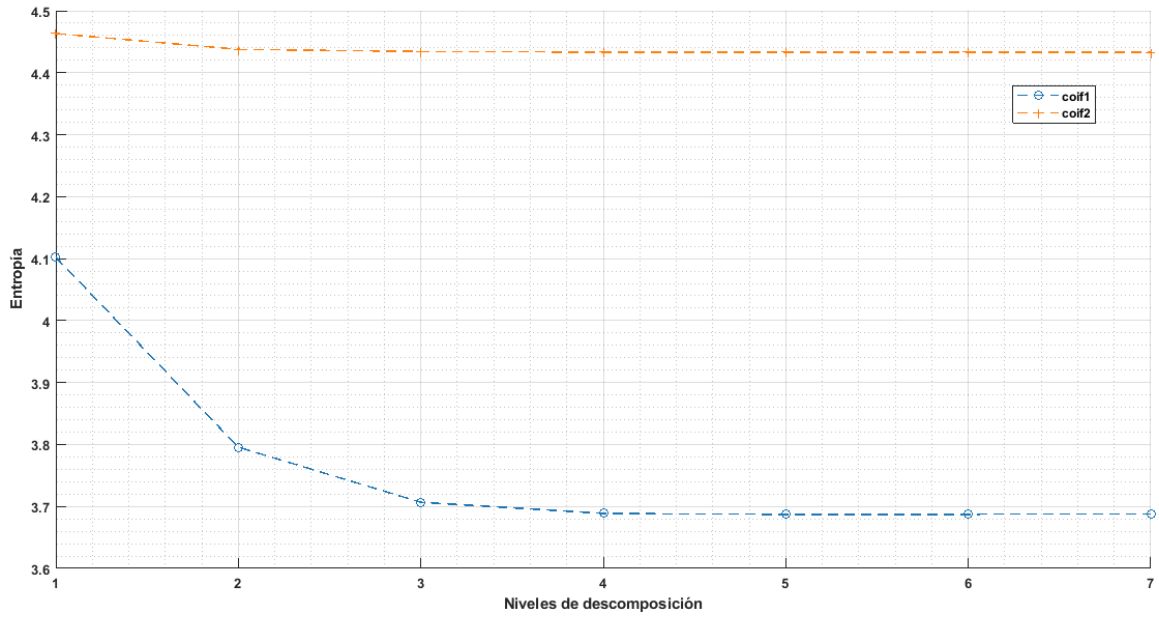
83Figura C.8. Entropía familia *Biorthogonal* sobre MRI.



84Figura C.9. Entropía familia *Daubechies* sobre US.



85Figura C.10. Entropía familia *Symlet* sobre US.

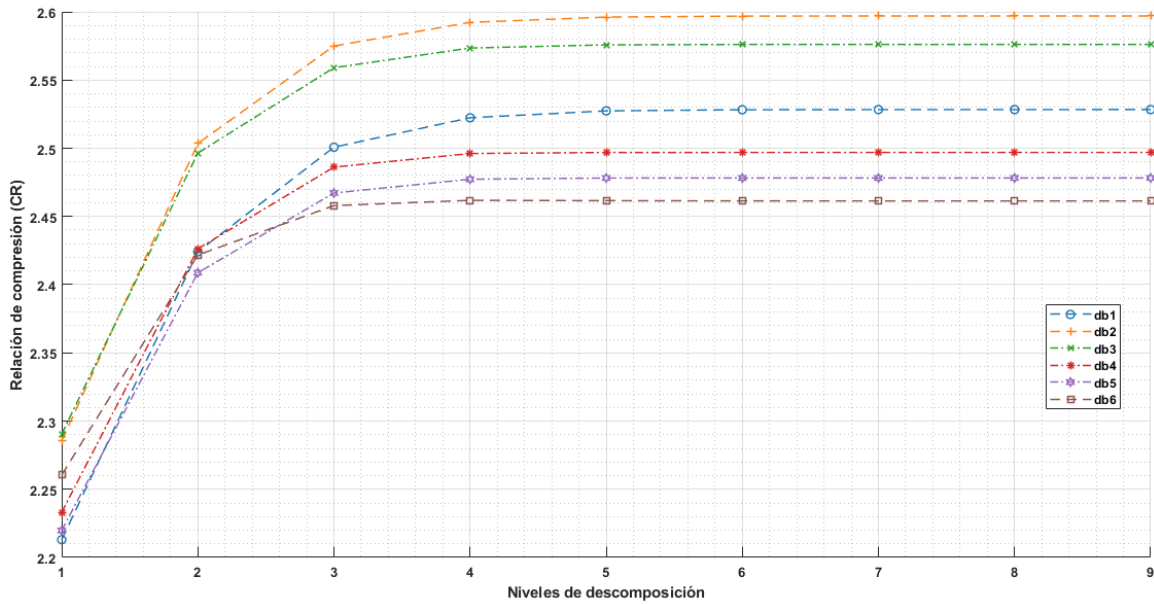


86Figura C.11. Entropía familia *Coiflet* sobre US.

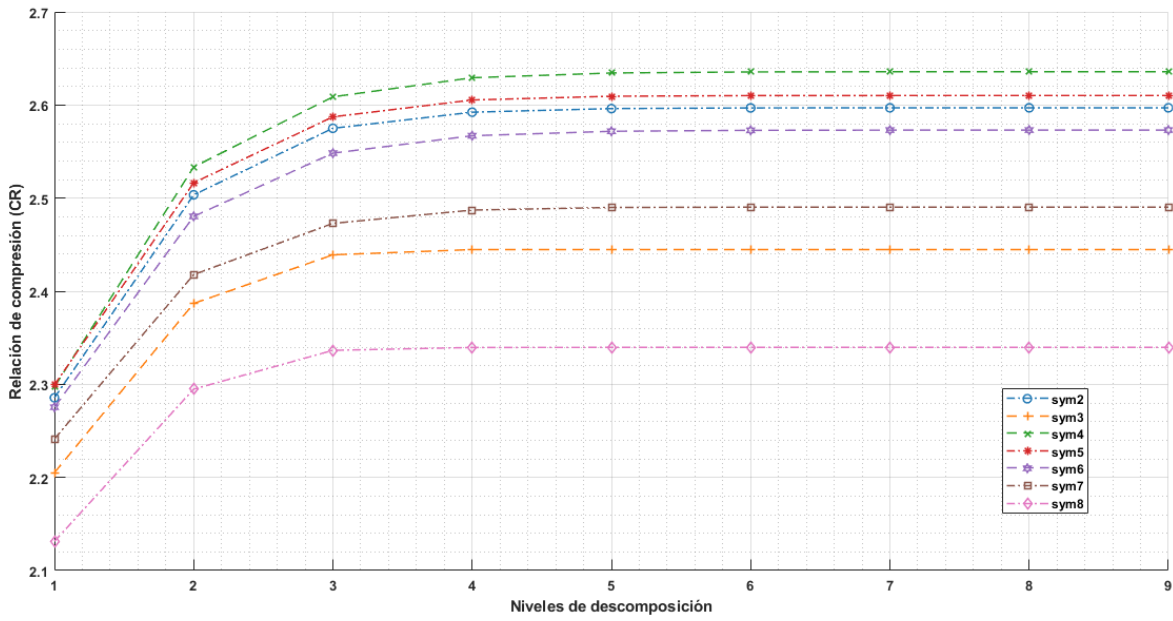


APÉNDICE D: RELACIÓN DE COMPRESIÓN POR FAMILIA WAVELET – ALGORITMO HUFFMAN

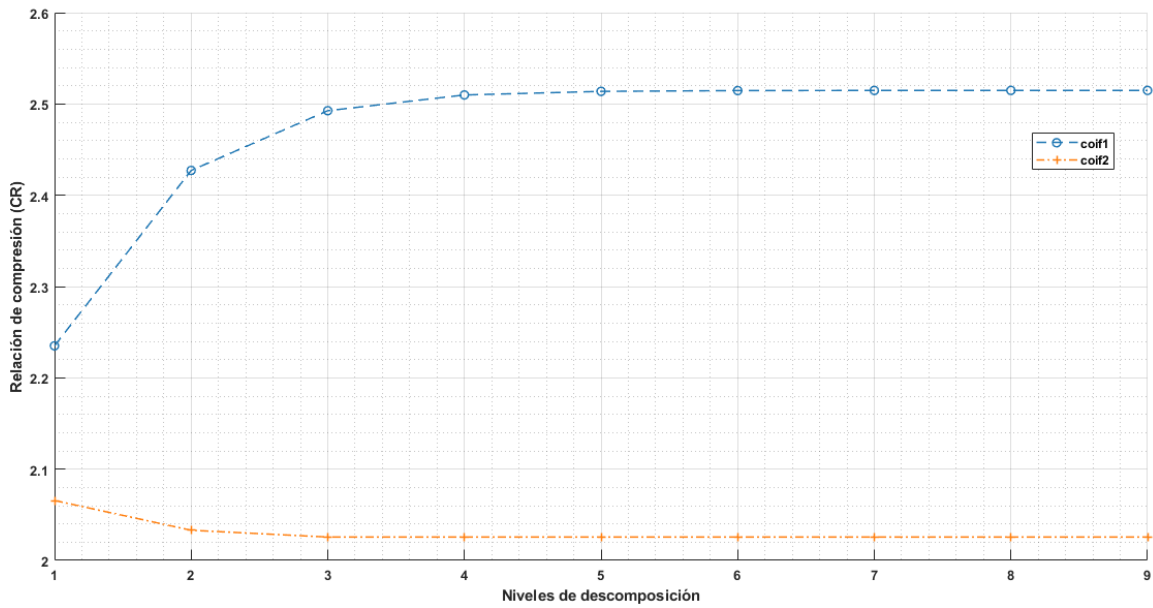
En las Figuras D.1 a D.12 se observan los valores de CR obtenidos para las cuatro familias *wavelet* implementadas al codificar los tres tipos de imágenes de prueba mediante el algoritmo Huffman.



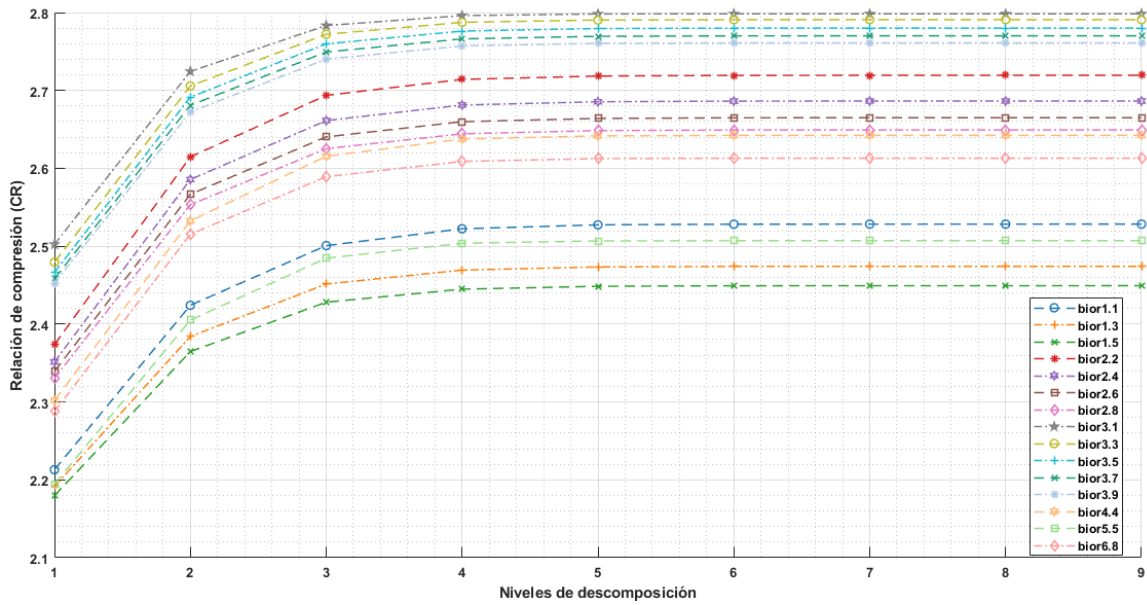
87Figura D.1. CR familia *Daubechies* – algoritmo Huffman sobre CT.



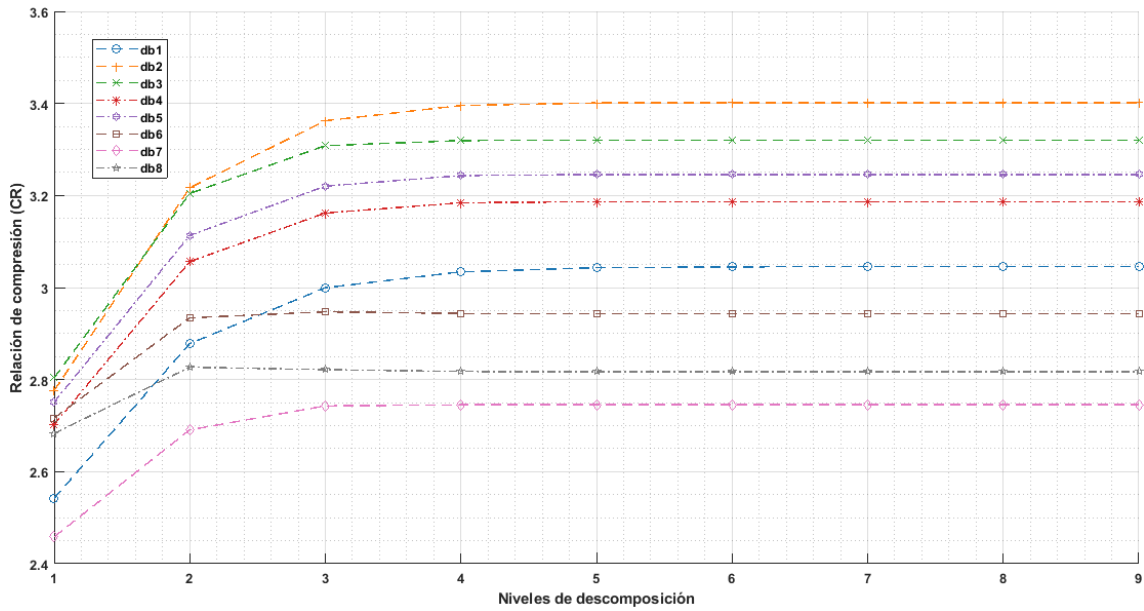
88Figura D.2. *CR* familia *Symlet* – algoritmo Huffman sobre CT.



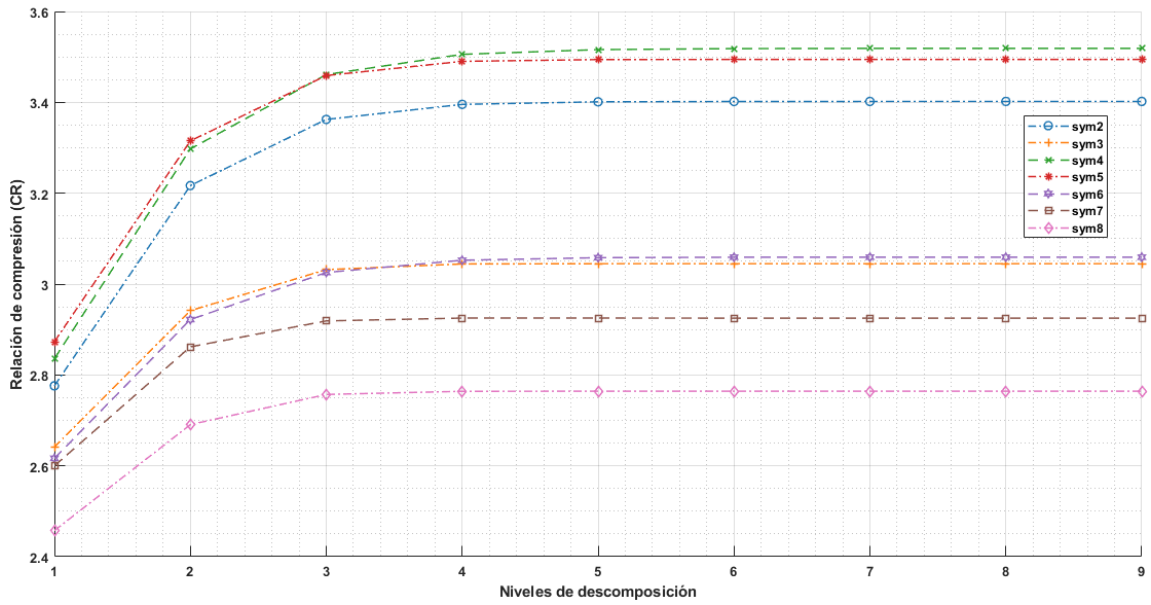
89Figura D.3. *CR* familia *Coiflet* – algoritmo Huffman sobre CT.



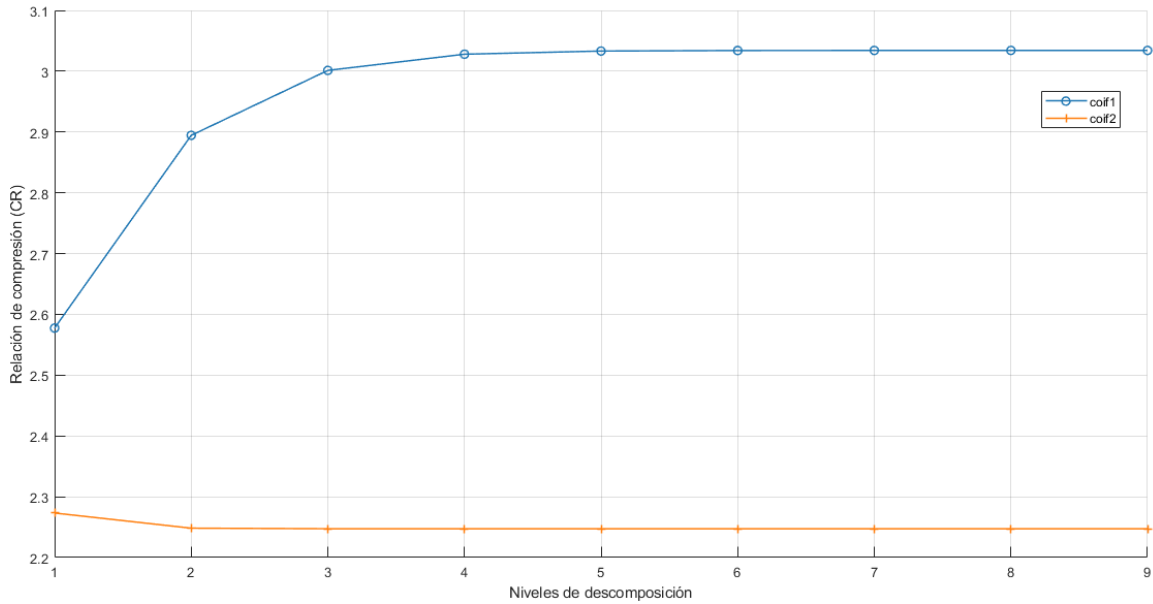
90Figura D.4. *CR* familia *Biorthogonal* – algoritmo Huffman sobre CT.



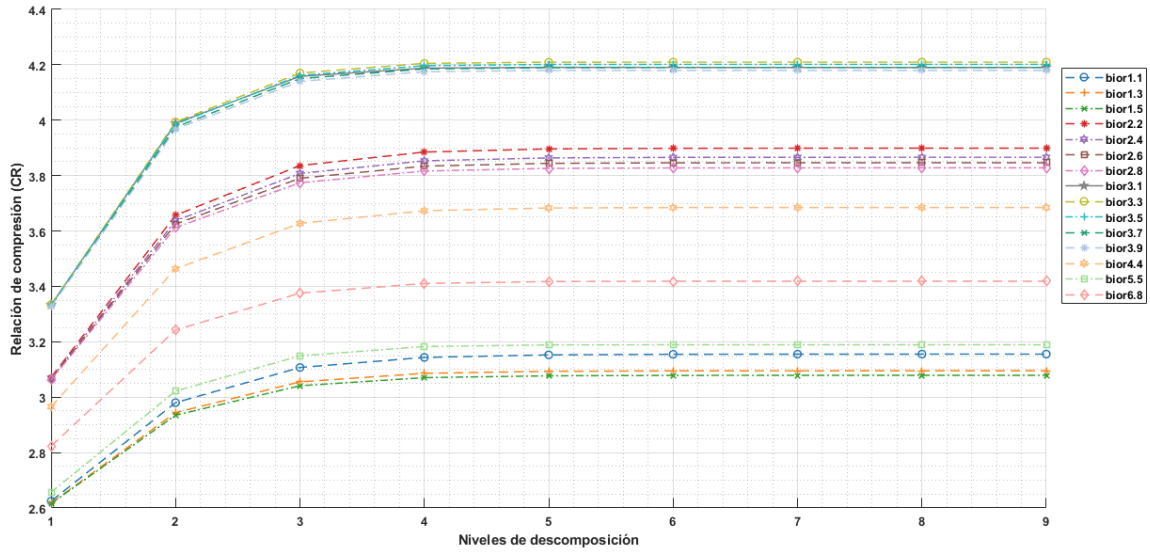
91Figura D.5. *CR* familia *Daubechies* – algoritmo Huffman sobre MRI.



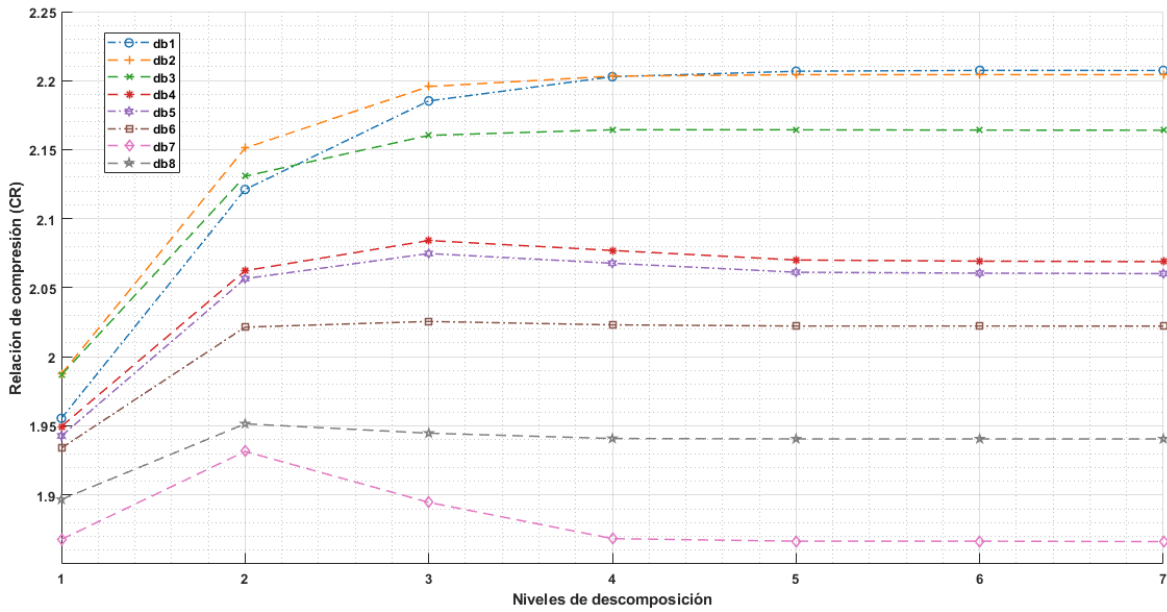
92Figura D.6. *CR* familia *Symlet* – algoritmo Huffman sobre MRI.



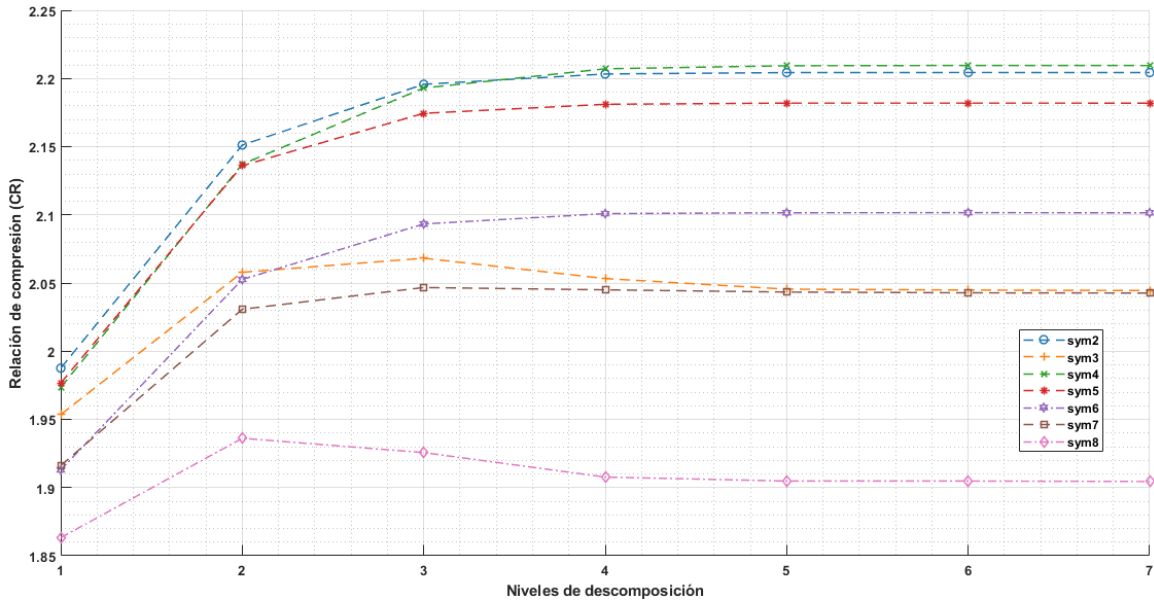
93Figura D.7. *CR* familia *Coiflet* – algoritmo Huffman sobre MRI.



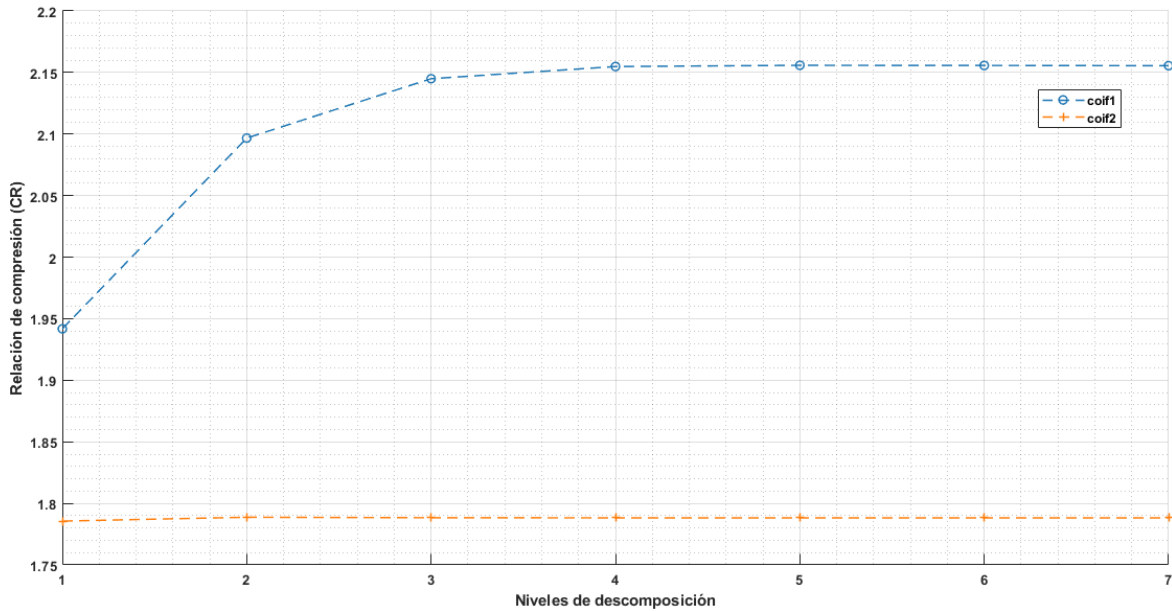
94Figura D.8. CR familia *Biorthogonal* – algoritmo Huffman sobre MRI.



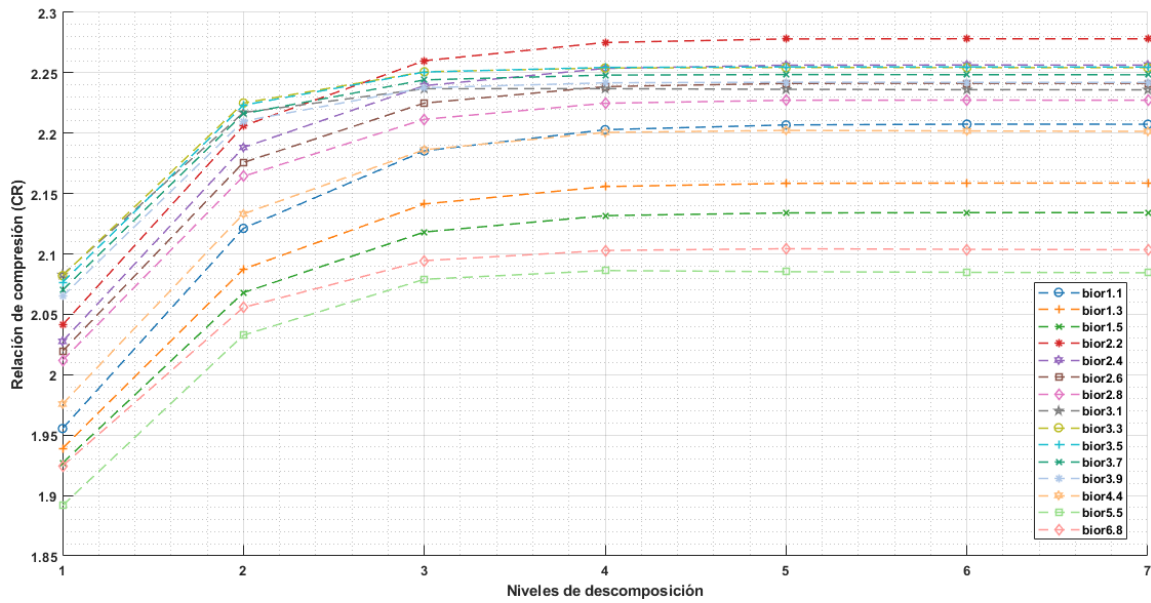
95Figura D.9. CR familia *Daubechies* – algoritmo Huffman sobre US.



96Figura D.10. CR familia *Symlet* – algoritmo Huffman sobre US.



97Figura D.11. CR familia *Coiflet* – algoritmo Huffman sobre US.

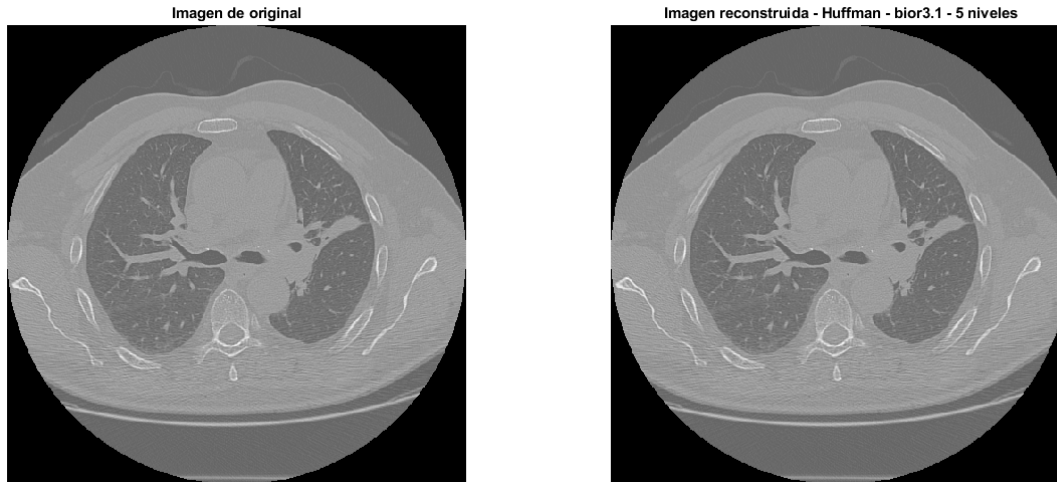


98Figura D.12. *CR* familia *Biorthogonal* – algoritmo Huffman sobre US.

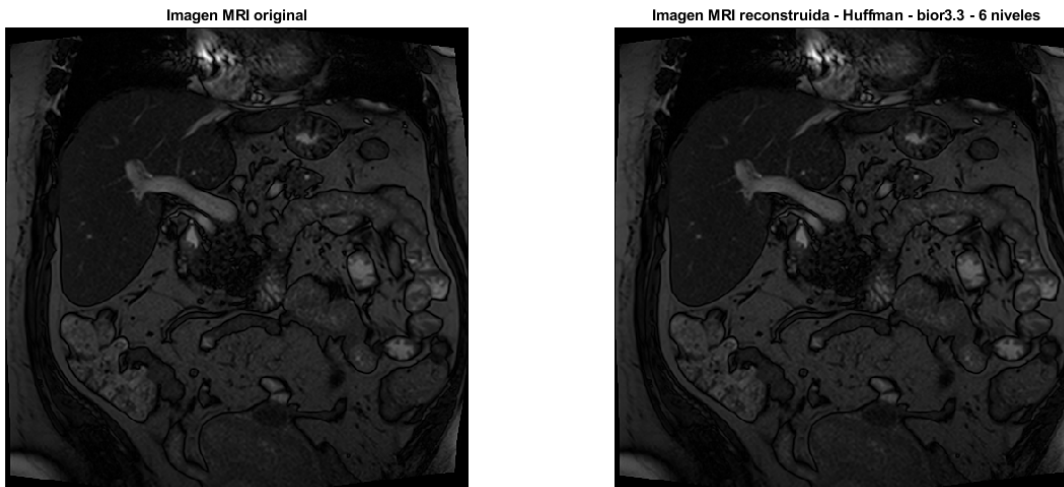


APÉNDICE E: EJEMPLOS COMPRESIÓN SIN PÉRDIDAS

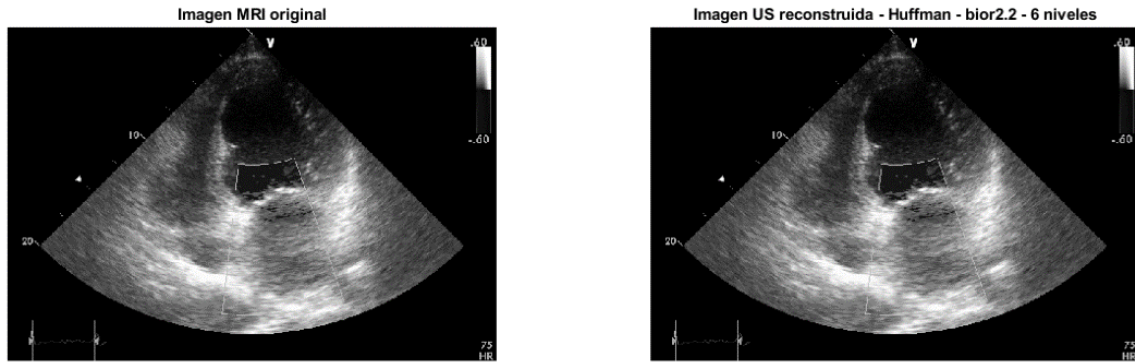
A continuación, se muestran algunos ejemplos de imágenes comprimidas y reconstruidas mediante las mejores configuraciones del escenario de compresión sin pérdidas implementado. En las Figuras E.1, E.2 y E.3 se muestran imágenes CT, MRI y US respectivamente.



99Figura E.1. Imagen CT reconstruida – bior3.1 – 5 niveles – algoritmo Huffman
 $CR = 1.9863$.



100Figura E.2. Imagen MRI reconstruida – bior3.3 – 6 niveles – algoritmo Huffman
 $CR = 3.425$.

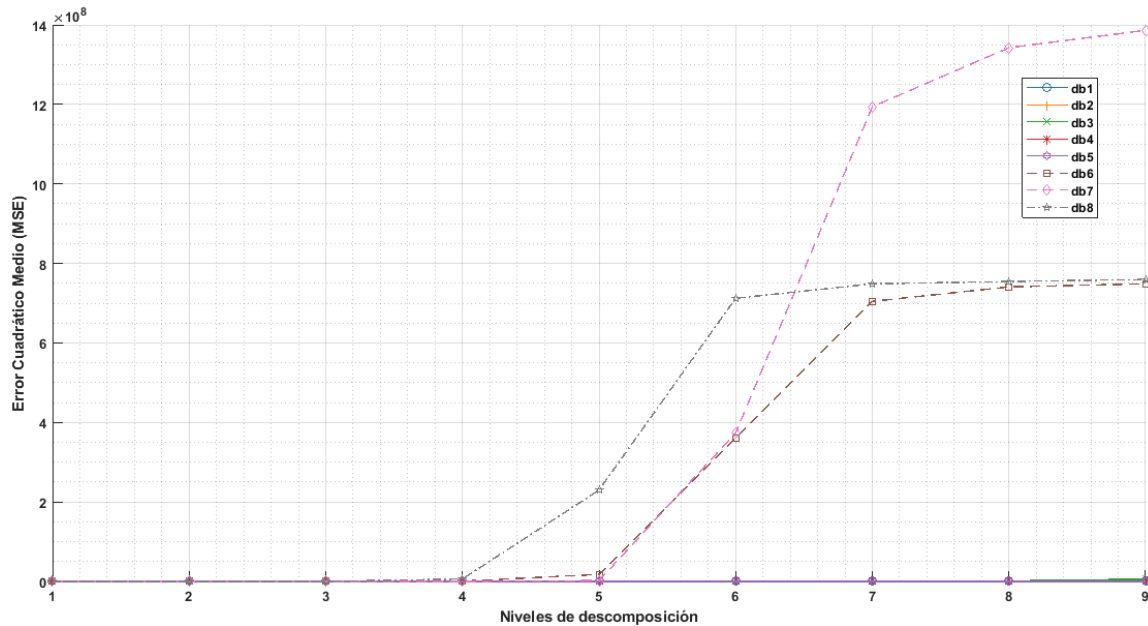


101Figura E.3. Imagen US reconstruida – bior2.2 - algoritmo Huffman – 6 niveles
 $CR = 2.275$.

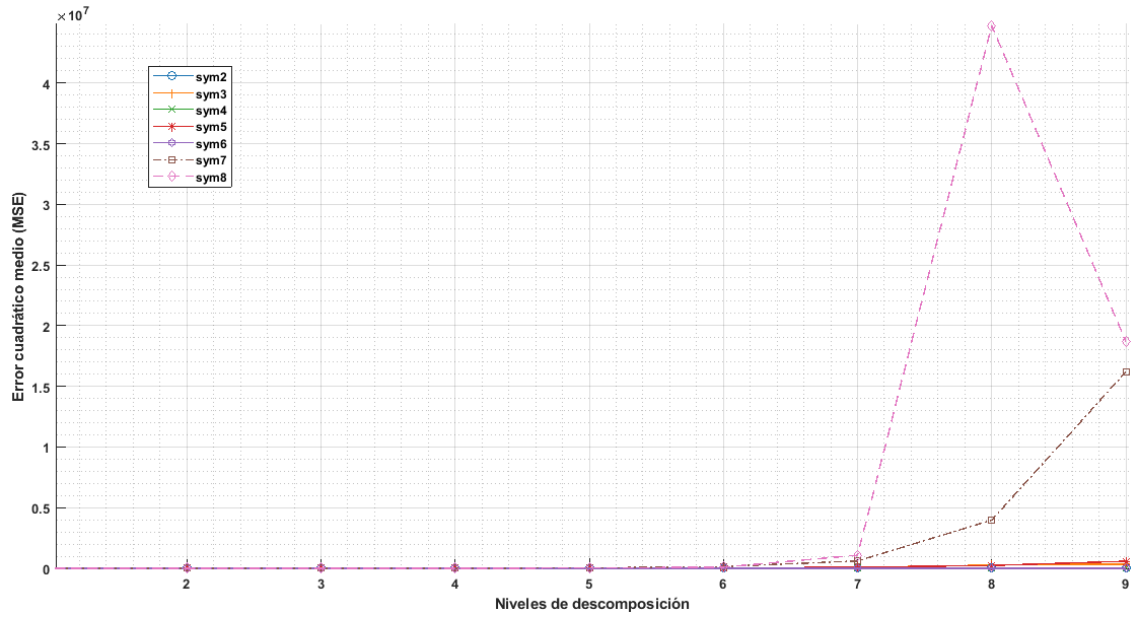


APÉNDICE F: MSE Y PSNR POR FAMILIA WAVELET - CUANTIFICADOR

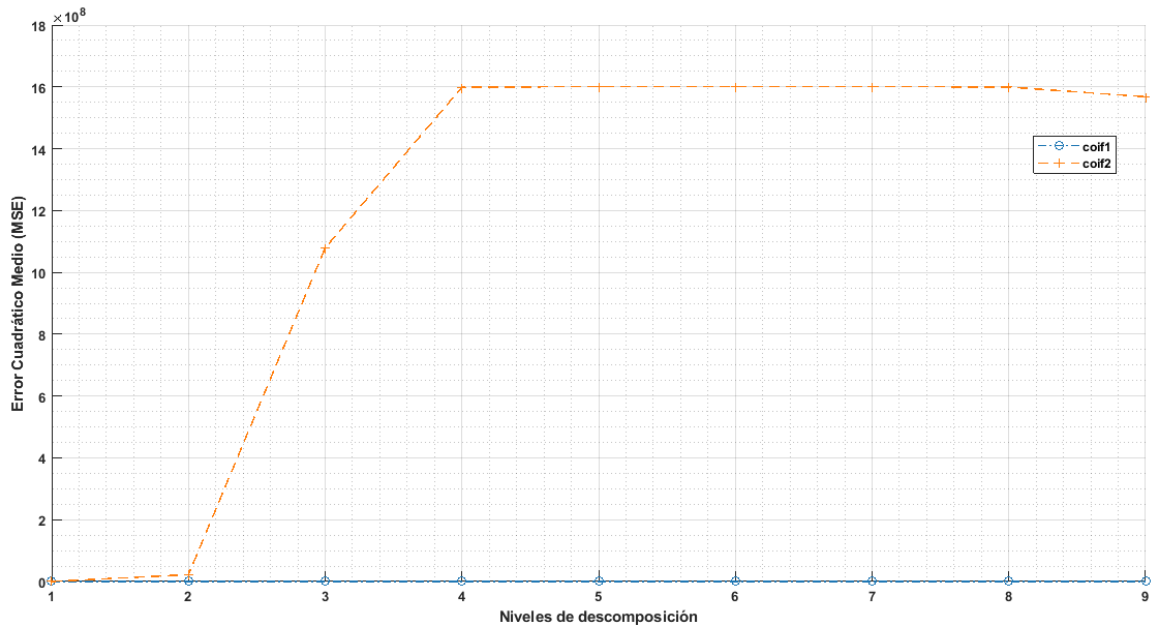
A continuación, se muestran las gráficas de *MSE* y *PSNR* obtenidas para cada familia *wavelet* al implementar el método de compresión con pérdidas desarrollado. En las Figuras F.1, F.2, F.3 y F.4 se muestran las mediciones de *MSE* para CT. En las Figuras F.5, F.6, F.7 y F.8 se muestran las mediciones de *MSE* para MRI. Mediante las Figuras F.9, F.10, F.11 y F.12 se comparan las mediciones de *MSE* para imágenes US. De las Figuras F.13 a F.24 se observan las gráficas comparativas de *PSNR* para todas las familias *wavelet* implementadas.



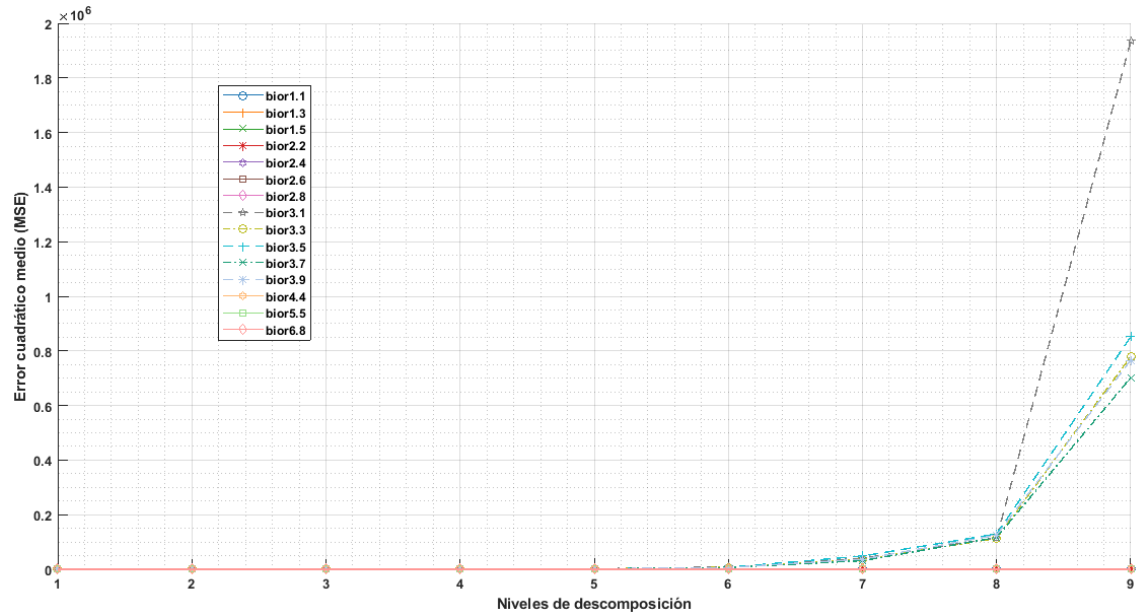
102Figura F.1. *MSE* familia *Daubechies* sobre CT – Cuantificador.



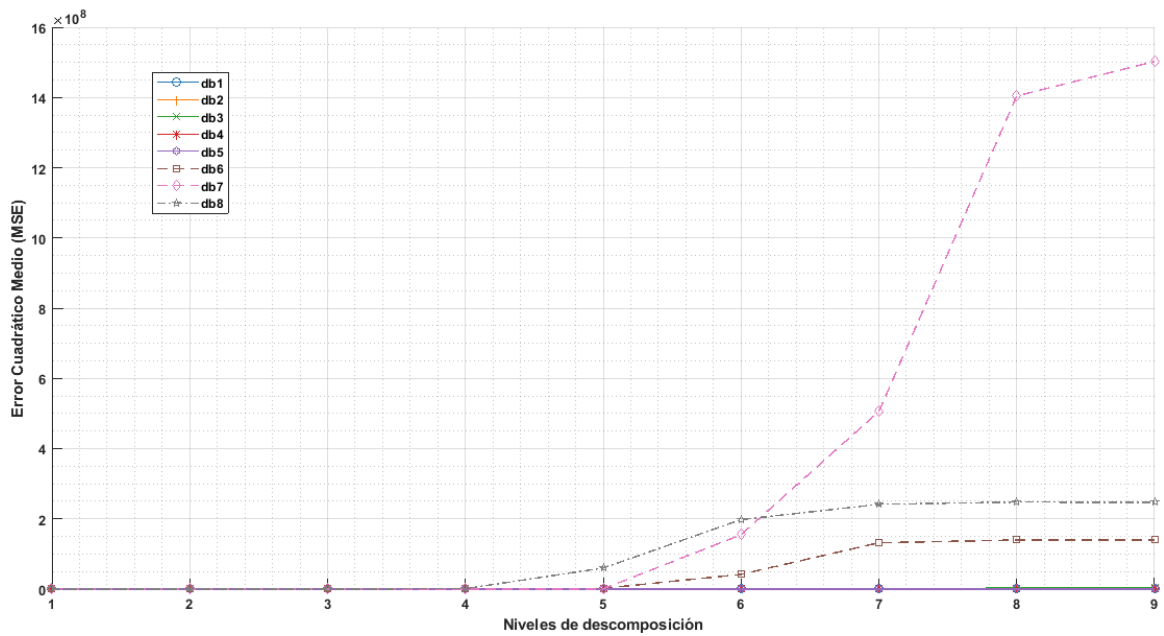
103Figura F.2. *MSE* familia *Symlet* sobre CT – Cuantificador.



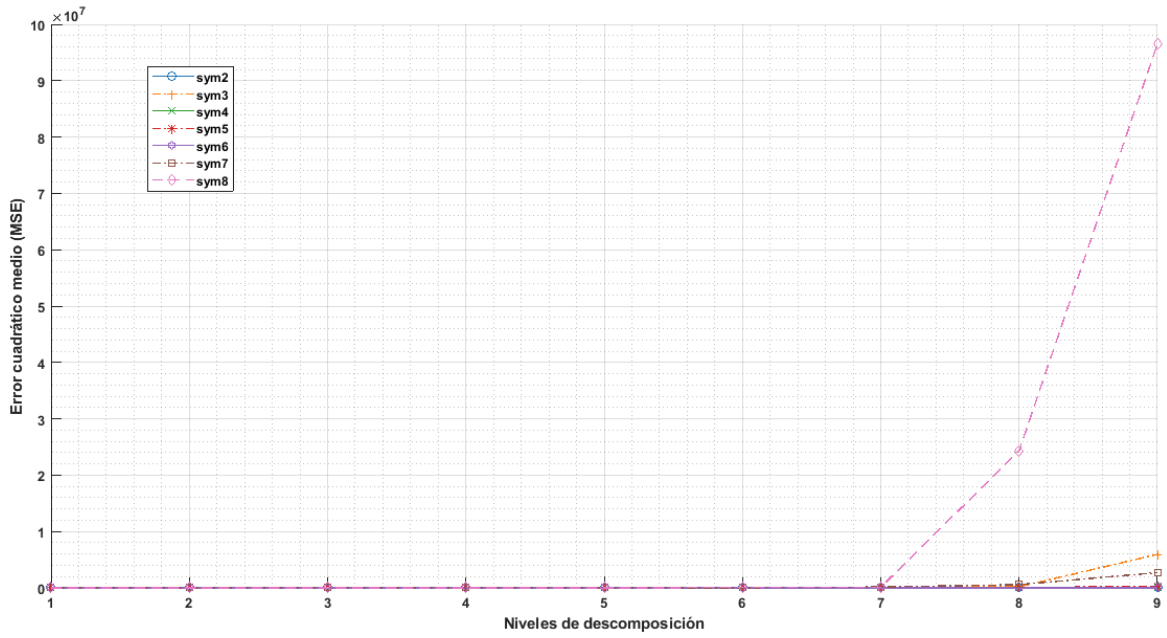
104Figura F.3. *MSE* familia *Coiflet* sobre CT – Cuantificador.



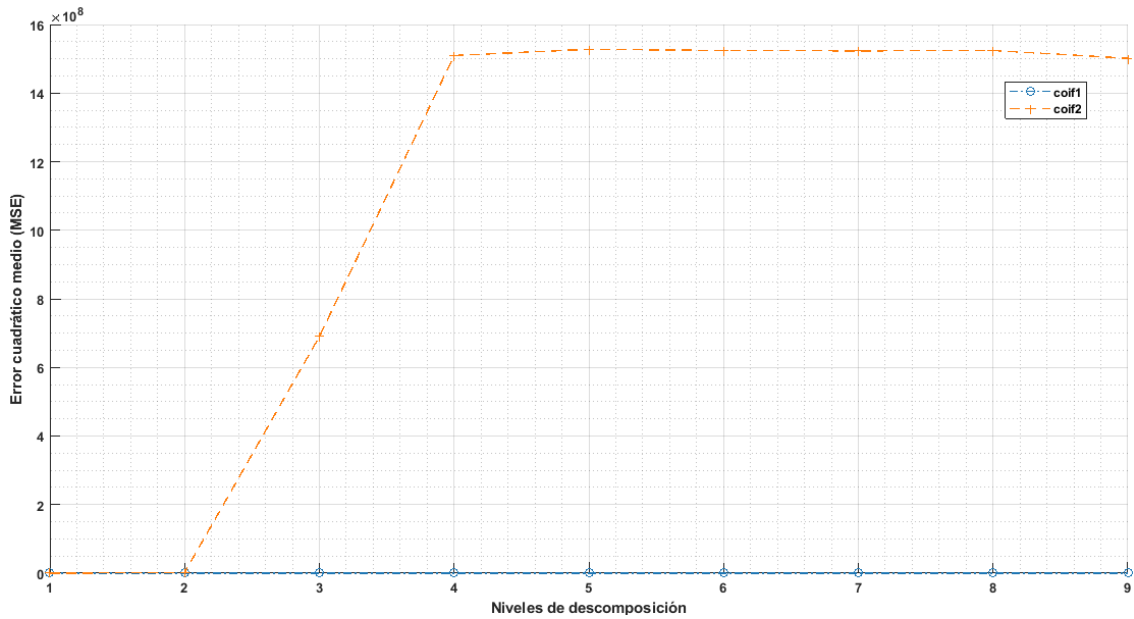
105 Figura F.4. *MSE* familia *Biorthogonal* sobre CT – Cuantificador.



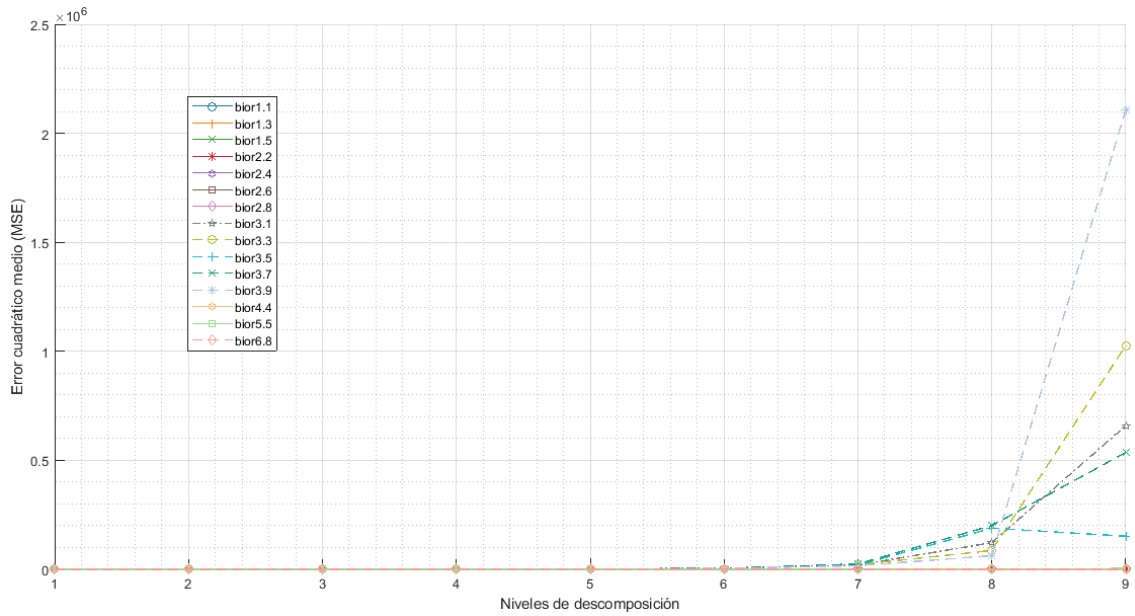
106 Figura F.5. *MSE* familia *Daubechies* sobre MRI – Cuantificador.



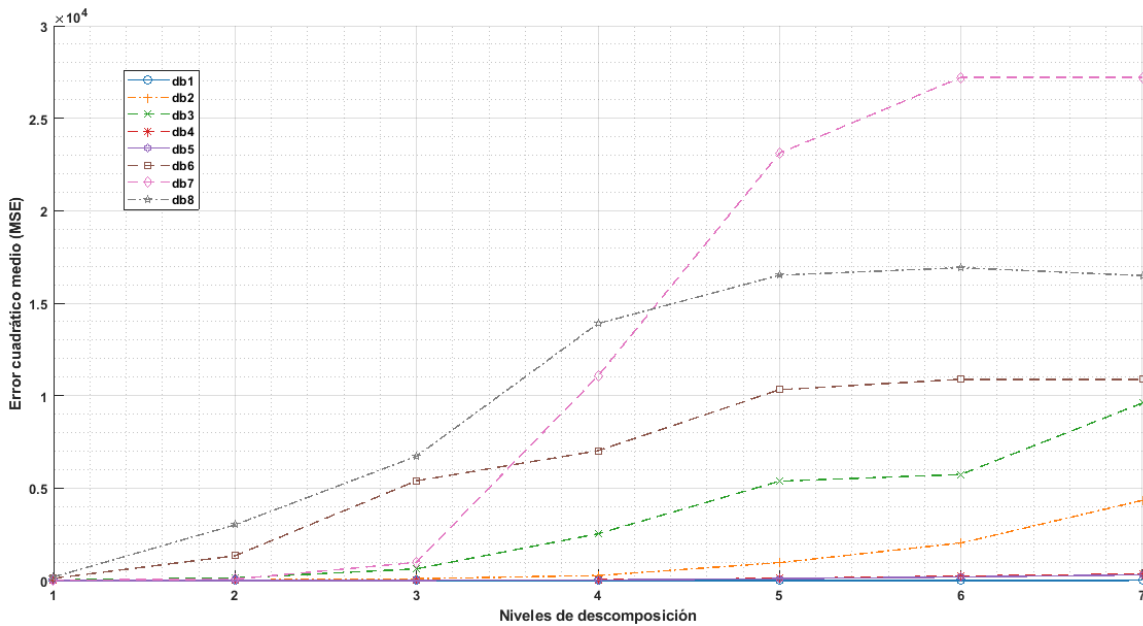
107 Figura F.6. *MSE* familia *Symlet* sobre MRI – Cuantificador.



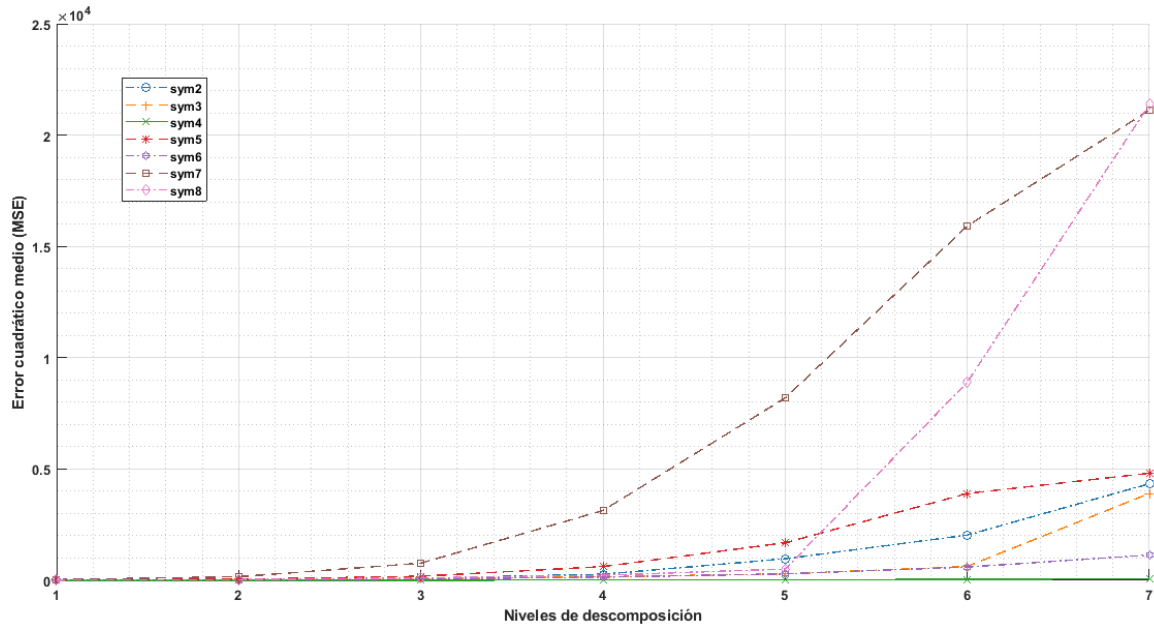
108 Figura F.7. *MSE* familia *Coiflet* sobre MRI – Cuantificador.



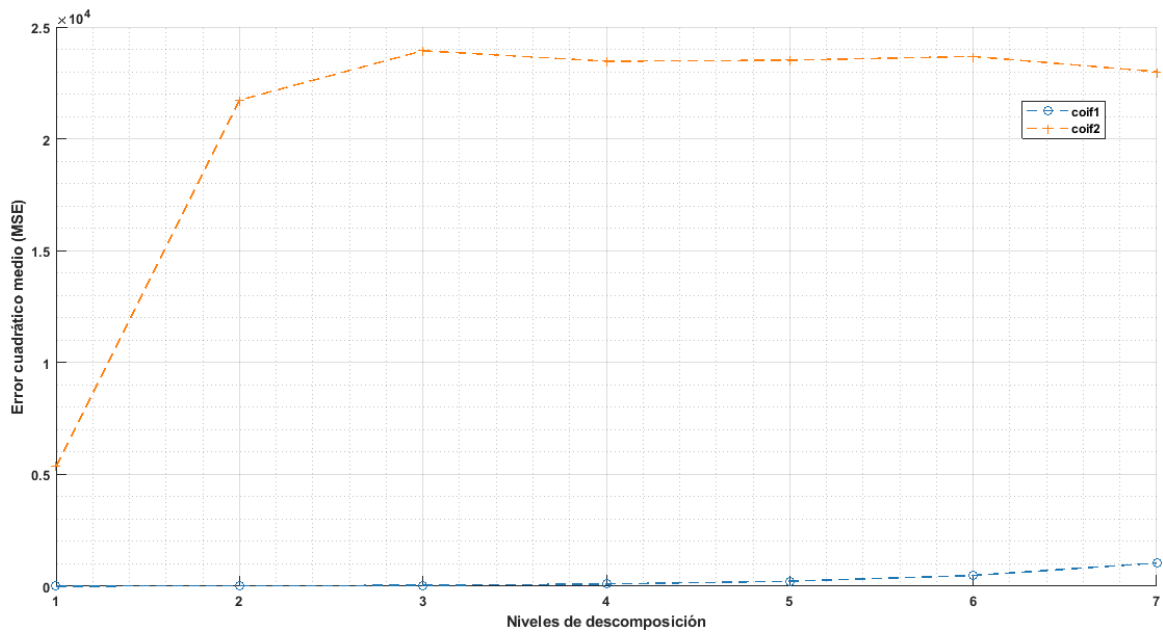
109 Figura F.8. *MSE* familia *Biorthogonal* sobre MRI – Cuantificador.



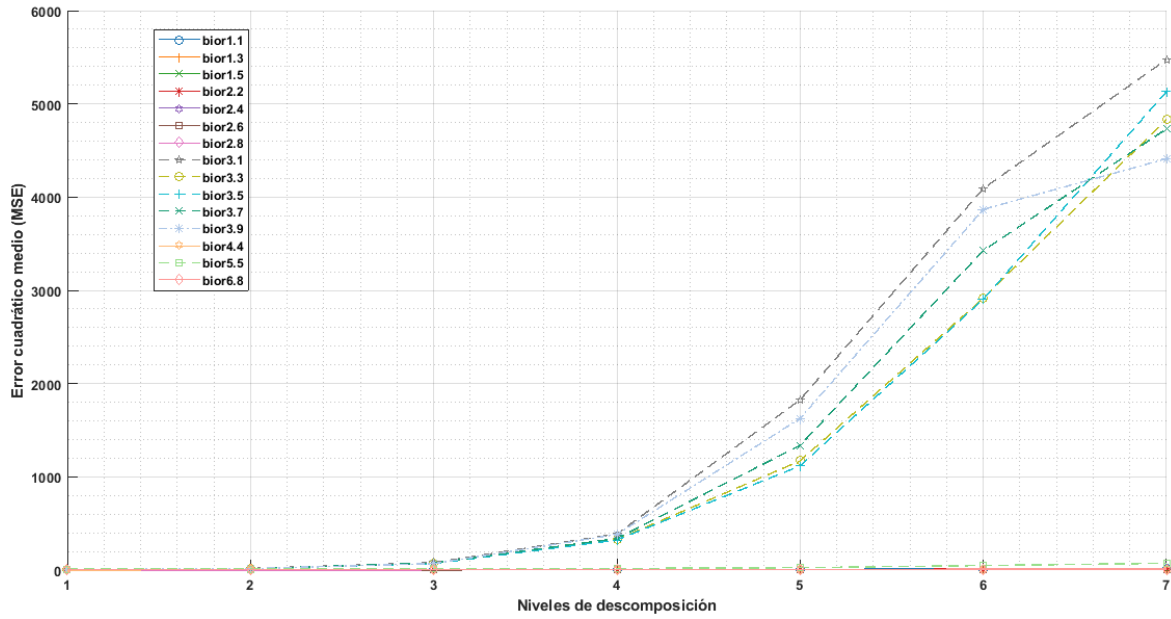
110 Figura F.9. *MSE* familia *Daubechies* sobre US – Cuantificador.



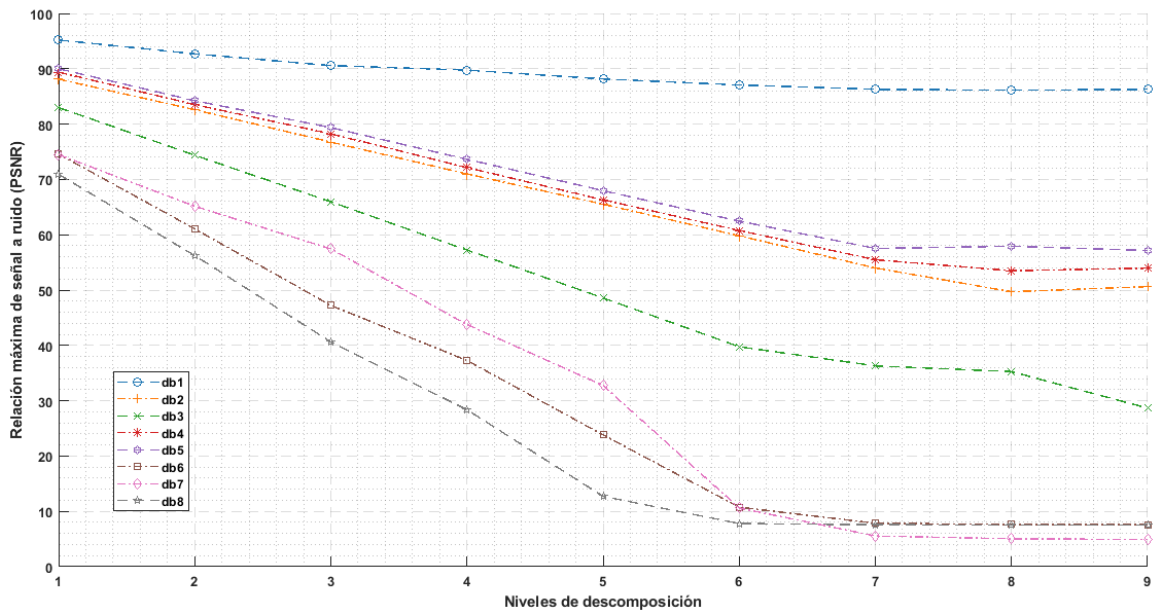
111Figura F.10. *MSE* familia *Symlet* sobre US – Cuantificador.



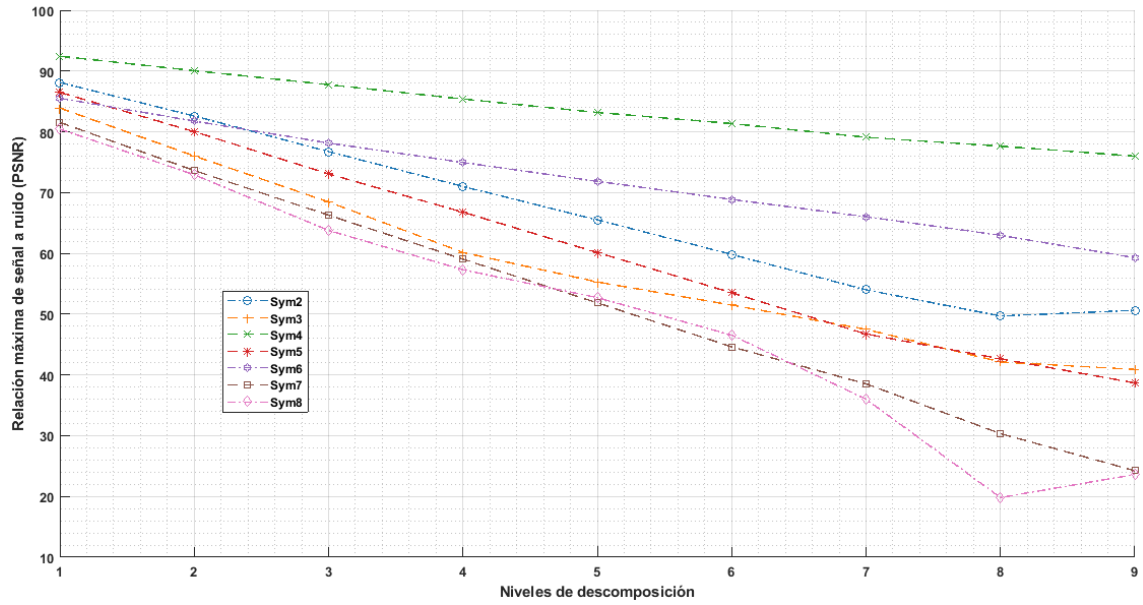
112Figura F.11. *MSE* familia *Coiflet* sobre US – Cuantificador.



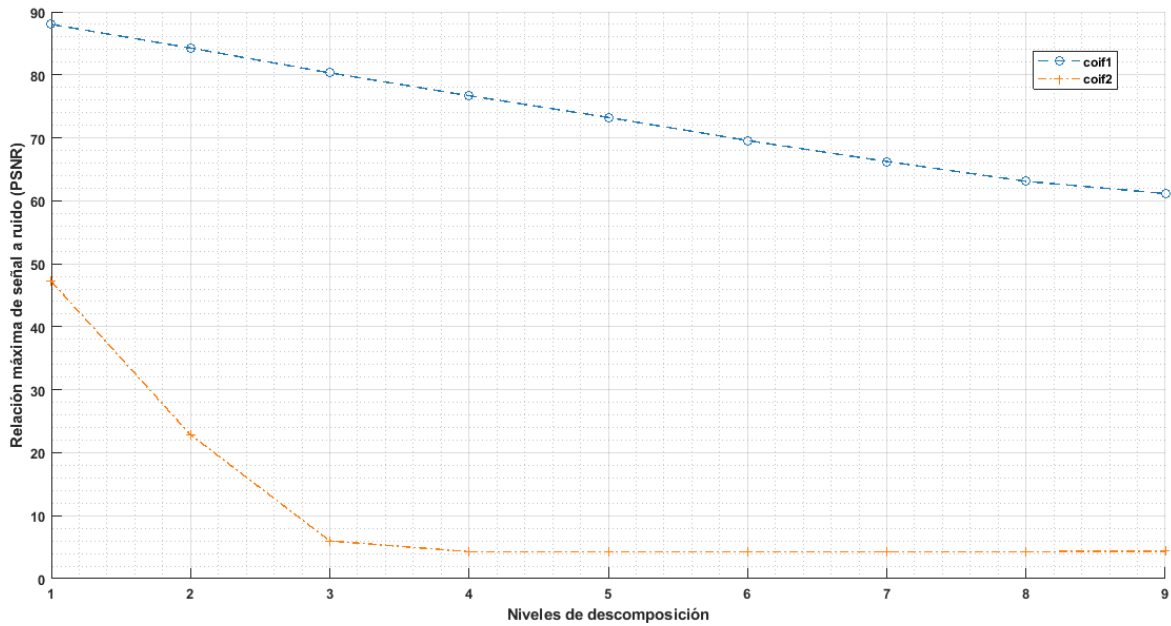
113Figura F.12. *MSE* familia *Biorthogonal* sobre US – Cuantificador.



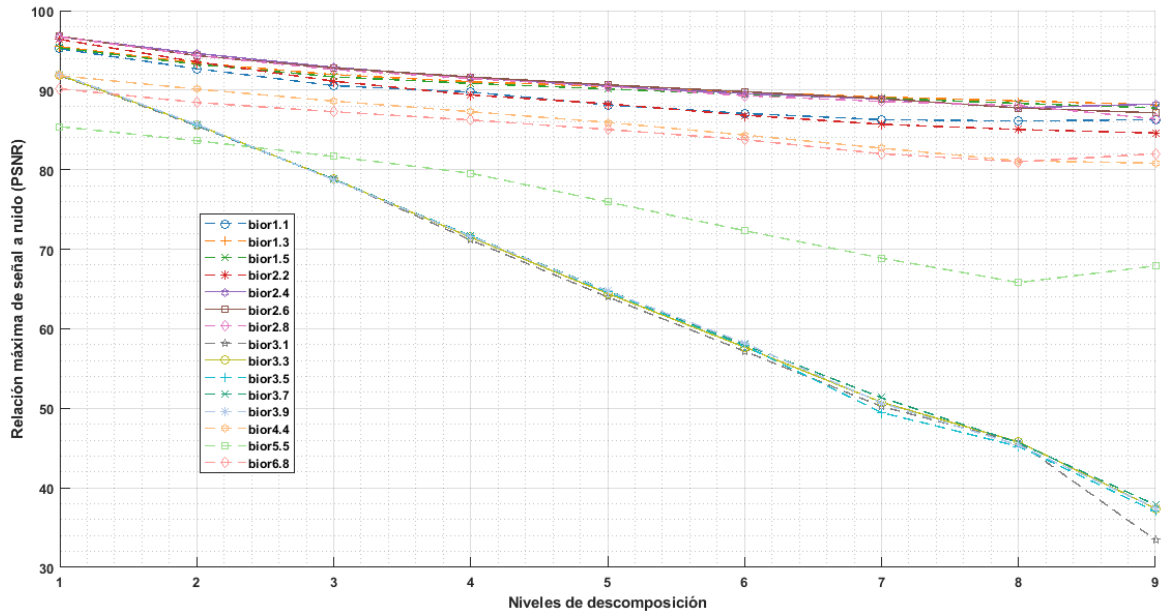
114Figura F.13. *PSNR* familia *Daubechies* sobre CT – Cuantificador.



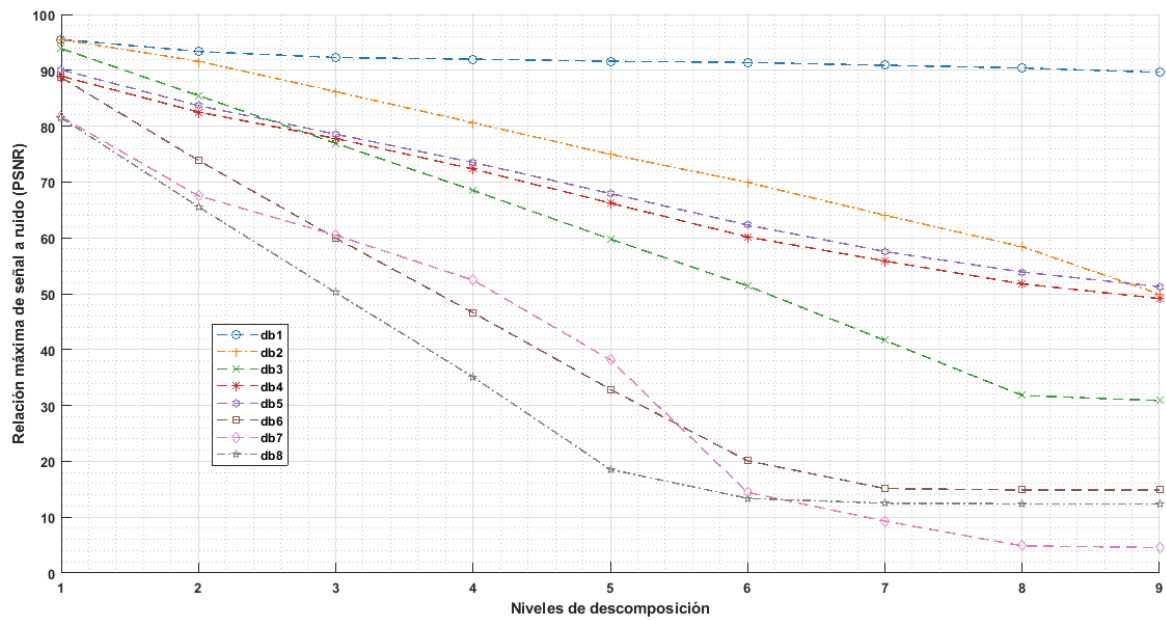
115Figura F.14. *PSNR* familia *Symlet* sobre CT – Cuantificador.



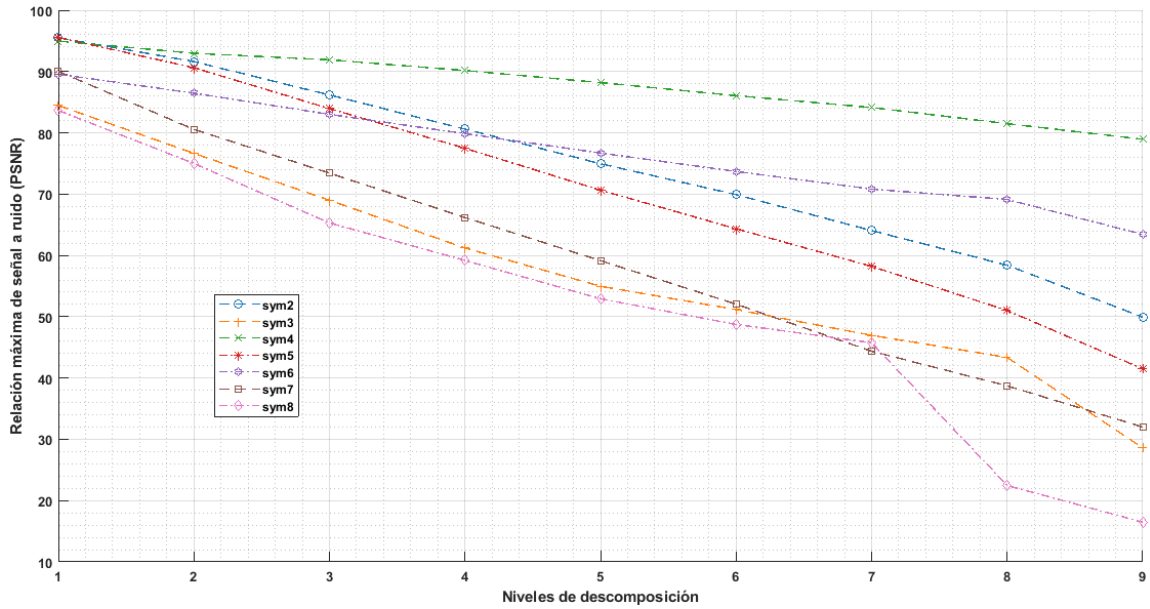
116Figura F.15. *PSNR* familia *Coiflet* sobre CT – Cuantificador.



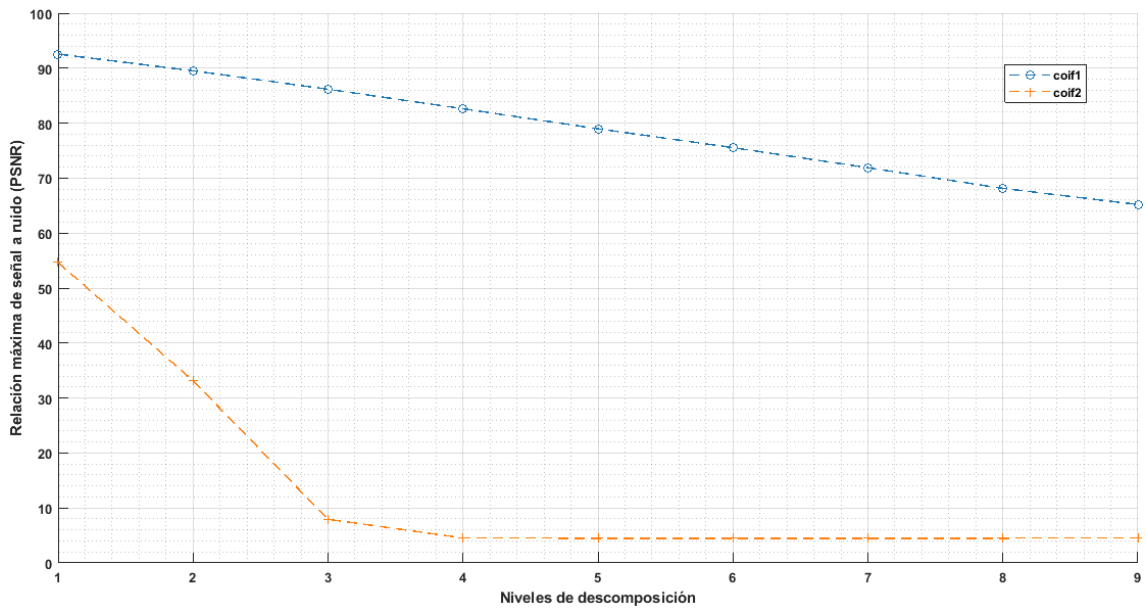
117Figura F.16. *PSNR* familia *Biorthogonal* sobre CT – Cuantificador.



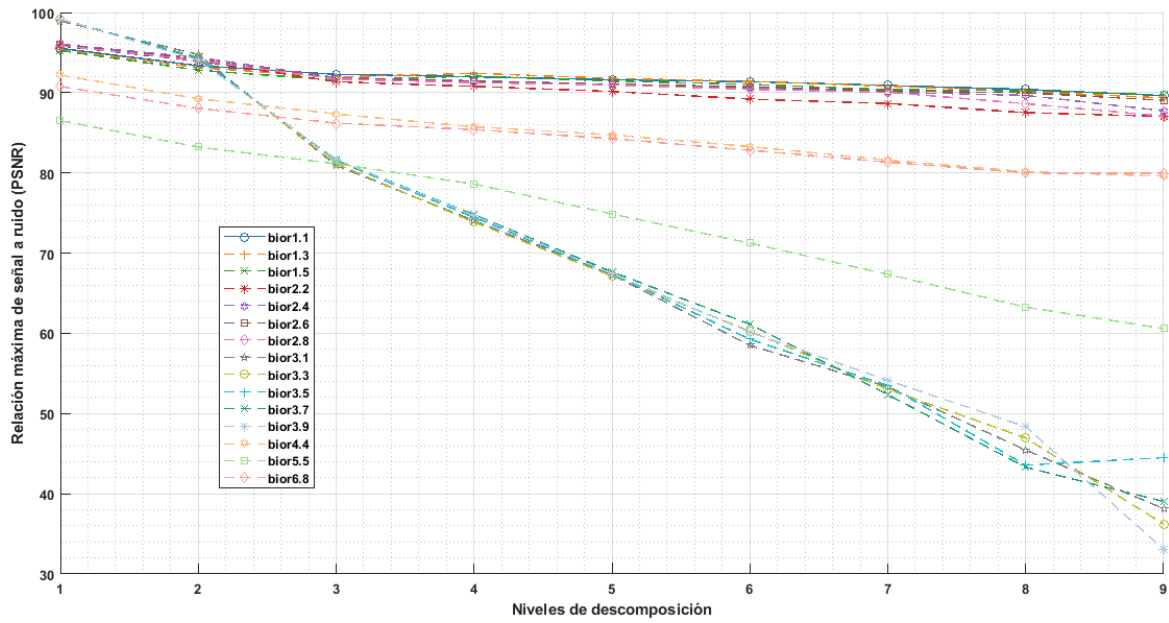
118Figura F.17. *PSNR* familia *Daubechies* sobre MRI – Cuantificador.



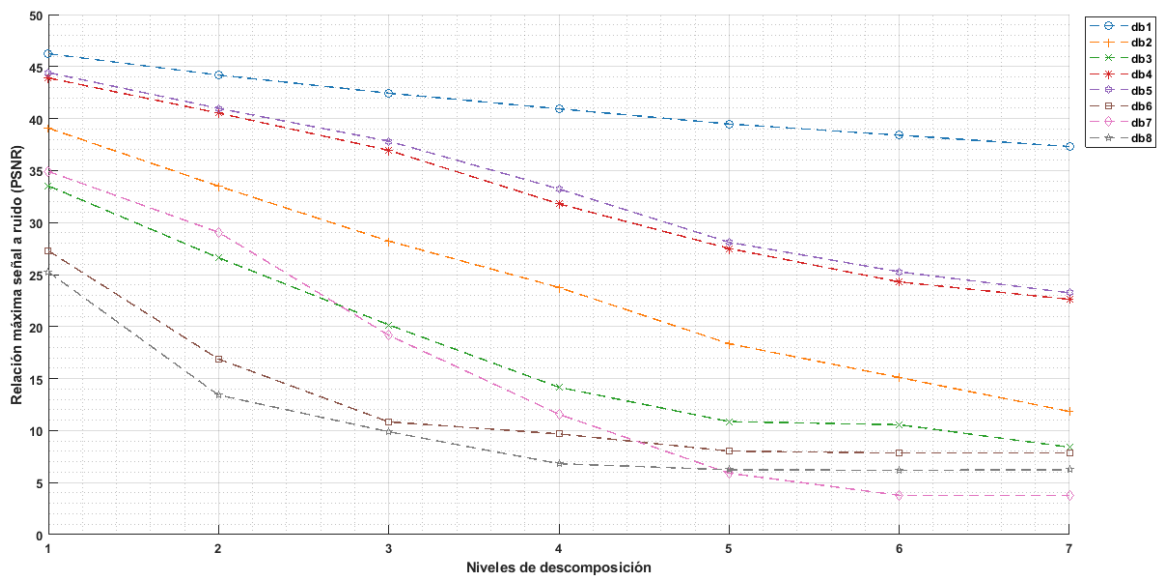
119Figura F.18. *PSNR* familia *Symlet* sobre MRI – Cuantificador.



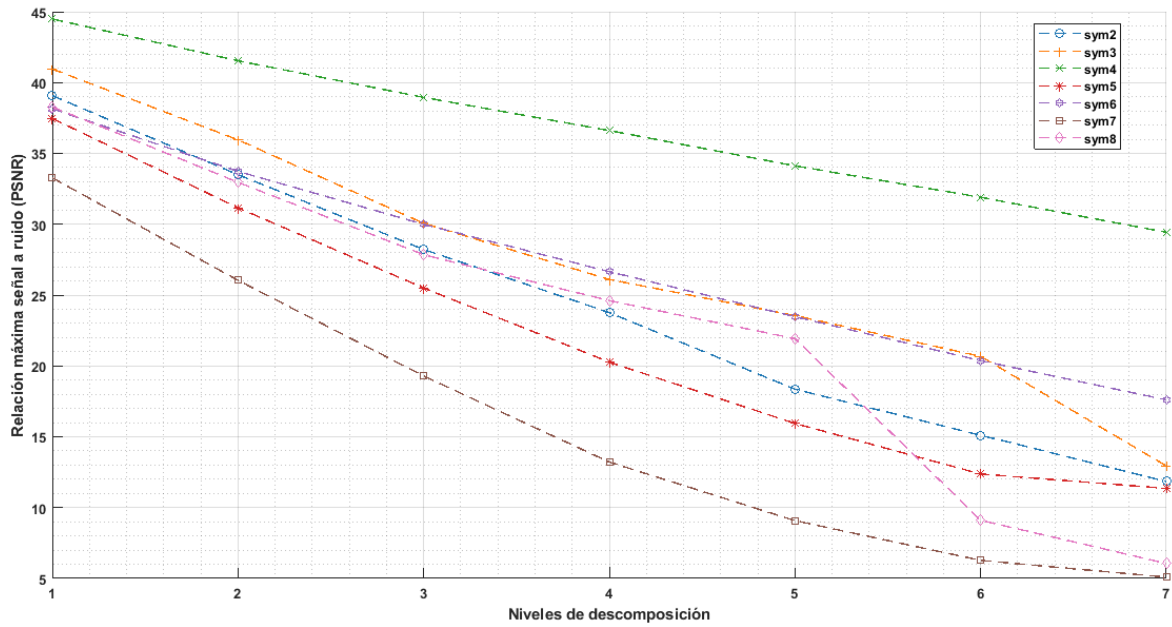
120Figura F.19. *PSNR* familia *Coiflet* sobre MRI – Cuantificador.



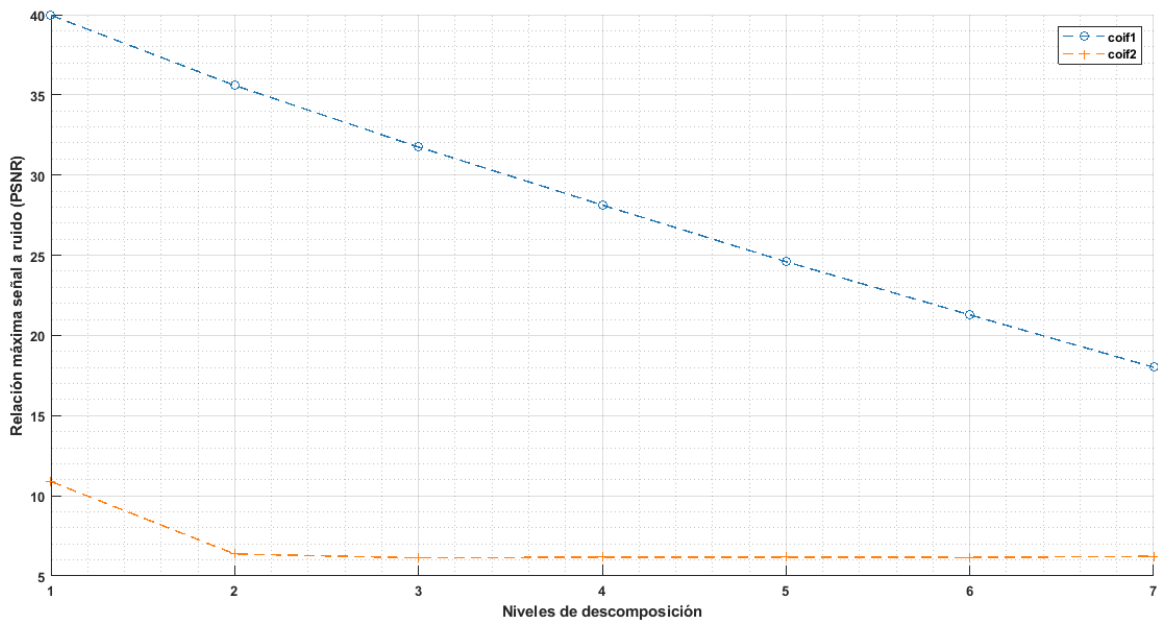
121Figura F.20. *PSNR* familia *Biorthogonal* sobre MRI – cuantificador.



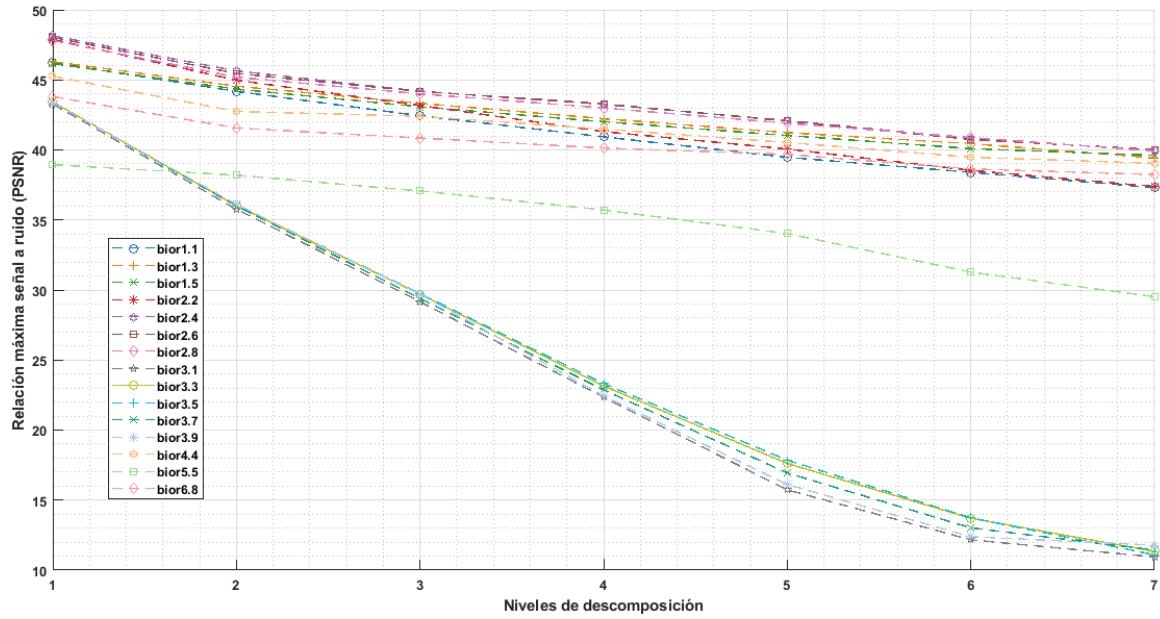
122Figura F.21. *PSNR* familia *Daubechies* sobre US – Cuantificador.



123Figura F.22. *PSNR* familia *Symlet* sobre US – Cuantificador.



124Figura F.23. *PSNR* familia *Coiflet* sobre US – Cuantificador.

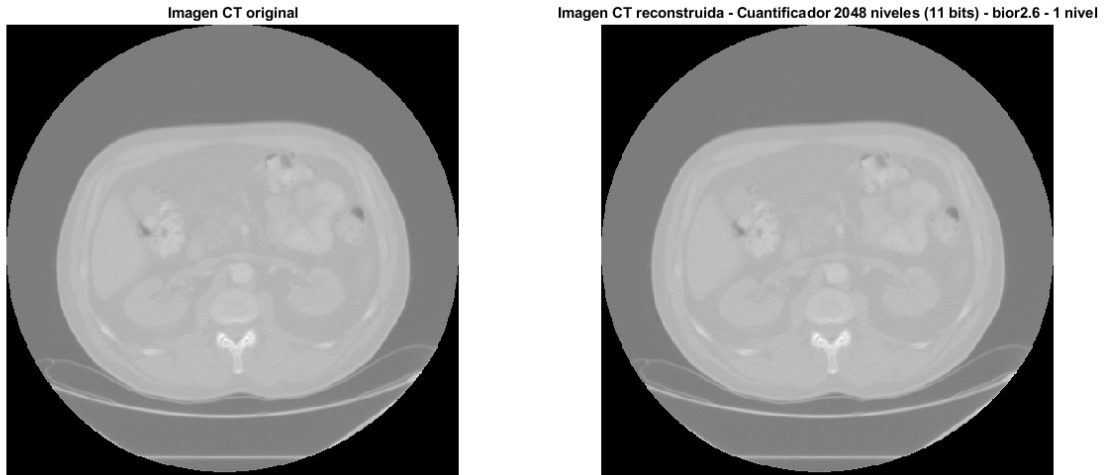


125Figura F.24. *PSNR* familia *Biorthogonal* sobre US – Cuantificador.

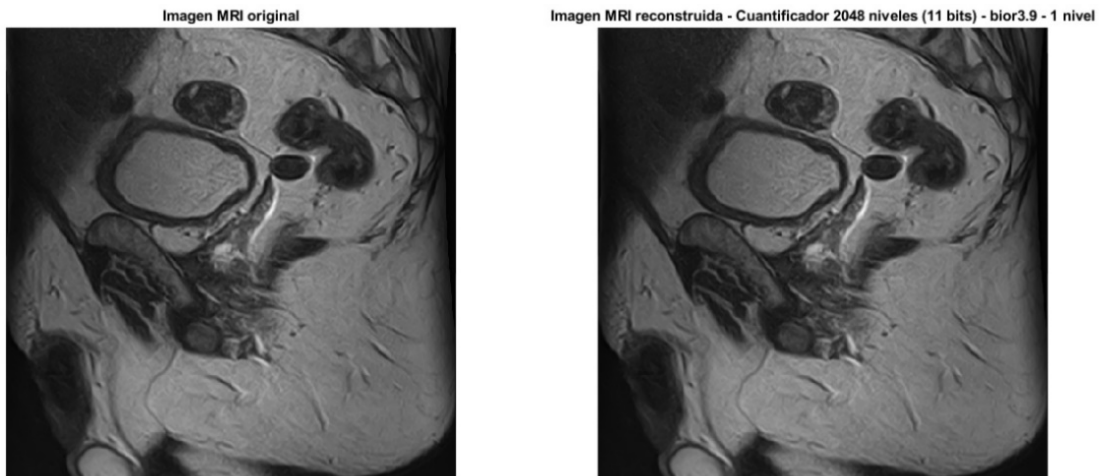


APÉNDICE G: EJEMPLOS COMPRESIÓN CON PÉRDIDAS

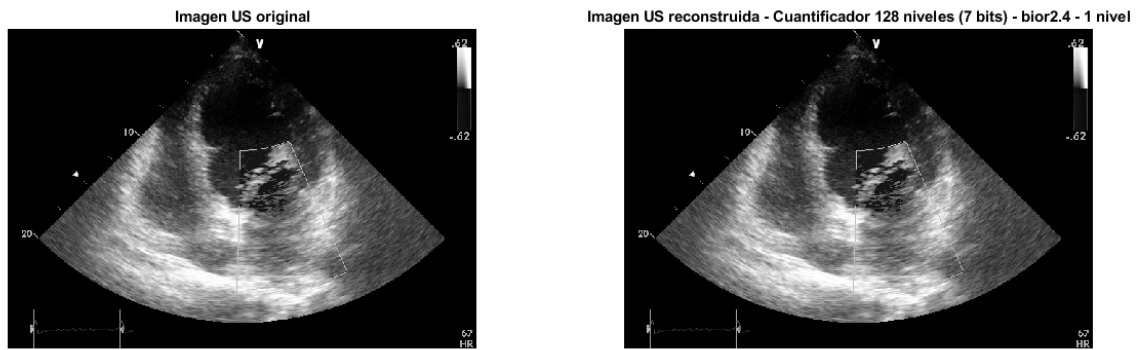
En las figuras G.1, G.2 y G.3 se muestran algunos ejemplos de imágenes CT, MRI y US comprimidas y reconstruidas mediante las mejores configuraciones del esquema *lifting* para el escenario de compresión con pérdidas (cuantificador) implementado.



126Figura G.1. Imagen CT reconstruida – bior2.6 – 1 nivel – Cuantificador 2048 niveles
 $PSNR = 96.2591$ dB.



127Figura G.2. Imagen MRI reconstruida – bior3.9 – 1 nivel – Cuantificador 2048 niveles
 $PSNR = 89.1996$ dB.



128Figura G.3. Imagen US reconstruida – bior2.4 – 1 nivel – Cuantificador 128 niveles
 $PSNR = 47.8180$ dB.