MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
LÍNEA ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LA TECNOLOGÍA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DEL CAUCA

RAZONES, PROPORCIONES Y PROPORCIONALIDAD EN TÉRMINOS DE VARIACIÓN Y CORRELACIÓN ENTRE MAGNITUDES: UNA POSIBLE FORMA PARA COMPRENDER LA CONSTRUCCIÓN DE DICHOS OBJETOS MATEMÁTICOS

Eruin Alonso Sánchez Ordoñez

Mayo de 2011

RAZONES, PROPORCIONES Y PROPORCIONALIDAD EN TÉRMINOS DE VARIACIÓN Y CORRELACIÓN ENTRE MAGNITUDES: UNA POSIBLE FORMA PARA COMPRENDER LA CONSTRUCCIÓN DE DICHOS OBJETOS MATEMÁTICOS

Eruin Alonso Sánchez Ordoñez

Trabajo de investigación para optar al título de Magister en Educación.
Línea Enseñanza de las Ciencias y la Tecnología.

Director
Gilberto de Jesús Obando Zapata.
Profesor Universidad de Antioquia

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
LÍNEA ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LA TECNOLOGÍA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
MAYO DE 2011

Agradecimientos

En primer lugar gracias a Dios por la vida y por otra nueva posibilidad que me brinda.

A los estudiantes del grado 7 de la Institución Educativa “Los Comuneros” jornada de la tarde, quienes me brindaron su tiempo y “soportaron” extensas jornadas resolviendo las situaciones planteadas y dialogando conmigo. A los directivos de aquel momento, Especialista Walter Gaviria (Rector) y Carlos Perafán (Coordinador) por las concesiones y la autorización para poder llevar a cabo mi empresa. A mis compañeros profesores, que cedieron algunas de sus actividades académicas, para el desarrollo de mi trabajo con los muchachos.

A los integrantes del grupo de Educación Matemática de la Universidad del Cauca (GEMAT) porque fueron el punto de apoyo para sacar adelante esta propuesta y en el momento preciso lanzaron el “salvavidas”.

A Gilberto de Jesús Obando Zapata, mi director de tesis, quien con sus amplios conocimientos en el campo de la Educación Matemática y de las razones, las proporciones y la proporcionalidad; fue el faro que guió mi camino y un referente para seguir. Gracias por su tiempo y su dedicación.

A mis padres, mi hermano y mi sobrina que han estado siempre a mi lado patrocinando y acompañando mis aventuras académicas.

Y finalmente a las tres RAZONES que dan sentido a mi vida y me motivan para asumir nuevos retos; mi esposa Lorena y mis hijas Gabriela e Isabel. Gracias por su comprensión. Les prometo devolver PROPORCIONALMENTE el tiempo que dejé de destinar a ustedes.

Resumen

En el currículo de matemáticas de Colombia tradicionalmente las razones, las proporciones y la proporcionalidad son enseñadas partiendo de la definición de razón como cociente indicado entre dos números enteros y de proporción como igualdad de dos razones, para luego enseñar a resolver problemas clásicos únicamente mediante la regla de tres y la multiplicación en cruz. Tal forma de trabajar centra su atención en lo algorítmico y privilegia lo numérico, desconociendo o conectando débilmente estos objetos de conocimiento matemático con lo variacional, esencialmente con las relaciones y las funciones. Además, en cierta forma, no explora las formas previas a la instrucción que tienen los estudiantes para enfrentar dichos problemas. En tal sentido, se ha propuesto identificar los sistemas de prácticas que desarrollan los estudiantes en la solución de situaciones de variación y cambio y la manera como esos sistemas dan forma a los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad. Para tal fin, en el marco de la Teoría Antropológica de la Didáctica (en adelante TAD) como referente teórico y metodológico, se recurre a la aplicación de cinco situaciones de variación y cambio, mediante las cuales se identificó, por un lado, la forma como los estudiantes llevan las razones, las proporciones y la proporcionalidad al aula de clase y por otro las dificultades y carencias en lo referente a conocimientos matemáticos necesarios para avanzar en la construcción de los mencionados objetos. Este segundo punto se hizo fundamentado en que se realizó una investigación de intervención (Ponte, Oliveira, Brunheira, Varandas, & Ferreira, 1998), es decir, luego de aplicada una situación, si se encontraba alguna dificultad, en la siguiente sesión se procedía a realizar una explicación que permitiera superarla, por ejemplo la construcción, análisis y lectura de gráficas cartesianas. El proyecto permitió identificar que los estudiantes realizan con mayor naturalidad análisis de tipo cualitativo y acuden a un razonamiento por analogías, pero que la elaboración de preguntas adecuadas los induce a cuantificar sus análisis. Además se evidenció la utilización de un buen número de teoremas y conceptos en acto (Vergnaud, 1990) propios del campo conceptual de las estructuras multiplicativas (Vergnaud, 1990, 1991, 1994), los cuales deberán ser formalizados más adelante.

Tabla de Contenido

Índice de tablas

Índice de gráficas

0 Introducción

El siguiente documento ha sido elaborado como requisito parcial para obtener el título de Magister en Educación, línea Enseñanza de las Ciencias y la Tecnología, otorgado por el Instituto de Posgrados de la Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación de la Universidad del Cauca.

La idea de emprender este proyecto surgió del trabajo desarrollado en el marco del seminario permanente sobre Educación Matemática que realiza el Grupo de Investigación Educación Matemática – Unicauca del cual es integrante el autor desde el año 2004. Este proyecto partió desde una necesidad detectada en la práctica profesional y en las experiencias de enseñanza de los objetos de conocimiento matemático denominados razones, proporciones y proporcionalidad en el grado séptimo de Educación Básica.

La experiencia profesional y de enseñanza mostraba que era poco adecuado que estos objetos matemáticos se abordaran, preponderantemente, desde contextos y situaciones que aluden al pensamiento numérico y que en dicho tratamiento se establecieran pocas o ningunas conexiones con el pensamiento variacional. Igualmente esta experiencia permitió observar que el acceso a estos objetos podría hacerse mejor desde lo variacional que desde la rutinización y mecanización de la definición de la razón como cociente indicado entre dos números enteros, y de la proporción como la igualdad de dos razones, para después, habiendo visto las propiedades de las proporciones, pasar a la regla de tres (simple directa, simple inversa o compuesta) y al producto en cruz.[1]

Tal aritmetización, mecanización y falsa generalización se debe, entre otras cosas, a que:

- ✓ La regla de tres asegura rapidez y facilidad tanto para la enseñanza como para la solución de problemas numéricos. Vale la pena anotar que este método, planteado por comerciantes orientales no fue diseñado para la enseñanza, sino que

[1] El hecho de que la mayor parte de ejercicios planteados por el docente fueran de proporción directa, llevó a algunos estudiantes a una "falsa generalización" de que todos los ejercicios pueden ser resueltos aplicando la regla de tres.

tuvo como fin contribuir a resolver problemas relacionados con transacciones comerciales. En tal sentido cumplió, y aún sigue cumpliendo, y se adaptó para la solución de problemas de otra índole.

- ✓ El formato para encontrar el valor desconocido se ha ligado con la tendencia de los estudiantes de usar la nemotecnia de la regla de la multiplicación en cruz, la cual, en la mayoría de los casos, excluye el uso del razonamiento proporcional. Además, autores como Lamon (1999) o Lesh, Post y Behr (1988) afirman que el amplio uso de rutinas algorítmicas, tales como la multiplicación en cruz, o incluso métodos de solución aditivos primarios, indican que no todas las personas que resuelven correctamente un problema que involucra proporciones, necesariamente, estén usando el razonamiento proporcional.
- ✓ La regla de tres se automatizó de tal forma que los estudiantes ya no piensan en las cantidades y en la forma como se relacionan, sino que se limitan a multiplicar dos de los números y a dividir el resultado entre el otro (Vasco, 2006).
- ✓ El estudio de los problemas de proporcionalidad simple directa a partir de la función lineal que la modela, y de sus propiedades, es generalmente pasado por alto en la escuela, y se simplifica su tratamiento a partir del uso de la regla de tres simple directa (Obando, Vasco, & Arboleda, 2009).

Inicialmente se quiso estudiar el abordaje de los objetos razón, proporción y proporcionalidad desde lo curricular, es decir, se pretendió, analizar cómo podría plantearse una innovación curricular (Rico, 1997) que permitiera llevar las razones, las proporciones y la proporcionalidad, tradicionalmente ubicadas en el pensamiento numérico, como quedó evidenciado en el análisis de libros de texto hecho por Guacaneme (2001), al pensamiento variacional. En este sentido, cuando se analizaron los documentos Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN, 2006), Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales (MEN, 2004) y las conclusiones de Guacaneme (2001), se observaron indicios e indicaciones para un esbozo de propuesta de innovación curricular. Restaría entonces el diseño, concreción e implementación de dicha propuesta.

Sin embargo, para tal fin y de acuerdo con lo planteado anteriormente sobre las implicaciones, en algunos casos negativas, de la utilización como única estrategia, de la regla de tres y de la multiplicación en cruz, fue interesante determinar:

- ✓ ¿Cómo las razones, las proporciones y la proporcionalidad son reconocidas y manipuladas, por los estudiantes en situaciones de aula?
- ✓ ¿Qué ideas y nociones han construido los estudiantes a lo largo de su vida escolar y de experiencias cotidianas al respecto de dichos objetos?

Además, se indagó por las formas de organización del conocimiento matemático escolar, para, si es posible, proponer nuevos modos de organización de dichos objetos de conocimiento, y con base en dichos modos, plantear nuevas maneras de actuación en el aula de clase que busquen facilitar la comprensión, de eso que hasta el momento no ha sido de fácil comprensión para los estudiantes, ni de fácil enseñanza para los maestros.

Los anteriores planteamientos condujeron a preguntarse ¿cuáles son los sistemas de prácticas matemáticas que desarrollan los estudiantes en situaciones de variación y cambio y de qué manera esos sistemas dan forma a los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad?

Para dar respuesta a este interrogante se diseñaron e implementaron cinco situaciones de variación y cambio. Dichas situaciones fueron inicialmente analizadas desde la mirada del experto y luego se analizaron los procedimientos empleados por los estudiantes en su solución. Ambos análisis fueron hechos teniendo como marco teórico y metodológico elementos de la Teoría Antropológica de la Didáctica, sobre todo los referentes a tipos de tareas, técnicas y tecnologías asociadas y las teorías que las soportan. El trabajo con los estudiantes se hizo desde la intervención, es decir, el investigador durante y después de la aplicación de cada situación determinó las necesidades y obstáculos de los estudiantes que debían ser salvados para así poder avanzar en la siguiente. En tal sentido, en algunos momentos fue necesario diseñar subsituaciones que permitieran determinar los avances de los chicos, pero también sus retrocesos.

El proceso investigativo, descrito anteriormente, permitió determinar que:

- Los estudiantes utilizan una serie de conceptos y teoremas en acto relacionados con las razones, las proporciones y la proporcionalidad, tales como las tres propiedades de la linealidad, los diferentes roles de la razón (como relator, como operador o como correlator entre cantidades) y los análisis escalares y funcionales.
- Es más natural para los estudiantes realizar análisis de orden cualitativo y acudir al razonamiento por analogías.
- Los estudiantes utilizan mayoritariamente representaciones icónicas que gráficas estadísticas y cartesianas. Además, las representaciones gráficas no son usadas para dar respuesta a otros interrogantes.

La estructura del documento

Para lograr lo anterior se realizó una búsqueda de investigaciones, en el campo de la Educación Matemática, relacionadas con las razones, las proporciones y la proporcionalidad. Al analizar los resultados de las investigaciones se referenciaron tres de ellas, que fueron presentadas como descripción de antecedentes de la investigación en el **Capítulo 1**. La primera de ellas hace referencia a un estudio de caso en el cual el sujeto de la investigación, Paulina, pasa de un pensamiento proporcional cualitativo a un pensamiento proporcional cuantitativo dando sentido a los algoritmos que aplica (Ruiz & Valdemoros, 2006). La segunda es una experiencia en la cual, los investigadores pretenden lograr en estudiantes de séptimo grado de Educación Básica una aprehensión cognitiva de la noción matemática escolar de razón (Barra, Díaz, & Ramírez, 2006). En la tercera, se presenta la experiencia de aula: "Una oportunidad para profundizar en aspectos relativos a la enseñanza de razón como tópico matemático"; experiencia en la cual se implementó una secuencia de actividades con grupos de estudiantes de grado séptimo y octavo de Educación Básica Secundaria (Perry, Gucaneme, Andrade, & Fernández, 2003). Además en este capítulo se incluyó una discusión acerca de la ubicación de las razones, las proporciones y la proporcionalidad como objetos del pensamiento variacional o del pensamiento numérico exhibiéndose, por ejemplo, las ventajas y las desventajas de la utilización de la regla de tres como técnica generalizada de resolución de algunos tipos de problema. En el capítulo también se presentó lo que al respecto de la organización escolar de los objetos, razón, proporción y proporcionalidad se ha dicho desde la Teoría Antropológica de la Didáctica, la forma cómo son considerados por los documentos Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN, 2006) y Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) emanados por el Ministerio de Educación Nacional colombiano y lo que al respecto de la enseñanza y aprendizaje de estos objetos de conocimiento matemático se ha dicho en otros países.

El **Capítulo 2** presenta la fundamentación teórica sobre la cual descansa el proyecto. Ésta ha sido dividida en dos partes, una de las cuales se enfocó en definir un marco de acción desde la Educación Matemática, y la otra, se orientó hacia la caracterización matemática y didáctica de los objetos de estudio en la tesis, esto es, las razones, las proporciones y la proporcionalidad. Por tanto se tomó, desde lo didáctico, elementos de la Teoría Antropológica de la Didáctica (Artigue, 2002; Bosh & Chevallard, 1999; Chevallard, 2003; F. García, 2005) en lo referente a organizaciones praxeológicas o praxeologías y los sistemas de prácticas de la Teoría Ontosemiótica (D'amore & Godino, 2007). Desde lo matemático se acudió a los planteamientos hechos por (Obando, et al., 2009) y desde lo cognitivo fue considerado el concepto de teoremas y conceptos en acto en el marco de la Teoría de los Campos Conceptuales (Vergnaud, 1983, 1990, 1994), fundamentalmente el Campo Conceptual de las Estructuras Multiplicativas y el concepto de razonamiento proporcional desde autores como Lesh y otros (1988) o Lamon (1994, 1999, 2007)

Por otro lado, teniendo en cuenta que la investigación parte de la experiencia profesional del investigador, en el **Capítulo 3,** referente a los aspectos metodológicos, se justifica por qué una investigación de intervención, y se explica cuál fue el procedimiento para la recolección de la información y la manera como fueron analizados los datos.

En el **Capítulo 4**, considerando que el propósito general de la investigación fue determinar los sistemas de prácticas desplegados por los estudiantes en situaciones de variación y cambio, se presenta, en primera instancia, el análisis previo hecho a las situaciones (es decir, las soluciones desde la mirada del experto) y se intenta determinar las posibles soluciones y respuestas que se esperaban por parte de los estudiantes. A continuación, se presenta, a la luz del análisis mencionado anteriormente, el análisis de las soluciones realizadas por los estudiantes en cada una de las cinco situaciones diseñadas. Igualmente se exponen las intervenciones realizadas por el investigador, las cuales buscaron desencadenar procesos de interacción entre el profesor y los alumnos, o entre los mismos alumnos, con el fin de que ellos realizaran las construcciones o las ampliaciones conceptuales necesarias para una mejor continuidad en su trabajo. Finalmente se exhiben los resultados de las situaciones adicionales, aplicadas con el fin de generar condiciones para que el avance de los estudiantes se diera de la mejor manera posible. El desarrollo tanto de las intervenciones como de las situaciones adicionales está sustentado en el diseño metodológico y en la ruta de aplicación de las situaciones (ver Gráfica 3).

En la parte final se incluyeron algunas consideraciones acerca de la aplicación y análisis de las situaciones.

1 Capítulo 1: Las especificidades de la investigación

1.1 Justificación

1.1.1 Ubicación en lo numérico o en lo variacional

1.1.1.1 El punto de vista numérico o aritmetización

Los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad, conceptos esenciales del campo conceptual de las estructuras multiplicativas según (Vergnaud, 1994), se presentan en los contenidos del plan de estudios en el área de matemáticas mayoritariamente como elementos del pensamiento numérico, con pocas o débiles conexiones con el pensamiento variacional. Dicha ausencia de nexos es puesta en evidencia en el rastreo de libros de texto de grado 7 hecho por Guacaneme (2001). Por otro lado, aunque desde los documentos Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN, 2006) y Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) las situaciones vinculadas con estos objetos son analizadas en relación a procesos de variación y cambio, la tradición en la enseñanza de la regla de tres y del producto en cruz, como procedimientos generalizados de solución, los ha encapsulado dentro del pensamiento numérico.

Al respecto de este encapsulamiento, hay que reconocer que desde el punto de vista de la aplicación en otras áreas y en otros campos como el económico y el comercial, el enfoque numérico es necesario y suficiente para resolver muchos de los problemas que en ellas surgen.[2] Además, la regla de tres tiene la virtud de permitir hacer cálculos sin necesidad de preocuparse por el análisis dimensional, pues de alguna forma la organización espacial de las cuatro magnitudes (en filas o columnas) garantiza que el resultado siempre tenga las unidades de la magnitud correspondiente a la cantidad de magnitud desconocida. Además, cómo técnica es muy potente, puesto que, por ejemplo, permite resolver problemas de proporcionalidad directa, sin necesidad de calcular la constante de proporcionalidad, y además, el método (la regla de tres) tiene incorporado una nemotecnia para recordar cómo calcular.

[2] La regla de tres, por ejemplo, es un método que surgió en el ámbito de los comerciantes orientales para resolver problemas particulares en el campo de los negocios y las transacciones comerciales. En tal sentido, sólo requería elementos de tipo numérico y algorítmico para su solución.

Por lo tanto el inconveniente no radica en que las razones, las proporciones y la proporcionalidad estén ubicadas dentro del pensamiento numérico, sino en considerar esta visión como la única forma de aproximación en el currículo escolar, lo cual restringiría las posibilidades de desarrollo de otros tipos de razonamiento, en particular, el razonamiento proporcional y del acceso a otros niveles más avanzados de las matemáticas.

Al respecto Vergnaud (1994) plantea que:

> [desde lo psicológico se ha señalado que] la multiplicación no es usualmente concebida por los niños como una operación binaria, que las propiedades de isomorfismo de la función lineal son más fácilmente comprendidas que las propiedades del coeficiente constante, y que muchas formas de razonamiento conciernen a relaciones entre magnitudes o cantidades, más que a solo números. (p. 45)

El planteamiento de Vergnaud muestra que la escuela ha propuesto como aproximación a la multiplicación una entrada que desde el punto de vista psicológico es más difícil para los estudiantes, y ha dejado de lado lo que para ellos puede ser de más fácil comprensión, lo cual, desde un punto de vista didáctico, se convierte en un llamado de atención por la necesidad de revisar la organización del conocimiento matemático en el aula de clase.

El autor también afirma que, en la primaria los problemas de proporción con los que tratan los estudiantes son reducidos a proporciones numéricas, la igualdad entre razones es comprobada mediante los algoritmos de la división y multiplicación de números decimales y el problema de la cuarta proporcional es resuelto a través de la llamada regla de tres, la cual según Vergnaud (1994) ha sido mecanizada por los niños a tal punto que éstos ya no piensan en las cantidades y en la forma como estas se relacionan, sino que se limitan a la aplicación del algoritmo.

Aspectos como los mencionados anteriormente tienen que ver con la consideración en los currículos escolares de los procesos aritméticos o aritmetización como la única forma de enseñar las razones, las proporciones y la proporcionalidad, pero esta aritmetización, según Vergnaud (1994), sólo les permite a los estudiantes dominar una parte del campo conceptual, se requerirán varios años más para que ellos logren entenderlo plenamente.

Ahora bien, es necesario aclarar que independientemente de qué tan aritmetizado esté el currículo, la comprensión del campo conceptual de las estructuras multiplicativas tarda muchos años.

1.1.1.2 La mirada desde el campo conceptual de las estructuras multiplicativas

Lo dicho hasta el momento muestra la presencia en la escuela de una visión aritmetizada de los objetos razón, proporción y proporcionalidad, la cual, aunque es importante y necesaria, está sesgada y es incompleta con respecto a las necesidades de formación de los estudiantes, por lo cual se requieren ampliaciones tanto desde el punto de vista matemático como cognitivo que favorezcan el trabajo en el aula de clase y complementen la visión numérica. Para tal fin, fundamentalmente desde lo cognitivo, se consideran algunos planteamientos de la Teoría de los Campos Conceptuales.

Vergnaud (1994) plantea la imposibilidad de analizar los procesos empleados por los estudiantes para resolver situaciones de proporción simple, de concatenación de proporciones simples, de doble proporción o de comparación de ratas y razones sin acudir a la estructura de funciones lineales y bilineales, es decir, sin acudir a todo el aparato formal de los postulados, los teoremas, las definiciones, etc., que soportan el álgebra lineal, o sin la identificación precisa de las magnitudes involucradas.

La afirmación de Vergnaud (1994) no hace referencia a que los estudiantes deban hacer uso de toda la teoría de las funciones, a la cual solo accederán varios años después de finalizada la Educación Media, puesto que si se aceptará tal concepción, entonces debería dársele la razón a quienes defienden la enseñanza de la multiplicación como la aplicación sin sentido de algoritmos en la primaria. Lo que deja entrever el autor es que en estos procesos, generados por los estudiantes, están presentes, en acto, conceptos y teoremas propios de la estructura de las transformaciones lineales y que es tarea del investigador, o del maestro, identificarlos para que posteriormente sean formalizados.

Ahora bien, en cuanto a la comprensión del campo conceptual de las estructuras multiplicativas por parte de los estudiantes, éstos deberán construir conceptos tales como número racional, función y variable, dependencia e independencia. Además tienen que extender el campo de validación de sus conocimientos intuitivos, es decir, los estudiantes deben pasar de los conceptos, y teoremas en acto que están a un nivel intuitivo, a la formalización en términos del lenguaje matemático y a la utilización de razones, y tasas complejas y a números no enteros. Lo anterior sumado a que esta construcción deberá ser extendida, entre otros dominios, a la geometría (por ejemplo a través de semejanzas y homotecias), a la probabilidad y a la estadística (por ejemplo con la densidad de población, las frecuencias relativas, el cálculo de probabilidades, etc.), a la física (por ejemplo, a través de la velocidad, la aceleración, la elasticidad, etc.) y a la química (por ejemplo, mediante la densidad, la concentración, etc.).

En cuanto a la extensión y la necesidad de superar lo numérico, Vasco (2006) plantea que para que las fórmulas que se utilizan en la física cobren suficiente sentido es necesario pensar primero en las magnitudes involucradas antes de pensar en su medida numérica o en el sistema en el que serán medidas. Es más, plantea, que si se comprenden las razones, las proporciones y la proporcionalidad directa e inversa, pensando en las magnitudes, no habrá que preocuparse por los números que resulten de las medidas. Lo que lo lleva a reafirmarse en la necesidad de trabajar la razón, la proporción y la proporcionalidad desde el pensamiento variacional.

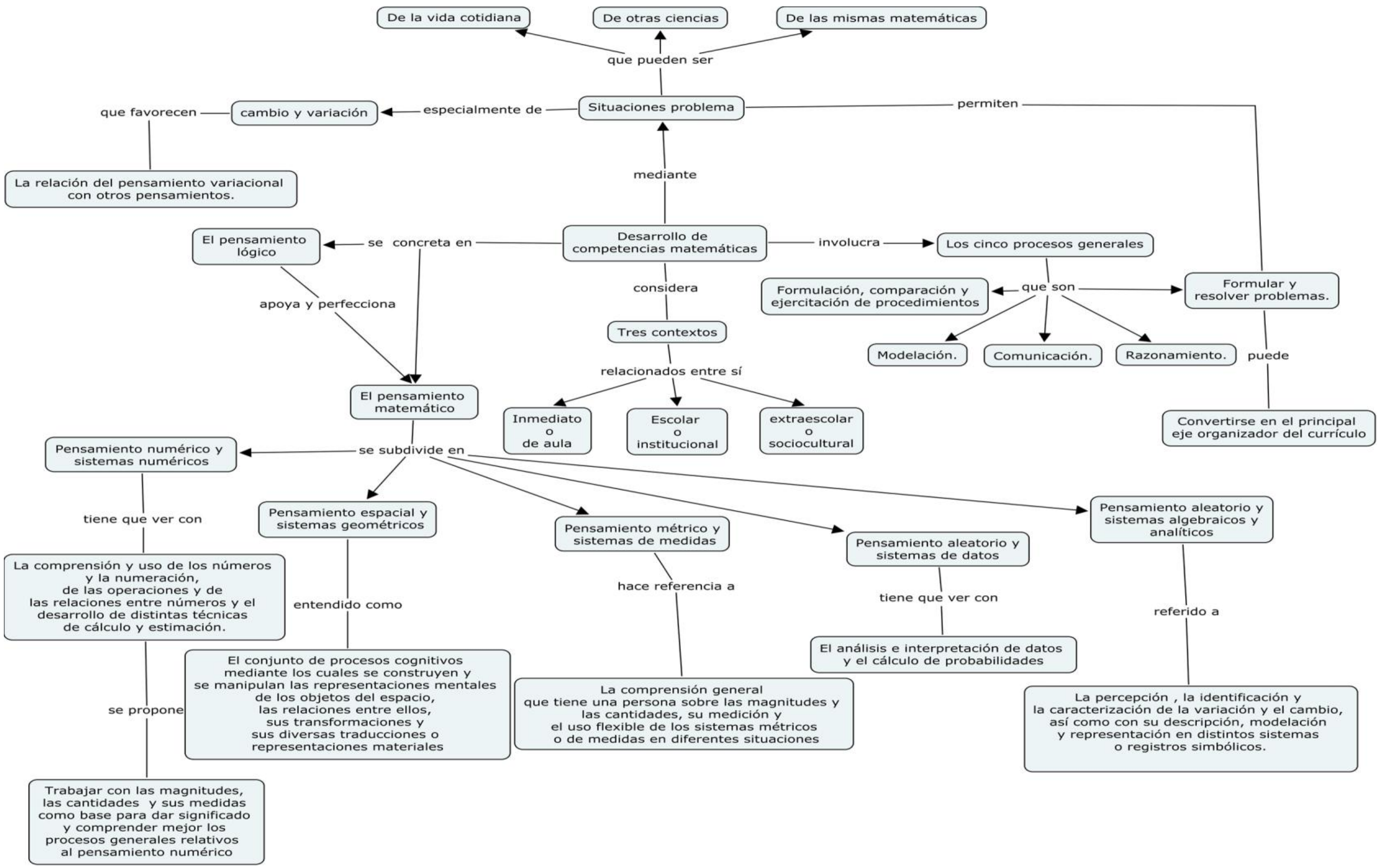
Además de las propuestas desde lo cognitivo presentadas en la sección anterior, es importante determinar cuál es la propuesta de organización curricular que hace el Ministerio de Educación en Colombia.

1.1.1.3 Las razones, las proporciones y la proporcionalidad desde Estándares y Lineamientos

Para determinar qué se plantea en Colombia desde el Ministrerio de Educación Nacional se hizo un rastreo en el documento Estándares básicos de competencias Matemáticas (2006),[3] en lo concerniente a las razones, las proporciones y la proporcionalidad. Dicho rastreo y la estructura de los estándares se presenta en el siguiente mapa conceptual acompañado de una tabla, la cual no pretende ser exhaustiva en cuanto a referenciar todos los estándares relacionados con las razones y la proporcionalidad, por el contrario pretende mostrar su presencia a través de algunos de ellos:

[3] En este documento se consideran, desde lo propuesto en Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), cinco tipos de pensamiento, a saber: numérico, métrico, espacial, aleatorio y variacional. La relación entre pensamientos y entre grados tiene que ver con lo que Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN, 2006) ha dado en llamar coherencia horizontal y coherencia vertical, respectivamente.

Gráfica 1. Mapa conceptual de los planteamientos de Estándares



Coherencia vertical y horizontal en cuanto a las razones, las proporciones y la proporcionalidad, desde Estándares Básicos de Competencias Matemáticas

Conjunto de grado	Pensamiento variacional	Pensamiento numérico	Pensamiento métrico	Pensamiento espacial
Primero a tercero	Describo cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas.	Resuelvo y formulo problemas en situaciones de variación proporcional. Uso diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas. Describo situaciones de medición utilizando fracciones comunes.	Reconozco el uso de las magnitudes y sus unidades de medida en situaciones aditivas y multiplicativas.	Reconozco congruencia y semejanza entre figuras (ampliar, reducir). Realizo y describo procesos de medición con patrones arbitrarios y algunos estandarizados, de acuerdo al contexto.
Cuarto a quinto	Analizo y explico relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo con cierta regularidad en situaciones económicas, sociales y de las ciencias	• Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte - todo, cociente, razones y proporciones.	Justifico relaciones de dependencia del área y volumen, respecto a las dimensiones de figuras y sólidos. Reconozco el uso de algunas	• Identifico y justifico relaciones de congruencia y semejanza entre figuras. • Construyo objetos tridimensionales a partir

	naturales. Describo e interpreto variaciones representadas en gráficos. Predigo patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica. Represento y relaciono patrones numéricos con tablas y reglas verbales.	• Resuelvo y formulo problemas en situaciones de proporcionalidad directa, inversa y producto de medidas. • Modelo situaciones de dependencia mediante la proporcionalidad directa e inversa.	magnitudes (longitud, área, volumen, capacidad, peso y masa, duración, rapidez, temperatura) y de algunas de las unidades que se usan para medir cantidades de la magnitud respectiva en situaciones aditivas y multiplicativas.	de representaciones bidimensionales y puedo realizar el proceso contrario en contextos de arte, diseño y arquitectura.
Sexto a séptimo	• Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas). • Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables	• Resuelvo y formulo problemas en contextos de medidas relativas y de variaciones en las medidas. • Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes)	• Resuelvo y formulo problemas que involucren factores escalares (diseño de maquetas, mapas). • Identifico relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud.	• Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.

	ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación). • Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos.	para resolver problemas en contextos de medida. • Justifico el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa.		• Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.
Octavo a noveno	• Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas. • Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación.			• Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas. • Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre

				triángulos en la resolución y formulación de problemas.
Décimo a undécimo	• Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollo métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos. • Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas.		Resuelvo y formulo problemas que involucren magnitudes cuyos valores medios se suelen definir indirectamente como razones entre valores de otras magnitudes, como la velocidad media, la aceleración media y la densidad media.	

Tabla 1. Razón, proporción y proporcionalidad en Estándares Básicos de Competencias Matemáticas

El mapa conceptual y la tabla dejan ver que desde la propuesta del Ministerio, la desarticulación esbozada en los diferentes estudios sobre la enseñanza de las razones, las proporciones y la proporcionalidad, debería ser subsanada. Pero, aunque el mismo documento plantea que dicha articulación puede llevarse a cabo a través del trabajo con situaciones problema; vale la pena anotar que las instituciones educativas, pero principalmente los maestros no han encontrado una forma adecuada para llevarla efectivamente al aula de clase.

Ahora bien, la coherencia vertical permite observar la manera gradual como se pretende, de un grado a otro, llevar a cabo la constitución de los objetos razón, proporción y proporcionalidad, además de su relación con la variación y el cambio. Faltaría desarrollar e implementar estrategias para que esta pretensión sea una realidad en el aula de clase.

En cuanto a la manera gradual de constitución de los objetos de conocimiento matemático se observa como de primero a tercero, en el pensamiento variacional, se pretende alcanzar un nivel cualitativo de descripción de las situaciones de variación y cambio. En cuarto y quinto además del nivel cualitativo, se pretende pasar a la utilización de un análisis gráfico y de otras representaciones, además de la cuantificación y la identificación de patrones numéricos. Para los grados sexto y séptimo la pretensión agrega el reconocimiento del conjunto de valores de las variables, la forma como se correlacionan y el tipo de proporcionalidad que se da y en los dos últimos conjuntos de grado se quiere alcanzar un nivel de modelación.

Una situación análoga ocurre en los otros pensamientos pero también se agrega que gradualmente se va aumentando el nivel de exigencia en cuanto a la argumentación y la justificación.

La tabla fue realizada tomando como punto de partida el pensamiento variacional puesto que éste se desarrolla en estrecha relación con los otros tipos y es una base fundamental para acceder a los procesos de generalización propios de cada uno de ellos, pero además, en todos ellos se identifican procesos de variación y cambio como base para las construcciones conceptuales propias de dicho pensamiento. Esta relación entre pensamientos queda evidenciada si se observa la presencia de las razones, las proporciones, la proporcionalidad, la variación y el cambio, en varios de ellos y en los distintos conjuntos de grado.[4]

Los argumentos anteriormente expuestos muestran y permiten concluir que lo importante no es ubicar a las razones, las proporciones y la proporcionalidad en lo numérico o en lo variacional; tal discusión produciría un desgaste innecesario. Lo ideal sería conseguir el diseño de situaciones de variación y cambio que induzcan a los estudiantes a realizar análisis y procesos desde los dos pensamientos, y porque no desde los cinco pensamientos. En todo caso queda claro que trabajar desde lo numérico ha brindado valiosos resultados y ha demostrado ser eficiente tanto para la enseñanza como para el aprendizaje. Quizá la deficiencia ha estado en que desde la organización curricular se ha privilegiado el trabajo desde este pensamiento (el numérico) y se ha mostrado como la única forma de resolver cierto tipo de situaciones relacionadas con las razones, las proporciones y la proporcionalidad.

1.1.2 Sobre el estado del arte

La reflexión sobre la enseñanza de las razones, las proporciones y la proporcionalidad no ha sido ajena a los países orientales y Miyakawa y Winslow (2009) nos muestran que la noción de razón es introducida en el quinto grado de la escuela japonesa elemental en el contexto de las magnitudes y las unidades; la noción de porcentaje es introducida, al mismo tiempo, como una forma de expresar una razón de magnitudes de la misma clase. Los autores invitan a advertir que en los libros de texto la razón puede ser descrita en dos formas: como una fracción (número) o como un porcentaje (diferente unidad); así mismo, la noción de proporción es introducida en sexto grado como otra forma de expresar una razón y la idea de proporcionalidad es introducida a través de la noción de proporciones equivalentes.

Esta forma de ver las razones, las proporciones y la proporcionalidad, presentada por Miyakawa y Winslow (2009), dejan ver algunas dificultades en la manera como son introducidos estos objetos de conocimiento matemático a los chicos a través de los libros de texto.

[4] En los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas, se han formado 5 conjuntos de grado, a saber: primero a tercero, cuarto a quinto, sexto a séptimo, octavo a noveno y décimo a undécimo.

Por otro lado, Ruiz (2006), plantea que el concepto de proporcionalidad es básico en la enseñanza de las matemáticas y, en su estudio, ha determinado que los maestros enseñan la proporcionalidad para que los estudiantes puedan:

- Resolver problemas de la vida diaria.
- Reconocer si una situación es o no de proporcionalidad, si es de proporcionalidad directa o inversa, o si se puede resolver por la regla de tres.
- Realizar la lectura e interpretación de tablas o de gráficos cartesianos.

Además concluye que:

- los temas comunes en las propuestas de todos los docentes entrevistados son la "constante de proporcionalidad" y los "gráficos cartesianos" en la proporcionalidad directa. En relación a la "constante de proporcionalidad" algunos docentes la consideran solamente en un contexto numérico (cuando intervienen magnitudes no se hace referencia a la misma) (p. 239)
- Las propiedades de la función lineal aparecen en el discurso del docente o en sus planificaciones, pero no observamos que se les dé otro uso más que el de presentarlas. Estas propiedades son la base del procedimiento escalar, procedimiento espontáneo de los niños, pero no surgió en las entrevistas, ni se lee en las planificaciones de los docentes, que se las presente para propiciar este tipo de procedimiento. Aun cuando algunas de las tablas propuestas promuevan un uso de las propiedades, no hay un comentario o alguna reflexión al respecto. (p. 243)
- La regla de tres, técnica para resolver problemas de proporcionalidad, aparece como un contenido más, al mismo nivel que la proporcionalidad directa como concepto. Esta suerte de confusión entre técnica y concepto la observamos en varios de los docentes, que en su planificación la presentan como temas diferentes de igual jerarquía: "Proporcionalidad directa" y "Regla de tres". (p. 249)
- En cuanto a las magnitudes discretas y continuas se percibe una falta de conciencia explícita del tipo de magnitudes con las que se trabaja. Generalmente no hay distinción de las mismas en el momento de representar las relaciones entre ellas en gráficos cartesianos o al buscar el valor de la constante de proporcionalidad. (p. 249)

Ruiz (2006) pone en evidencia una serie de dificultades en la enseñanza y aprendizaje de las razones, las proporciones y la proporcionalidad, además de falencias en la organización curricular. Sobre todo llama la atención las afirmaciones acerca de que son los mismos maestros los que poseen confusiones y deficiencias conceptuales respecto a elementos necesarios para la comprensión de las razones, las proporciones y la proporcionalidad que no les permitirían analizar y enfocar los procesos seguidos por los estudiantes para resolver problemas relacionados con los objetos en mención, reafirmándose así la necesidad de construir marcos teóricos y metodológicos que permitan analizar lo que efectivamente está ocurriendo en el aula de clase.

Igualmente en México, Block (2000), desde la Teoría de las situaciones didácticas, plantea que Brousseau, al desarrollar una amplia experiencia de ingeniería didáctica para la enseñanza de los números racionales, mostró el papel importante, eventualmente implícito, que puede jugar la ingeniería didáctica en el estudio de la proporcionalidad. Además Block (2000, 2005) afirma que con la teoría de las razones y las proporciones, el papel de las razones en la enseñanza se perpetuó por lo menos hasta las grandes reformas curriculares de mediados del siglo XX y que las razones han tendido a desaparecer del ámbito de la enseñanza.

Finalmente, en Colombia, Perry y otros (2003) presentan en sus planteamientos evidencias indirectas de los docentes en lo relacionado a la enseñanza de la proporcionalidad, en las que se observa que hay poca precisión en cuanto a la ruta pedagógica que los maestros siguen para la enseñanza del tema. El trabajo de los docentes se limita a hacer listas de nombres como razón, regla de tres, proporciones y sus propiedades, repartos proporcionales, etc., pero, las conexiones entre éstas y la organización curricular no son consideradas un asunto importante. Por otro lado en lo que tiene que ver con la solución de problemas de proporcionalidad, fue posible reconocer en varios profesores dificultades similares a las reportadas en las pruebas TIMSS (1997). [5]

[5] Las pruebas TIMSS (Trend in International Mathematics and Science Study) son unas pruebas de carácter internacional que tienen como objetivo medir las tendencias en el rendimiento en matemáticas y ciencias de estudiantes de cuarto y octavo grado de Educación Básica. TIMSS se basa en una concepción amplia de currículo, como organizador fundamental para establecer cómo se están brindando las oportunidades educativas a los estudiantes e identificar cuáles son los factores que afectan el aprovechamiento de dichas oportunidades. Estas

Así mismo, Guacaneme (2001), en su tesis de maestría en la que hace un análisis de los libros de texto, afirma que es en los grados quinto y séptimo en los que usualmente aparece un tratamiento explícito de las razones, las proporciones y la proporcionalidad. El autor supone que este hecho proviene de las disposiciones del Ministerio de Educación Nacional a través de las propuestas curriculares realizadas en los años 1975 y 1989. Además sostiene que la ubicación en estos grados de las razones, las proporciones y la proporcionalidad, particularmente el estudio de los conceptos y problemas de proporcionalidad, es una coincidencia en la mayoría de los cincuenta países participantes en las pruebas TIMSS. El autor cita un estudio sobre resultados en las pruebas TIMSS de Schmidt y otros, en los cuales se asegura que en el grado quinto los conceptos de proporcionalidad son presentados de manera introductoria sin profundizar en ellos, mientras que en el grado séptimo se centra la atención sobre estos conceptos. De igual forma se reporta que en quinto grado los problemas de proporcionalidad son trabajados en un nivel introductorio, en tanto que en noveno se centra la atención en estos problemas. Según Guacaneme (2001) estas aserciones se originan en el estudio de los currículos en los diferentes países, representados e identificados a través de las propuestas curriculares y de los textos escolares de matemáticas.

La anterior afirmación y los argumentos esbozados en las líneas precedentes nos muestran que el problema de la enseñanza de la proporcionalidad no es exclusivo de América Latina, ni mucho menos de Colombia; es una generalidad en diversos países y ha motivado, a lo largo de varios años, la realización de estudios, proyectos de investigación y artículos científicos en torno a dicha problemática. Se percibe un interés por cuestionar la organización de las razones, las proporciones y la proporcionalidad en la institución escolar y se plantean revisiones y modificaciones curriculares. En tal sentido los documentos Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (2006) y Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) proponen una nueva forma de organización escolar de las matemáticas que apunta al desarrollo de pensamiento matemático, más que a la simple adquisición de un listado de conceptos desarticulados.

pruebas se realizan cada cuatro años desde 1995, Colombia ha participado en ellas en dos ocasiones en 1995 y 2007.

1.1.3 La investigación en la enseñanza y/o aprendizaje de las razones, las proporciones y la proporcionalidad.

Vale la pena anotar que son más de treinta años de investigación sobre los procesos de enseñanza y/o los procesos de aprendizaje de las razones, las proporciones y la proporcionalidad, campo en el cual, desde una base cognitiva, han tenido una considerable influencia los trabajos de Piaget. A partir de sus estudios, en los que se evidenció la habilidad de los niños para trabajar con ideas de proporcionalidad, se iniciaron discusiones acerca de las comparaciones entre el razonamiento cualitativo y el razonamiento cuantitativo. Por ejemplo, a partir de trabajos realizados en los años 60, se concluyó que generalmente la habilidad de razonar proporcionalmente en un sentido cuantitativo aparece después de los 11 o 13 años. (Hart, 1988)

Para esta autora el razonamiento proporcional[6] es el proceso cognitivo que generalmente se investiga. En este mismo sentido Diez, Palomar, Giménez y García (2007) platean que los trabajos de investigación desarrollados en torno al razonamiento proporcional, en su mayoría, se han centrado en el punto de vista cognitivo.

Luego de los estudios interesados en investigar el desempeño de los niños en tareas de proporción, investigadores de los años 70 como Lunzer y Pumfrey se preocuparon por describir los métodos que los niños usan para encontrar la respuesta correcta, según lo plantea Hart (1988).

Por su parte "Karplus fue uno de los primeros investigadores en categorizar las respuestas de los niños, no como un indicativo de un estado general de razonamiento sino como una demostración de un nivel de comprensión de la proporción". (Hart, 1988, p. 200)

En la década de los 80 Hart y Karplus citados por Hart (1988) encontraron que es recurrente el uso de estrategias aditivas por parte de los niños donde se requiere acudir a comparaciones

[6] Este tipo de razonamiento implica el trabajo con las razones, las proporciones y la proporcionalidad y será descrito con mayor amplitud en una sección posterior.

de tipo multiplicativo. Streefland, citado por Hart (1988) planteó que el aprendizaje de las razones y las proporciones es un proceso de largo plazo que comienza con una comparación cualitativa. De igual forma sugirió que la formalización e introducción de algoritmos no debería darse tan prontamente y que podría llegarse mejor al reconocimiento de las proporciones en los niños a través de tareas que sean significativas, útiles y reales para ellos. La fenomenología didáctica de Freudenthal , según Hart (1988), ayudó a los investigadores a relacionar ideas matemáticas complejas con objetos mentales, actividades humanas y fenómenos de la vida real que se adaptan apropiadamente a dichas ideas matemáticas.

Por su parte, Lamon (1994) plantea que:

> El objetivo principal de los esfuerzos de las investigaciones empíricas ha sido documentar las dificultades que tienen los estudiantes con el razonamiento proporcional e identificar el tema, las tareas, y las variables de contexto que afectan la dificultad del problema. El consenso es que la preferencia por estrategias internas o externas[7] depende fuertemente de la variable tareas. La influencia e interacción de esas variables es tan compleja que nos quedamos con pocas implicaciones para la instrucción.(p.100)

Lamon (2007) manifiesta, a partir de la afirmación de Behr y sus colaboradores en 1992[8], que "El dominio de investigación que incluye fracciones, números racionales, y razones y proporciones no ha alcanzado un nivel de madurez desde el cual ofrecer proposiciones empíricas para la enseñanza, esto es, generalizaciones que se deriven directamente desde los hallazgos empíricos"(p. 632)

Además dice que aunque en los documentos publicados por el NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) en 1998 y en 2000 no se ofrecen sugerencias para la enseñanza del razonamiento proporcional ni de la proporcionalidad, sí dejan entender implícitamente que esta habilidad de razonamiento es fundamental para el desarrollo del pensamiento matemático y científico. En tal sentido Lamon (2007) concluye que se hace indispensable

[7] Las estrategias externas (between) hacen referencia a análisis entre magnitudes y las internas (within) a análisis en la misma magnitud. Más adelante se ampliará acerca de estos dos elementos.

[8] La afirmación que hacen es acerca de su imposibilidad de encontrar suficientes investigaciones que apuntaran específicamente a la enseñanza de los números racionales

tomar conciencia de la urgencia de superar las dificultades de los estudiantes y de los adultos para razonar proporcionalmente y que la instrucción podría jugar un rol activo en la atención de esta emergencia.

Los planteamientos de Lamon, fundamentados en resultados de investigaciones sobre razones, proporciones, proporcionalidad y números racionales realizadas entre 1992 y 2007, dejan entrever que para efectos de la acción en el aula todavía se necesita más investigación para mejorar la comprensión de lo que pasa efectivamente en ella.

Desde la Teoría de las situaciones didácticas de Brousseau, Block (2000) nos muestra, de un lado a las razones, como un saber anacrónico, que jugó un papel central en las matemáticas desde Euclides hasta finales del siglo XVIII, y con las cuales se desarrolló una teoría de las razones y las proporciones, pero que a mediados del siglo XX, cayeron en desuso en la disciplina y desaparecieron desde hace más de un siglo de la cultura de los matemáticos[9]. Según Block (2000)

> En el ámbito de las matemáticas, la desaparición de la noción de razón se origina probablemente con el abandono de los intentos por lograr una unificación de la disciplina mediante usos diversos de la noción de razón, intentos que llegaron a su apogeo a finales del siglo XVIII. El abandono de esta tendencia responde principalmente a los progresos de la formalización del álgebra y del análisis, los cuales extendieron su dominio hacia nuevos objetos y trivializaron los teoremas relativos a las razones y las proporciones.
>
> Más precisamente, el desarrollo del análisis y de la teoría de la integración condujo a los matemáticos a ceder el estudio de las magnitudes a las ciencias interesadas. La topología y la teoría de la medida determinan las propiedades esenciales de las estructuras de los espacios que se quieren estudiar y también las funciones "medida" que se necesitan, sin preocuparse de qué tipo de magnitudes se trata. Por lo tanto, ya no es útil introducir el número como "razón" de dos "magnitudes" ya sea la razón de dos valores de un mismo

[9] Hay que anotar, para matizar la afirmación de Block, que quizá lo que ha ocurrido es que las razones, las proporciones y la proporcionalidad han dejado de ser objeto de investigación matemática más que haber desaparecido radicalmente de la cultura de los matemáticos y que aunque en algunas ramas de la matemática no se hable explícitamente de ellas, siguen estando ahí, por ejemplo en los números reales, en la medida, en mucho del análisis, entre otras.

> tipo de magnitud, sin dimensión llamada "escalar", o la razón entre valores correspondientes de dos magnitudes de naturaleza diferente, con dimensión llamada "concreta".(pp. 10, 11)

Y por otro lado, que con la teoría de las razones y las proporciones, la función de las razones en la enseñanza se perpetuó, por lo menos hasta las grandes reformas curriculares de mediados del siglo XX, situación que ha cambiado en la actualidad, puesto que según él las razones han tendido también a desaparecer del ámbito de la enseñanza. Según Block (2000)

> En México, al igual que en otras partes del mundo, el viejo capítulo de razones y proporciones fue eliminado como tal, y con ello el número de problemas "prácticos" disminuyó drásticamente. Desde entonces, se sigue haciendo mención esporádica de la razón, pero prácticamente como un significado más de las fracciones y con una función incierta en la organización actual de los saberes por enseñar. Los problemas concretos de proporcionalidad, ámbito de aplicación de la teoría de las razones y las proporciones, no desaparecieron y, nuevamente, forman oficialmente parte de la enseñanza. No obstante, el tratamiento que se ofrece a estos problemas permanece relativamente indefinidos, tanto a nivel curricular, como, probablemente, a nivel de las prácticas de enseñanza. (pp. 13,14)

Pero si las razones, las proporciones y la proporcionalidad han desaparecido tanto de las matemáticas como de la enseñanza, entonces ¿para qué estudiar estos objetos de conocimiento matemático?, más aún, ¿qué interés tendrían actualmente desde el punto de vista didáctico?

Las respuestas a estas preguntas, sobre todo aquella del interés didáctico, están fundamentadas en el siguiente planteamiento de Block (2000)

> Si saber resolver dichos problemas constituye una necesidad importante para una parte suficientemente importante de la población, como para considerar esta capacidad dentro de los propósitos de la educación básica, entonces, se vuelve necesario analizar la pertinencia de dicha noción en la enseñanza. (Block, 2000, p. 12)

Desde este planteamiento hay que decir que en la actualidad existe una significativa cantidad de personas en diferentes campos como el arte, la arquitectura, las ciencias naturales, entre otros, que requieren resolver problemas típicos sobre razones, proporciones y proporcionalidad, por tanto el interés didáctico por estudiar la enseñanza y el aprendizaje de tales objetos de conocimiento matemático aún sigue latente.

De acuerdo con los planteamientos de este autor acerca de lo que curricularmente ocurre en México vale la pena preguntarse ¿qué pasa con el estudio de las razones, las proporciones y la proporcionalidad en nuestro Sistema Educativo? Y, si al igual que en México ¿en Colombia están desapareciendo, o por el contrario, siguen teniendo la misma fuerza que tenían antes? La respuesta a tales preguntas puede darse tomando como referencia lo expresado en la sección 1.1.1.3 con respecto a los planteamientos hechos desde el Ministerio de Educación Nacional, a través de Estándares básicos de Competencias Matemáticas (MEN, 2006) y Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998). En tal sentido, se puede decir que las razones, las proporciones y la proporcionalidad se siguen considerando como objetos necesarios de estudio, como se evidencia por su aparición en diferentes grados y pensamientos, y en este orden de ideas siguen teniendo la misma fuerza que tenían antes puesto que los planes de estudio en el área de matemáticas de las diferentes instituciones educativas son elaborados tomando como base estas propuestas.

1.1.4 **Investigación desde la Teoría Antropológica de la Didáctica**

Las preguntas surgidas a partir de los planteamientos de Block (2000), y los cuestionamientos que se han venido haciendo acerca de la organización curricular de la razones, las proporciones y la proporcionalidad y de lo que sucede con la estructura del saber matemático en el aula, plantean la necesidad de desarrollar constructos teóricos a partir de los cuales analizar y cuestionar la organización actual del currículo, constructos que desde la Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD) son denominados praxeologías. En documentos sobre Teoría Antropológica de la Didáctica, (Artigue, 2002; Bosh & Chevallard, 1999; Chevallard, 2003; F. García, 2005) donde se cuestiona la estructura del conocimiento matemático en la escuela, se menciona que no es suficiente en el análisis didáctico los aspectos de orden cognitivo y matemático, sino que también se debe incluir la organización escolar.

Más precisamente, los cuestionamientos a la organización de las razones las proporciones y la proporcionalidad se han hecho, por ejemplo, desde la desarticulación del currículo.

Al respecto F. García (2005) en su tesis de doctorado se plantea como preguntas para su problema de investigación:

> ¿Cómo diseñar organizaciones didácticas que permitan articular el conjunto de relaciones entre magnitudes propuestas en el currículo de matemáticas, tanto entre los temas y áreas de una misma etapa como entre las diferentes etapas educativas? ¿Qué características específicas debería poseer una organización didáctica escolar para poder retomar los contenidos antiguos en torno a los sistemas de variación, incluso los estudiados en etapas educativas anteriores, cuestionarlos, desarrollarlos e integrarlos en organizaciones matemáticas más amplias y complejas?(p. 180)

Es decir, se centra en estudiar, desde los elementos teóricos y metodológicos de la TAD, el problema de la desarticulación de las matemáticas escolares, a partir de los procesos de modelización.[10]

Gascón (2010) complementa diciendo que el fenómeno de desarticulación de las organizaciones matemáticas, y particularmente el aislamiento escolar de la proporcionalidad, ha estado latente desde mediados de los años 90. A partir de esta consideración, se hace un llamado para cuestionar al modelo epistemológico de la proporcionalidad, presente en los libros de texto y en los diseños curriculares y que se ha transformado en el dominante en la institución escolar. En este cuestionamiento se pone en duda hasta qué punto es conveniente aislar a la proporcionalidad como objeto de investigación y como objeto de conocimiento matemático para ser enseñado. En tal sentido el autor propone que "El problema didáctico de la proporcionalidad debe ser integrado en el estudio mucho más comprensivo del problema de la enseñanza-aprendizaje de las relaciones funcionales entre magnitudes" (p. 17).

Al mismo tiempo, este autor propone que para dar una respuesta al problema didáctico anteriormente esbozado es necesario cuestionar las razones de ser de dichas relaciones

[10] La modelización se entiende como el establecimiento de relaciones entre las matemáticas y el mundo real (el mundo real incluye desde la realidad cotidiana hasta la realidad de otras disciplinas científicas).

funcionales, es decir, determinar la pertinencia de trabajar en el aula de clase este tipo de relaciones.

Por su parte Arzarello, Bosch, Gascón y Sabena (2008), plantean que otro problema que puede plantearse tiene que ver con cómo describir el complejo de ostensivos y su función en la dinámica praxeológica institucional. Por ejemplo, si se considera el caso de la proporcionalidad y de la función lineal, con el fin de comprender las condiciones de evolución de la actividad matemática realizada por los estudiantes en una clase, es importante saber qué herramientas ostensivas les está permitido utilizar y cómo dichos ostensivos les ayudan (o les dificultan) relacionar la proporcionalidad con otros tipos de praxeologías matemáticas enseñadas.

Además F. García (2005) muestra, desde el análisis de los libros de texto usados en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO), la excesiva forma aritmetizada como se ha trabajado la proporcionalidad, y exhibe como Chevallard a través de investigaciones desarrolladas entre los años 1985 y 1989 logró realizar una nueva propuesta de trabajo algebraico que trajo consigo una ruptura respecto de la visión del álgebra como aritmética generalizada. Estos trabajos de Chevallard fueron complementados por Bosch en 1991 y 1994.

Los planteamientos anteriores muestran, por un lado, el cuestionamiento que se hace a la organización que en la escuela se ha dado a las razones, las proporciones y la proporcionalidad y el papel de las praxeologías como mecanismos explicativos de la actividad matemática de los alumnos en el aula y por otro, la necesidad de seguir construyendo un marco teórico adecuado desde la organización del conocimiento matemático en el aula, considerando aspectos de tipo cognitivo, didáctico, matemático, pero sobre todo, epistemológico en relación a las razones, las proporciones y la proporcionalidad. Igualmente se requiere identificar otras situaciones y acciones que permitan, de un lado, dar forma a los objetos razón, proporción y proporcionalidad como objetos matemáticos que contribuyen al entendimiento y dominio del campo conceptual multiplicativo por parte de los estudiantes, y de otro, identificar la manera como son reconocidas, manipuladas, por los estudiantes en situaciones de aula, las razones, las proporciones y la proporcionalidad.

1.2 Descripción de antecedentes.

Para iniciar el trabajo de investigación se tomó como referente tres investigaciones. En la primera de ellas se muestra que el enriquecimiento del pensamiento proporcional cualitativo[11] del niño le permite ampliar las relaciones cuantitativas entre magnitudes y mejorar el manejo de los algoritmos, enmarcándolos en aplicaciones plenas de sentido. Además afirman que Paulina,[12] llegó a designar a la razón como la relación entre dos magnitudes y la proporción como la relación de equivalencia entre dos razones. Esto fue constatado por las investigadoras a través de las respuestas dadas por Paulina en la entrevista que se realizó en la parte final de la investigación y luego de aplicar unas actividades de enseñanza: logró relacionar ambas columnas de una tabla, en la cual aparecían los valores para el alto y el ancho de cuatro roperos de forma rectangular, es decir, Paulina a través de la escritura de las razones externas, determinadas por las medidas de los altos y las medidas de los anchos, estableció la relación entre las magnitudes que obtuvo de la misma tabla, demostrando que entendía la razón como relación entre magnitudes, según Hart, citado por Ruiz y Valdemoros (2006). Igualmente Paulina recurrió a la duplicación de todas las magnitudes para hacer ampliaciones y a la mitad de las mismas para hacer las reducciones, lo cual según las autoras reflejó el significado adecuado del término proporción, por otro lado, el hecho de señalar que una figura ampliada o reducida conserva la forma pero cambia el tamaño, es un indicio, que aunque trabajó muy bien con algoritmos, su pensamiento cualitativo no quedó opacado. Finalmente, según Ruiz y Valdemoros (2006) "Paulina llegó a construir los conceptos de razón y proporción, lo que se notó por su aplicabilidad en distintos ámbitos y por el uso de los distintos modos de representación." (p. 321).

En la segunda, Barra, Díaz y Ramírez (2006) pretenden lograr en estudiantes de séptimo grado de Educación Básica una aprehensión cognitiva de la noción matemática escolar de razón. La experiencia parte desde la visualización cualitativa en la distribución de los colores en la

[11] Las autoras no definen explícitamente lo que entienden por pensamiento proporcional cualitativo, pero para tal fin citan directamente los trabajos de Piaget, Inhelder, Ban de Brink y Streefland.

[12] La niña de su caso de estudio, la cual fue seleccionada puesto que caracterizaba a aquellos estudiantes que mostraron en la aplicación de un cuestionario inicial un gran apego al manejo de algoritmos pero carentes de sentido, es decir, que tenía claro el procedimiento pero no el uso, además de exhibir pocas elaboraciones en el terreno cualitativo.

bandera Chilena hasta el análisis de destrezas y subdestrezas de pensamiento: cálculo, representación numérica y reflexión. Inicialmente los estudiantes son cuestionados acerca de lo que ellos entienden por razón y se observa que un alto porcentaje asocian el concepto de razón con acepciones cotidianas que utilizan, como por ejemplo tener la razón, la razón de saber si algo es cierto o falso o razonar con alguien, entre otras. La actividad siguiente es comparar qué color de la bandera Chilena ocupa más superficie, con lo cual las autoras pretenden un acercamiento cualitativo. La mayor parte de los estudiantes utilizan categorías de comparación, "más superficie que", "menos superficie que" entre dos colores. Finalmente con la pretensión de pasar de lo cualitativo, entendido por las autoras como el uso de expresiones verbales para establecer comparaciones, a lo cuantitativo, tomado como el uso de expresiones numéricas y números para el establecimiento de comparaciones, las investigadoras invitan a los estudiantes a realizar representaciones numéricas y de comparación mediante el uso de cuadrículas. En esta última actividad, teniendo en cuenta las frases con las que se refieren a las partes de un todo,[13] sus representaciones gráfica y numérica, evidencian que los estudiantes empiezan a utilizar una acepción de razón distinta a la que inicialmente habían dado desde su cotidianidad. En palabras de las autoras, "Aunque de un modo implícito, se advierten en sus textualidades facetas de la concepción matemática de razón. Resta pendiente el desafío de hacer conscientes a los estudiantes de este proceso de aprehensión cognitiva de la razón, con actividades subsecuentes" (p. 6).

Finalmente, en Perry y otros (2003), se presenta la experiencia de aula: "Una oportunidad para profundizar en aspectos relativos a la enseñanza de razón como tópico matemático"; experiencia en la cual se implementó una secuencia de actividades con grupos de estudiantes de grado séptimo y octavo de Educación Básica Secundaria. De los resultados encontrados en la aplicación de tres talleres,[14] se destaca el haber identificado que varios estudiantes

[13] En este caso las partes son las franjas de cada color y el todo la bandera,

[14] En los dos primeros talleres se plantea una situación problema y en el tercero una reflexión especial sobre estas situaciones. En la primera situación se pide a los estudiantes leer y realizar el siguiente ejercicio: en un salón hay 48 estudiantes colocados en seis filas. En cada fila hay 3 niños y 5 niñas. A continuación se les solicitó elaborar una representación de la situación, hacer comparaciones entre el número de niños y niñas que hay en cada fila y hacer una representación cartesiana de los pares ordenados (número de niños, número de niñas). La segunda situación plantea que cuando una libra de chocolate es colocada en una máquina entonces esta produce 24 chocolatinas. Enunciado con el cual los estudiantes determinan el número de chocolatinas obtenidas a partir de cierta cantidad de libras de chocolate, establecen una expresión matemática que relacione la cantidad de libras de

concibieron la relación entre cantidades correspondientes como relación de orden entre números y no como una relación de equivalencia entre cantidades adjetivadas.[15] Igualmente se detectó la complejidad[16] que hay detrás del aprendizaje y la enseñanza del concepto de razón como tema matemático y concluyen que los obstáculos, dificultades y conflictos que surgen en el proceso de enseñanza y en el de aprendizaje del tema, tales como la naturaleza de los objetos de estudio, el lenguaje usado o necesario para referirse a situaciones en las que está implicada la razón, proporcionan elementos para reorientar su proceso de enseñanza, por lo que se requiere que el profesor esté atento y no se limite a los aportes de los textos escolares, donde se ha detectado la perpetuación de un trabajo deficiente con algunos aspectos que caracterizan a la razón. Para reorientar su proceso de enseñanza recomiendan tener muy en cuenta el contexto, las ideas previas, el lenguaje que se va a utilizar, que los estudiantes hayan tenido suficiente experiencia con procesos de ordenar y clasificar, establecer diferencias claras entre magnitud, cantidad de magnitud y medida y que hagan representaciones adecuadas de parejas de valores en el plano cartesiano para con ello facilitar la visualización de la relación de equivalencia que hay detrás del significado de razón.

Estas tres investigaciones tienen en común la aplicación de situaciones en las cuales se determina la manera como los estudiantes se acercan a las razones, las proporciones y la proporcionalidad y el modo como las aplican en diferentes contextos. De igual manera se establece la forma como los estudiantes pasan del razonamiento proporcional cualitativo al razonamiento proporcional cuantitativo. Por otro lado, las investigaciones enuncian la complejidad que hay detrás de la enseñanza y aprendizaje de estos objetos de conocimiento matemático. En tal sentido queda pendiente determinar la manera como deben diseñarse situaciones de variación y cambio que permitan identificar los sistemas de práctica que despliegan los estudiantes en su resolución y cómo esos sistemas contribuyen a dar forma a las razones las proporciones y la proporcionalidad.

---

chocolate con el número de chocolatinas producidas y nuevamente se les requiere hacer una representación cartesiana con las parejas obtenidas.

[15] Según Schwartz (1988, p. 41): Todas las cantidades que surgen en los procesos de contar o de medir o como resultado de la combinación de cantidades contadas o medidas hacen referencia y serán referenciadas como cantidades adjetivadas..

[16] Dicha complejidad no es explicitada por los autores.

1.3 Planteamiento del problema

Con respeto a la tarea pendiente, planteada al final del párrafo anterior, hay que decir que en el documento Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN, 2006), se manifiesta que uno de los propósitos del pensamiento variacional es construir, desde la Educación Básica Primaria, diversos caminos y acercamientos a la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos relativos a las funciones y sistemas analíticos y que “es conveniente que las situaciones de aprendizaje propicien el razonamiento en los aspectos espaciales, métricos y geométricos, el razonamiento numérico y en particular, el razonamiento proporcional apoyado en el uso de gráficas” (p. 54).

El trabajo con situaciones de variación y cambio en las que están presentes las razones, las proporciones y la proporcionalidad puede contribuir al alcance del propósito mencionado.

De acuerdo con lo anterior, se hace necesario diseñar e implementar situaciones de variación y cambio, tomadas de la vida cotidiana, de otras ciencias o de las mismas matemáticas, en las cuales intervengan diferentes magnitudes para que los estudiantes logren determinar, en primera instancia de forma cualitativa, la correlación entre tales magnitudes y progresivamente vayan logrando cuantificar dicha correlación, utilizando para ello, inicialmente en acto, las diferentes facetas que juega la razón como relator, operador o correlator, y determinando el tipo de proporcionalidad, simple directa o simple inversa, que existe entre ellas.

Desde el punto de vista de la investigación de lo que ocurre realmente en el aula de clase Guacaneme (2001) en un análisis de los textos empleados para la enseñanza de las matemáticas en grado séptimo se pregunta:

> ¿Para qué estudiar las razones y las proporciones en la escuela si a través de la división y de la medida se identifican respectivamente, con los racionales y la igualdad entre razones? [ante las que se afirma] habría que identificar aproximaciones escolares a la razón y a la proporcionalidad que no atienden al cociente y a la medida y que, en consecuencia, respeten la naturaleza y esencia de la razón (en tanto relación o pareja) y de la proporción (en tanto equivalencia entre razones o relación entre relaciones). (pp. 241, 242)

En tal sentido, podría tomarse la afirmación de Guacaneme (2001) como un llamado para que sean revisadas las prácticas escolares sobre las razones, las proporciones y la proporcionalidad, al igual que la forma como estos objetos de conocimiento matemático son organizados con el fin de favorecer su comprensión por parte de los estudiantes y su enseñanza por parte de los maestros.

En lo referente a la organización de las razones, las proporciones y la proporcionalidad en la escuela, desde la Teoría Antropológica de la Didáctica se han realizado cuestionamientos a la manera como estos objetos de conocimiento matemático están siendo trabajados en el aula de clase, por ejemplo García (2005) ha identificado, por un lado, que existe una desarticulación en el conjunto de relaciones entre magnitudes que aparecen en el currículo de matemáticas y al respecto, utilizando los elementos teóricos y metodológicos de la Teoría Antropológica de la Didáctica se ha propuesto diseñar organizaciones didácticas que favorezcan tal articulación y por otro lado, ha determinado que en la escuela subsisten dos enfoques teóricos, el algebraico y el aritmético, desde los cuales se están trabajando las razones, las proporciones y la proporcionalidad.

Por otra parte, (Obando, et al., 2009) afirman que existen profundas dificultades de los estudiantes de la Educación Básica y Media en la comprensión de los diferentes tipos de correlación entre magnitudes y que aunque en los procesos escolares es ampliamente reconocida la importancia de las razones, las proporciones y la proporcionalidad, las cuales según (Lesh, et al., 1988) son la piedra angular de las matemáticas superiores y la cúspide de las matemáticas elementales, esta preponderancia en palabras de (Obando, et al., 2009):

> …contrasta, de un lado, con las dificultades de los estudiantes para aprender estas temáticas y, por supuesto, de los profesores para enseñarlos, y de otro, con la gran cantidad de investigaciones que han abordado dichas problemáticas, desde lo cognitivo y lo didáctico. Es entonces sorprendente que después de 30 o 40 años de investigación alrededor de las razones, las proporciones, la proporcionalidad (en lo que en algunos círculos académicos se ha dado en llamar el razonamiento proporcional), aún sigan existiendo llamados urgentes por la necesidad de desarrollar unos marcos teóricos unificados que entreguen a los maestros de la Educación Básica un conjunto de herramientas conceptuales y metodológicas a partir de las cuales, no solo comprender los

> procesos constitutivos de tales objetos de conocimiento matemático, sino también, los caminos y dificultades de los estudiantes en la construcción de tales procesos, y sobre tales comprensiones, elaborar marcos de acción para orientar el trabajo en el aula de sus alumnos. (pp. 2,3)

Finalmente, los argumentos esgrimidos hasta el momento permiten preguntar ¿Qué tipo de situaciones favorecen la aproximación de los estudiantes a las razones, las proporciones y la proporcionalidad? Este cuestionamiento conduce al siguiente problema de investigación

¿Cuáles son los sistemas de prácticas matemáticas que desarrollan los estudiantes en la resolución de en situaciones de variación y cambio, y de qué manera esos sistemas dan forma a los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad?

Y a plantear los siguientes objetivos:

1.4 Objetivos.

1.4.1 Objetivo general.

Identificar los sistemas de prácticas desplegados por los estudiantes en la solución de situaciones de variación y cambio e identificar de qué manera esos sistemas dan forma a los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad.

1.4.2 Objetivos específicos.

a) Diseñar situaciones de variación y cambio para estudiantes de los primeros grados de Educación Básica, ciclo Secundaria.

b) Determinar los sistemas de prácticas implementados por los estudiantes en la solución de las situaciones de variación y cambio propuestas.

c) Establecer los argumentos conceptuales desde las razones, las proporciones y la proporcionalidad presentes en los sistemas de prácticas desplegados por los estudiantes.

2 Capítulo 2. Fundamentación teórica de la investigación

2.1 Interdisciplinariedad de la Educación Matemática

Para Vasco (1994) las matemáticas pueden ser entendidas como la ciencia que surge de aquellos procesos sociales de ideación, discusión, consignación en símbolos y gráficas, decodificación y refundición de saberes.

Pero este planteamiento es muy general y sería válido para cualquier ciencia. Habría que precisar que las matemáticas además de contemplar los aspectos anteriores, trabaja con objetos que son construidos por la mente humana y que permiten modelar y representar situaciones y fenómenos de la vida cotidiana, del comercio, de las ciencias naturales y de las ciencias sociales.

Vasco (1994) menciona tres tipos de matemáticas; en primera instancia distingue unos procesos culturales que denomina “matemáticas realmente existentes”, referentes al conteo de objetos, ubicación de direcciones, lectura de temperaturas, manejo de datos, etc.; en segunda instancia, teniendo en cuenta el surgimiento de la necesidad de comunicar matemáticas, es decir, el surgimiento de personas que enseñan a otras, se van creando ciertos dispositivos que se denominan “pedagogía de las matemáticas”; finalmente están las matemáticas de punta o de investigación. Aunque más adelante, en el mismo documento el autor expresa que la pedagogía de las matemáticas y las matemáticas de investigación son también matemáticas realmente existentes

Para el autor la participación en estos procesos puede hacerse desde dos miradas; la de dentro, es decir, la mirada del que está inmerso en la práctica, o desde fuera, la de aquel que no está directamente implicado en dicha práctica. Vasco plantea que para poder ubicar a la Educación Matemática en relación con otras disciplinas es necesario tomar una posición externa y adoptar la mirada desde fuera.

En este sentido propone un modelo de investigación en Educación Matemática, en el que las matemáticas (realmente existentes, escolares y de investigación o simplemente realmente existentes) se encuentran fuera de un octógono dando a comprender que ellas permiten realizar una mirada desde fuera. Dicho octógono, ubica a la Educación Matemática en relación con las matemáticas y con otras disciplinas pertinentes.

Las ocho disciplinas propuestas, las cuales permiten hacer análisis a los resultados obtenidos en procesos de investigación en Educación Matemática y por qué no de lo que sucede en el aula de clase, tomando en consideración otros puntos de vista, son: Neurología, Lingüística, Psicología, Informática, Antropología, Lógica, Historia de las matemáticas y Filosofía. El modelo no pretende exigir a un investigador en Educación Matemática que se especialice en estas ocho disciplinas, su propuesta apunta a crear equipos interdisciplinarios que brinden herramientas para realizar con mayor profundidad estudios en Educación Matemática. Para Vasco, la Educación Matemática se ubica dentro de un octógono formado por las disciplinas antes mencionadas de tal forma que ésta sea vista como distinta a ellas, pero de igual forma impensable sin ellas.

Teniendo en cuenta, por una parte, que lo referente a la Educación Matemática y a la interdisciplinariedad de la misma es un asunto bastante amplio y complejo y por otra las limitaciones del proceso de investigación realizado, en este trabajo se abordará parcialmente dicha complejidad interdisciplinaria.

2.1.1 **Acerca del conocimiento matemático.**

Bosh y Chavallard (1994) consideran que el saber matemático es una forma particular de conocimiento y es el fruto de la acción humana en contextos institucionales.[17]

[17] (Chevallard, 2003) toma el concepto de institución en forma amplia, no únicamente en el sentido burocrático. Una Institución es un dispositivo social “total”, que sin duda puede tener una extensión muy pequeña en el espacio social, que permite e impone a sus objetos la ejecución de maneras propias de hacer y de pensar (p. 2). A partir de esta definición de Chevallard, es posible considerar como instituciones a la familia, a la clase de matemáticas, al mismo sistema educativo, al lenguaje, entre otras.

Tal fruto, es un conjunto de objetos abstractos (o abstracciones), algunos de los cuales tienen homólogos en el mundo real y otros no, entre los cuales se establecen relaciones y se determinan sus propiedades. El carácter abstracto de los objetos que constituyen el conocimiento matemático hace que este sea universal, es decir, que no dependa de las condiciones espacio – temporales en las que se produzca, se utilice, o se enseñe, lo cual le permite ser transpuesto entre instituciones. En este proceso de transposición, las matemáticas, como práctica social, quedan aún en términos de las condiciones particulares de la institución, razón por la cual se requiere elaborar un método de análisis de esas prácticas institucionales que permitan la descripción y el estudio de las condiciones de su realización. Dicho análisis, que permite identificar tanto el bloque técnico – práctico como el bloque teórico, es a lo cual desde la TAD, se ha denominado organización matemática (OM) o praxeología, o en palabras de Espinoza y Azcárate (2000) modelizar el conocimiento matemático como actividad humana.

Estas praxeologías, propuestas por el enfoque antropológico, están compuestas de tipos de situaciones (S), problemas (π) y de técnicas (τ), las cuales constituyen la praxis o conocimientos técnicos; y de tecnologías y teorías que constituirán el logos o saber. Según Espinoza y Azcárate (2000) las técnicas (τ) se entienden como ciertas maneras de hacer, las tecnologías (θ) como los discursos que describen, explican y justifican las técnicas y la teoría (Θ) como el argumento formal que permite justificar rigurosamente dicha tecnología.

Podría decirse entonces que la TAD considera que la producción de conocimientos o de nuevas praxeologías, se hace a partir de una praxeología particular, denominada praxeología puntual, la cual es generada por lo que en la institución se denomina un único tipo de tareas y que está dotada de cierta generalidad. Más precisamente,

> En lo que corresponde a las matemáticas, al ser consideradas como una actividad humana estructurada en organizaciones praxeológicas, puede decirse que nacen de la problematización de ciertos tipos de tareas, que pueden ser miradas como los tipos de problemas cuyo estudio da lugar a la construcción de organizaciones praxeológicas locales. La articulación de unas de estas praxeologías alrededor de una tecnología común permite formar las organizaciones regionales que a su vez, se articulan en organizaciones

> más amplias hasta constituir lo que se llamará globalmente, el saber matemático. (Bosch & Chevallard, 1999, p. 7)

Por tanto los conceptos matemáticos pueden ser considerados como emergentes de estas praxeologías (Bosch & Chevallard, 1999).

Además de las OM, las que conviven en la institución y que tienen que ver con la realidad matemática objeto de estudio, también se tienen las organizaciones didácticas (OD), referidas a la manera como tal estudio se da. La noción de estudio, desde la TAD, se aplica en un ámbito más amplio que el del aula de clase y que el de las instituciones didácticas, puede incluir desde la actividad de los investigadores o los comerciantes hasta la de los estudiantes. En tal sentido, el proceso de estudio tiene que ver tanto con el proceso de creación de una organización matemática como con el producto de dicho proceso. El proceso de estudio se organiza en una estructura conformada por seis distintas dimensiones o momentos.

Estos momentos son:

El del primer encuentro correspondiente a la dimensión en la que se presenta un nuevo tipo de problemas para ser estudiado.

El exploratorio, en el que tiene lugar la indagación específica del tipo de problemas presentado en el primer momento. Se relaciona con la construcción de una técnica, por ahora en un nivel intuitivo, para estudiar el tipo de problemas.

La constitución del entorno tecnológico teórico. Hace referencia a justificar, explicar y hacer inteligibles las técnicas empleadas.

El del trabajo de la técnica. Es aquí donde se pone a prueba la técnica y tiene por objetivo mejorar y volver más eficaz y fiable la técnica.

El de la institucionalización. En este momento se hace visible y se oficializa la actividad desarrollada hasta aquel instante. En esta dimensión se otorga un nombre y un estatuto al conocimiento matemático que ha ido surgiendo de manera informal.

El de la evaluación. Hace referencia a poner a prueba el dominio que tiene un sujeto de la organización matemática construida. Además se pone a prueba la potencia de las técnicas elaboradas. (Chevallard, 1999; Espinoza & Azcarate, 2000)

Para la TAD estos dos tipos de organización, las OM y las OD, conforman el Modelo Epistemológico de Referencia (MER), el cual puede ser interpretado como un conjunto de elementos que al interrelacionarse permiten analizar, comparar y crear procesos específicos en el estudio de las matemáticas, este MER será provisional y estará sujeto a modificaciones.

Bajo esta consideración de conocimiento o de saber matemático, se entiende la existencia de los objetos desde el punto de vista relacional, es decir, la existencia de un objeto de conocimiento matemático está ligada al reconocimiento que los sujetos o toda una institución hagan de él. Ahora bien, tal relación (objeto – sujetos, objeto - institución) está enmarcada dentro de las prácticas sociales, por lo tanto, cuando en una institución uno o varios sujetos realizan una acción con un objeto puede decirse que se conoce el objeto. (Bosch & Chevallard, 1999).

Cuestionarse sobre la naturaleza de los objetos matemáticos y sobre su función en la actividad matemática conduce, en palabras de Bosh y Chevallard (1999), a distinguir dos tipos de objetos: los ostensivos por un lado y los no ostensivos por otro. Los primeros se refieren a aquellos objetos que se pueden percibir directamente por los sentidos, principalmente la vista y el oído. Son aquellos objetos que de una u otra forma se pueden manipular, es decir, que poseen cierta materialidad. Dentro de estos se encuentran los sonidos, los grafismos y los gestos. Los segundos son objetos que, aunque no pueden ser percibidos, exhibidos o manipulados de forma directa por nuestros sentidos, sí son puestos en juego en las prácticas sociales, es decir, que tienen existencia institucional, como por ejemplo las ideas, las intuiciones o los conceptos. La puesta en juego de los no ostensivos, en este caso su evocación o invocación, puede hacerse sólo a través de la manipulación adecuada de ciertos ostensivos asociados. Los dos tipos de objetos, ostensivos y no ostensivos, están estrechamente ligados ya que los segundos pueden ser vistos como emergentes de la manipulación de los primeros, pero al mismo tiempo los no ostensivos son los medios que guían y dan control a esta manipulación. Es más, no hay ostensivos sin no ostensivos.

> Los ostensivos constituyen la parte perceptible de la actividad, es decir lo que, en la realización de la tarea, se deja ver, tanto al observador como a los actores en sí mismos. En el análisis del trabajo matemático, los elementos ostensivos hacen parte de la realidad empírica, accesible a los

> sentidos. Por contraste, la presencia de tal o cual no-ostensivo en una práctica determinada puede ser inducida o supuesta sólo a partir de las manipulaciones del ostensivo institucionalmente asociado. (Bosh & Chevallard, 1999, p. 11)

Teniendo en cuenta que los objetos ostensivos, desde el punto de vista antropológico, son indisociables de las relaciones a los objetos no ostensivos, puede decirse que lo que ellos evocan, o pueden evocar en una situación dada, es todo el conjunto de praxeologías institucionales en las que participan como instrumentos.[18]

Así mismo, en el enfoque antropológico, la descripción de una praxeología se da a conocer a través de los ostensivos y de los no ostensivos que componen las tareas, las técnicas, las tecnologías y las teorías y a través de los diferentes modos de activarlas. En este sentido, el enfoque antropológico propone un modelo de actividad matemática que integra los objetos ostensivos como constituyentes básicos del saber matemático. Es importante tener en cuenta que dentro de los objetos ostensivos es posible distinguir la presencia de una pluralidad de registros en el desarrollo de la actividad matemática, ellos son: registros orales, registros de marcas y registros gestuales.[19]

Los planteamientos anteriormente expuestos permiten determinar que los objetos de conocimiento matemático surgen de prácticas con las matemáticas ubicadas en diversos contextos geográficos y culturales. En tal sentido, D'Amore y Godino (2007) y Godino, Batanero y Font (2008), entienden una práctica matemática como una actuación particular, o conjunto de actuaciones, en el abordaje de problemas matemáticos específicos (de un individuo o de una institución). Esta práctica está determinada por formas de razonar, comunicar, validar o generalizar y habitualmente no existe de manera aislada sino que está asociada a sistemas de prácticas que interaccionan entre sí.

[18] Entidad que permite, en asociación con otros instrumentos, conformar técnicas que permitan cumplir ciertas tareas, o llevar a cabo cierto trabajo. (Bosch & Chevallard, 1999, p. 23).

[19] Los registros orales hacen referencia a lo que se dice, nombra o enuncia acerca de un objeto, los registros de marcas, dentro de los cuales se cuentan los grafismos y escrituras, tienen que ver con los registros que la mano (u otra parte del cuerpo) puede transcribir en el espacio de la hoja de papel (u otro medio de escritura) y los registros gestuales se refieren a gestos, movimientos corporales o acciones como señalar.

Los problemas matemáticos mencionados en el párrafo precedente pueden entenderse como situaciones de la vida cotidiana, de otras ciencias o de las mismas matemáticas que se proponen a los sujetos para que sean abordadas.

En este momento es necesario hacer una distinción, la TAD denomina tareas o tipos de tareas a estos problemas matemáticos, pero en el contexto colombiano la palabra tarea es tomada como la actividad que el profesor propone al final de una clase para que el alumno la realice, generalmente en la casa, razón por la cual se prefiere acudir al concepto de situación y por tanto se hablará de tipos de situación y no de tipos de tarea.

2.2 Una mirada desde el aspecto cognitivo.

Es necesario determinar los procesos que influyen en el aprendizaje de las razones, las proporciones y la proporcionalidad. Es decir, se requiere determinar qué han dicho, desde lo cognitivo, los estudios y sus autores, acerca de estos objetos de conocimiento matemático. Se centrará la atención en dos elementos de tipo cognitivo; el primero tiene que ver con lo que se entiende por razonamiento proporcional y proporcionalidad, y el segundo, hace referencia al campo conceptual de las estructuras multiplicativas.

2.2.1 El razonamiento proporcional

Lesh y otros (1988) consideran al razonamiento proporcional como una habilidad o capacidad de los sujetos que les permite

> Trabajar con situaciones que impliquen la variación, el cambio, un sentido de covariación y comparación múltiple, y la capacidad de procesar y almacenar mentalmente varias piezas de información, se denomina razonamiento proporcional, el cual, está estrechamente ligado con la inferencia y la predicción e involucra tanto métodos de pensamiento cuantitativo como métodos de pensamiento cualitativo. (p. 93)

Lamón (2007) agrega que esta habilidad o capacidad de los sujetos les permite identificar y comprender las relaciones estructurales presentes en los problemas de comparación y de cálculo de una cuarta proporcional.[20] Además indica que esta forma de concepción del razonamiento proporcional permite transformarlo en un elemento imprescindible para la comprensión de la proporcionalidad, aunque enfatiza que éste no es suficiente en dicha comprensión. En tal sentido, propone complementar tal trabajo con aproximaciones al estudio de las variables, las funciones, las ecuaciones lineales, los vectores y otros objetos de conocimiento matemático que serán estudiados con mayor amplitud y formalización en las matemáticas universitarias. De tal forma que se seguirá aportando a la ampliación y profundización de sus perspectivas sobre relaciones multiplicativas.

La autora realiza una propuesta acerca de cómo debe entenderse en un sentido amplio el razonamiento proporcional, en los siguientes términos:

> Propongo que el razonamiento proporcional signifique suministrar argumentos para soportar las enunciaciones hechas sobre las relaciones estructurales entre cuatro cantidades, (digamos *a, b, c, d*), en un contexto que simultáneamente involucra la covariación de cantidades y la invariancia de razones o productos; este podría considerarse como la habilidad para diferenciar la relación multiplicativa entre dos cantidades así como también la habilidad de extender la misma relación a otros pares de cantidades. (Lamon, 2007, pp. 637,638)

En este punto vale la pena decir que la forma como consideran Lesh y otros (1988) al razonamiento proporcional es más completa y brinda más elementos para determinar lo que realmente involucra tal razonamiento. Por ejemplo, estos autores enfatizan en el carácter decisivo que tiene el diseño de situaciones de cambio y variación, además de dar prelación tanto a los análisis de índole cualitativo como a los de índole cuantitativo, en tanto que Lamon (2007) centra su definición en el cálculo de la cuarta proporcional, lo cual deja por fuera el análisis de otros casos de situaciones de proporcionalidad como, por ejemplo, la proporcionalidad simple inversa. La razón de ser de esta exclusión está en que la autora centra sus planteamientos en el razonamiento proporcional directo, aunque no hace explicita tal determinación.

[20] En los problemas de comparación se dan cuatro valores (a, b, c y d), la meta es determinar la relación de orden entre las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$. Un problema de cuarta proporcional provee tres de los cuatro valores en la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y la meta es encontrar el valor desconocido.

Lamon (2007), enuncia que el tipo de razonamiento que se efectúa en el razonamiento proporcional simple directo incluye el reconocimiento de:

- ✓ La razón constante entre elementos del mismo espacio de medida.
- ✓ La relación funcional entre los espacios de medida.

El primer elemento tiene que ver con determinar que el cociente entre dos elementos del mismo espacio de medida es siempre el mismo que el de los dos elementos correspondientes (y en el mismo orden) en el otro espacio de medida. El segundo apunta a determinar la constante de proporcionalidad que pone en relación un elemento del primer espacio de medida con su correspondiente elemento en el segundo espacio de medida,[21] e identificar que hay una relación invariante (comparación por cociente) entre los dos espacios de medida.

Por otro lado, Lamon considera que el tipo de razonamiento implicado en una situación de proporcionalidad simple inversa, se caracteriza porque:

- ✓ Existen dos operadores escalares (cociente entre elementos del mismo espacio de medida) los cuales son el inverso multiplicativo el uno del otro.
- ✓ El producto entre elementos correspondientes de los espacios de medida es constante.

Por su parte Modestou y Gagatsis (2010) quienes comparten los planteamientos de Lamon acerca del razonamiento proporcional, proponen un enfoque que asume que el razonamiento proporcional puede ser descrito "mejor"[22] mediante un modelo de tres componentes, del cual hacen parte el razonamiento analógico, las rutinas de proporcionalidad y la conciencia meta – analógica.

Las rutinas de proporcionalidad tienen que ver con la capacidad de resolver las tareas proporcionales rutinarias, es decir, resolver los problemas clásicos de proporcionalidad que aparecen en los libros de texto y en diferentes ejercicios y ejemplos propuestos en el aula de clase. Por su parte los autores definen el razonamiento analógico como:

---

[21] Estos dos elementos, la razón constante y la relación funcional, tienen que ver con lo que Vergnaud (1983) denomina análisis escalar y análisis funcional, respectivamente.

[22] Las comillas pretenden resaltar que esta palabra es de los autores, es decir, que son ellos quienes han utilizado este juicio de valor.

> La capacidad de razonar con relación a patrones. Por lo tanto, el razonamiento analógico se refiere a las habilidades individuales de reconocer y aplicar patrones, ya sea que esos patrones estén representados por objetos concretos o ideas abstractas. Esta habilidad es un elemento fundamental que justifica la inclusión del razonamiento analógico en la interpretación del razonamiento proporcional. [Según los autores Polya ya había puesto de manifiesto la relación existente entre las proporciones y las analogías al indicar que una proporción es una forma especial de analogía]. En efecto tanto las proporciones como las analogías requieren que los estudiantes razonen acerca de las relaciones entre relaciones, enfocándose en encontrar los patrones estructurales entre términos. Cuando los estudiantes son capaces de determinar la semejanza estructural entre los términos de analogías verbales o visuales y no solo en sus semejanzas perceptuales, entonces ellos son capaces de darse cuenta de la relación que personifica el razonamiento proporcional. (Modestou & Gagatsis, 2010, p. 41).

En tanto que la conciencia meta - analógica involucra, por un lado, la capacidad de decidir si una situación es o no una situación de proporcionalidad, y por otro, la habilidad para enfrentarse a tareas que no son de tipo proporcional. Este aspecto es importante, entre otras razones, porque el desarrollo del razonamiento proporcional está ligado a la determinación de la existencia o no de una relación proporcional entre las magnitudes involucradas. Formalmente los autores la definen así:

> La conciencia meta – analógica hace referencia a ser consciente que aunque una situación parezca proporcional no lo es, y a la distinción entre cuáles situaciones son realmente proporcionales y cuáles no. Por ejemplo la tarea de determinar si la afirmación “Un niño de cinco años mide 83 cm. Cuando tenga 10 años medirá 1.66 m” es proporcional o no, es considerada un elemento del razonamiento proporcional. Por lo tanto, este aspecto metacognitivo en el modelo de razonamiento proporcional propuesto refleja el fenómeno de la ilusión de linealidad, acompañado de todas las dificultades que los estudiantes tienen para reconocerlo. (p. 40)

Vale la pena anotar que Lamon (2007) y Modestou y Gagatsis (2010) coinciden en afirmar que el hecho de que un sujeto resuelva correctamente problemas de comparación o de cuarta proporcional no garantiza un desarrollo del razonamiento proporcional, puesto que para su resolución puede haber acudido a procesos aditivos o a procesos rutinarios, memorísticos y algorítmicos como por ejemplo la regla de tres o la multiplicación en cruz.

Para Stemn (2008) el razonamiento proporcional es considerado un importante tópico matemático en la escuela media el cual tiene correlación con tópicos como el álgebra, la geometría, la medida, la probabilidad y la estadística y que tiene como elemento fundamental la determinación de la relación multiplicativa que existe entre dos razones. Además plantea, citando a Lamon, que las dificultades de los estudiantes en la comprensión de las proporciones son atribuidas por algunos estudios, a la prematura introducción del algoritmo de la multiplicación en cruz, como única forma de resolución, puesto que aunque es eficiente inhibe en los estudiantes la comprensión de la relación multiplicativa, la cual es el corazón del razonamiento proporcional.

2.2.2 La proporcionalidad

En la vida cotidiana, en las mismas matemáticas o en otras ciencias, existen situaciones caracterizadas por contar con dos cantidades covariantes, es decir, cantidades que están relacionadas de alguna forma y que además cambian conjuntamente, y por una relación constante entre estas dos cantidades. Lamon (2007) define a la proporcionalidad directa como el constructo matemático que caracteriza la condición o estructura subyacente a este tipo de situaciones y afirma que en la comprensión de la proporcionalidad juega un papel importante la constante de proporcionalidad, la cual expresa la razón constante de las dos cantidades que covarian, cuando dicha covariación se modela a través de una función lineal de la forma $y = kx$ donde k es dicha constante. En palabras de Lamon:

> Pedagógicamente hablando, k es un elemento escurridizo, porque cambia en apariencia de acuerdo con cada contexto particular y representacional que involucra relaciones de proporcionalidad. Es frecuente que no aparezca explícito en el contexto en el que juega un papel, pero sin embargo es un elemento estructural esperando a ser descubierto bajo los detalles obvios. (p. 638)

Con respecto a este planteamiento hay que decir que hace referencia a que, desde el punto de vista práctico, al enfrentar situaciones de proporcionalidad ocurre que en cada una de ellas surge un valor constante, que no necesariamente será el mismo para otras situaciones o quizá para la misma situación si se cambian algunas condiciones iniciales.

Además, Lamon enuncia los siguientes aspectos que involucran la comprensión de la proporcionalidad:

- Habilidad para usar la proporcionalidad como un modelo matemático para organizar apropiadamente contextos del mundo real.
- Habilidad para distinguir situaciones en las que la proporcionalidad es un modelo matemático adecuado de las situaciones en que no.
- Desarrollo y uso del lenguaje de la proporcionalidad.
- Uso de funciones para expresar la covariación de dos cantidades.
- Habilidad para explicar las diferencias entre funciones de la forma $y = mx$ y funciones de la forma $y = mx + b$.
- Saber que la gráfica de una situación de proporcionalidad directa es una línea recta que pasa por el origen.
- Saber que la gráfica de $y = mx + b$ es una línea recta que corta al eje y en el punto $(0, b)$.
- Habilidad para distinguir distintos tipos de proporcionalidad y asociar cada uno de ellos con adecuadas situaciones del mundo real en la que ellas son aplicables. Tales como: proporción directa, proporción inversa, proporcionalidad al cuadrado ($y = x^2$), y proporcionalidad cúbica $\left(y = x^3\right)$
- Saber que k es la razón constante entre dos cantidades en una situación de proporcionalidad directa.
- Saber que k, la constante en una situación de proporcionalidad inversa, es simplemente el producto de un par de valores de las dos cantidades.
- Saber que la gráfica de una situación de proporcionalidad inversa es una hipérbola. (pp. 639, 640)

Los elementos anteriormente enunciados junto con la afirmación sobre la constante de proporcionalidad, llevan a la autora a plantearse que comprender la proporcionalidad, es un objetivo mucho más exigente que comprender el sentido del número racional o del razonamiento proporcional, en los siguientes términos:

> Mi hipótesis es que las proporciones surgen en el estudio de los números racionales como una expresión natural de su equivalencia y de cómo uno desarrolla el sentido de los números racionales a través de varias experiencias con muchos roles de los números racionales, entonces uno aprende a razonar proporcionalmente. Sin embargo, la comprensión del gran concepto de proporcionalidad llega más tarde, a través de la interacción con sistemas matemáticos y científicos que involucran la invariancia de una razón o de un producto. (Lamon, 2007, p. 640).

En efecto, el razonamiento proporcional implica determinar el tipo de proporcionalidad que se da en una situación o si ésta es o no una situación de proporcionalidad, en tal sentido, el razonamiento proporcional puede quedar simplemente a un nivel cualitativo, en tanto que la proporcionalidad implica un trabajo tanto cualitativo como cuantitativo con las cantidades de magnitud de cada magnitud involucrada. Además, en la comprensión de la proporcionalidad se requiere establecer, por un lado, la constante de proporcionalidad (que como ya lo dijo Lamon no es un objeto que surja espontáneamente) y por otro lado una serie de objetos matemáticos (funciones, gráficas cartesianas, ecuaciones, etc, inicialmente en un nivel intuitivo) y de lenguaje matemático.

2.2.3 **Sobre la Teoría de los Campos Conceptuales.**

Las razones, las proporciones y la proporcionalidad se vinculan con la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud y lo hacen particularmente desde el Campo Conceptual de las estructuras Multiplicativas.

2.2.3.1 Generalidades de la Teoría de los Campos Conceptuales

Para (Vergnaud, 1990) un campo conceptual puede considerarse como un conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar un conjunto de situaciones. En la teoría de Vergnaud el concepto de situación no es el de situación didáctica, planteado por Brousseau en su Teoría de las Situaciones Didácticas, sino el de tarea, ya que toda situación compleja puede analizarse como una combinación de tareas, para las cuales es importante conocer, tanto su naturaleza como sus dificultades propias. Vergnaud también acude al sentido que es atribuido por los psicólogos al concepto de situación, esto es, los procesos cognitivos y las respuestas del sujeto son función de las situaciones con las que es confrontado. Además, afirma que un concepto adquiere sentido para el niño a través de las situaciones y de los problemas que se proponen para ser resueltos. En este orden de ideas distingue, por un lado, situaciones para las cuales el sujeto dispone dentro de su repertorio de ciertas competencias indispensables para el tratamiento, más o menos, inmediato de la situación, y por otra parte, situaciones para las cuales el sujeto no cuenta con todas aquellas competencias necesarias, que lo hacen tomar más tiempo para la reflexión y la exploración, de dudas, tentativas abandonadas, que le conducen al éxito o al fracaso.

Este conjunto de conceptos y de teoremas están presentes de manera informal y a un nivel previo[23] en los sujetos a través de lo que Vergnaud (1983) denomina teoremas y conceptos en acto o en acción,

> Los teoremas en acto son definidos como relaciones matemáticas que son tomadas en cuenta por los estudiantes cuando escogen una operación o una secuencia de operaciones para resolver un problema. Dichas relaciones usualmente no son expresadas verbalmente por los estudiantes. Los así llamados teoremas en acto no son teoremas en el sentido convencional ya que la mayoría de ellos no son explícitos. Ellos sustentan el comportamiento de los estudiantes y el alcance de su validez es generalmente más corto que el de los teoremas. Ellos pueden ser incluso erróneos. Sin embargo, un teorema en acto puede ser aplicado para resolver un conjunto de problemas. Para estudiar el comportamiento matemático de los niños es necesario expresar los teoremas en acto en términos matemáticos. (p.144)

2.2.3.2 El campo conceptual de las estructuras multiplicativas

En este sentido, define el campo conceptual de las estructuras multiplicativas como el conjunto de situaciones que requieren una multiplicación, una división o una combinación de tales operaciones, pero también como el conjunto de conceptos (proporción simple y compuesta, función lineal, múltiplo, combinación lineal, fracción, divisor, razón, etc.) y

[23] Hace referencia a preconceptos o conocimientos previos de los sujetos.

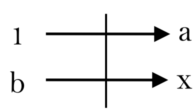
teoremas (propiedades de isomorfismo de la función lineal y su generalización a las relaciones no enteras, propiedades que se refieren al coeficiente constante entre dos variables linealmente ligadas, y algunas propiedades específicas de la bilinealidad) que permiten analizar estas situaciones. (Vergnaud, 1983, 1990, 1994).

Algunos de esos teoremas y conceptos son presentados a continuación.

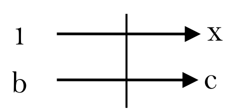
El isomorfismo de medidas.

Vergnaud (1983, 1991) entiende un isomorfismo de medidas como una estructura que pone en juego cuatro cantidades de magnitud, aunque en los casos más simple una de estas cantidades es igual a uno. Además define tres tipos de problemas que pueden presentarse, dependiendo del lugar que ocupe la incógnita. Estos se corresponden con los siguientes esquemas:

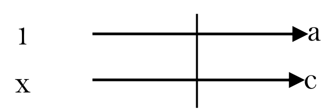
Multiplicación



División: partición



División: agrupamiento



De acuerdo con estas estructuras y con los teoremas en acto Vergnaud (1983, 1990), plantea dos tipos de análisis que pueden darse en la resolución de problemas por parte de los estudiantes. Considera que las situaciones típicas de multiplicación que se proponen en la escuela no son realmente de relación ternaria, es decir, que la escritura $a \times b = c$ no es adecuada en cuanto vincula únicamente tres términos, sino que debería acudirse a una relación cuaternaria como se indica en el esquema denominado de multiplicación y que pertenecen a la estructura del isomorfismo de medidas. En tal sentido, el autor propone volver a examinar completamente la noción de multiplicación.

Para tal fin se pueden considerar los siguientes ejemplos:

1. He dado 3 vueltas y en cada vuelta recorro 6 Km ¿Cuántos Km recorro?
2. ¿Cuánto pesan 9 manzanas? Si cada pila de 4 manzanas pesa 200 gramos.

Ambos ejemplos pueden ser representados mediante esquemas análogos que muestran, claramente, las cuatro magnitudes involucradas de las cuales x designa la cantidad de magnitud buscada (o el valor desconocido, hablando en términos de razones y proporciones):

Vueltas	Distancia
1 →	6
3 →	X

manzanas	gramos
4 →	200
9 →	X

Tabla 2. Tablas de correspondencia entre dos tipos de magnitudes

Estos esquemas (Tabla 2) son unas tablas de correspondencia entre dos tipos de magnitudes (la cantidad de vueltas y la distancia recorrida; la cantidad de manzanas y el peso). Dicho esquema aísla de todas las cantidades de magnitud posibles para dichas magnitudes cuatro de ellas en un cuadro ampliado (Tabla 3) lo cual se podría representar como sigue:

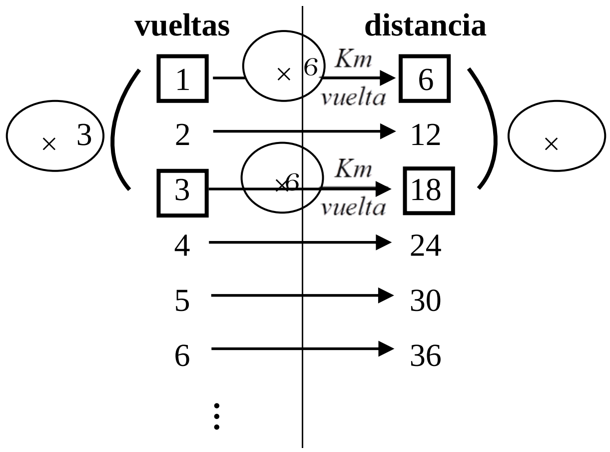


Tabla 3. Isomorfismo entre dos espacios de medida

Según Vergnaud (1991) en la Tabla 3 se está representando el isomorfismo de los dos espacios de medida. En efecto, es un isomorfismo de medidas porque se están poniendo en juego cuatro cantidades de magnitud, dos de las cuales pertenecen a la magnitud cantidad de vueltas y las otras dos a la magnitud distancia recorrida.

Además se observa que los operadores verticales $\times 3$, son operadores sin dimensión, que comparan dos cantidades del mismo tipo (misma magnitud o espacio de medida) con las cantidades correspondientes en la otra magnitud, a través de analogías hechas a partir de la razón que se establece entre las dos primeras cantidades, mientras que los operadores horizontales (o ratas funcionales) $\times 6 \ \frac{Km}{vuelta}$ representan una relación funcional y expresan el pasaje de un espacio de medida a otro.

Vergnaud (1991) propone otro tipo de solución a partir de las siguientes formulaciones verbales:

Primera formulación:
x es a 6 Km lo que 3 vueltas son a 1 vuelta.
Segunda formulación:
x es a tres vueltas lo que 6 Km son a 1 vuelta.

En forma de proporciones se tendría: $\frac{x}{6\,Km}=\frac{3\,vueltas}{1\,vuelta}$ para la primera formulación, de donde $x=\frac{(3\times 6\,)Km}{1}$ y $\frac{x}{3\,vueltas}=\frac{6\,Km}{1\,vueltas}$ para la segunda formulación, así que $x=\frac{(3\times 6\,)Km}{1}$
Para llegar a esta respuesta se acude a un procedimiento que desde la física se denomina análisis dimensional. El cual:

> Es casi imposible practicarlo tal cual con los niños de la enseñanza elemental, dado que la noción de proporción está en el límite de la capacidad de los mejores alumnos al final de la escuela primaria. Pero digamos que este análisis permite dilucidar completamente las relaciones que intervienen en una multiplicación, y mostrar así que la multiplicación más elemental hace intervenir, de hecho, un cálculo relacional referido a cuatro cantidades y varios tipos de operaciones. (Vergnaud, 1991, p. 201).

Para el segundo ejemplo, en el que no se ha dado el valor de la unidad, probablemente sea necesario determinar el precio de 1 manzana. En tal caso, de igual forma como se pasa de 4 manzanas a 1 manzana dividiendo entre 4, se obtiene el peso unitario dividiendo 200 entre 4 y luego, teniendo en cuenta que para pasar de 1 manzana a 9 hay que multiplicar por 9. Para determinar el precio de 9 manzanas se multiplica el valor unitario por 9. En resumen podría decirse que se puede pasar, directamente, de 4 a 9 manzanas multiplicando por el operador fraccionario $\frac{9}{4}$, de igual forma con este operador se puede pasar del peso de 4 manzanas al peso de 9 manzanas.

La noción de fracción es introducida a partir de la noción de operador, en el cual se están componiendo dos operadores multiplicativos simples, la multiplicación y la división. En este caso la fracción obtenida $\frac{9}{4}$ es un operador fraccionario (que se correspondería con el operador funcional) o también un operador complejo, pero si el número de manzanas inicial hubiese sido 4 y el que se quería calcular 8 entonces, el operador funcional hubiera sido 2, es decir, se estaría en presencia de un operador simple. Hay que tener en cuenta que aunque en el procedimiento descrito anteriormente primero se divide y luego se multiplica, la propiedad de conmutatividad[24] permite primero multiplicar y luego dividir, que es lo que regularmente se hace al aplicar el operador fraccionario.

Igualmente el operador $\frac{9}{4}$ podría representar la multiplicación por la razón: $\frac{punto\, de\, llegada}{punto\, de\ partida}$
O incluso plantea Vergnaud (1991), podría hacerse intervenir en el problema la proporción ("igualdad de dos razones"[25])

$$\frac{9\, manzanas}{4\, manzanas} = \frac{peso\, de\, 9\, manzanas}{peso\, de\, 4\, manzanas} = \frac{x\, gramos}{200\, gramos}$$

> La noción de razón, la de razón – operador y la de proporción son difíciles; la mayoría de los niños de 9 y 10 años no las comprenden. No hay que concluir, sin embargo, que el maestro no deba introducir situaciones y explicaciones que impliquen estas nociones: pero debe hacerlo prudentemente, deteniéndose en cada etapa y apoyándose al máximo en las nociones más evidentes para el niño, como la de operador. (Vergnaud, 1991, p. 203)

Con esta última afirmación, relacionada con los ejemplos presentados, el autor deja entrever una serie de dificultades de índole cognitivo que pueden presentarse a los niños al trabajar con situaciones de este tipo. Además deja implícita la revisión de la manera como deberían ser introducida la razón, la proporción y los operadores en el aula de clase,

Vergnaud (1991) esquematiza de la siguiente manera, un análisis, relacionado con el segundo ejemplo, que considera necesario esclarecer para que el maestro comprenda el desarrollo de

[24] La composición de operadores multiplicativos es, como la composición de transformaciones aditivas, una ley de grupo conmutativo. (Vergnaud, 1991, p. 203)

[25] Las comillas no aparecen en el original y están puestas para explicitar que tal afirmación es del autor.

las nociones que intervienen en el isomorfismo de medidas y los problemas derivados de dicha estructura.

1. Búsqueda de la solución del problema, pasando por la unidad y el valor unitario.
2. Aplicación sucesiva de dos operadores. (división primero)
3. Escritura del operador fraccionario. (simple convención de escritura en este nivel)
4. Aplicación sucesiva de dos operadores (multiplicación primero)
5. Noción de razón y de razón operador.
6. Proporción o igualdad de razones.
7. Igualdad de razones operadores.
8. Regla de tres.

El análisis vertical presentado anteriormente debe ser complementado con un análisis en términos de la noción de función lineal (o análisis horizontal). Este análisis es propuesto por el autor para comprender los procedimientos empleados por los niños, al enfrentar situaciones, que pueden considerarse como pertenecientes a la familia de las situaciones lineales, pero a un nivel intuitivo, es decir sin el conocimiento formal de la función lineal. El ejemplo de las manzanas también podría ser esquematizado de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccc} \text{manzanas} & & \text{Gramos} \\ 4 & \xrightarrow{\qquad f \qquad} & 200 \\ 9 & \xrightarrow{\qquad f \qquad} & x \end{array}$$

Este análisis se centra en la noción operador – función (f) que hace pasar de un espacio de medida a otro. Nótese que el operador – función (f) que hace pasar de 4 manzanas a 200 gramos debe ser el mismo que hace pasar de 9 manzanas a x manzanas. Este operador – función no es otra cosa más que la razón $\dfrac{punto\,de\,llegada}{punto\,de\,partida}$, es decir, $\dfrac{200\,gramos}{4\,manzanas}$. Este análisis se sitúa a un nivel conceptual muy elaborado y es, entre otras, una de las dificultades para que los estudiantes logren comprender la noción de función. Por otra parte, el análisis en términos de función implica no sólo la consideración de la relación numérica, sino también la del cociente de dimensiones (v.g., gramos/manzanas).

Se concluye entonces que en los análisis escalares lo que se hace es determinar el operador (escalar, sin dimensión) que reproduce en las cantidades de magnitud de una magnitud lo que ocurre en las dos cantidades de magnitud correspondientes en la otra magnitud. En tanto que los análisis funcionales se apoyan en operadores (funcionales) que permiten pasar de una cantidad de magnitud de una magnitud a la cantidad correspondiente en la otra magnitud. En el discurso de (Vergnaud, 1991) sobre el isomorfismo de medidas, y sobre los análisis escalares y funcionales se observa una serie de estrategias que tienen que ver, entre otras cosas, con la consideración de conocer o no el valor de la unidad de una de las magnitudes y con determinar lo que ocurre al interior de una magnitud (análisis escalar) o por el contrario lo que ocurre entre magnitudes (análisis funcional).

Al respecto, Lamon (1994) plantea que entender los procesos de “unitización” y “normatización”[26] y profundizar en el estudio de las estrategias o estructuras “internas” y “externas”[27] brinda elementos valiosos para comprender la construcción del razonamiento proporcional en los estudiantes. Además reafirma la importancia del conteo, es decir, el proceso de contar objetos de uno en uno que se inicia en los primeros años de la primaria y la modelación, en este caso, referente a la utilización de material concreto y pictogramas para formar unidades compuestas, como actividades significativas en la comprensión de una razón, y que experimentar una razón mediante una actividad concreta como el conteo y pareo de dos conjuntos de objetos o el proceso de poner frente a frente dos conjuntos y relacionar uno a uno los elementos correspondientes, podría ser un importante prerrequisito en la abstracción del concepto de razón y un paso importante en un ciclo de aprendizaje. Estas actividades también favorecen la formación de unidades compuestas. Tanto los análisis teóricos como los resultados empíricos sugieren que los procesos de “unitización” y “normatización” serían un

[26] Es la interpretación para las palabras “unitizing” a “norming” que la autora utiliza en el documento. La unitizacion se refiere al proceso mental de reorganización de una cantidad dada en una unidad de otro tamaño que sea más familiar, conveniente o manejable con el fin de operar más fácilmente con ella. (Lamon, 2007, p.630). En tanto que la normatización se entiende como el proceso de reconceptualización de un sistema en relación a alguna unidad fijada o estándar. (Freudenthal, 1983)

[27] En el texto original la autora habla de estructuras “within” y “between”, lo que se ha interpretado como intraestructuras y extraestructuras. Las intraestructuras hacen referencia a analizar lo que ocurre entre dos cantidades de magnitud dentro de una misma magnitud para trasladarlo a la cantidades de magnitud correspondiente en la otra magnitud, en tanto que las extraestruturas tienen que ver con el análisis que se hace entre dos cantidades de magnitud pero de distinta magnitud, planteamientos referidos a los análisis escalares y funcionales de Vergnaud(Vergnaud, 1991, p. 203), respectivamente.

importante mecanismo mediante el cual involucrar razonamientos más avanzados. De igual forma Lamon demuestra que el desarrollo del pensamiento proporcional inicia desde edades muy tempranas.

2.3 La enseñanza de las razones, las proporciones y la proporcionalidad

F. García (2005) plantea que el proceso de escolarización de modelos matemáticos ha hecho aparecer como naturales, como si vinieran unidos, los modelos de proporcionalidad directa e inversa, pero tal implementación no ha sido ampliamente debatida antes de ser llevada al aula de clase.

Por otro lado, los problemas de proporcionalidad son un tema considerado en la aritmética enseñada, hecho constatable por su presencia en los manuales escolares a lo largo de la historia, es más, hoy en día ocupan un lugar de privilegio en la Educación Secundaria Obligatoria[28].

Por otro lado, según el autor, la introducción que se hace a los problemas de proporcionalidad es ajena al estudiante, habitualmente estos son preconstruidos en instituciones como la "institución profesor" o la "institución libro de texto" de tal forma que llevan implícito el carácter proporcional que se les supone, es decir, los sistemas serán proporcionales porque se plantean de esa forma. El autor cita a Mariana Bosch para poner en evidencia que en la organización clásica el nivel técnico[29] presenta gran robustez, lo cual le ha garantizado su perdurabilidad a lo largo del tiempo en el sistema educativo, pero esta organización se ve limitada al momento de justificar el carácter proporcional del sistema[30] y de justificar la adecuación de la ecuación proporcional[31]. Por otro lado, el enfoque clásico, en términos de economía, fiabilidad y capacidad de rutinización, no tiene comparación con la organización de

[28] Para el caso del sistema educativo Colombiano, la ESO se corresponde con el ciclo de Educación Básica Secundaria, que comprende los grados sexto a noveno.

[29] Este nivel hace referencia, al nivel de la técnica, anteriormente definido, y tiene que ver con el nivel de hacer.

[30] Aquí el autor hace referencia a la determinación del tipo de proporcionalidad (directa o inversa) que se da entre cantidades de magnitud en un sistema.

[31] Para Mariana Bosch la ecuación proporcional puede ser expresada de distintas formas dependiendo del ostensivo que se esté movilizando y distingue dos formas $a:b :: c:x$ para las modelizaciones clásicas y $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ para las modelizaciones algebraicas. Luego la ecuación proporcional es la expresión en la cual uno de los cuatro valores en una proporción es desconocido.

las relaciones funcionales, que requieren un trabajo menos algorítmico, de mayor elaboración y que obliga a comprender y a dar sentido a lo que se está haciendo.

Estas afirmaciones muestran que los dos enfoques (clásico y funcional) tienen ventajas y cumplen su función dependiendo del objetivo que se pretenda alcanzar, por tanto podría decirse que una reflexión profunda acerca de las implicaciones y coordinación entre ambos enfoques podría surtir frutos tanto para la enseñanza como para la aplicación en otras ciencias o en la vida cotidiana.

F. García (2005) agrega que las modelizaciones funcionales vivieron durante la época de las matemáticas modernas en la educación española, aunque el cambio de lo clásico a lo funcional fue superficial y en algunos libros de texto se observa la convivencia de los dos pero sin llegar a mezclarse. Superada esta etapa institucional, la modelización clásica se reinstaló y esta vez con más fuerza, para perdurar en el sistema de enseñanza. Con respecto a esta reinstalación y a partir del análisis de los currículos oficiales y de los libros de texto vigentes en el 2005 se determina la existencia de una atomización de la proporcionalidad entre magnitudes, razón por la cual se plantea que:

1. El problema de la enseñanza – aprendizaje de la proporcionalidad puede ser reformulado desde la didáctica como una manifestación del fenómeno de la desarticulación de las matemáticas escolares. (F. García, 2005, p. 177)
2. Para estudiar los procesos de enseñanza-aprendizaje de la proporcionalidad entre magnitudes es necesario ampliar el *campo de estudio* a un conjunto de relaciones entre magnitudes, entre las que la relación de proporcionalidad es una relación más. (F. García, 2005, p. 183)

Para García, Bosch, Gascón y Ruíz (2006) queda claro que aunque se han utilizado diversos marcos teóricos y diversas metodologías para investigar los problemas surgidos en la enseñanza y en el aprendizaje de la proporcionalidad, se observa un aislamiento de la proporcionalidad con respecto a otro tipo de relaciones entre magnitudes. En tal sentido en el marco del programa epistemológico[32] se propone la despersonalización de la problemática

[32] El Programa Epistemológico en Didáctica de la Matemática postula que la Didáctica de las Matemáticas (DM) es una ciencia autónoma, que tiene como objeto de estudio la comunicación y la construcción de objetos de conocimiento matemático. Este programa modeliza de manera explícita el saber matemático que se va a enseñar

didáctica y se toma como objeto primario de estudio la actividad matemática institucional. Así mismo desde este marco y a partir de su hipótesis básica (no sólo lo matemático es denso en lo didáctico, sino también que, recíprocamente, toda actividad matemática supone una actividad didáctica o actividad de estudio de las matemáticas) plantean la posibilidad de ampliar de manera radical la problemática didáctica para incluir en ella al saber matemático así como también al sistema de enseñanza.

García y otros (2006) consideran que una forma fecunda de abordar los problemas referentes a la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad es integrándolos en el estudio de los problema de la enseñanza y del aprendizaje de las relaciones funcionales entre magnitudes[33]. Para tal fin retoman los interrogantes planteados en la tésis doctoral de García y a partir de estas preguntas cuestionan la organización que desde la escuela se está dando a la enseñanza de la proporcionalidad y evidencian la necesidad de replantear dicha organización.

Según García y otros (2006) si se usa el MER como referencia, se observa que la organización matemática que se desea enseñar separa el estudio clásico de la proporcionalidad[34] del de las relaciones funcionales. Para los autores, el único elemento de articulación entre las dos perspectivas es la constante de proporcionalidad. Además, en ambos ámbitos se encuentran componentes praxeológicos de diferentes modelizaciones de los sistemas lineales directos y de los sistemas lineales inversos[35], pero en ningún caso, dichos componentes se articulan. Este

y pretende mostrar la insuficiencia de la realización exclusiva de análisis psicológicos o pedagógicos de los procesos de enseñanza y aprendizaje. El método que se impone dentro del Programa Epistemológico es el de la ingeniería didáctica, propuesto por Michel Artigue en 1995, el cual permite validar hipótesis que se han establecido con anterioridad a través de las restricciones cognitivas, instruccionales, epistemológicas y didácticas del sistema didáctico que es objeto de estudio.

[33] En la perspectiva de los autores se entiende por relaciones funcionales entre magnitudes a aquellas relaciones entre magnitudes, en las cuales se verifica que si se fija el valor de una de ellas entonces el valor de la otra queda totalmente determinado.

[34] Para los autores este estudio clásico hace referencia a la aritmetización de la proporcionalidad.

[35] Según F. García (2005) los sistemas lineales son aquellos cuyos estados evolucionan bajo una condición de linealidad o que al menos se puede suponer que así ocurre, [plantea que]: Dadas dos magnitudes *M* y *M*' relacionadas en un sistema lineal entonces se verifica que si (a, a') es un estado del sistema, entonces: cuando la cantidad a aumenta al doble, al triple, …, la cantidad correspondiente a' también aumenta al doble, al triple, … o cuando la cantidad a disminuye a la mitad, a la tercera parte, …, la cantidad correspondiente a' también disminuye a la mitad, a la tercera parte, … (p. 210). [De manera similar, la comparación de estados a través de razones homogéneas y proporciones permite caracterizar a los sistemas que evolucionan bajo la condición de "linealidad inversa"]. [Es decir, si se tiene] un sistema lineal "inverso", y dos cantidades cualesquiera a y b de una magnitud *M*, y sus correspondientes cantidades a' y b' de la magnitud *M*', entonces para estas cuatro cantidades debe verificarse que: $\frac{a}{b} = \frac{b'}{a'}$ (p.219)

hecho les permite afirmar, que la organización matemática que se va a enseñar propone una amalgama de organizaciones matemáticas puntuales y relativamente aisladas.

2.4 Precisiones desde lo matemático

2.4.1 Algunas definiciones previas

2.4.1.1 Magnitudes y cantidades de magnitud

En el lenguaje común y, porque no, en los círculos escolares se utilizan indistintamente las palabras magnitud, cantidad y cantidad de magnitud como si fueran sinónimas. En este trabajo es necesario precisar lo que se entenderá por cada uno de estos términos.

Godino, Batanero y Roa (2002) presentan las definiciones de cantidad de magnitud y magnitud dadas en el diccionario de M. Molinier.

> "Magnitud es cualquier aspecto de las cosas que puede expresarse cuantitativamente, como la longitud, el peso, la velocidad, la luminosidad…cantidad de magnitud es el aspecto por el que se diferencian entre sí las porciones de la misma cosa o los conjuntos de la misma clase de cosas, por el cual esas porciones o esos conjuntos se pueden medir o contar". (p.615)

Los autores agregan a esta definición, que ellos denominan habitual, el hecho de que tales aspectos o atributos pueden variar de manera cuantitativa y continua (longitud, peso, tiempo, etc.) o de manera discreta (el número de estudiantes en un salón de clase, la cantidad de vasos de 7 onzas contenidos en un paquete, etc.) y precisan que las cantidades de magnitud son los valores de dichas variables (magnitudes). Por ejemplo, para el caso de las magnitudes cuantitativas continuas, 2m y 3m serían cantidades de magnitud correspondientes a la magnitud longitud y, para las discretas, 25 vasos y 20 vasos sería las cantidades de magnitud correspondiente a la magnitud número de vasos de 7 onzas contenidos en un paquete. En ambos casos es posible, por un lado, comparar las cantidades de magnitud para determinar, en el primer caso, cuál es más largo (más alto, más ancho, más profundo, etc.) y en el segundo caso cuál paquete contiene más vasos y, por otro lado, sumar 2m y 3m para obtener 5m, una nueva cantidad de magnitud longitud y 25 vasos con 20 vasos obteniendo 45 vasos que es una nueva cantidad de magnitud correspondiente a la cantidad de vasos de 7 onzas que hay en 1 paquete.

Al respecto del ejemplo de los vasos, vale la pena enfatizar, que la magnitud ha sido definida teniendo en cuenta la capacidad del vaso para poder hacer las comparaciones y las sumas, lo cual no fue necesario para la magnitud longitud, puesto que a pesar de que una cantidad de magnitud hubiese estado en cm o en Km haciendo las conversiones respectivas se habrían podido desarrollar los procesos de comparación y adición de cantidades de magnitud.

Los autores también presentan una definición matemática formal de magnitud que está muy relacionada con la desarrollada por (Obando, et al., 2009, p. 28)

> Formalmente hablando, una magnitud se define como un conjunto sobre el cual se puede definir un álgebra. Esto es, una magnitud es un conjunto sobre el cual, a partir de una relación de equivalencia, se definen clases de equivalencia (cada clase de equivalencia es una cantidad de magnitud), y sobre estas clases de equivalencia se define un orden y una ley de composición interna. Posteriormente, sobre la definición de una métrica (una función medida), se establece una ley de correspondencia que asigna a cada clase de equivalencia un único número real (bajo la respectiva función medida)

En conclusión las magnitudes con las que se va a trabajar en una situación deben estar bien definidas para poder determinar las respectivas cantidades de magnitud, es decir, las magnitudes deber ser definidas claramente de tal forma que permitan establecer comparaciones entre las cantidades de magnitud, esto es, que permitan establecer si dos cantidades de magnitud son iguales, o una es mayor o menor que la otra y que al sumar estas dos cantidades de magnitud, la cantidad resultante sea nuevamente una cantidad de magnitud de la misma magnitud. En tal sentido se requiere ser explícito al definir la magnitud, considerando para tal fin el contexto y las condiciones particulares de las situaciones en las cuales aparecen. Por ejemplo en situaciones que tienen que ver con el precio de un producto habría que definir las magnitudes precisando el sitio de la compra o de la venta. Finalmente, el concepto de cantidad "se toma en un sentido más general que el de magnitud. Si se quiere, se puede asumir una cantidad como una propiedad, característica, medible sobre un fenómeno, con respecto a la cual se puede ordenar, contar o medir, y sobre la cual, en general, en el sentido, amplio, no se requiere el recurso a los números. En particular, los números y las magnitudes son cantidades" (Obando, et al., 2009, p. 10)

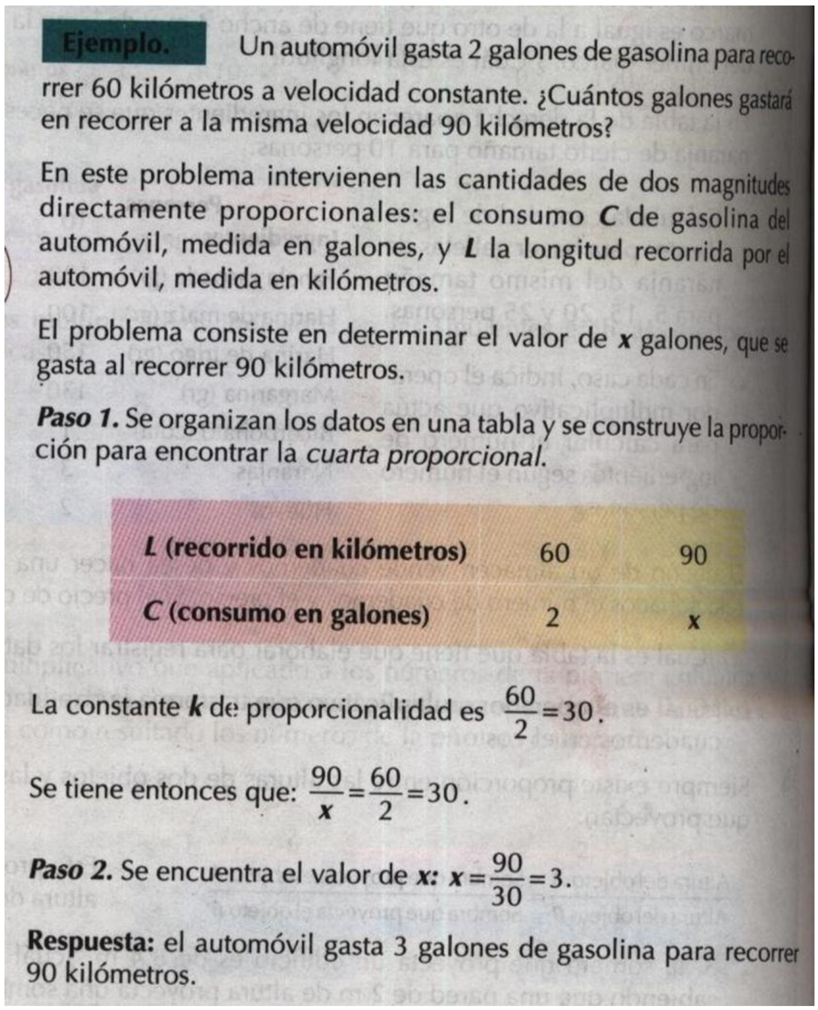
Schwartz (1996) utiliza el término cantidad "quantity" en el sentido expresado en el párrafo precedente, lo cual le da la libertad de llamar cantidad a entidades que no son fáciles de catalogar como magnitudes en el sentido habitual, expresado al principio de esta sección. Igual utilización hace Vergnaud (1983, 1994) y más recientemente Vergnaud (2007), situación que le permite llamar cantidades a los objetos sobres de láminas y láminas, en los ejemplos sobre isomorfismos de medidas dados en el documento de 1991.

Por otra parte Vergnaud (1994) utiliza el concepto de espacios de medida para referirse a las magnitudes (en la perspectiva de este trabajo) o a las cantidades involucradas (en la perspectiva de Schwartz (1996)).

En el presente trabajo se consideraran las magnitudes en el sentido de Obando y otros (2009). Ahora bien, al trabajar con magnitudes es posible que estas sean de diferente naturaleza. Por ejemplo, aquellas que surgen directamente de los procesos de medir o de contar se denominan extensivas (Schwartz, 1996). En tanto que las que provienen de la realización y/o combinación de operaciones aritméticas, generalmente cocientes o productos, entre dos o más magnitudes son denominadas magnitudes intensivas. Schwartz (1996) distingue dos tipos de magnitudes compuestas, en primera instancia, las que provienen de cantidades de magnitud de la misma magnitud, que se denominan magnitudes homogéneas, y en segunda instancia, aquellas surgidas de cantidades de magnitud de distinta magnitud, denominadas heterogéneas, por ejemplo, la velocidad.

2.4.1.2 Tipos de magnitudes

Como se ha venido planteando, la enseñanza de las razones, las proporciones y la proporcionalidad se ha encauzado exclusivamente a la aplicación de rutinas mecanizadas como la regla de tres y el producto en cruz. En muchas ocasiones para resolver un ejercicio en el que se busca que los estudiantes apliquen la regla de tres, dicha aplicación se hace de manera mecánica y hay un descuido en el manejo de las unidades de cada cantidad de magnitud o las mismas magnitudes involucradas no son claramente establecidas. Específicamente, en los ejemplos de aplicación de la regla de tres simple directa en algunos libros de texto de grado séptimo (ver gráfica 2), puede observarse que el único procedimiento planteado consiste en ubicar en una tabla las magnitudes involucradas, las unidades con las que se está trabajando y las cantidades de magnitud de cada magnitud para luego acudir a la multiplicación en cruz.



Ejemplo. Un automóvil gasta 2 galones de gasolina para recorrer 60 kilómetros a velocidad constante. ¿Cuántos galones gastará en recorrer a la misma velocidad 90 kilómetros?

En este problema intervienen las cantidades de dos magnitudes directamente proporcionales: el consumo C de gasolina del automóvil, medida en galones, y L la longitud recorrida por el automóvil, medida en kilómetros.

El problema consiste en determinar el valor de x galones, que se gasta al recorrer 90 kilómetros.

Paso 1. Se organizan los datos en una tabla y se construye la proporción para encontrar la *cuarta proporcional.*

L (recorrido en kilómetros)	60	90
C (consumo en galones)	2	x

La constante k de proporcionalidad es $\frac{60}{2}=30$.

Se tiene entonces que: $\frac{90}{x}=\frac{60}{2}=30$.

Paso 2. Se encuentra el valor de x: $x=\frac{90}{30}=3$.

Respuesta: el automóvil gasta 3 galones de gasolina para recorrer 90 kilómetros.

Gráfica 2. Procedimiento de un libro de texto

Cuando los estudiantes reproducen este procedimiento y han adquirido destreza en la aplicación del algoritmo se limitan a realizar la operación aritmética de igualar el producto de medios con el producto de extremos, propiedad de las proporciones que ha sido enseñada (y tal vez aprendida) antes de llegar a la regla de tres.

En los planteamientos anteriores se esbozan una serie de críticas a la regla de tres, pero como se planteó en la justificación muchas de estas críticas pueden ser vistas como ventajas para los procesos de enseñanza y de aprendizaje y para la aplicación en otras ciencias. Por tanto, lo que sí se debe reclamar con fuerza es que la regla de tres sea la única y la primera técnica enseñada para resolver situaciones relacionadas con la razón, la proporción y la proporcionalidad y no se reflexione sobre ella, lo cual ha conducido a lo que en este documento se denominó falsa generalización, es decir, a considerar que todas las situaciones de proporcionalidad pueden ser resueltas acudiendo a la regla de tres.

Las líneas precedentes, esbozan la forma clásica como ha sido enseñada y aprendida la proporcionalidad, forma que, entre otras cosas, descuidó el trabajo con las magnitudes, las cantidades de magnitud y las unidades de las cantidades de magnitud. La idea es recuperar el reconocimiento de estos elementos, reconocimiento que puede hacerse a través de situaciones de variación y cambio fundamentadas en actividades cotidianas como aquellas que tiene que ver con las compras y el llenado de recipientes, en las cuales se trabaja con magnitudes como el volumen, el precio del arroz en determinado supermercado, la cantidad de vasos de *n* onzas depositados en un recipiente y el peso[36] y sus respectivas unidades como las onzas líquidas, el peso colombiano (unidad monetaria) y el kilogramos (o la libra).

En estas magnitudes es posible distinguir entre magnitudes extensivas (Schwartz, 1988) y magnitudes intensivas. Las primeras son aquellas surgidas directamente de los procesos de medir o contar y poseen la característica de ser sumables, dicho en otras palabras, la cantidad de magnitud de un objeto compuesto de partes se obtiene agregando las cantidades de cada parte (Godino, et al., 2002). Las segundas son definidas, desde el punto de vista de la física, como aquellas cuyo valor no depende de la cantidad de materia del sistema[37] o como aquellas cuyo valor no cambia al subdividir el sistema inicial en varios subsistemas (partes), como por ejemplo la temperatura, la densidad o la presión de un sistema termodinámico en equilibrio. En este caso, estas magnitudes poseen la cualidad adicional de no ser sumables, al menos en el sentido usual de los números enteros. En algunas ocasiones las magnitudes intensivas se

[36] Se hace referencia al concepto físico de masa, pero partiendo del hecho que en la vida cotidiana las personas del común e incluso los profesionales de la salud hablan del peso y no de la masa (v.g., el peso y la talla de un niño, pesar el azúcar, etc.) se ha decidido mantener este término.

[37] El todo que está bajo estudio.

obtienen mediante el cociente de magnitudes extensivas. En este caso las magnitudes extensivas que se dividen son distintas, como por ejemplo cuando se divide la distancia entre el tiempo (velocidad) o la masa entre la longitud (densidad lineal). Para el caso de las magnitudes intensivas, obtenidas como combinación de magnitudes extensivas, éstas no dan cuenta del monto de las magnitudes extensivas que la determinan, sino de la relación, por cociente o por razón, entre éstas, es decir, una cantidad intensiva es una relación que puede ser cuantificada.

El manejo de estos tipos de magnitudes en diversas situaciones, aporta en la determinación de la manera como las razones, las proporciones y la proporcionalidad son llevadas al aula de clase y es a través de su utilización que se observa cómo la razón juega distintos roles en la resolución de tales situaciones.

En efecto, en las situaciones de variación y cambio se trabaja inicialmente con magnitudes extensivas, pero es posible que cuando se realiza el cociente entre cantidades de magnitud de distintas magnitudes se obtengan cantidades de magnitud de magnitudes intensivas, las cuales en primera instancia son una razón como relator y más adelante son vistas como razones como operadores o como correlatores, entrando a formar parte de los análisis funcionales. Vale la pena anotar que si el cociente se hace entre cantidades de magnitud de la misma magnitud, el valor obtenido, que no tiene unidades y por tanto es un operador escalar ya no es una cantidad de magnitud de una magnitud intensiva, sin embargo en este caso también aparece la razón en sus tres diferentes facetas.

2.4.2 **Organización matemática de las razones, las proporciones y la proporcionalidad**

Las definiciones al igual que las tipologías que se presentan en esta sección han sido tomadas del documento de tesis doctoral "*Praxeologías matemáticas en torno al número racional, las razones, las proprociones y la proporcionalidad*", elaborado por Obando y otros (2009), las cuales (definiciones y tipologías) fueron ampliamente debatidas en las distintas sesiones de asesoría abordadas para la elaboración del presente trabajo, a las que se ha agregado una organización en función de elementos teóricos de la TAD, toda vez que en la tesis antes mencionada las definiciones y las tipologías no se encuentran organizadas de tal manera.

En este orden de ideas, a continuación se presentan los tipos de situaciones (S), los problemas (π), las técnicas (τ), las tecnologías (θ) y las teorías (Θ) que permiten la organización de los procesos de estudio que orientaron la intervención pedagógica realizada con los estudiantes del grado 7 del presente trabajo.

Para la mencionada organización se consideran tres teorías: Los roles de la razón, la estructura formal de las transformaciones lineales y la visualización. Se han definido los siguientes tipos de situación: de proporcionalidad simple directa (*psd*), de proporcionalidad simple inversa (*psi*), de porcentaje (*pc*), de reparto proporcional (*rp*) y de relación parte - todo (*pt*). Para cada uno de estos tipos de situaciones se han definido unos problemas que es posible desarrollar a partir de situaciones que son de cada tipo de proporcionalidad, unas posibles técnicas, entendidas como procedimientos que pueden ser empleados para resolver los problemas y unas tecnologías que sustentan los procesos matemáticos que ahí se encuentran involucrados y los cuales se espera sean más adelante institucionalizados en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las razones, las proporciones y la proporcionalidad. Al final se presenta un cuadro abreviado de cada problema con sus respectivas técnicas y la tecnología asociadas a cada técnica. Para la elaboración de tal cuadro, se debe tener en cuenta, que hay problemas con distintas técnicas ligadas a él, que existen tecnologías comunes a varias técnicas y que cada técnica tiene como fundamento teórico una sola tecnología.

2.4.2.1 Teorías

En la perspectiva del presente trabajo se han definido tres teorías que sustentaran la organización matemática de las razones, las proporciones y la proporcionalidad que se ha construido: la de los roles de la razón, la estructura formal de las transformaciones lineales y la visualización

2.4.2.1.1 Los roles de la razón (Θ_{RR})

Antes de hacer referencia a los tres roles que pueden jugar la razón, se inicia enunciando algunas consideraciones sobre la razón.

Teniendo en cuenta que la forma de ver las razones, las proporciones y la proporcionalidad se aparta de la forma aritmética tradicional, también llamada “clásica”, estos roles de la razón no se podrían ubicar dentro de la teoría que, en algunos documentos (como por ejemplo la tésis doctoral de García (2005)) se denomina de las razones y las proporciones. Además los dos primeros roles, (razón como relator y como operador) tendrían cabida en lo aritmético, pero la razón como correlator formaría parte de la teoría de las funciones lineales y, como se evidencia en las técnicas empleadas para resolver problemas sobre razones, proporciones y proporcionalidad estos tres roles están estrechamente ligados, razón por la cual se determinó definir a estos (léase roles) como un bloque teórico.

2.4.2.1.1.1 Sobre la razón

Tradicionalmente los libros de texto y los maestros han definido la razón como el cociente indicado entre dos números enteros.

Por su parte en el libro V de los Elementos de Euclides se define así: “Una razón es una clase de relación con respecto al tamaño entre dos magnitudes de la misma clase[38]”.(Heath, 1908, p. 114) En este caso Heath considera que la expresión “relación con respecto al tamaño” puede ser interpretada como un sinónimo de magnitud relativa, esto es, dadas M_1 y M_2 dos magnitudes, y m_1, m_2 cantidades de magnitud de cada magnitud, respectivamente, con m_2 la unidad de medida. La razón de m_1 a m_2 puede entenderse como una especie de cuantificación (quantuplicity) de m_1 con respecto a m_2, en otros términos, como relación parte - todo: la cantidad de magnitud m_1 cuántas veces está contenida en la cantidad de magnitud m_2.

Ahora bien, esta definición euclidiana hace alusión exclusiva a magnitudes de la misma clase, faltaría determinar lo que ocurre cuando las magnitudes no son de la misma clase. Además, la expresión “una clase de relación” no explicita claramente el tipo de comparación que se puede

[38] En el lenguaje moderno las magnitudes de la misma clase se denominan homogéneas.

dar entre las dos magnitudes, pero se sabe que tal comparación en cuanto al tamaño puede hacerse por diferencia o por cociente[39].

Por tanto, en general, se puede considerar una razón como una cantidad que afirma un tipo de relación entre dos cantidades fijas. Esto es, la razón expresa una forma de comparación entre estas dos cantidades.

2.4.2.1.1.2 Razón como relator $\left(\Theta_{RR}^{1}\right)$

Dadas dos magnitudes M_1 y M_2, y dos cantidades de magnitud m_1 y m_2 que pertenecen a M_1 y M_2 respectivamente. Se determina una cantidad $\rho = R(m_1, m_2)$ entre las dos cantidades de magnitud dadas. Esta relación, R, es de carácter cuantitativo y se puede expresar como sigue:

$$\begin{aligned} R &: M_1 \times M_2 \to A \\ &(m_1, m_2) \to \frac{m_1}{m_2} = \rho = R(m_1, m_2) \end{aligned}$$

Se debe tener en cuenta que si M_1 y M_2 son magnitudes homogéneas entonces ρ es una cantidad numérica que expresa la relación parte - todo entre las dos cantidades comparadas. En este caso A es el conjunto de los números racionales o más generalmente, los reales. Si M_1 y M_2 son magnitudes heterogéneas, entonces ρ es una cantidad con unidades, que expresa la cantidad de unidades de m_1 por cada unidad de m_2, en cuyo caso A puede ser una nueva magnitud.

2.4.2.1.1.3 Razón como operador $\left(\Theta_{RR}^{2}\right)$

La razón puede ser usada para ampliar o achicar y será vista como un operador. Sean M_1 y M_2 dos magnitudes y m_1 y m_2 dos cantidades de magnitud que pertenecen a M_1 y M_2 respectivamente luego existe una operación unaria, O, de la forma:

$$\begin{aligned} O &: M_1 \to M_2 \\ &m_1 \to O(m_1) = \rho \times m_1 = m_2 \end{aligned}$$

[39] La comparación por cociente se denomina razón geométrica y la comparación por diferencia razón aritmética.

Si M_1 y M_2 son magnitudes homogéneas entonces ρ es una cantidad numérica que expresa un factor de ampliación o reducción que, aplicado sobre la cantidad de magnitud m_1 produce la cantidad de magnitud m_2. Ahora, Si M_1 y M_2 son magnitudes heterogéneas, entonces ρ es una cantidad con unidades que actúa como operador transformando la cantidad de magnitud m_1 en la cantidad de magnitud m_2.

2.4.2.1.1.4 Razón como correlator entre cantidades $\left(\Theta_{RR}^{3}\right)$

La razón puede expresar una propiedad invariante a dos series de cantidades de magnitud, que se pueden poner en correspondencia uno a uno, y donde la razón es el operador lineal que permite definir la función que correlaciona ambos conjuntos, esto es, a través de la razón se puede establecer una correlación entre dos cantidades de magnitud. Dadas dos magnitudes M_1 y M_2 y dos series de cantidades de magnitud $A=\{a_i \in M_1, i=1,2,...,n\}$ y $B=\{b_i \in M_2, i=1,2,...,n\}$ con $A \subseteq M_1 \; y \; B \subseteq M_2$, que cumplen con la condición que para todo $a_i \in A$ existe un único $b_i \in B$ tal que $\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\cdots=\frac{b_n}{a_n}=\rho$ entonces existe una función F tal que:

$$\begin{aligned} F &: A \rightarrow B \\ a_i &\rightarrow F(a_i)=\rho \times a_i = b_i \end{aligned}$$

de donde se tiene que para todo $a_i \in A$ y $b_i \in B$, $\rho=\frac{b_i}{a_i}$.

La razón ρ es un transformador lineal que aplicado sobre cantidades de magnitud de *A*, produce cantidades de magnitud correspondientes en *B*. Al igual que en la razón como relator o como operador las series de cantidades de magnitud *A* y *B*, pueden ser homogéneas o no. En caso de ser homogéneas ρ será un número real, mientras que si son heterogéneas será una cantidad con unidades.

2.4.2.1.2 La estructura formal de las transformaciones lineales $\left(\Theta_{TL}\right)$

Esta teoría incluye:

2.4.2.1.2.1 Propiedades de la función lineal $\left(\Theta_{TL}^{1}\right)$:

Sea f una función de un conjunto A en sí mismo

i. Homogeneidad con respecto a la suma: $f(x+y)=f(x)+f(y)$

ii. Homogeneidad con respecto a la multiplicación por un escalar: $f(\lambda\cdot x)=\lambda\cdot f(x)$

iii. $\forall x\in A, \dfrac{f(x)}{x}=\alpha$

2.4.2.1.2.2 Sistemas lineales directos $\left(\Theta_{TL}^{2}\right)$:

Dadas M_1 y M_2 dos magnitudes relacionadas en un sistema lineal, m_1 una cantidad de magnitud de M_1 y m_2 una cantidad de magnitud de M_2 se cumple que:

Cuando la cantidad de magnitud m_1 aumenta al doble, al triple, ..., la cantidad de magnitud m_2 aumenta al doble, al triple, ...

Cuando la cantidad m_1 disminuye a la mitad, a la tercera parte, ..., la cantidad m_2 disminuye a la mitad, a la tercera parte, ...

2.4.2.1.2.3 Sistemas lineales inversos $\left(\Theta_{TL}^{2}\right)$:

Dadas M_1 y M_2 dos magnitudes relacionadas en un sistema lineal, m_1 una cantidad de magnitud de M_1 y m_2 una cantidad de magnitud de M_2 se cumple que:

- ✓ Cuando la cantidad de magnitud m_1 aumenta al doble, al triple, ..., la cantidad de magnitud m_2 disminuye a la mitad, a la tercera parte, ...
- ✓ Cuando la cantidad m_1 disminuye a la mitad, a la tercera parte, ..., la cantidad m_2 aumenta al doble, al triple, ...

2.4.2.1.3 La visualización $\left(\Theta_{VZ}\right)$

Teniendo en cuenta que algunos problemas se relacionan con hacer representaciones de la correlación entre las magnitudes involucradas en los tipos de situaciones, se hace necesario definir un sustento teórico para las diferentes formas de hacer tal representación. Para tal fin se ha acudido a la visualización, entendida como el proceso de realización e interpretación de gráficas.

2.4.2.2 Tipos de situaciones:

2.4.2.2.1 Proporcionalidad simple directa (*psd*):

La aparición de la razón en sus diferentes facetas se evidencia en la solución de diversas situaciones, por ejemplo en algunas situaciones es posible encontrarse con dos magnitudes y sus respectivas series de cantidades de magnitud que se correlacionan linealmente, es decir, situaciones referidas a la proporcionalidad simple directa, las cuales son un caso particular de un isomorfismo de medidas.

Este tipo de proporcionalidad implica el proceso de covariación entre dos series y por lo tanto se debe establecer la relación funcional entre ambas, puede ser modelado así:

Dadas dos magnitudes M_1 y M_2 para las cuales se ha definido la siguiente relación funcional:

$$\begin{array}{ccc} M_1 & & M_2 \\ m_1 & \to & f(m_1) \\ m_1^{'} & \to & f(m_1^{'}) \end{array}$$

Cuando se trata de situaciones que se modelan a partir de este tipo de proporcionalidad es posible acudir a una función de la forma:

$$\begin{aligned} f: M_1 &\to M_2 \\ m_1 &\to f(m_1) = k \cdot m_1 = m_2 \end{aligned}$$

donde k es la llamada constante de proporcionalidad y f es una función lineal que representa tal proporcionalidad.

2.4.2.2.2 Proporcionalidad simple inversa (*psi*):

Existen situaciones, en las que es necesario comparar tres magnitudes a través de una correlación bilineal, es decir, son situaciones que se modelan a través de una función de dos variables, en la cual, una de las magnitudes posee una relación de dependencia con respecto a las otras dos magnitudes y además se cumple que la variación de dicha magnitud con respecto a cada una de las variables que la determinan es lineal. Para el caso de la proporcionalidad simple inversa, la correlación bilineal se reduce a una relación funcional entre dos variables, gracias a que el valor de la función $f(x,y)$ se hace constante. Formalmente hablando, la proporcionalidad simple inversa aparece cuando en la función $z = f(x,y) = k \cdot x \cdot y$ la variable z toma un valor constante y la función f expresa una proporcionalidad inversa para cada valor constante de z.

En esta función se debe cumplir que, al hacer variar los valores de una de las magnitudes $(x \text{ o } y)$, la otra magnitud debe variar de manera que el producto entre las dos permanezca constante, además hay que tener en cuenta que en este tipo de situaciones no es suficiente establecer la relación cualitativa de que si una aumenta la otra disminuye. Un ejemplo de proporcionalidad simple inversa se tiene en la siguiente situación:

Dado un rectángulo de área $24\ cm^2$ (z) complete la siguiente tabla:

Largo (x)	1	2	3	4	6	8	12	24
Ancho (y)	24					3		

Se observa que los valores del ancho (y) deben ser tales que al multiplicarlos por el valor correspondiente en el largo (x) el resultado sea el área (z).

2.4.2.2.3 Relaciones parte - todo (pt)

Estas relaciones pueden ser de un único estado o de estado inicial - estado final. En el primer caso, se tienen dos cantidades de magnitud de una misma magnitud que se comparan (por cociente) entre sí para establecer la medida relativa de una con respecto a la otra. Esta medida se puede expresar a través de un número racional. En el segundo caso una magnitud se transforma bien sea a través de una ampliación o de una reducción, pasando de un estado inicial a un estado final. La comparación (por cociente) de las respectivas cantidades de magnitud del estado inicial al estado final se puede expresar a través de un número racional, el cual expresa el factor de ampliación o de reducción.

2.4.2.2.4 Repartos proporcionales (rp)

Son aquellas situaciones en las que se trabaja con una serie de cantidades de magnitud que se comparan entre sí para determinar su comportamiento ya sea con respecto a otra serie de cantidades de magnitud o de una serie de números. Una forma de modelar estas situaciones es: Sean M_1 una magnitud, $A=\{a_i \in M_1, i:1,2,3,...,n\}$ una serie de cantidades de magnitud de M_1 con $A \subseteq M_1$ tales que guarden la misma proporción que una serie de cantidades de magnitud $B=\{b_i \in M_2, i:1,2,3,...,n\}$ de M_2 con $B \subseteq M_2$, entonces

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}.$$

Esta expresión nos muestra, por un lado, que no es suficiente con reconocer las series de razones que se deben comparar, sino también reconocer que esa serie de razones son iguales entre sí, pero sobre todo que existe una relación aditiva entre ellas, esto es, la razón de la suma de todas las cantidades de magnitud M_1 a la suma de todas las cantidades de magnitud M_2 es igual a las razones de dicha serie.

Un ejemplo de reparto proporcional lo constituye la siguiente situación.

En una empresa un trabajo deberá ser efectuado por cuatro empleados en 16 horas y los 24.000.000 de pesos, obtenidos como ganancia del mismo, serán repartidos proporcionalmente al tiempo empleado para realizarlo. Si Juan trabajó 6 horas, Pablo 3, Andrés 2 y Luis 5 ¿Cuánto dinero debe recibir cada uno?

En este caso se deben buscar las cantidades de magnitud $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que:

$$\frac{a_1}{6\ horas} = \frac{a_2}{3\ horas} = \frac{a_3}{2\ horas} = \frac{a_4}{5\ horas} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{(6+3+2+5)\ horas} = \frac{24.000.000\ de\ pesos}{16\ horas}$$

De donde $a_1 = \$9.000.000$; $a_2 = \$4.500.000$; $a_3 = \$3.000.000$ y $a_4 = \$7.500.000$

Claramente se observa que se cumplen todas las condiciones enunciadas anteriormente.

2.4.2.2.5 Porcentajes (pc)

En cuanto a las situaciones de porcentaje, las cuales pueden ser interpretadas en términos de relaciones parte - todo, por un lado y, por otro como un caso particular de medida, se tiene que:

Dada una magnitud M y una serie de cantidades de magnitud $A = \{a_i \in M_1, i = 1,2,\ldots,n\}$ con $A \subseteq M$ y un valor $\mu \in A$ se define una función $\delta_\mu : A \to [0, b]$, donde b por lo general es 100, el intervalo es de números reales, $\delta(\mu) = 100$, y a cada $a_i \in A$ se le asigna un número, que guarda con el 100 la misma relación parte - todo que a_i con respecto a μ. Esto es, $\delta(a_i) = k$ es tal que $\frac{a_i}{\mu} = \frac{k}{100}$.

Un ejemplo.

El costo original de un artículo es \$32.000 pero tiene un 25% de descuento. ¿Cuál es el valor en pesos del descuento?

En este caso particular $\mu = \$32.000$ y $k = 25$; luego el valor de a_i es aquel que satisface $\frac{a_i}{\$32.000} = \frac{25}{100}$, es decir que, $a_i = \frac{25}{100} \times \$32.000 = \$8.000$.

La solución de este problema muestra que existe una función f tal que $f(\$32.000) = \frac{25}{100} \times \$32.000$, es decir, que se está en presencia de una proporcionalidad simple directa, por tanto, es posible concluir que se puede definir una proporcionalidad directa entre una serie de cantidades de magnitud, y una serie de números, entre 0 y 100, utilizando una correspondencia entre los porcentajes y una sucesión de valores a_i, tales que este a_i guarda con a_{100} la misma relación parte - todo que i con 100 de la siguiente manera:

Porcentaje		Parte
1	$\longrightarrow$	a_1
2	$\longrightarrow$	a_2
3	$\longrightarrow$	a_3
25	$\longrightarrow$	a_{25}
100	$\longrightarrow$	a_{100}

Por otra parte, al considerar la expresión $m_1 = \frac{25}{100} \times \$32.000$ y aplicando la propiedad conmutativa de la composición de operadores y de la multiplicación se tendría $m_1 = \frac{\$32.000}{100} \times 25$. La razón $m_1 = \frac{\$32.000}{100}$ (que sería la constante de proporcionalidad) estaría determinando el 1% de \$32.000, es decir, \$320 y al multiplicarlo por 25 se estaría calculando el 25%.

Véase explícitamente cómo el porcentaje se puede interpretar como una relación parte - todo. En el ejemplo anterior, el operador fraccionario $\frac{25}{100}$, al ser simplificado se transforma en el operador $\frac{1}{4}$, esto es, el 25% correspondería a la cuarta parte del todo.

Vale la pena resaltar que 25% puede ser notado de diferentes formas, a saber: como fracción $\left(\frac{1}{4}\right)$ o como decimal (0,25).

2.4.2.2.6 Representación (sr)

Las situaciones de representación están referidas a expresar de manera gráfica o tabular las relaciones entre cantidades de magnitud.

2.4.2.3 Tecnologías

A continuación se presentan y codifican las tecnologías, las cuales se han designado de esta manera puesto que son los argumentos teóricos que desde el punto de vista matemático, sustentan las diferentes técnicas empleadas para la resolución de los problemas propuestos. Estas tecnologías inicialmente aparecen en los estudiantes en un nivel intuitivo como conceptos y teoremas en acto, en el sentido de Vergnaud (1983), y más adelante deberán ser formalizados e institucionalizados en el proceso de enseñanza.

Para la codificación de las tecnologías se han utilizado subíndices de dos letras los cuales corresponden a las iniciales del nombre de la tecnología.

2.4.2.3.1 Análisis escalar (θ_{ae})

Tiene que ver con el hecho de poner en relación las variaciones de una de las magnitudes con respecto a las variaciones en la otra (o cuando se analizan las relaciones entre la cantidades de la misma magnitud). El análisis escalar se basa en las dos primeras propiedades de la función lineal, lo cual permite la realización de procedimientos de gran utilidad en el tratamiento de las situaciones, ya que centran su estudio en los procesos de variación, esto es, en determinar cómo varían las cantidades de magnitud de una misma magnitud para luego trasladar dicha variación a las correspondientes cantidades de magnitud de la otra magnitud. El análisis escalar implica reconocer que si $y=(x_1+x_2)$ y si $y=\lambda\cdot x$ entonces $f(y)=f(x_1)+f(x_2)$ y $f(y)=\lambda\cdot f(x)$, respectivamente.

En este caso λ es un número racional sin unidades, denominado factor escalar, el cual resulta del cociente entre cualesquiera dos cantidades de magnitud de una misma magnitud y puede ser interpretado como una razón.

2.4.2.3.2 Análisis funcional $\left(\theta_{af}\right)$

Se debe reconocer que para cualquier par de valores $x, f(x)$ se tiene que $f(x) = \lambda \cdot x$, donde λ es un número racional con unidades, llamado constante de proporcionalidad. En este caso se pretende establecer una relación funcional entre las cantidades de magnitud de una magnitud y su correspondiente valor en la otra magnitud.

2.4.2.3.3 Las proporciones $\left(\theta_{pr}\right)$

Generalmente se establece que la razón entre dos cantidades de magnitud es igual a la razón entre otras dos cantidades de magnitud, o más específicamente, se plantea una relación entre relaciones, dicha relación es una relación de equivalencia y ya no corresponde a una razón sino a una proporción. Formalmente se dirá dadas M_1 y M_2 dos magnitudes relacionadas en un sistema lineal, m_1 y m'_1 dos cantidades de magnitud de M_1 y m_2 y m'_2 las correspondientes cantidades de magnitud de M_2. Para estas cuatro cantidades de magnitud se verifica la siguiente igualdad: $\frac{m_1}{m'_1} = \frac{m_2}{m'_2}$

2.4.2.3.4 Formas de representación $\left(\theta_{fr}\right)$

Sean M_1, M_2 dos magnitudes, $A = \{a_i \in M_1, i : 1, 2, 3, ..., n\}$ una serie de cantidades de magnitud de M_1 con $A \subseteq M_1$ y $B = \{b_i \in M_2, i : 1, 2, 3, ..., n\}$ serie de cantidades de magnitud de M_2 con $B \subseteq M_2$. La forma como se correlacionan las series de cantidades A y B puede hacerse a través de una representación tabular o gráfica.

2.4.2.4 Tipos de situaciones, problemas y sus técnicas asociadas

En esta sección se presentan los problemas, entendidos como las actividades que hay que desarrollar en cada una de las situaciones, dichos problemas se han codificado así: los subíndices de los problemas obedecen al tipo de situación con la que está relacionada, esto es:

psd: proporcionalidad simple directa.

psi: proprocionalidad simple inversa.

rp: repartos proporcionales.

pc: porcentajes.

pt: relación parte - todo.

sr: representación

En el caso de los problemas de porcentaje, de los cuales hay más de uno, se ha utilizado además de la abreviatura *pc* un número que va de *1* a *5*. (Por ejemplo *pc1*) y en el de los problemas de proporcionalidad simple directa y de proporcionalidad simple inversa, que acuden a técnicas similares se han organizado en un solo grupo que se identificará con el subíndice *pdi*.

A continuación de cada problema se han escrito la o las técnicas asociadas a él. Las técnicas hacen referencia a los posibles procedimientos que pueden emplearse para resolver los problemas relacionados. Para la codificación de las técnicas se ha utilizado un subíndice, correspondiente al subíndice del problema asociado y un superíndice numérico para indicar la existencia de distintas técnicas ligadas a tal problema.

- π_{sr}: Sean M_1, M_2 dos magnitudes, $A=\{a_i \in M_1, i:1,2,3,...,n\}$ una serie de cantidades de magnitud de M_1 con $A \subseteq M_1$ y $B=\{b_i \in M_2, i:1,2,3,..., n\}$ una serie de cantidades de magnitud de M_2 con $B \subseteq M_2$. Representar la correlación entre las dos series de cantidades.

τ_{sr}^1: Expresar mediante una representación tabular la forma como se correlacionan las series de cantidades A y B.

τ_{sr}^2: Expresar mediante una gráfica cartesiana la forma como se correlacionan las series de cantidades A y B.

τ_{sr}^{3}: Expresar mediante una gráfica estadística la forma como se correlacionan las series de cantidades A y B.

τ_{sr}^{4}: Expresar mediante una representación icónica la forma como se correlacionan las series de cantidades A y B.

- π_{pdi}: Sean M_1 y M_2 dos magnitudes, $m_1, m_1^{'}$ dos cantidades de M_1 y $m_2, m_2^{'}$ dos cantidades de M_2. Conociendo la cantidad de magnitud m_2 asociada con la cantidad de magnitud m_1 encontrar la cantidad $m_2^{'}$ asociada con una cantidad dada $m_1^{'}$.

τ_{pdi}^{1}: Realizar las siguientes operaciones

✓ Dividir la cantidad de magnitud m_1 entre la cantidad de magnitud m_2 (o viceversa).

✓ Multiplicar o dividir la cantidad de magnitud $m_1^{'}$ por la cantidad $\frac{m_1}{m_2}$ (o $\frac{m_2}{m_1}$).

τ_{pdi}^{2}: Determinar cuántas veces aumenta (o disminuye) la cantidad de magnitud, $m_1^{'}$ con respecto a la cantidad de magnitud m_1 y aplicar este mismo aumento (o diminución) a la cantidad de magnitud m_2 para hallar $m_2^{'}$.

τ_{pdi}^{3}: Sean M_1 y M_2 dos magnitudes y $A=\{a_i \in M_1, i:1,2,3,...,n\}$ una serie de cantidades de magnitud con $A \subseteq M_1$ determinar el valor de una cantidad m_2 como una suma de las cantidades de magnitud de M_2 correspondientes a cada $a_i \in A$.

τ_{pdi}^{4}: Determinar el valor de una de las cantidades de magnitud a partir de la representación (tabular, cartesiana, estadística o icónica) realizada.

- π_{rp}: Sean M_1 una magnitud, $A=\{a_i \in M_1, i:1,2,3,...,n\}$ una serie de cantidades de magnitud de M_1 con $A \subseteq M_1$ tales que guarden la misma proporción que una serie de cantidades de magnitud $B=\{b_i \in M_2, i:1,2,3,...,n\}$ de M_2 con $B \subseteq M_2$. Conociendo la serie de cantidades de magnitud B y la suma de todas las cantidades de magnitud de la serie A. Determinar cada uno de los valores de la serie A.

τ_{rp}^{1}: Realizar las siguientes operaciones.

- ✓ Dividir la suma de las cantidades de magnitud de la serie A entre la suma de las cantidades de magnitud de la serie B.
- ✓ Multiplicar (o dividir) el cociente obtenido anteriormente por cada cantidad de magnitud de B para encontrar la cantidad de magnitud correspondiente en A.

τ_{rp}^{2}: Realizar los siguientes procedimientos:

- ✓ Plantear la proporción $\dfrac{a_i}{b_i}=\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}$ $(i:1,2,3,...,n)$
- ✓ Calcular el respectivo a_i.

τ_{rp}^{3}: Realizar los dos procedimientos siguientes:

- ✓ Determinar que parte es b_i con respecto a la suma de todas las cantidades de magnitud b_i.
- ✓ Aplicar la parte obtenida a la suma de todos los a_i para determinar el a_i correspondiente.

- π_{pc1}: Dada una magnitud M y una serie de cantidades de magnitud $A=\{a_i \in M_1, i=1,2,...,n\}$ con $A\subseteq M$ y un valor $\mu \in A$. Calcular un valor a_i de A conociendo el porcentaje k teniendo en cuenta que este k guarda con 100 la misma relación parte - todo que a_i con μ.

τ_{pc1}^{1}: Multiplicar μ por k y dividir el resultado entre 100.

τ_{pc1}^{2}: Para encontrar el a_i es posible acudir a las dos operaciones siguientes:

- ✓ Dividir μ entre 100.
- ✓ Multiplicar el cociente obtenido por k.

τ_{pc1}^{3}: Determinar que parte es k con respecto a 100 y aplicar esta misma relación a μ.

- π_{pc2}: Dada una magnitud M y una serie de cantidades de magnitud $A=\{a_i \in M_1, i=1,2,...,n\}$ con $A\subseteq M$ y un valor $\mu \in A$. Calcular el porcentaje k que guarda con 100 la misma relación parte - todo que con μ, conociendo el valor a_i de A.

τ_{pc2}^{1}: Dividir a_i entre μ.

τ_{pc2}^{2}: Acudir a los siguientes procedimientos.

- ✓ Expresar la proporción $\frac{a_i}{\mu} = \frac{k}{100}$.
- ✓ Determinar el valor de k despejando en la proporción.

En esencia τ_{pc2}^{1} y τ_{pc2}^{2} acuden a las mismas tecnologías pero τ_{pc2}^{1} es una estrategia que se ha generalizado y aprendido de memoria sin reflexionar sobre lo que ahí se está haciendo o por qué se hace de esa manera.

τ_{pc2}^{3}: Realizar los siguientes procedimientos.

- ✓ Dividir μ entre 100.
- ✓ Buscar un número que multiplicado por el a_i de cómo resultado el cociente obtenido.

- π_{pc3}: Dada una magnitud M y una serie de cantidades de magnitud $A = \{a_i \in M_1, i = 1,2,...,n\}$ con $A \subseteq M$ y un valor $\mu \in A$. Calcular el valor de n veces a_i de A conociendo el porcentaje k, teniendo en cuenta que este k guarda con 100 la misma relación parte - todo que a_i con μ.

τ_{pc3}^{1}: Aplicar los siguientes dos procesos:

- ✓ Calcular n veces a_i.
- ✓ Determinar el porcentaje para el producto obtenido mediante cualquiera de las técnicas anteriormente expuestas.

τ_{pc3}^{2}: Realizar los siguientes procedimientos:

- ✓ Calcular el porcentaje k para a_i mediante cualquiera de las técnicas expuestas anteriormente.
- ✓ Multiplicar por n el producto obtenido.

- π_{pc4}: Dada una magnitud M y una serie de cantidades de magnitud $A = \{a_i \in M_1, i = 1,2,...,n\}$ con $A \subseteq M$ y un valor $\mu \in A$. Calcular el valor de la suma de n_1 veces una cantidad a_1, n_2 veces una cantidad a_2, …, n_m veces una cantidad a_m

conociendo el porcentaje k ,que se aplica para todas las cantidades y teniendo en cuenta que este k guarda con 100 la misma relación parte - todo que a_i con μ .

τ^1_{pc4}: Proceder como sigue:

- ✓ Calcular n_1 veces a_1, n_2 veces a_2 ,…, n_m veces a_m .
- ✓ Sumar los productos obtenidos.
- ✓ Determinar el porcentaje k para la suma obtenida.

τ^2_{pc4}: Aplicar los siguientes procesos.

- ✓ Calcular el porcentaje k para $a_1, a_2, \ldots, a_m$.
- ✓ Multiplicar cada porcentaje obtenido por n_1, n_2,…, n_m respectivamente.
- ✓ Sumar los productos obtenidos.

- π_{pc5}: Dada una magnitud M y una serie de cantidades de magnitud $A = \{a_i \in M_1, i = 1,2,...,n\}$ con $A \subseteq M$ y un valor $\mu \in A$. Calcular el valor de la suma de n_1 veces una cantidad a_1, n_2 veces una cantidad a_2, …, n_m veces una cantidad a_m conociendo los porcentajes $k_1, k_2, ..., k_m$,que se aplican respectivamente a cada una de las cantidades y teniendo en cuenta que estos k_j $(j = 1,2,...,n)$ guarda con 100 la misma relación parte - todo que a_i con μ .

τ^1_{pc5}: Acudir a los tres procedimientos siguientes:

- ✓ Calcular n_1 veces a_1, n_2 veces a_2 ,…, n_m veces a_m .
- ✓ Determinar el porcentaje k_1 para el producto $n_1 \times a_1$, el porcentaje k_2 para el producto $n_2 \times a_2$,…, el porcentaje k_m para el producto $n_m \times a_m$.
- ✓ Sumar los porcentajes calculados.

τ^2_{pc5}: Aplicar los siguientes procesos.

- ✓ Determinar el porcentaje k_1 para a_1, el porcentaje k_2 para a_2,…, el porcentaje k_m para a_m .
- ✓ Calcular n_1 veces a_1, n_2 veces a_2 ,…, n_m veces a_m .
- ✓ Sumar los productos obtenidos.

2.4.2.5 Cuadro resumen

SITUACION	PROBLEMA	TÉCNICA	TÉCNOLOGIA	TEORIA
sr	π_{sr}	τ^1_{sr}	θ_{fr}	Θ_{VZ}
		τ^2_{sr}		
		τ^3_{sr}		
		τ^4_{sr}		
psd, psi	π_{pdi}	τ^1_{pdi}	θ_{ae}	Θ_{VZ}, Θ_{TL}, Θ_{RR}
		τ^2_{pdi}	θ_{ae}	
		τ^3_{pdi}	θ_{ae}	
		τ^4_{pdi}	θ_{fr}	
rp	π_{rp}	τ^1_{rp}	θ_{ae}	Θ_{TL}, Θ_{RR}
		τ^2_{rp}	θ_{pr}	
		τ^3_{rp}	θ_{ae}	
pc	π_{pc4}	τ^1_{pc4}	θ_{ae}	Θ_{TL}, Θ_{RR}
		τ^2_{pc4}	θ_{ae}	

SITUACIÓN	PROBLEMA	TÉCNICA	TÉCNOLOGIA	TEORÍA
pc	π_{pc1}	τ^1_{pc1}	θ_{af}	Θ_{TL}, Θ_{RR}
		τ^2_{pc1}	θ_{af}	
		τ^3_{pc1}	θ_{ae}	
pc	π_{pc2}	τ^1_{pc2}	θ_{af}	Θ_{TL}, Θ_{RR}
		τ^2_{pc2}	θ_{pr}	
		τ^3_{pc2}	θ_{pr}	
pc	π_{pc3}	τ^1_{pc3}	θ_{ae}	Θ_{TL}, Θ_{RR}
		τ^2_{pc3}	θ_{ae}	
pc	π_{pc5}	τ^1_{pc5}	θ_{ae}	Θ_{TL}, Θ_{RR}
		τ^2_{pc5}	θ_{ae}	

Tabla 4. Organización matemática de la razón, la proporción y la proporcionalidad

2.4.3 **Acerca de las representaciones gráficas.**

Se ha observado que los tipos de situaciones expuestas anteriormente han sido representados mayoritariamente mediante expresiones algebraicas, pero estas no son la única forma de representar lo que los diferentes tipos de situaciones expresan. Por ejemplo, se podría recurrir a gráficas estadísticas (principalmente diagramas de barras), a representaciones icónicas o a gráficas cartesianas. J. García (2005) citando a Schnotz y Bannert las denomina representaciones pictóricas, las cuales presentan propiedades determinadas que están relacionadas con el fenómeno representado y que tienen características comunes con él, por tal razón son útiles para determinar las relaciones entre los elementos que forman parte de la realidad representada.
Para J. García (2005) las gráficas pueden definirse como representaciones simbólicas, que ofrecen una representación visible de conceptos e ideas abstractas más que como representaciones icónicas de los fenómenos pertenecientes al campo factual. En el proceso de construcción de gráficas se superponen iconos, símbolo y figuras con el fin de representar de la mejor manera diferentes tipos de interacciones y de relaciones ya sean estas de equivalencia, de proporcionalidad o de igualdad.

En la construcción de las gráficas, sobre todo las cartesianas, es necesaria la determinación de la escala que se va a utilizar[40] para localizar las mediciones realizadas, la determinación de las unidades en la cuales se van a expresar los datos dentro de la gráfica y, la ubicación de los pares ordenados de datos dentro del espacio gráfico (J. García, 2005). Así mismo será necesario determinar si los puntos dentro del espacio gráfico se hacen en un trazo continuo o se dejan como una nube de puntos. Esto tiene que ver con la naturaleza de las magnitudes involucradas, es decir, si éstas son continuas o discretas, respectivamente.

En cuanto a la interpretación de las gráficas Bestgen citado por J García (2005) afirma que para poder interpretar adecuadamente las representaciones gráficas los estudiantes no solo necesitan leerlas sino también utilizarlas, hacer comparaciones, predicciones y buscar tendencias y patrones sobre esos datos y entre ellos, aunque esto no ocurre usualmente dentro del aula de clase.

[40] El manejo de dicha escala tiene implícita una estrecha relación con la proporcionalidad.

En algunas de las investigaciones mencionadas se determina mayor inclinación de los estudiantes hacia la realización de operaciones que hacia la visualización[41] y análisis de gráficas, o en otras palabras, que los estudiantes prefieren desarrollar algoritmos antes que desplegar su pensamiento visual.

Por otra parte los autores plantean que la graficación incluye la construcción y la interpretación y plantean, desde Leinhardt, Zaslavsky y Stein, que:

> La interpretación se refiere a las habilidades de los estudiantes para leer una gráfica tanto local como globalmente, y darle sentido o significado. En contraste la construcción atañe al acto de generar algo nuevo, construyendo una gráfica o trazando unos puntos a partir de datos con una regla funcional o a partir de una tabla. (p. 75)

En cuanto a las gráficas cartesianas, las más usadas en la enseñanza de las matemáticas y en los libros de texto los autores las definen así:

> Una gráfica cartesiana se define en los textos como una representación entre dos o tres variables, y se considera como herramienta visual útil porque posibilita la detección de tendencias, facilita las comparaciones y se constituye en un medio idóneo para analizar el comportamiento de fenómenos de variación. (p. 76).

Como se mencionó en una sección precedente las gráficas son una forma de registro de marcas que corresponden a objetos ostensivos. Es más, las gráficas cartesianas son un ostensivo muy usado por los matemáticos y por los profesores de matemáticas. En el caso de la proporcionalidad, se dice que dos magnitudes son directamente proporcionales si la gráfica cartesiana que representa la correspondencia entre cantidades de magnitud de cada magnitud es una línea recta que pasa por el origen (para magnitudes continuas) o una nube de puntos que podrían ser unidos a través de una línea recta (para magnitudes discretas) y que son inversamente proporcionales si la gráfica cartesiana que representa la correspondencia entre cantidades de magnitud es una hipérbola. En este sentido la construcción e interpretación de gráficas cartesianas y estadísticas y de representaciones tabulares brinda elementos para determinar la forma como se relacionan dos magnitudes.

[41] En la actualidad se denomina visualización al proceso de representación gráfica de situaciones, ya sea de la vida cotidiana o de las ciencias.

3 Capítulo 3. Metodología de la Investigación

3.1 Una investigación de intervención.

En el recorrido, de más de diez años, como profesor de Básica y Media, pero sobre todo a través de las experiencias de enseñanza con los grados sexto y séptimo, el autor del presente documento ha observado la forma como se enseñan y él mismo ha enseñado las razones, las proporciones y la proporcionalidad y ha podido determinar que uno de los objetivos fundamentales de enseñar esta unidad temática es resolver algunos problemas típicos a través de la regla de tres, principalmente la simple directa, lo cual se convierte en la mecanización y repetición de un algoritmo.

Sin embargo, en una de las instituciones en las que el autor laboró, donde se trabaja una propuesta de enseñanza de las matemáticas fundamentada en los postulados del constructivismo genético, se encontraron dos actividades que apuntaban al desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes y se observó que estas actividades aportaban significativamente en el trabajo con las razones, las proporciones y la proporcionalidad. A partir de esta experiencia se decidió implementar dichas actividades de manera sistemática en el desarrollo del capítulo razones y proporciones del plan de estudios en el área de matemáticas. El desarrollo de este trabajo llevó a descubrir la necesidad de realizar una investigación desde la propia práctica profesional, puesto que se tenía una cierta información del trabajo de los alumnos, se había reflexionado sobre sus respuestas, sobre sus gestos, sobre el interés demostrado, entre otras cosas, es decir, en palabras de Ponte, Oliveira, Brunheira, Varandas y Ferreira (1998), se estaba en un proceso de construcción de conocimiento profesional, el cual se basa sobre todo en la experiencia, no sólo individual sino de todo un cuerpo profesional.

En tal sentido, el interés se centra en realizar una investigación desde, y en la práctica. Esto es, que en lugar de esperar soluciones provenientes del exterior, se pretende empezar con la investigación de los problemas a los que se enfrenta el maestro, con una lógica de intervenir y transformar, sabiendo de antemano a dónde se pretende llegar. Para Ponte (1998) la característica definitoria de esta forma particular de investigación se refiere justo al hecho de que el investigador tiene una relación muy particular con el objeto de estudio. Él no estudia un objeto, sino un cierto aspecto de su práctica profesional. De este modo se empieza a hablar menos del profesor como investigador y cada vez más de la investigación sobre la propia práctica. Según Ponte (2008) los artículos sobre investigación, ponen de manifiesto que realizar investigación sobre la propia práctica es una actividad que puede despertar gran interés en los respectivos actores y que es susceptible de proporcionar implicaciones significativas para su práctica profesional.

Cochran – Smith (2003) resume así esta perspectiva:

> Asumir una investigación como forma de ser profesional significa que los profesores y futuros profesores trabajan en comunidades de investigación para generar conocimiento local, dar perspectiva y teorizar su práctica, interpretar e interrogar una teoría y la investigación de los demás. Fundamental en esta noción es la idea de que el trabajo en comunidades de investigación es social y político, es decir, implica problematizar las actuales formas de organización de la escuela; las formas como se construye el conocimiento, evalúa y usa, y los papeles individuales y colectivos de los profesores para promover un cambio. (p. 8)

Ahora bien, como se dijo anteriormente la investigación parte de los problemas que afronta el maestro en el aula de clase, pero no como un observador pasivo que sólo se dedica a registrar lo que está pasando, sino que además interviene y transforma. Dicha intervención se refiere a que el maestro no puede únicamente quedarse en describir los errores y dificultades que tienen los estudiantes al trabajar con los objetos de conocimiento matemático, por el contrario, y ya que en su rol de maestro está obligado a enseñar y a corregir a sus estudiantes, debe buscar y proporcionar estrategias para que a lo largo del proceso de investigación las falencias y obstáculos que se le presentan a los estudiantes vayan siendo superadas. Por otro lado, no se puede descartar la posibilidad que tiene el investigador, en su rol de maestro, de enseñar y producir nuevos y mejores aprendizajes en los estudiantes, que en esos momentos son sujetos de investigación, ya sea para aportar bases matemáticas que los alumnos no habían aprendido o que simplemente habían olvidado, o bien, para reforzar elementos considerados como necesarios para avanzar en el desarrollo de las situaciones con las que los estudiantes se enfrentarán.

Esta forma de trabajo investigativo es a lo que se denomina una investigación de intervención y es la que se adoptó en la investigación objeto del presente informe.

3.2 Caracterización de la población objetivo de la investigación.

El proyecto se desarrolló en la Institución Educativa "Los Comuneros" ubicada en la comuna 6 del municipio de Popayán; es una Institución de carácter público, calendario A, que atiende estudiantes provenientes de barrios de la misma comuna, algunos de ellos en condición de desplazamiento.

Los estudiantes se ubican mayoritariamente en los estratos socioeconómicos 1 y 2.

La institución educativa tiene un énfasis en salud y desarrolla un proyecto de acuerdos de convivencia. En tal sentido el plan de estudio contempla el aporte desde cada una de las áreas al énfasis y a los acuerdos de convivencia y ha definido en su Proyecto Educativo Institucional como modelo pedagógico la Pedagogía Dialogante[42].

El plan de estudios en el área de matemáticas ha sido construido tomando como base los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas emanados por el MEN. Como estrategia metodológica se tiene la solución y formulación de problemas y se trabaja el proyecto del juego de ajedrez.

3.3 Procedimiento de recolección de datos.

3.3.1 El método

El método empleado para el análisis de las estrategias desplegadas por un grupo de estudiantes de grado séptimo en la solución de un conjunto de cinco situaciones integra:

- ✓ Un análisis previo de situaciones, tomando como modelo el esquema presentado en (Obando, Vanegas, & Vásquez, 2006; Posada, 2006), que consistió en anticipar cuáles serían las posibles respuestas de los estudiantes y cómo resolvería las situaciones un experto. En este análisis, se identificó si los estudiantes recurrían a análisis escalares o a análisis funcionales y se determinó cuál era el rol jugado por la razón en las diversas

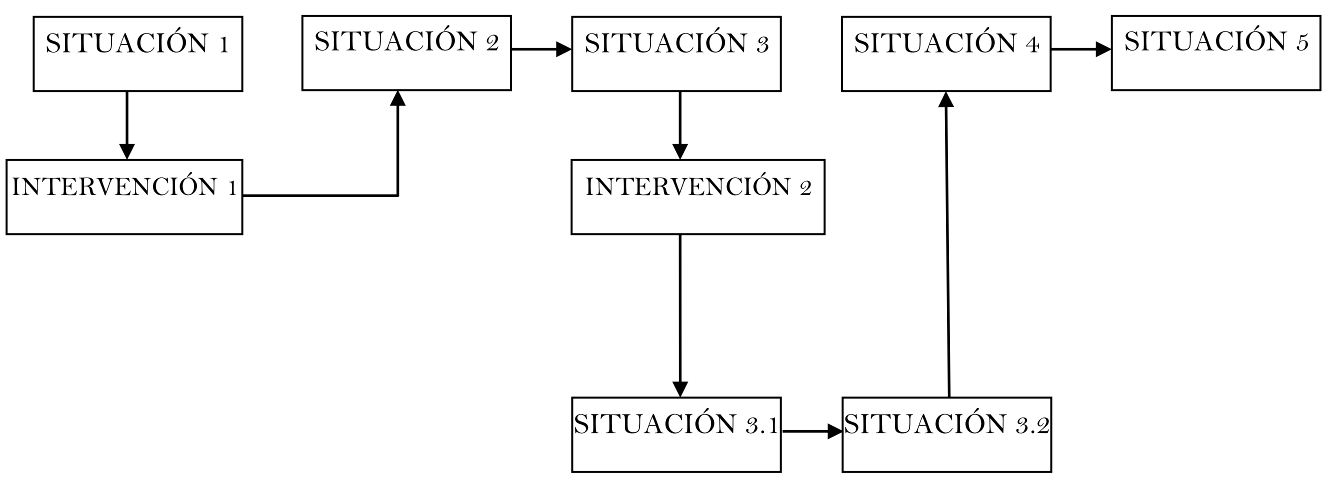
[42] La pedagogía dialogante es un modelo pedagógico, propuesto por Julián de Zubiria, que propende por el desarrollo cognitivo, valorativo y praxiológico

posibles soluciones, es decir, si la razón obraba como relator, como operador o como correlator entre cantidades de magnitud (Obando, et al., 2009), las cuales son consideradas como una parte del bloque teórico que soporta la técnicas empleadas para resolver los problemas de los distintos tipos de situaciones.

- ✓ El análisis de las soluciones dadas por los estudiantes a cada una de las situaciones: Teniendo en cuenta que antes de aplicar la siguiente situación se debe analizar la anterior.
- ✓ La determinación de la pertinencia o no de realizar una intervención por parte del investigador.
- ✓ El diseño de subsituaciones que permitan determinar los alcances y deficiencias de las intervenciones.

Hay que anotar que los análisis que se hacen tienen un carácter cualitativo y obedecen a descripciones de los procesos empleados, y aunque se cuenta el número de estudiantes que desarrollaron una u otra estrategia, este número se toma como referencia más no como un elemento básico de interpretación, es decir, no se elaboraran tablas de frecuencia con esas cantidades.

El método descrito anteriormente se esquematiza a través de lo que se ha denominado la ruta de aplicación de las situaciones diseñadas.



Gráfica 3. Ruta de aplicación de las situaciones diseñadas

En esta ruta se observa que para aplicar la Situación 2 fue necesario realizar, luego de analizar los resultados de la situación 1, una primera intervención por parte del investigador. A continuación se aplican, una después de otra, las situaciones 2 y 3, sin necesidad de realizar ninguna intervención entre ellas. Al finalizar la aplicación y análisis de la tercera situación se realiza una segunda intervención que conduce al diseño y aplicación de dos subsituaciones. Analizados los resultados de estas dos subsituaciones se procede a aplicar las dos últimas situaciones entre las cuales tampoco hubo necesidad de una intervención.

Las situaciones son entendidas en el sentido de Obando y Múnera (2003):

> Una situación problema la podemos interpretar como un contexto de participación colectiva para el aprendizaje, en el que los estudiantes, al interactuar entre ellos mismos, y con el profesor, a través del objeto de conocimiento, dinamizan su actividad matemática, generando procesos conducentes a la construcción de nuevos conocimientos. Así, ella debe permitir la acción, la exploración, la sistematización, la confrontación, el debate, la evaluación, la autoevaluación, la heteroevaluación. (p. 185)

Complementario a este planteamiento se consideran tres clases de situaciones: las que surgen de otras ciencias, las que surgen de la vida cotidiana y las de las mismas matemáticas. Las situaciones contempladas en el presente trabajo son tomadas de la vida cotidiana. Se diseñaron teniendo en cuenta que contemplaran el tipo de proporcionalidad simple directa o simple inversa. De igual forma se elaboraron preguntas que condujeran a:

- ✓ Realizar diferentes tipos de representaciones.
- ✓ Determinar cantidades de magnitud de una magnitud M_2 a partir de cantidades de magnitud de una Magnitud M_1 conocidas.
- ✓ Determinar cantidades de magnitud de una magnitud M_1 a partir de cantidades de magnitud de una Magnitud M_2 conocidas.
- ✓ También se redactaron preguntas que favorecieran la realización de procesos de generalización.

Las preguntas se organizaron en bloques de acuerdo con las cuatro tipologías anteriores.

El proyecto se desarrolla con estudiantes de grado 7 ya que tradicionalmente, como lo indican los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN, 2006), libros de texto de distintas editoriales y el Plan de Estudios en el área de matemáticas de la Institución en mención, los conceptos de razón y proporción curricularmente se encuentran ubicados en este grado. La institución se ha seleccionado por ser el sitio donde el investigador se desempeña como docente desde hace más de cuatro años. Además, de acuerdo con la secuencia cronológica en la que se desarrolla el plan de estudios en el área de matemáticas en el grado séptimo, los estudiantes aún no han desarrollado la unidad temática de razones y proporciones.

Para recolectar los datos se diseñaron cinco situaciones de variación, cambio y correlación, las cuales fueron presentadas por escrito en fotocopias a blanco y negro en hojas de tamaño carta. Tienen un marco y la letra es grande y de tipo comic sans, todas ellas contienen preguntas de reflexión sobre la actividad desarrollada y una imagen relacionada con el contenido de la situación.

Las dos primeras situaciones tienen un componente experimental y se realizan en dos momentos uno individual y otro grupal. Las siguientes situaciones así como las subsituaciones se desarrollan en forma individual, aunque por el tipo de pupitres (bipersonales) con los que cuenta la institución algunos estudiantes trabajaron en pareja. Antes de realizar las intervenciones se da una puesta en común y discusión de los procedimientos empleados por los estudiantes.

3.3.2 **Las cinco situaciones**

Las situaciones se denominaron:

Situación 1: Llenemos el envase, **Situación 2**: ¿Con cuál vaso se llena más rápido?, **Situación 3**: A comprar el arroz, **situación 4**: Repartamos el premio, **Situación 5**: Un paseo por los descuentos. (Nos referiremos a estas cinco situaciones como situaciones base)

Para el desarrollo de la **Situación 1** los estudiantes disponían de un envase transparente de gaseosa en el que se habían graduado las onzas que puede contener, tres vasos de diferente capacidad (denominados ***A***, ***B*** y ***C***, siendo ***A*** el más pequeño y ***C*** el más grande) y agua. En la actividad los estudiantes llenaron de agua primero el vaso ***A*** y fueron depositando el contenido en el envase de gaseosa a la vez que iban registrando en una tabla el número de vasos utilizados y el volumen alcanzado. Seguidamente hicieron lo mismo con los otros dos vasos. En la **Situación 2** se dispuso de un envase transparente de gaseosa con un nivel marcado hasta donde sería llenado, seis vasos uno de 3, otro de 4, de 6, de 8, de 10 y de 12 onzas y agua. En la actividad los estudiantes llenaron de agua primero el vaso de 3 onzas y fueron depositando el contenido en el envase de gaseosa hasta llegar al nivel marcado, los estudiantes iban registrando en una tabla el número de vasos necesarios para alcanzar el nivel, este procedimiento fue replicado con los otros 5 vasos. En la **Situación 3** se presentaron por escrito en una tabla tres marcas de arroz en diferentes presentaciones (contenido en Kg) y diferentes precios. La **Situación 4** presenta por escrito una situación en la cual cuatro personas aportan, cada una, diferente cantidad de dinero para comprar una boleta para la rifa de dinero en efectivo. La **situación 5** presenta por escrito una situación en la cual un almacén ofrece diferentes porcentajes de descuento en sus artículos.

La situación *Llenemos el envase* fue aplicada en primer lugar debido a que en ella se trabaja con material concreto y porque se tienen experiencias previas con estudiantes en su aplicación, aunque fue modificada radicalmente para que contribuyera al logró de los propósitos trazados y se acomodará al esquema de análisis que se va a implementar, esta experiencia está basada en una actividad que se realiza en la propuesta “Descubro la Matemática” del profesor Jorge Castaño (Castaño, 1998) . La situación *¿Con cuál vaso se llena más rápido?* se aplica en segundo lugar, ya que está estrechamente relacionada con la primera y pretende sacar a los estudiantes de la idea que todo proceso de covariación se comporta linealmente, como una proporcionalidad directa; también utiliza material concreto y ha sido llevada al aula en anteriores ocasiones. La situación *A comprar el arroz* se fundamenta en un hecho de la vida diaria, que tiene que ver con hacer las compras de un producto y escoger cuál representa mayor economía para el hogar, razón que la ubica en el tercer lugar. La actividad *Repartamos el premio* requiere procesos de pensamiento más elaborados, y por ello se ubicó de cuarta. La situación *Un paseo por los descuentos* es sobre porcentajes y tiene que ver con asistir a un supermercado en el cual se realizan descuentos.

Cada una de las situaciones obedece a un tipo de situación según la categorización realizada por (Castaño, 1998). La primera y tercera se catalogan dentro de los isomorfismos de medidas, dos magnitudes que se correlacionan linealmente, la segunda hace parte de las situaciones en las que se comparan tres magnitudes a través de una correlación lineal de proporcionalidad simple inversa, la cuarta se ubica dentro de las situaciones de reparto proporcional y la quinta está dentro de las situaciones de medida real, porcentajes.

Además de los registros escritos (incluidas operaciones, gráficas cartesianas, estadísticas, icónicas, explicaciones, argumentos, justificaciones, tablas, diagramas, etc.), que los estudiantes realizan en hojas de cuadernillo que se entregan junto con las situaciones, se pregunta a los niños por qué han hecho el procedimiento que aparece escrito o cómo llegaron a la respuesta escrita. Las repuestas verbales en las tres primeras situaciones quedaron registradas en el modo grabadora de sonidos de una cámara fotográfica, para la cuarta situación se utilizó la grabadora de sonidos de un celular. Estos instrumentos de registro de audio también se utilizaron para grabar, en palabras del investigador, los gestos y expresiones corporales de los estudiantes al desarrollar las situaciones; también se hicieron descripciones escritas de estos gestos y expresiones. De igual manera se recurrió a la utilización de fotografías y videos en las dos primeras situaciones. Este conjunto de registros permiten evidenciar las prácticas matemáticas.

3.4 Análisis de los datos

Para el caso de la situacion1 primero se revisaron los registros escritos. Estos se organizaron de acuerdo a coincidencias en cuanto a la estrategia de solución; luego se analizaron los registros de audio para determinar procedimientos que, tal vez, no hayan sido escritos o que quizá se hayan dicho de una manera y se hayan escrito de otra, por parte de los estudiantes. Luego del análisis de los datos se determinó qué elementos matemáticos ha hecho falta para que los estudiantes desplieguen su razonamiento proporcional. Estos elementos fueron organizados para ser orientados en una sesión por parte del investigador, sesión que se ha llamado intervención. En el desarrollo del proceso de intervención se determina la necesidad de aplicar una subsituación que favorezca el desarrollo de la siguiente situación de base o el paso directo a la siguiente situación base.

Este procedimiento se replica con cada una de las situaciones aplicadas.

Luego de este procedimiento se determina la presencia de los conocimientos matemáticos formales sobre razones, proporciones y proporcionalidad. Para tal fin, se determina cuál fue el rol asignado por el estudiante a la razón, esto es, si la utiliza como relator, como operador o como correlator entre cantidades, de igual manera de determinó si los estudiantes acudieron a análisis escalares o a análisis funcionales y cuáles análisis fueron en mayor medida privilegiados por las situaciones. Vale la pena aclarar que en lo referente a los roles asignados por los estudiantes a la razón y los tipos de análisis privilegiados, no se espera una formalización matemática de su parte, sino que hace mención a lo que Vergnaud (1983, 1990) ha llamado teoremas en acto o teoremas en acción.

A continuación se detallan las fases y sus respectivas actividades mediante las cuales se pretende alcanzar el objetivo general trazado.

Fase1. Situaciones de variación y cambio.

Actividades:

- ✓ Diseño de situaciones de variación y cambio.
- ✓ Análisis de las situaciones diseñadas a la luz de la teoría matemática sobre razones, proporciones y proporcionalidad.
- ✓ Aplicación de las situaciones diseñadas y analizadas a un grupo piloto de cinco (5) estudiantes para determinar pertinencia, incoherencias y ambigüedades.
- ✓ Rediseño de las situaciones teniendo en cuenta los resultados arrojados en el pilotaje.

Fase2. Sistemas de prácticas de los estudiantes.

Actividades:

- ✓ Aplicación de las situaciones a los 30 estudiantes.

- ✓ Análisis de las soluciones implementadas por los estudiantes en las situaciones propuestas.
- ✓ Determinación de las técnicas aplicadas por los estudiantes en la solución de las situaciones.
- ✓ Clasificación de los sistemas de prácticas empleados por los estudiantes.

Fase 3. Razones, proporciones y proporcionalidad.

Actividades

- ✓ Evaluación de los resultados obtenidos en la aplicación de las situaciones para determinar los conceptos matemáticos utilizados en su resolución.
- ✓ Determinación del papel jugado por la razón en la solución de cada una de las situaciones.

4 Capítulo 4. Sobre los resultados obtenidos en la investigación

En este capítulo se presenta el análisis hecho desde la mirada del experto a las situaciones base que serán aplicadas a los estudiantes y a continuación las soluciones dadas por ellos. En algunos casos, teniendo en cuenta la ruta de aplicación de las situaciones, se presentará la intervención desarrollada y las substituciones diseñadas con las respectivas soluciones dadas por los estudiantes.

La estructura del análisis previo contempla los siguientes elementos:

- ✓ Propósitos.
- ✓ Gestión de la situación.
    - Estructura de la situación.
    - Conceptos y tecnologías.
    - Técnicas.

El análisis en lo referente a los tipos de situaciones, los problemas, las tecnologías y las técnicas se hará a la luz de lo planteado en la sesión 2.4.2 dedicada a la organización matemática de las razones, las proporciones y la proporcionalidad.

4.1 Situación 1.

4.1.1 Análisis desde la mirada del experto

Situación 1: LLENEMOS EL ENVASE

En la siguiente experiencia dispondrás de un recipiente en el cual se han graduado las onzas que puede contener, de igual forma dispondrás de tres vasos (a los que llamaremos ***A, B, C***) para que los llenes de agua y los vayas depositando en el recipiente graduado y luego realices las actividades que se te proponen a continuación:

1. Completa cada una de las siguientes tablas:

Vaso ***A***

Número de vasos	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Volumen[43] (onzas)									

Vaso ***B***

Número de vasos	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Volumen (onzas)									

Vaso ***C***

Número de vasos	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Volumen (onzas)									

2. Representa gráficamente la información que registraste en cada una de las tablas anteriores.

3. Representa de manera integrada mediante un solo gráfico la información registrada en las tres tablas.

4. Utiliza la representación gráfica que obtuviste en el punto 3 para establecer comparaciones en cuanto al número de vasos y el volumen del agua.

5. Responde las siguientes preguntas (recuerda escribir las operaciones que realizas)
   a. ¿Cuál es el volumen de agua en el recipiente si depositáramos
      - 36 vasos de cada tamaño en el envase?
      - 122 vasos de cada tamaño en el envase?
      - 7,5 vasos de cada tamaño en el envase?
   b. ¿Cuántos vasos se han depositado si el volumen de agua es
      - 84 onzas?

[43] En el presente trabajo se toma el volumen como sinónimo de capacidad; aunque se tiene claro que desde la literatura especializada no lo son. Sin embargo, en la vida cotidiana las personas utilizan la palabra volumen para referirse a la capacidad.

- 210 onzas?
- 315 onzas?

c. En general, ¿cómo podemos calcular el volumen de agua para un determinado número de vasos?
d. ¿Cuántos vasos se requieren para un determinado volumen de agua?

Propósitos:

Reconocer las magnitudes presentes en la situación.

Identificar procesos de covariación entre magnitudes.

Reconocer el rol de la razón como relator, como operador o como correlator entre cantidades.

Determinar el tipo de proporcionalidad entre las magnitudes.

Gestión de la situación "Llenemos el envase"

Estructura de la situación

Para el desarrollo de esta situación los estudiantes dispondrán del siguiente material concreto: un envase de gaseosa en el que se han graduado las onzas que puede contener, tres vasos de diferente capacidad (denominados ***A***, ***B*** y ***C***, siendo ***A*** el más pequeño y ***C*** el más grande. El volumen de uno de los vasos es múltiplo del volumen del otro con el fin de identificar si el estudiante utiliza este hecho para dar respuesta a las diferentes preguntas) y agua. En la actividad se pretende que los estudiantes llenen de agua primero el vaso ***A*** y vayan depositando el contenido en el envase de gaseosa a la vez que van registrando en una tabla el número de vasos utilizados y el volumen alcanzado, seguidamente se hará lo mismo con los otros dos vasos. Aquí se espera que el estudiante observe como varía el volumen en el recipiente de acuerdo con el número de vasos, es decir ponga en correlación las dos magnitudes, a saber M_1: número de vasos y M_2: volumen del envase en onzas.

En las preguntas 2, 3 y 4 se desea incentivar el uso de diferentes tipos de representaciones, especialmente las gráficas (como son los diagramas de barras, las gráficas cartesianas, las representaciones icónicas, etc.). Los dos primeros tipos de gráficas se ven favorecidos por el registro de los datos en una tabla. No se exige un gráfico en particular para poder observar a qué gráficos recurren los estudiantes para representar el comportamiento de la situación. Además se pretende el uso de las gráficas para realizar análisis y reflexiones con respecto a la situación.

En la pregunta 5 literal (a) se pretende observar el uso de la razón como relator, como operador o como correlator entre cantidades en la obtención de la respuesta. Inicialmente se trabaja con un número pequeño de vasos, pero luego se trabaja con un número mucho más grande, para que el estudiante deba tomar distancia de la tabla y se obligue a realizar un análisis funcional recurriendo a la razón como operador. Igual fin se persigue dando un número no entero de vasos, puesto que este valor, aunque es pequeño, no aparece directamente en la tabla. Con la respuesta al literal (b) se busca determinar la estrategia usada por los estudiantes para encontrar la variable independiente (número de vasos) a partir de la dependiente (volumen en onzas), con las preguntas de los literales (c) y (d), se pretende incentivar al estudiante para que realice un análisis funcional a partir de generalizar los procedimientos usados para responder las preguntas de los literales (a) y (b).

Conceptos y Tecnologías:

Los conceptos que están involucrados en la situación 1 tienen que ver con: la covariación entre dos magnitudes, a saber, $Magnitud\ uno\ (M_1)$ – número de vasos. Esta magnitud es discreta y por tanto subconjunto de los números enteros, particularmente de los enteros no negativos y $Magnitud\ dos\ (M_2)$ – el volumen del envase en onzas que por las condiciones de la situación, es continua, esto es, es un subconjunto de los números reales. Las tecnologías asociadas a los problemas que se espera que los estudiantes resuelvan en esta situación de proporcionalidad simple directa (psd) tienen como sustento teórico la razón como relator, la razón como como operador, la razón como correlator entre cantidades y los sistemas lineales directos.

Técnicas

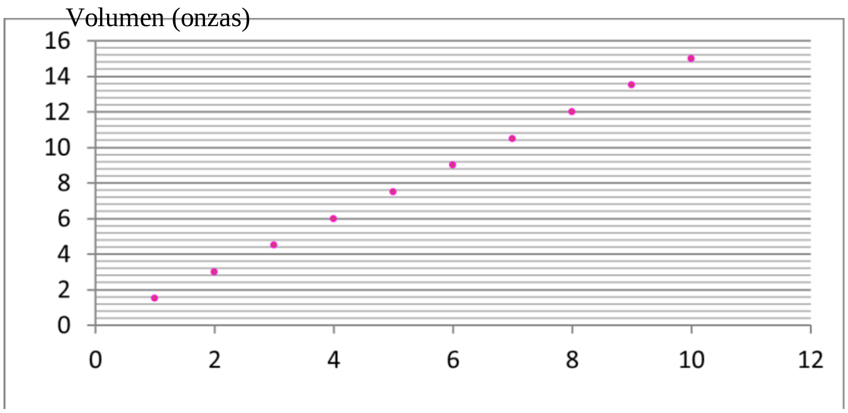
En la pregunta 1 se pretende que el estudiante realice una representación tabular para establecer una correspondencia entre el número de vasos y el volumen del envase. Es decir, se está proponiendo un problema de tipo π_{sr} que deberá ser realizado utilizando la técnica τ_{sr}^{1}. En este caso, por la manera como está estructurada la situación y particularmente la pregunta, los estudiantes no podrán escoger otra opción de forma de representación.

En la pregunta dos se pretende que el estudiante realice una representación gráfica a partir de la tabla diligenciada en la pregunta, nuevamente se propone un problema de tipo π_{sr}.

Las técnicas asociadas a estos problemas, correspondientes a representaciones de tipo cartesiano, estadístico e icónico, son τ_{sr}^{2}, τ_{sr}^{3} y τ_{sr}^{4} respectivamente**.** En cuanto a la técnica de elaboración de graficas cartesianas puede decirse que los estudiantes pueden recurrir a puntos o a trazos continuos.

Gráficas cartesianas (τ_{sr}^{2}):

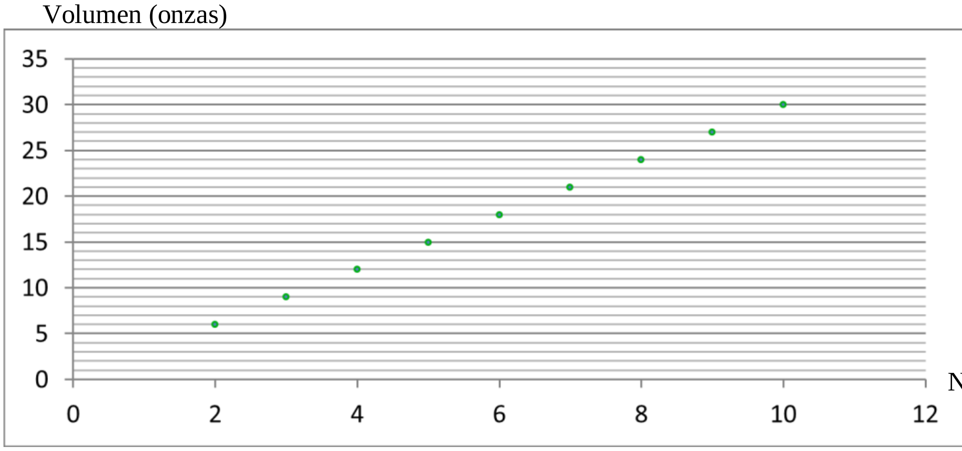
Vaso ***A***



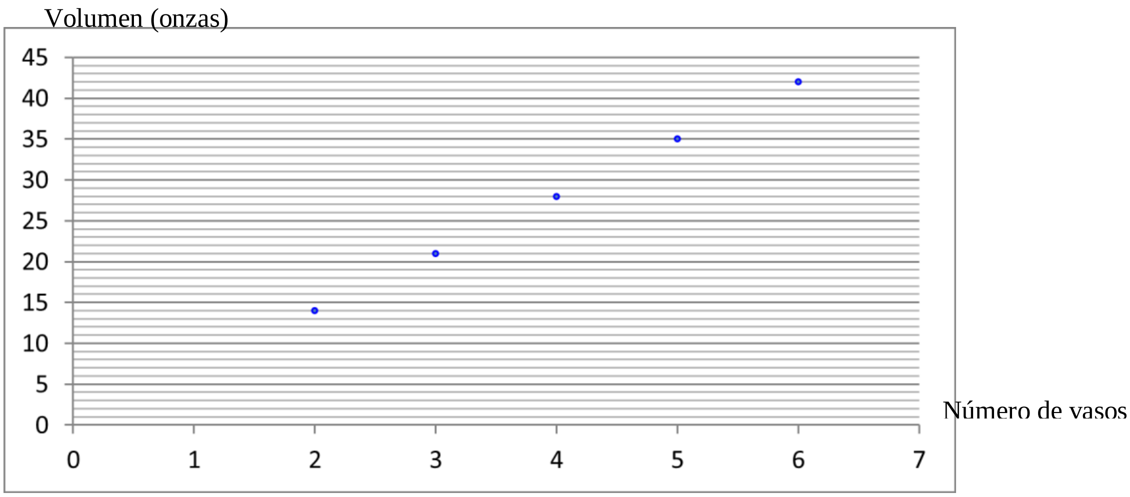
Número de vasos

Vaso ***B***

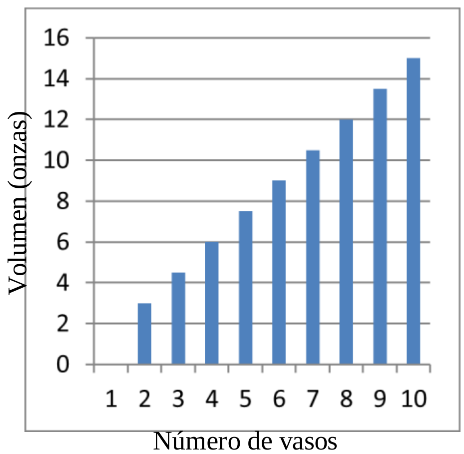
Volumen (onzas)



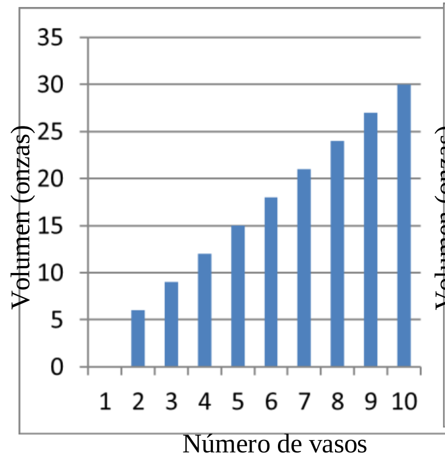
Vaso ***C***



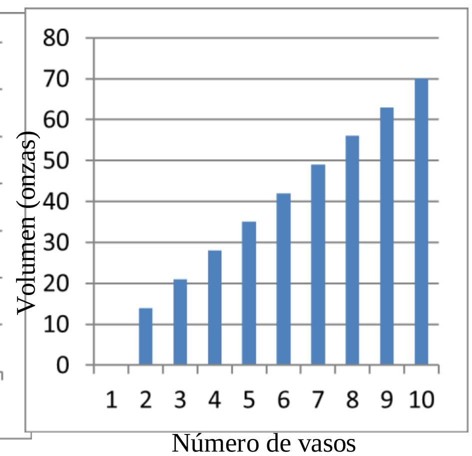
Vaso ***A***



Vaso ***B***

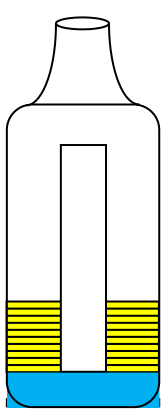


Vaso ***C***

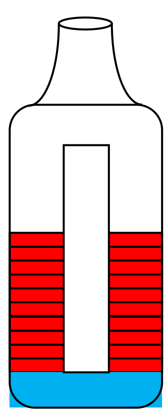


Representaciones icónicas (τ_{sr}^{4})

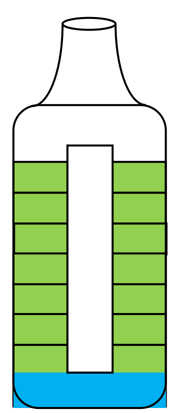
Vaso ***A***



Vaso ***B***



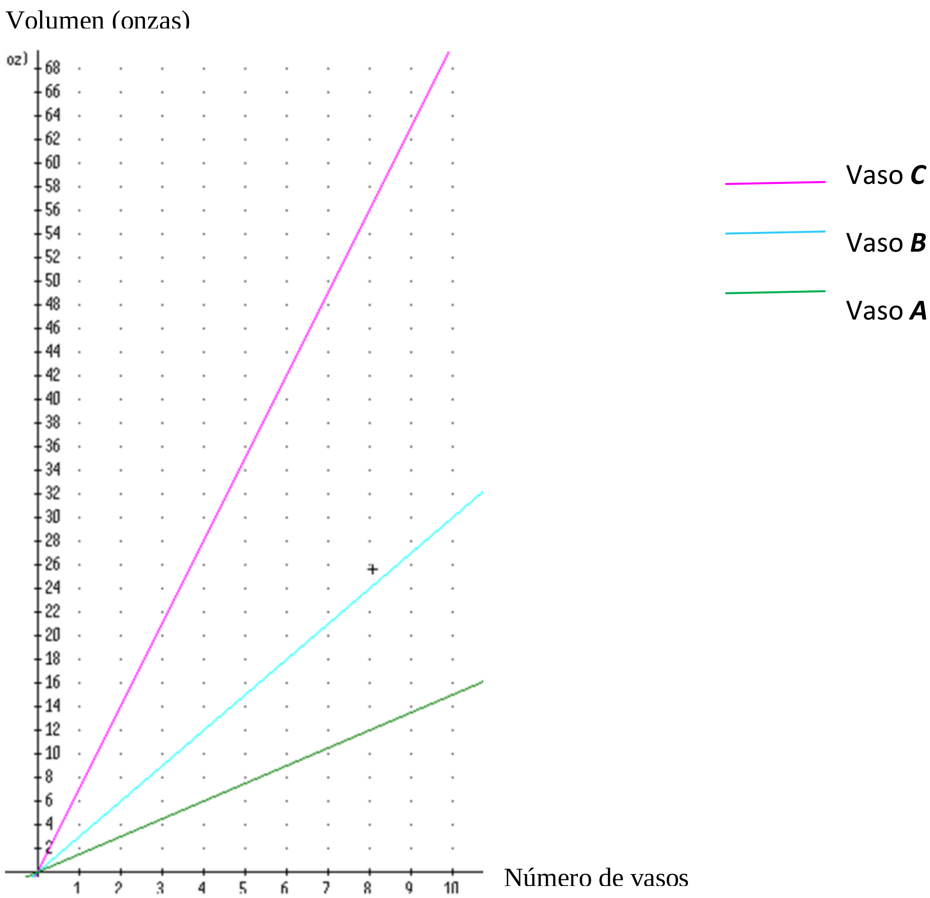
Vaso ***C***



Nota: Debido a la irregularidad del envase en su base, debe depositarse agua hasta el nivel representado por el área de color azul.

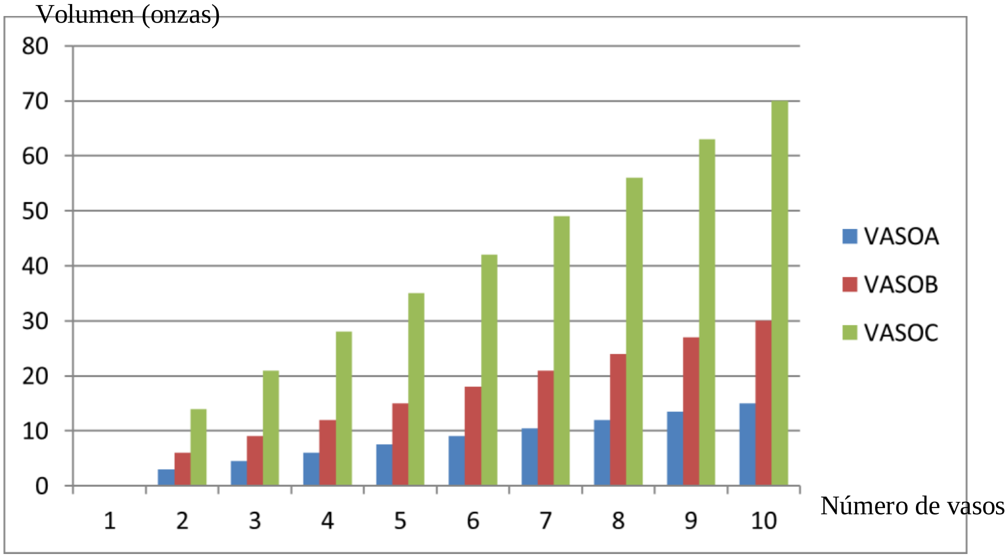
El análisis para la pregunta 3 es análogo al realizado en la pregunta 2, pero obsérvese a continuación las representaciones específicas que pueden aparecer.

Gráfica cartesiana:

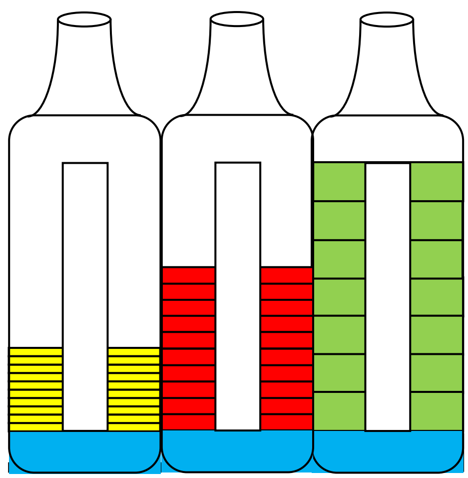


Nota: igualmente es probable que los niños recurran a puntos y no a trazos continuos.

Gráficas estadísticas:



Representaciones icónicas:



Para dar respuesta a la pregunta 4, correspondiente a un tipo de problema no categorizado y que se denominará interpretación de gráficas, los estudiantes pueden recurrir a alguna de las siguientes interpretaciones.

1. Para la representación cartesiana la gráfica lila siempre está por encima de las otras dos, lo cual indica que tiene una pendiente mayor, es decir, la razón entre cualquier

dos cantidades de magnitud de esta magnitud es mayor que la razón entre dos cantidades de magnitud de cada una de las otras dos magnitudes. La técnica presente en esta situación está soportada por la teoría de la razón como relator, en este caso la razón se corresponde con el concepto de pendiente de una línea recta.

2. En el diagrama de barras se observa que cada barra del vaso ***B*** es el doble de la barra correspondiente para el vaso ***A***.

Las siguientes dos técnicas, que no fueron clasificadas en la sesión correspondiente a la catalogación de las mismas, pueden denominarse técnicas de análisis de tipo cualitativo.

3. La representación icónica evidencia que se requieren menos vasos tamaño ***C*** para llenar el recipiente.

4. Para cualquier tipo de gráfico seleccionado por el estudiante se observa que entre más grande sea el vaso se alcanza un mayor volumen en el envase.

Las tres técnicas que a continuación se presentan están relacionadas con las relaciones parte - todo, y se soporta por la teoría de las transformaciones lineales en especial lo referente a los sistemas lineales.

5. En la representación icónica se puede observar que el volumen del envase para el vaso ***B*** es igual a dos veces el volumen para el vaso ***A***.

6. En la representación icónica se observa con “mayor facilidad” que el volumen alcanzado en el envase por el contenido de 3 vasos de tamaño C es igual al volumen alcanzado por 7 vasos de tamaño ***B***.

La pregunta 5 literal (a) (Vaso ***A***) hace parte del tipo de problema π_{pdi}:

En ella es posible acudir a alguna de las siguientes técnicas:

1. Determinar el volumen del vaso dividiendo el volumen en onzas entre el número de vasos, tomando valores particulares de la tabla, utilizando implícitamente la razón $\rho = \frac{volumen}{número\, de\, vasos} = \frac{3oz}{2} = 1{,}5oz$ y verificando que independiente de los valores tomados para el volumen y el número de vasos el resultado es siempre el mismo. Y utilizar la razón como operador (análisis funcional) para resolver $\rho(36) = \rho \times 36 = 1{,}5oz \times 36 = 54oz$. Este proceso se corresponde con la técnica τ^1_{pdi}.

2. Observar que el volumen en el envase sube de 1,5 oz en 1,5 oz y utilizar la técnica τ^1_{pdi}.

3. Utilizar la gráfica cartesiana proyectando la línea recta. En este proceso aparece una técnica de utilización de gráficas, técnica que tampoco ha sido codificada.

4. Completar la tabla hasta llegar a 36 vasos y determinar el valor a partir de ella. Aquí también se acude a una técnica no catalogada que se corresponde con la utilización de la representación tabular.

5. Observar que 36 es 4 veces 9 (o 18 veces 2, o 12 veces 3, o 9 veces 4, o 6 veces 6,) y multiplicar el volumen correspondiente a 9 vasos por 4 (o los análogos). Se recurriría a un análisis escalar a partir de la linealidad de la función puesto que $f(4 \times 9) = 4 \times f(9)$. Este procedimiento corresponde a la técnica τ^2_{pdi}.

6. También se puede recurrir a buscar el valor desconocido en la expresión: $\frac{3oz}{2} = \frac{?}{36}$, procedimiento que se sustenta en la tecnología θ_{pr} correspondiente a la razón como correlación entre cantidades.

Nota1: Se esperan procedimientos análogos para encontrar el volumen para 122 y 7,5 vasos.

Nota2: Para los otros tamaños de vasos se espera que el estudiante acuda a procesos similares. Aunque también se espera que teniendo en cuenta que el vaso ***B*** es el doble del vaso ***A*** se utilice este hecho y a partir de un análisis escalar sea suficiente multiplicar por 2 los resultados ya obtenidos para el vaso ***A***, procedimiento sustentado en la tecnología θ_{ae} y por la teoría correspondiente a los sistemas lineales.

Para la pregunta 5 literal (b) (Vaso ***A***) en la que se pretende determinar el número de vasos conociendo el volumen del envase, correspondiente a un problema de tipo π_{pdi}, para lo cual se puede recurrir a:

1. Completar la tabla hasta que aparezca 84 onzas en el volumen y seleccionar así el número de vasos. Esta técnica no está categorizada pero corresponde al uso de la representación tabular.
2. Dividir 84 onzas entre 1,5, que fue el resultado obtenido en la pregunta 5a, o en los gráficos, es decir, buscar el cuarto valor en la correlación entre espacios de medida $\frac{3oz}{2}=\frac{84oz}{?}$.

Esta técnica corresponde a la tecnología θ_{pr} y comparte elementos de la técnica τ^{1}_{pdi}.

3. Buscar un número que multiplicado por 1,5 oz dé como resultado 84 oz, es decir, se utiliza la razón como operador $(\rho(?)=1,5oz\times ?=84oz)$. Para este caso se emplea la técnica τ^{1}_{pdi}.
4. Utilizar la técnica τ^{2}_{pd}, que en este caso corresponde a observar que 84 oz se obtiene multiplicando 21 oz por 4 y que el volumen de 21 oz se obtiene cuando se han depositado 7 vasos, luego el número de vasos debe ser 28, producto de 7 por 4.

Nota: Para resolver la pregunta para 210 oz y 315 oz, es posible que se usen procedimientos análogos, pero por ser valores más grandes que 84 oz, probablemente el estudiante se vea inducido a evitar la construcción de una tabla (primera técnica) y recurra a un análisis escalar o a un a análisis funcional como lo indican las tres últimas técnicas. Las técnicas utilizadas para resolver las preguntas para estos dos valores brindarán elementos apreciables en los análisis que se pretenden realizar de las técnicas empleadas por los niños.

El tipo de problema en el que se enmarca la pregunta 5 literal (c) (Vaso ***A***) es π_{pdi} aunque en este caso la cantidad de magnitud $m_1^{;}$ se corresponde con un número cualquiera *n*. La técnica presente en este caso es τ_{pdi}^{1}, esto es, luego de hallar el cociente (*1,5 oz*) multiplicar el número de vasos *n* por el volumen de cada vaso, es decir $\left(\rho(n) = 1{,}5oz \times n\right)$. En este caso se está induciendo a realizar un análisis funcional, correspondiente a la tecnología θ_{af} .

Nota: El procedimiento para los vasos ***B*** y ***C*** es análogo.

La pregunta 5 literal (d) (Vaso ***A***) se considera como un tipo de problema π_{pdi}, consistente en determinar la cantidad de vasos que se necesitan para alcanzar un volumen *n* de agua. Las técnicas asociadas con este problema son:

1. La técnica τ_{pdi}^{1}, correspondiente a dividir el volumen de agua *n* entre 1,5 oz, para responder a la pregunta ¿por cuánto hay que multiplicar a 1,5 oz para obtener *n* onzas? Es decir, despejar *x* de la expresión $\left(\rho(x) = 1{,}5oz \times x = n\right)$. Probablemente se está implícitamente acudiendo a la ecuación $x = \dfrac{noz}{1{,}5oz}$. Esta técnica se sustenta en la tecnología θ_{pr} .
2. Utilizar una de las razones de la tabla y saber que $\dfrac{3oz}{2} = \dfrac{noz}{x}$ de donde se obtiene la ecuación *3x = 2n*. Técnica soportada por la tecnología θ_{pr} .

4.1.2 Los sistemas de prácticas de los estudiantes

Los estudiantes fueron organizados en siete grupos (3 de 4 y 4 de 5 estudiantes). A cada grupo se le entregó un recipiente transparente graduado en onzas, tres vasos desechables de diferente tamaño para los que no se conocía la cantidad de onzas que podía contener cada uno, marcados con las letras ***A***, ***B*** y ***C***, siendo ***A*** el nombre del vaso más pequeño y **C** el de mayor tamaño, un balde con agua y una hoja de papel en donde estaba escrita la guía de trabajo que debían realizar, esta misma hoja fue también entregada a cada uno de los estudiantes.

Gráfica 4. Los recipientes utilizados en la situación 1

Completando las tablas 1a), 1b) y 1c): experiencia con el material concreto

En este momento se observó lo siguiente:

Los grupos de estudiantes realizaron la experiencia depositando el contenido del vaso ***A*** diez veces, es decir, fueron llenando el envase, tal y como se pedía en la guía. Este hecho, quizá, no los llevó a determinar, que el volumen subía constantemente, es decir, para los estudiantes no fue necesario, no se percataron o no tuvieron la necesidad de precisar que el vaso ***A*** tenía una capacidad de 1,5 onzas, o que el nivel en el envase graduado iba subiendo de 1,5 en 1,5 onzas.

Como el recipiente estaba graduado de 3 onzas en 3 onzas, cuando depositaron el tercer vaso y el volumen subió hasta un punto entre 3 y 6, varios estudiantes registraron en las tablas el número $\frac{3}{2}$ para decir que el nivel estaba en tres y medio. Aquí se observa una dificultad en el uso de las fracciones como forma de representación de una cantidad, para evitar obstáculos en el desarrollo posterior, el investigador realizó una intervención para que los estudiantes se percataran de dos dificultades presentadas aquí:

✓ El investigador dice a los niños, que el nivel esté entre 3 y 6 no significa que el volumen sea tres y medio, sino un número entre 3 y 6, este número es,…, y ellos respondieron cuatro y medio.

El investigador aclara a los niños que tres y medio y cuatro y medio no se representan por $\frac{3}{2}$ y $\frac{4}{2}$, respectivamente sino, por ejemplo con 3,5 y 4,5 o con $3\frac{1}{2}$ y $4\frac{1}{2}$ respectivamente.

Luego de la aclaración del investigador los alumnos optaron por la notación decimal, lo cual generó un nuevo problema.

✓ Algunos estudiantes sí identificaron directamente que el volumen era cuatro y medio y lo escribieron correctamente. Otros, aunque identificaron de manera acertada el valor del volumen alcanzado, lo escribieron en forma errada $\left(\frac{4}{2}\right)$.

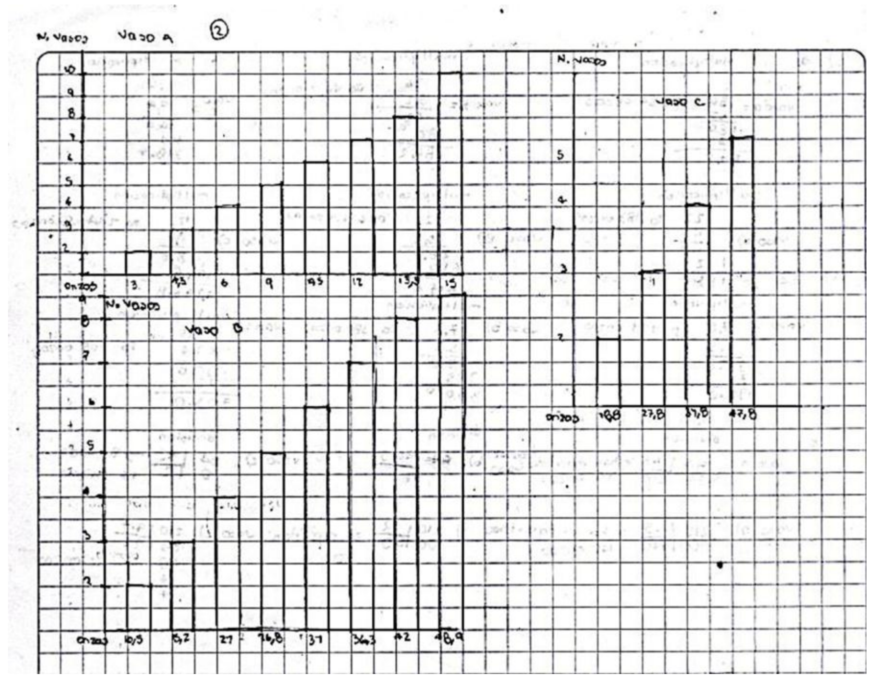
Cuando se trabajó con los vasos de los otros tamaños las dificultades mencionadas en el apartado anterior fueron superadas, gracias a la intervención realizada por el investigador en el trabajo con el vaso ***A***, aunque nuevamente no fue necesario para los estudiantes determinar el aumento constante en el volumen del recipiente a medida que se iba depositando el contenido de los vasos. Este hecho indica que el diseño de la situación no generó tal necesidad en ese momento y que reorientar la situación en tal sentido, podría aportar elementos para acercar a los estudiantes al reconocimiento de la constante de proporcionalidad.

Al llenar las tablas, que corresponde al tipo de problema π_{sr} algunos estudiantes olvidaron que se iniciaba desde dos vasos y no desde uno.

Respondiendo las preguntas de reflexión

Haciendo las gráficas

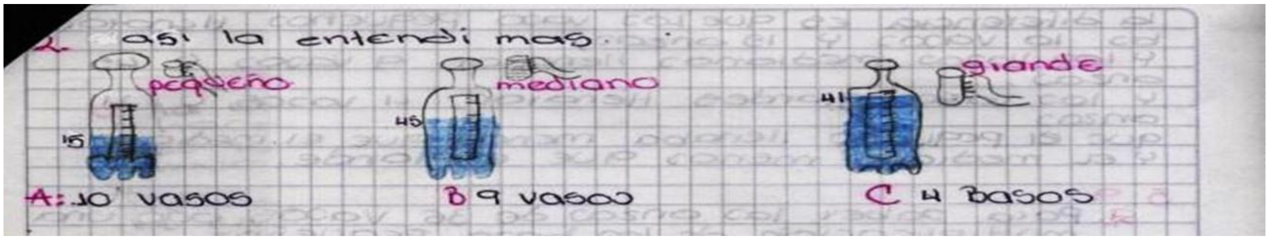
Sólo un estudiante recurrió a la técnica τ_{sr}^{3} que corresponde a elaborar una gráfica estadística.



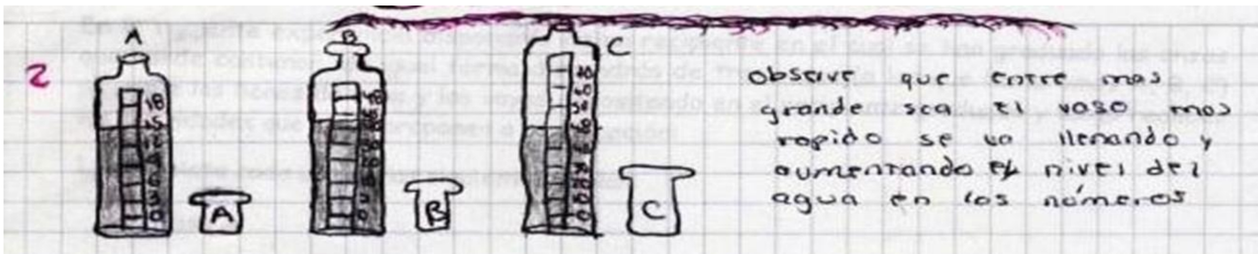
Gráfica 5. Una gráfica estadística para la situación 1

En esta gráfica el estudiante representó en el eje x el volumen en el recipiente y en el y el número de vasos, e hizo rectángulos verticales para representar la situación. Inicialmente las barras le quedaron del mismo tamaño. Se le preguntó si eso era adecuado y él dijo " yo si estaba mirando que no me podían quedar del mismo tamaño", así que tomó la decisión de hacerlas de distinto tamaño, siendo consciente que cada barra iba aumentando su tamaño constantemente. Se nota además que el aumento constante lo hizo tomando como base el tamaño de la primera barra que correspondía a dos vasos, demostrando que quizá, para él, tampoco era necesario determinar el volumen de un solo vaso.

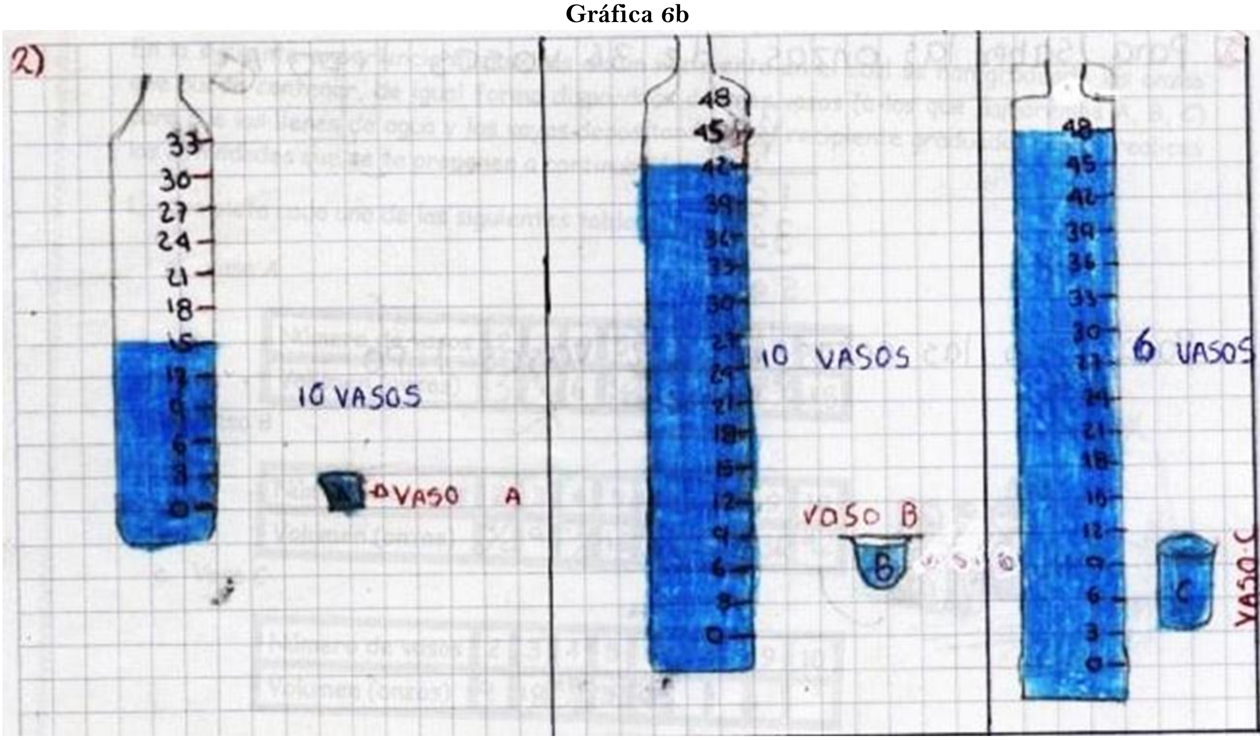
El resto de los estudiantes acudieron a la técnica τ_{sr}^4 que en la totalidad de los casos consistieron en dibujar envases graduados y representar el nivel que con uno o dos vasos se iba alcanzando en el envase.



Gráfica 6a



Gráfica 6b

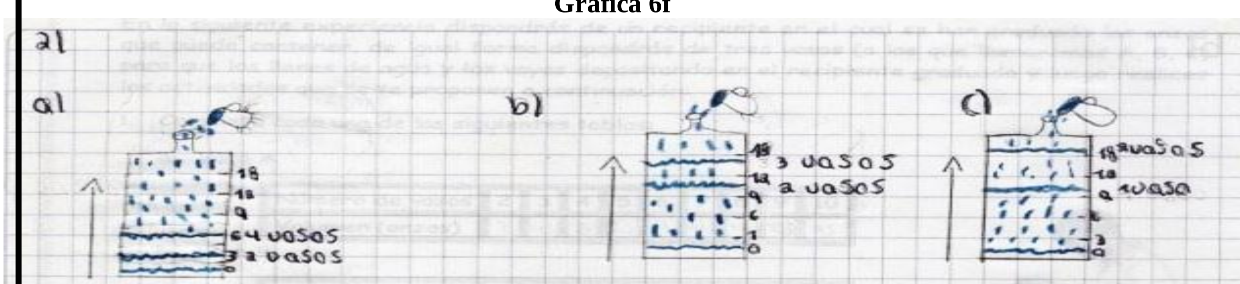


Gráfica 6c

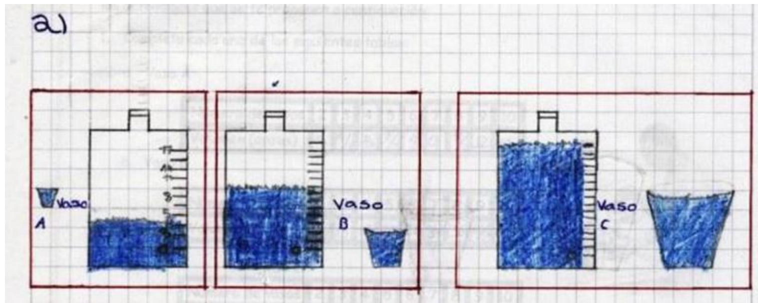
Gráfica 6d

Gráfica 6e

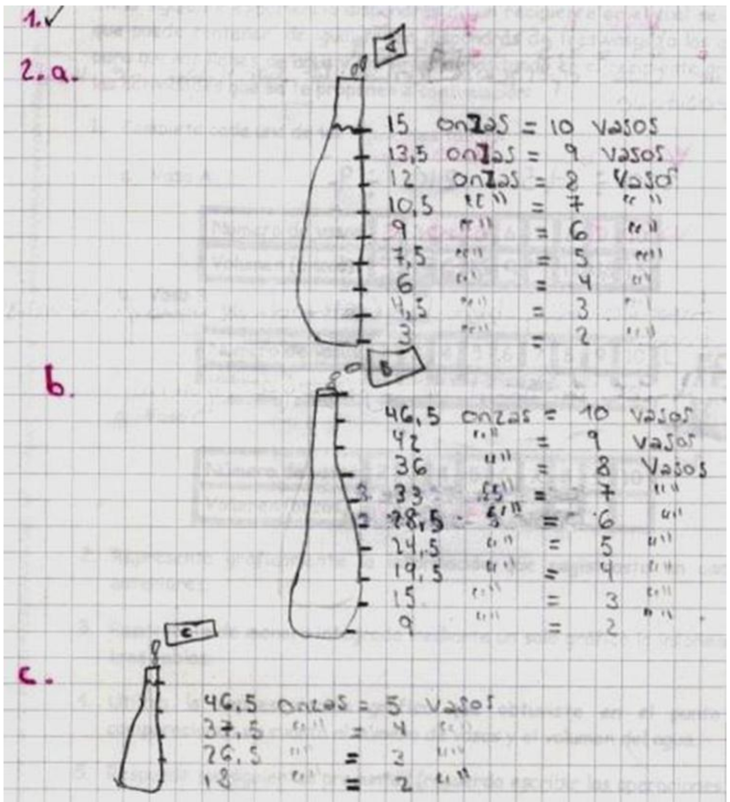
Gráfica 6f



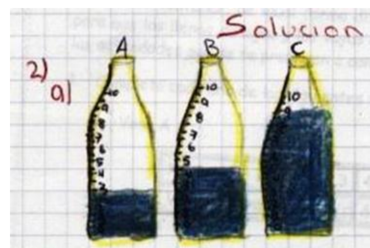
Gráfica 6g



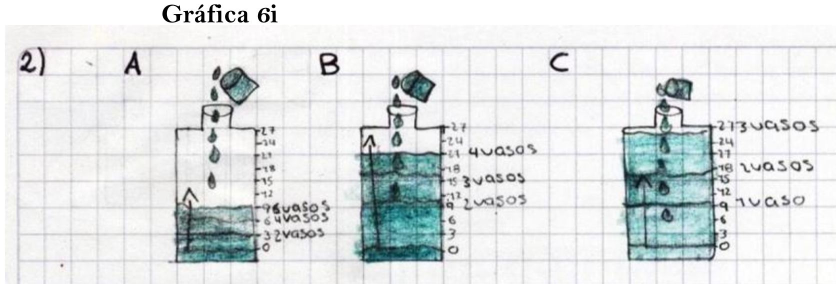
Gráfica 6h



Gráfica 6i



Gráfica 6k



Gráfica 6j

Gráfica 6. Las representaciones icónicas de la situación 1

Fue necesario preguntar qué significaba, para ellos, la representación realizada. Las respuestas, en su gran mayoría, apuntaban a mostrar que si se depositaban dos vasos ***A***, el volumen era 3 onzas y era lo que la altura del agua representaba en el envase graduado dibujado en el papel.

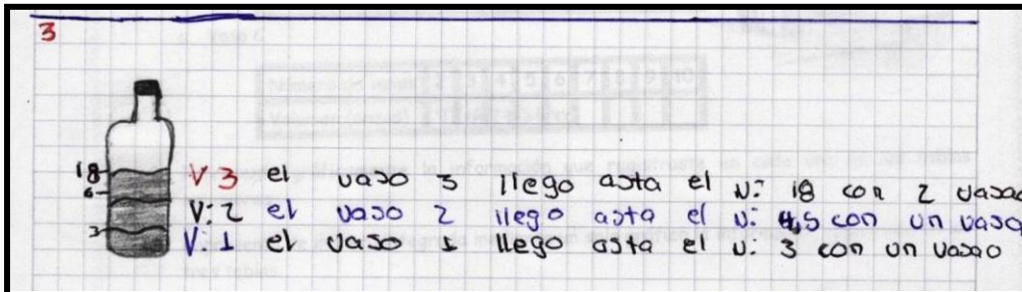
En este conjunto de gráficas es posible determinar tres grupos, a saber:

- ✓ Aquellas donde se representó el total, esto es, aquellas que representan lo ocurrido con el volumen del recipiente luego de haber depositado el contenido de diez vasos, o en su defecto hasta que el recipiente quedó lleno.
- ✓ Aquellas donde se representó el volumen en el recipiente después de depositar dos vasos. Esta representación del volumen alcanzado luego de dos vasos puede deberse, entre otras cosas, a que la tabla que debían diligenciar (tipo de problema π_{sr}) en el transcurso de la experiencia iniciaba en dos vasos y no en uno, o a buscar una marca completa en el recipiente. De alguna manera, teniendo en cuenta que la graduación del recipiente era de 3 onzas en 3 onzas, este grupo de gráficas inducen a pensar que los estudiantes identificaron una unidad de variación, en este caso la cantidad de onzas por cada dos vasos.
- ✓ Aquellas en las que además de lo anterior, el estudiante explicita por escrito, frente a la gráfica, la unidad de variación o expresa la relación entre el tamaño del vaso y la rapidez en el llenado.

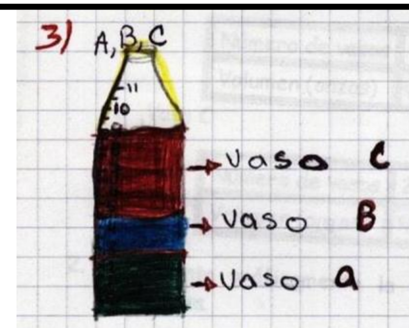
Ahora, para realizar las gráficas (problema de tipo π_{sr}) solicitadas en la pregunta 2 los estudiantes recurrieron a dibujar tres envases, cada uno de ellos con tres alturas diferentes, (pequeña para el vaso ***A***, mediana para el ***B*** y grande para el ***C***) pero estas alturas no guardaban ninguna relación, es decir, si la altura de dos vasos ***A*** en el envase era 2 cuadrados de la hoja, la altura para dos vasos ***B*** estaba simplemente un cuadro (o un poco) más arriba que la anterior. Igual situación se presentó para dos vasos ***C***. Se les preguntó si el número de cuadrados en la altura tenían algo que ver, pero ellos argumentaron que eso no lo habían considerado. Algo similar ocurre con la representación icónica de los tamaños de los vasos, algunos los hicieron el ***A*** de un cuadro, el ***B*** de 2 y el ***C*** de 3, lo único que pretendían era representar que un vaso era más grande que el otro, es decir, los estudiantes buscan guardar una relación de orden cuantitativo, fundamentado en la percepción y no en relaciones numéricas. En todo caso todas las representaciones hechas por los chicos dejan ver que el vaso ***C*** es más grande que el ***B*** y este más grande que el ***A***, pero no se cuantificó esa diferencia.

En estas representaciones icónicas se evidenció que los estudiantes no consideraron necesario determinar el volumen de un vaso para cada tamaño.

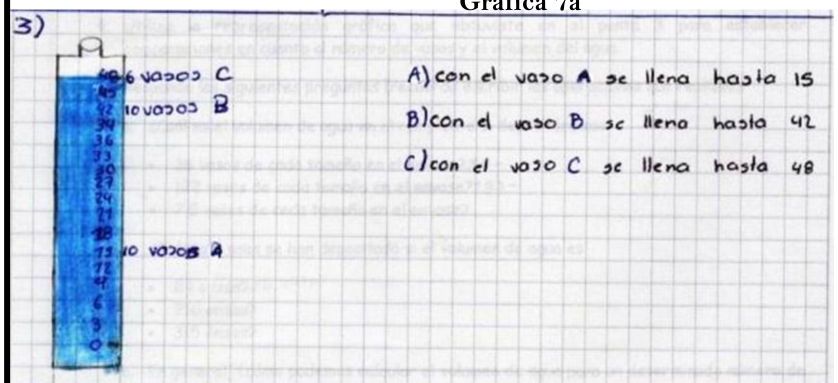
Para la pregunta tres, correspondiente con el tipo de problema π_{sr} la gráfica integrada correspondía nuevamente a la técnica τ_{sr}^{4}, es decir realizar una representación icónica en la que únicamente se mostraba hasta dónde subía el nivel con cada uno de los vasos en una misma representación de un solo envase. No se observa, claramente, una cuantificación numérica entre los niveles alcanzados representados en el envase. Pero sí es evidente la existencia de un análisis de tipo cualitativo, puesto que los niveles representados para cada vaso dependen del tamaño del mismo, esto es, para el vaso grande se alcanza un nivel mayor y para el pequeño un nivel menor.



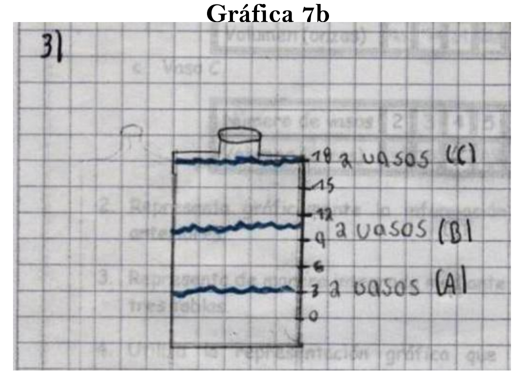
Gráfica 7a



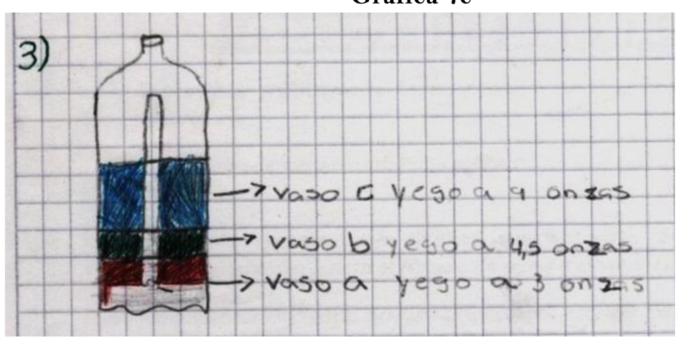
Gráfica 7b



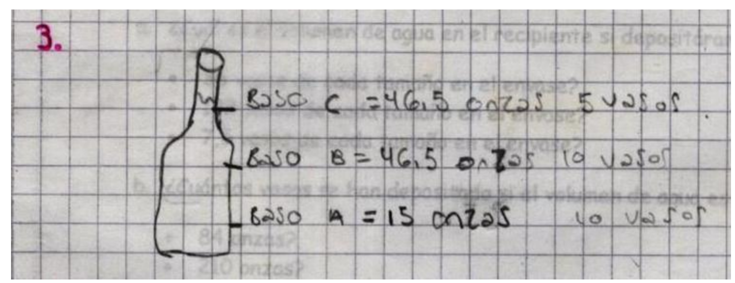
Gráfica 7c



Gráfica 7d



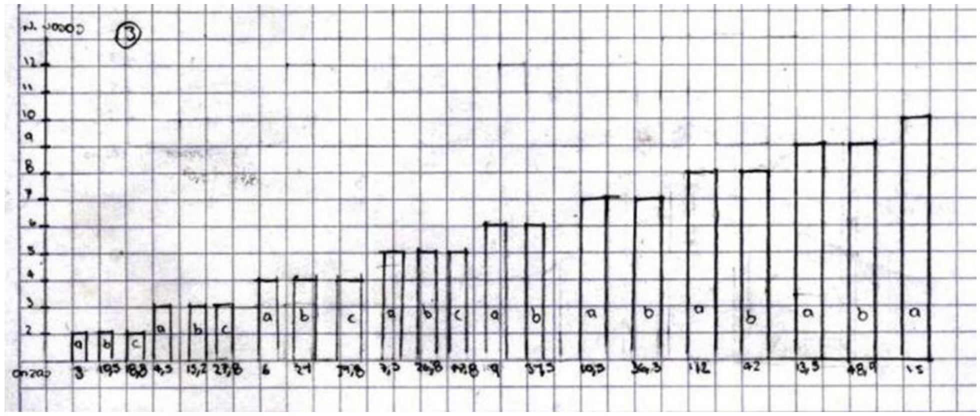
Gráfica 7e



Gráfica 7f

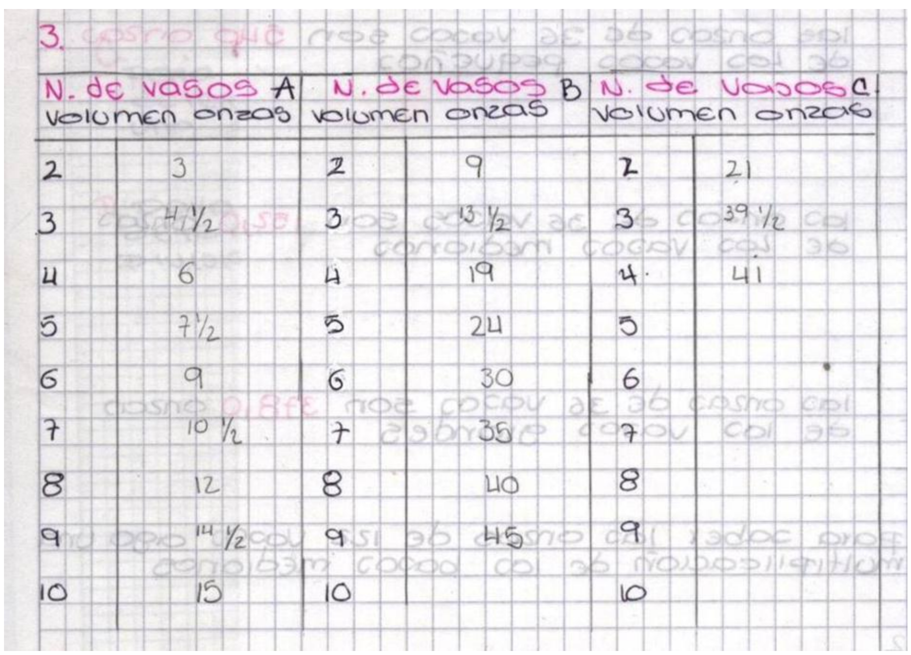
Gráfica 7. Las gráficas integradas para la situación 1

Para el chico que utilizó la técnica τ_{sr}^{3}, las barras que representaban el contenido de cada vaso fueron del mismo tamaño, sin importar que el vaso fuese más grande. Esto se dio porque utilizó barras verticales, quizá si hubiese utilizado barras horizontales o hubiera cambiado los ejes no se habría presentado tal dificultad.



Gráfica 8. La gráfica estadística integrada para la situación 1

Dos estudiantes utilizaron como gráfica integrada una tabla que concentraba las tres tablas diligenciadas, es decir acudieron a la técnica τ_{sr}^{1}.



3.

N. de vasos A	volumen onzas	N. de vasos B	volumen onzas	N. de vasos C	volumen onzas
2	3	2	9	2	21
3	4 1/2	3	13 1/2	3	39 1/2
4	6	4	19	4	41
5	7 1/2	5	24	5	
6	9	6	30	6	
7	10 1/2	7	35	7	
8	12	8	40	8	
9	14 1/2	9	45	9	
10	15	10		10	

Gráfica 9. Una tabla para integrar las gráficas en la situación 1

Utilizando las gráficas

Teniendo en cuenta que la mayoría de los chicos acudieron a la técnica τ_{sr}^{1}, las respuestas dadas a la pregunta giraron en torno a afirmaciones como:

- ✓ "*Que hay algunos números de onzas que son iguales*". Significando con esto que para alguna cantidad de vasos de distintos tamaños se alcanzaban volúmenes iguales en el recipiente por ejemplo (con 6 vasos ***A*** y 2 vasos ***B*** se alcanzan 9 onzas). (una niña)
- ✓ "Sumando 6 vasos ***A*** le daría lo que da dos vasos ***C***". (un chico)
- ✓ *"Hasta cuánto se llega con un vaso de cada tipo"*. Esta observación es interesante puesto que en el trabajo inicial con el agua no habían considerado necesario determinar el contenido de un solo vaso y aquí ya logran determinarlo.
- ✓ "Cada vaso sube más que el otro por su tamaño".
- ✓ "Con el vaso ***A*** el volumen crece poco, con el ***B*** crece medio y con el ***C*** crece más que los otros o crece bastante".

Nota: A raíz de esta respuesta fue necesaria una intervención posterior del investigador para que los chicos no se queden en ella, es decir, se realizó una discusión con los estudiantes sobre este tipo de respuestas, con el fin de inducirlos a utilizar análisis de tipo numérico. De todas formas este tipo de afirmaciones por parte de los estudiantes demuestran que han detectado, de manera cualitativa, un tipo de correlación entre el volumen alcanzado en el recipiente y la cantidad de vasos.

- ✓ "Con todos los vasos, cada vez que se depositaba más contenido el volumen en el recipiente crecía más de una onza".
- ✓ "No importa el tamaño del vaso el nivel del agua va cambiando su posición".
- ✓ "Dos vasos de ***B*** darían un vaso ***C"***. (un chico)
- ✓ "Cada vaso aumentó el volumen del recipiente el vaso ***B*** le gana por una onza al vaso ***A*** y el ***C*** por 5 a el ***B"***. Aquí los estudiantes establecen una relación por diferencia entre los volúmenes de los vasos.
- ✓ "El volumen de los vasos **A**, **B** y **C** es diferente".

Y a aseveraciones con respecto a:

- ✓ La cantidad de vasos que se depositaron de cada tamaño y el volumen que se alcanzó en el recipiente.
- ✓ El nivel alcanzado con 2 vasos de cada tipo.

Utilizando la razón

Para responder a las preguntas 5 literales a), b), c) y d) que hacen parte del tipo de problema π_{pdi} se presentaron las siguientes situaciones:

La mayoría de los estudiantes recurrieron a identificar cuál era el contenido de un sólo vaso de cada tamaño; en este instante se determinó la importancia de no haber iniciado la tabla desde 1 vaso. Para tal fin, los estudiantes recurrieron a plantearse que si dos vasos eran 3 onzas (vaso ***A***), 9 onzas (vaso ***B***) y 18 onzas (vaso ***C***) entonces 1 vaso ***A*** tenía 1,5 onzas, uno ***B*** 4,5 onzas y uno ***C*** 9 onzas. Este procedimiento empleado constituye la primera parte de la técnica τ^{1}_{pdi}. En este caso, hay que determinar si el número obtenido por los alumnos en la división corresponde a la capacidad del vaso, o es la relación constante entre el número de vasos empleados, y el volumen alcanzado en el recipiente, y que por tanto se estaría planteando la razón como relación. Es decir, se argumenta tal proceso desde la teoría de los roles de la razón. La respuesta a este interrogante podrá darse cuando se analicen las soluciones dadas.

En cuanto a dar respuesta a las preguntas puntuales, es decir, ¿cuál es el volumen de agua en el recipiente si depositamos 36 vasos de cada tamaño? los estudiantes recurrieron a las siguientes estrategias:

- ✓ Multiplicar 36 por el valor del volumen de un vaso, este proceso constituye la segunda parte de la técnica τ^{1}_{pdi}. Vale la pena decir que recurrieron a una unidad de variación distinta a la empleada en la realización de las gráficas, puesto que pasaron del volumen por cada dos vasos, al volumen por cada vaso (para la mayoría de estudiantes este valor fue 1,5; es interesante destacar que para un estudiante fue 1,2 ya que para él este número representa uno y medio). Esta parte de la técnica se soporta en la tecnología θ_{af} .

- ✓ Para determinar el volumen de 122 y 7,5 vasos, escribieron que realizan el mismo procedimiento de multiplicar el número de vasos dado por el volumen de cada vaso. Se observa un inicio de generalización que les permitirá responder la pregunta 5 c). Un factor recurrente fue que al hacer las multiplicaciones los estudiantes no tomaron en consideración las unidades, tanto para realizar la multiplicación como para dar la respuesta. Lo cual muestra la dificultad para la construcción de las cantidades intensivas, máxime si se tiene en cuenta que en la enseñanza en el nivel de Básica se ha descuidado el trabajo con las unidades de las cantidades de magnitud involucradas.

Se evidenció la dificultad de no recordar cómo se multiplican números decimales.

Otra técnica utilizada para responder las preguntas sobre el vaso ***A***, consistían en considerar el número máximo de vasos en la tabla (10 que correspondía a 15 onzas) y un valor de vasos de la tabla que era 6 y correspondía a 9 onzas y realizar el siguiente análisis escalar

$$f(10+10+10+6) = f(10)+f(10)+f(10)+f(6) = 15+15+15+9 = 54,$$

lo cual muestra el uso, por parte del estudiante de una serie de principios, que son válidos en el contexto de la situación tratada, en virtud de la linealidad de la relación entre las variables involucradas. Estos principios tendrán que ser formalizados más adelante, como teoremas básicos de la linealidad y es lo que se podría llamar, en términos de Vergnaud (1983), el uso de un teorema en acción puesto que el estudiante identifica los principios de linealidad en la situación. La técnica aquí expuesta corresponde a aquella designada como τ^3_{pdi} .Para dar esta respuesta se confundían y tomaban el valor 15 de la tabla como número de vasos y no como cantidad de onzas.

Mediante un procedimiento similar buscaron una suma que les diera 36 para el vaso ***B*** y para el vaso ***C***. procediendo de forma similar para 122 vasos y para 7,5 vasos.

En el caso de 7,5 algunos estudiantes recurrieron a una técnica que no aparece en la codificación realizada en la sesión correspondiente a la organización matemática de las razones, las proporciones y la proporcionalidad y corresponde a un tipo de extrapolación, puesto que a partir de la tabla, (**vaso *A***) observaron que $f(7)=10{,}5\,oz$ y $f(8)=12\,oz$ luego $f(7{,}5)=\frac{(10{,}5+12)oz}{2}=11{,}25\,oz$, aunque se relaciona con la técnica τ^1_{sr}.

Dos estudiantes completaron la tabla hasta 36 vasos para cada vaso y de ahí sacaron la respuesta, es decir, aplicaron la técnica τ^1_{sr}.

Nota: Para dar respuesta a estos interrogantes los estudiantes no recurrieron a la técnica τ^2_{pdi}, por ejemplo, al decir que si 36 es 6 veces 6 entonces el volumen debería obtenerse de multiplicar el valor en onzas de la tabla por 6. O utilizar el hecho que el vaso ***C*** era el doble del ***B***, el ***B*** el triple del ***A*** y el ***C*** seis veces el ***A***. Lo que en el fondo puede considerarse como la aplicación de una especie de relación parte - todo, que se relaciona con la teoría denominada de los sistemas lineales directos, pero la cual cumple una función no tanto como número, sino como razón, que una vez calculada sobre un par de valores en una de las magnitudes, es reflejada sobre la otra magnitud como la relación que deben cumplir el mismo par de valores correspondientes allí. Esto puede mirarse como otra cara del análisis escalar. Se trata nuevamente de un teorema en acto que los estudiantes van construyendo a medida que ganan familiaridad con el tratamiento de situaciones de variación lineal, y que finalmente terminará constituyéndose en un teorema formal de la linealidad. Podría decirse que es un tratamiento intuitivo de una razón que se establece sobre un par de valores, y es reflejada sobre sus valores correspondientes en otra magnitud, es un caso característico de razonamiento por analogías[44].

[44] Modestou y Gagatsis (2010) plantea que desde hace mucho tiempo Polya puso en evidencia la existencia de una relación entre las proporciones y las analogías indicando que una proporción es un tipo especial de analogías. Hecho confirmado por Goswami quien afirma que tanto las proporciones como las analogías requieren que los estudiantes razonen sobre relaciones entre relaciones enfocándose en encontrar el patrón estructural entre los términos. Por su parte Lamon (1999) afirma que cuando los estudiantes están en capacidad de determinar la semejanza estructural entre los términos de las analogías verbales u ópticas y no sólo enfocarse en sus semejanza perceptuales, entonces ellos son capaces de determinar la relación que involucra el razonamiento proporcional.

Para las preguntas del literal b) se utilizaron estrategias tales como:

Nota: Aquí los estudiantes manifestaron inicialmente no entender que era lo que debían hacer. Esto quizá se deba a que se les complica encontrar la variable independiente a partir de la dependiente. Para salvar esta dificultad el investigador hace una pequeña aclaración a partir del siguiente planteamiento: "supongan que tiene una gaseosa de 84 onzas, ¿cuántos vasos de gaseosa alcanzan a servir?". Esta breve aclaración parce haber sido suficiente puesto que luego de haberse dado los estudiantes iniciaron el desarrollo de la respuesta.

- Dividir 84 entre 1,5 (**vaso *A***), entre 4,5 (**vaso *B***), entre 9 (**vaso *C***). Procedimiento que corresponde a la segunda parte de la técnica τ^1_{pdi}.
- Buscar un número que multiplicado por 1,5 diera como resultado 84 o muy cerca de este valor. Aquí se plantea, de manera intuitiva, la idea de buscar el cuarto valor en la proporción, con 1 vaso 1,5 onzas cuántos vasos con 84 onzas, es decir apoyarse en la tecnología θ_{pr}.
- Anuncian la utilización de procedimientos similares para dar respuesta a los otros tres valores.
- En las preguntas de generalización, las cuales la mayoría de estudiantes no alcanzaron a responder (o no supieron cómo responder), se encuentran las siguientes respuestas:
- La mayoría, de los pocos que respondieron, escriben que se debe hacer una multiplicación, pero no especifican qué cantidad se va a multiplicar con qué cantidad.
- Uno de los estudiantes escribió: Multiplicando el número de vasos por 1,5.
- Los estudiantes escriben que deben hacer una división, nuevamente sin especificar el cociente entre qué valores se hará.

Estos dos procedimientos, que no son bien especificados por parte de los estudiantes, corresponden a la segunda parte de la técnica τ^1_{pdi}.

A manera de conclusiones de la situación 1

Hay una cierta noción de la necesidad de hacer una representación que de alguna manera muestre las diferencias (en volumen) de los recipientes utilizados. Sin embargo, esta diferenciación está, de manera fundamental, organizada a través de percepciones no numéricas. Esto implica entonces la necesidad de una intervención orientada a que tomen conciencia de que la diferencia en los tamaños se puede cuantificar, y que por ende, la representación gráfica se puede hacer de tal forma que ilustre dicha relación numérica.

En la vida diaria, para recipientes que son uno el doble del otro, en términos del volumen, no necesariamente uno de ellos tiene el doble de altura con respecto al otro. Pero además, lo usual es considerar el volumen en términos de capacidad, en cuyas circunstancias, las dimensiones: largo, ancho, alto, no son variables que se consideren para determinar la capacidad de los cuerpos. En términos de capacidad, ésta es considerada como una magnitud lineal. Esto mostraría la necesidad, en un trabajo futuro, de realizar un análisis cuidadoso del comportamiento de los volúmenes de los cuerpos, en función de estas tres dimensiones. Se puede formular, a manera de hipótesis:

La representación sobre el papel de diferentes volúmenes, donde se consideren las alturas de los recipientes para establecer la relación de proporcionalidad de unos volúmenes a otros, implica necesariamente una conciencia del volumen como una magnitud que depende de tres longitudes o dimensiones (largo, ancho, alto).

Los estudiantes no recurren, de manera natural, a la aplicación de relaciones parte - todo para resolver los interrogantes planteados.

Las gráficas estadísticas y/o cartesianas, las cuales tomando en consideración el grado en el que están los estudiantes, son las que se esperaba fueran utilizadas en su gran mayoría, no son el tipo de representación a la que inicialmente recurren los estudiantes. Las representaciones de un alto porcentaje de estudiantes son de tipo icónico. Igualmente los estudiantes no acuden a las gráficas realizadas para dar respuesta a las preguntas.

Las preguntas de reflexión en las cuales se utilizan valores que están por fuera del rango de la tabla indujeron a los estudiantes a crear estrategias para establecer de manera cuantitativa las relaciones entre el número de vasos y el volumen alcanzado en el recipiente.

Los dos últimos enunciados motivaron la realización de dos intervenciones previas a la ejecución de la segunda situación es decir, se hizo un trabajo de afianzamiento de las relaciones parte - todo y de la construcción y análisis de gráficas, tanto estadísticas como cartesianas.

4.2 Primera intervención del investigador

Las intervención se realizan tanto para generar aprendizaje como para favorecer la investigación.

Teniendo en cuenta la estructura planteada en la gráfica 3 se realizó una intervención luego de aplicar las situación 1 y una segunda intervención luego de aplicar las situaciones 2 y 3.

La primera intervención se realizó al identificar tres dificultades de los estudiantes cuando resolvieron la situación 1. Estas dificultades radicaban en el manejo de la relaciones parte - todo, en la construcción y manejo de gráficas cartesianas y en la forma como escribían un procedimiento realizado. Para tal fin se realizaron preguntas tomadas de la misma situación.

4.2.1 **Relaciones parte - todo**

Recordemos los siguientes datos de la situación 1

Tipo de vaso	Volumen
A	1,5 onzas
B	4,5 onzas
C	9,0 onzas

y respondamos las siguientes preguntas:

¿Con cuántos vasos tipo B llenamos un vaso A?
¿Con cuántos vasos A se llena un vaso B?
¿Cómo podemos decir que están relacionados el vaso A con el vaso B?

¿Con cuántos vasos tipo B llenamos un vaso C?

¿Con cuántos vasos C se llena un vaso B?

¿Cómo podemos decir que están relacionados el vaso B con el vaso C?

¿Qué relación existe entre 6 vasos y 24 vasos?

¿Qué relación existe entre 40 onzas y 10 onzas?

4.2.2 **Preguntas por procedimientos.**

En una actividad se te dan las siguientes indicaciones: Realice una multiplicación, realice una división, sume. Reste. ¿Qué harías ante estas indicaciones?

4.2.3 **Gráficas.**

Se les presentaron tres tipos de gráficas (cartesianas, diagramas de barras y representaciones icónicas) construidas con base en los datos tomados en la situación 1. Se les recordó cómo se hacían este tipo de gráficas, teniendo en cuenta que sus profesores de matemáticas de grado sexto y séptimo (al inicio del presente año escolar) les habían indicado cómo hacerlas y se les preguntó acerca de cuál de los tres tipos de gráfica permitía presentar mejor la información e interpretarla más rápidamente.

Respuestas, reflexiones y avances de esta intervención:

Se evidenció que los estudiantes sí manejan las relaciones parte - todo, esto es, hablaban con propiedad de la mitad, de la tercera parte, del doble, de la cuarta parte, del triple, etc. Teniendo en cuenta la existencia de este conocimiento previo, se invitó a los estudiantes a utilizar estas relaciones en el desarrollo de las siguientes situaciones. Tal solicitud fue considerada por los estudiantes puesto que en las respuestas dadas a las preguntas en las siguientes situaciones apareció el uso de estas relaciones.

Al cuestionar sobre la forma de expresar un procedimiento se dieron cuenta que decir simplemente multiplicar o dividir no permite saber exactamente qué es lo que se debe hacer.

Esta pregunta pretendía llamar la atención en la diferencia sobre los tipos de respuestas escritas por ellos con respecto a lo que decían y quedaba registrado en las grabaciones. A partir de esta reflexión se les solicitó ser claros al escribir sus procedimientos.

El trabajo con gráficas permitió determinar que sí manejan las gráficas cartesianas y que las ven como el tipo de gráfica más adecuado para representar la información obtenida. En el caso de las gráficas integradas y/o comparativas determinaron que las gráficas cartesianas permitían mostrar las diferencias y similitudes con mayor claridad. Está intervención tuvo resultados positivos puesto que en las siguientes dos actividades los estudiantes, casi en su totalidad (sólo dos no las usaron), acudieron a este tipo de representación. Infortunadamente se presentaron dificultades con el manejo adecuado de la escala en los ejes y que las gráficas no eran utilizadas para dar respuesta a las preguntas de reflexión. Este hecho y la escasa información que, con respecto a la investigación, arrojaban las gráficas motivaron a que se tomara la decisión de no solicitar gráficas para las situaciones 3.1, 3.2, 4 y 5.

4.3 Situación 2.

4.3.1 Análisis desde la mirada del experto

Situación 2: "¿Con cuál vaso se llena más rápido?"

Esta situación es similar a la anterior pero se te pide llenar el recipiente, con cada uno de los vasos, hasta el volumen que se indica, (la marca que se ha hecho en él) y luego realiza las actividades propuestas a continuación.

1. Completa la siguiente tabla: (número de vasos de cada tamaño requeridos para llenar el recipiente)

Volumen vaso (onzas)	3	4	6	8	10	12
Número de vasos						

2. Representa gráficamente la información que registraste en la tabla anterior.

3. Responde las siguientes preguntas: (recuerda escribir las operaciones que realizas)
   a. Si se utiliza un vaso de 5 onzas ¿cuántos vasos se requieren para llenar el recipiente?
   b. Si se utiliza un vaso de 9 onzas ¿cuántos vasos se requieren para llenar el recipiente?
   c. Si el volumen del vaso es triplicado ¿qué ocurre con el número de vasos requerido para llenar el recipiente?
   d. Si el volumen del vaso se reduce a la mitad ¿qué ocurre con el número de vasos requerido para llenar el recipiente?
   e. Si el volumen del vaso disminuye ¿Qué ocurre con el número de vasos requeridos para llenar el recipiente?
   f. Si el volumen del vaso aumenta ¿Qué ocurre con el número de vasos requeridos para llenar el recipiente?

4. De acuerdo con la respuesta que diste en las preguntas e) y f). ¿Los valores que se presentan en la siguiente tabla son valores de la experiencia que realizamos con el agua? ¿Por qué?. (Observa que el valor sombreado es un valor de la experiencia y que hacia la derecha de 8 disminuye el número de vasos y hacia la izquierda de este valor aumenta)

Volumen vaso (onzas)	1	3	5	6	7	11	14
Número de vasos	40	15	9	8	6	5	4

Propósitos:

Reconocer las magnitudes presentes en la situación.

Identificar procesos de covariación entre magnitudes.

Identificar que existe una magnitud que tiene dependencia variacional con respecto a otras dos magnitudes.

Reconocer la presencia de una función bilineal.

Determinar el tipo de proporcionalidad entre las magnitudes.

Mostrar a los estudiantes que no siempre la proporcionalidad entre dos espacios de medida es lineal y directa.

Gestión de la situación "¿Con cuál vaso se llena más rápido?"

Estructura de la situación

Para el desarrollo de esta situación se dispondrá del siguiente material concreto: un envase de gaseosa con un nivel marcado hasta donde debe ser llenado; 6 vasos (uno de 3, otro de 4, de 6, de 8, de 10 y de 12 onzas) y agua. En la actividad se pretende que los estudiantes llenen de agua primero el vaso de 3 onzas y vayan depositando el contenido en el envase de gaseosa hasta llegar al nivel marcado, que será el mismo para todos los vasos, esto permitirá mostrar a los estudiantes que hay dos magnitudes que varían (volumen del vaso y número de vasos) y otra que permanece constante (volumen del envase). Los estudiantes irán registrando el número de vasos necesarios para alcanzar el nivel en la siguiente tabla

Volumen vaso (onzas)	3	4	6	8	10	12
Número de vasos						

Aquí se espera que el estudiante observe cómo varía el número de vasos de acuerdo con el volumen del vaso, es decir ponga en correlación las dos magnitudes, a saber M_1: volumen del vaso y M_2: número de vasos.

En la pregunta 2 se desea incentivar el uso de diferentes tipos de representaciones, especialmente las gráficas como son los diagramas de barras, las gráficas cartesianas, las representaciones icónicas, etc.; los dos primeros tipos de gráficas se ven favorecidos por el registro de los datos en una tabla. No se exige un gráfico en particular para poder observar en los estudiantes, además de las representaciones escritas, a que gráficos recurren para representar el comportamiento de la situación. Además se pretende el uso de las gráficas para realizar análisis y reflexiones con respecto a la situación.

En la pregunta 3 literales (a) y (b) se pretende observar el uso de la forma como está definida la función bilineal (producto constante) en la obtención de la respuesta, utilizando valores que no aparecen en la tabla, para recurrir a otras estrategias o a la ampliación de la tabla. Con la respuesta a los literales (c) y (d) se busca identificar cómo los cambios en un espacio de medida se reflejan en el otro espacio de medida. Con las preguntas de los literales e) y f), se busca observar el desarrollo del razonamiento proporcional cualitativo y la determinación del tipo de proporcionalidad dada entre las magnitudes de los espacios de medida.

Conceptos y Tecnologías:

Los conceptos que están involucrados en la situación 2 tienen que ver con: la covariación entre dos magnitudes, a saber: $Magnitud\ uno\ (M_1)$ – volumen del vaso en onzas, esta magnitud es continua y por tanto un subconjunto de los números reales, y $Magnitud\ dos\ (M_2)$– el número de vasos que por las condiciones de la situación, es discreta. Otros conceptos son los de correlación bilineal, función bilineal, constante de proporcionalidad y el de proporcionalidad inversa. Las tecnologías asociadas a los tipos de problemas que se espera que los estudiantes resuelvan en esta situación de proporcionalidad simple inversa (psi) son los de correlación bilineal, función bilineal y constante de proporcionalidad.

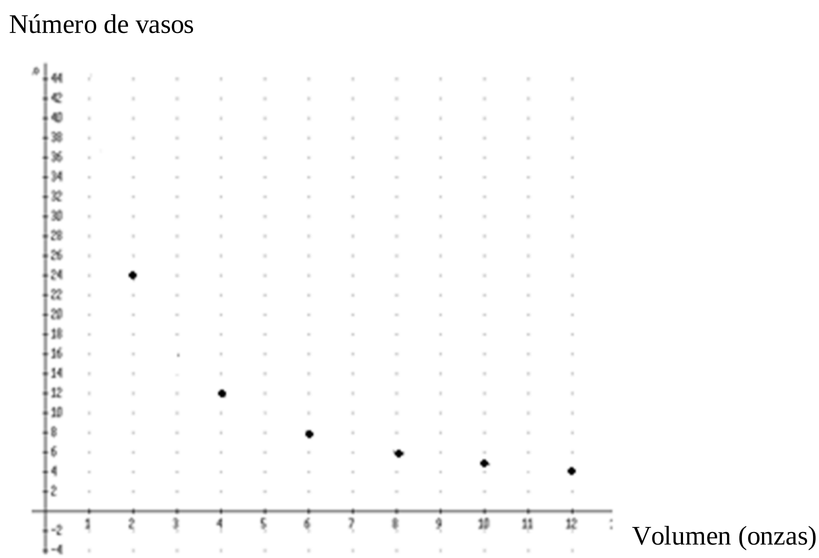
Técnicas

En la pregunta 1 se pretende que el estudiante realice una representación tabular para establecer una correspondencia entre el volumen del vaso y el número de vasos es decir, se está proponiendo una problema de tipo π_{sr} que deberá ser realizada utilizando la técnica τ_{sr}^{1}. Por la manera como está estructurada la pregunta, los estudiantes no podrán escoger otra opción de forma de representación.

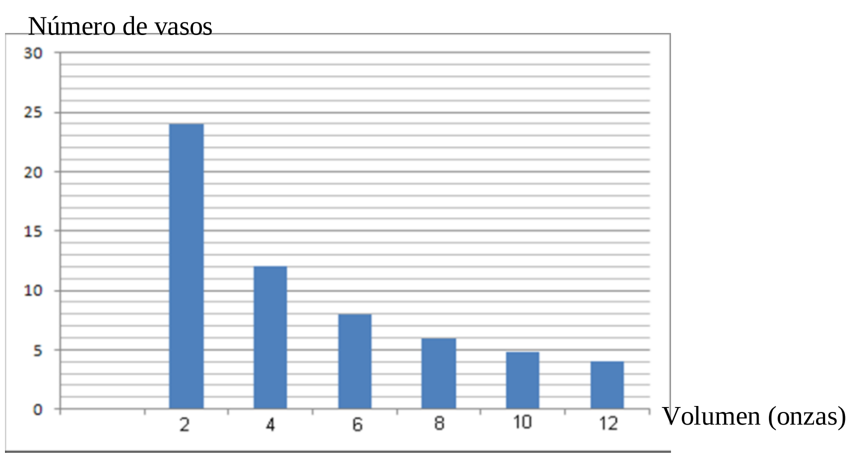
En la pregunta dos se pretende que el estudiante realice una representación gráfica a partir de la tabla diligenciada en la pregunta 1; nuevamente se propone un problema de tipo π_{sr}.

Las técnicas asociadas a estos problemas, correspondientes a representaciones de tipo cartesiano, estadístico e icónico, son τ_{sr}^2, τ_{sr}^3 y τ_{sr}^4 respectivamente**.** En cuanto a la técnica de elaboración de graficas cartesianas puede decirse que los estudiantes pueden recurrir a puntos o a trazos continuos.

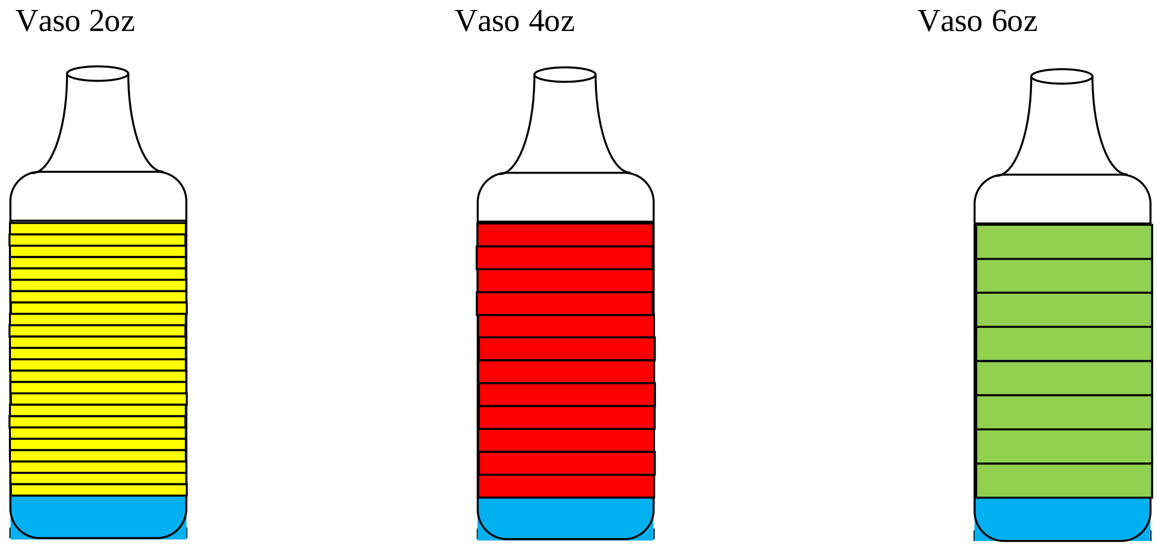
Gráfica cartesiana (τ_{sr}^2):



Gráfica estadística (τ_{sr}^3):



Representación icónica (τ_{sr}^{4}) (para los vasos de 2, 4 y 6 onzas)



La pregunta 3 literales (a) y (b) corresponde al tipo de problema π_{pdi}.

Es posible acudir a alguna de las siguientes técnicas:

Determinar primero el volumen que se llenará utilizando los resultados de la tabla, técnica τ_{pdi}^{1} (por ejemplo $2oz \times 24 = 48oz$). De ahí dividir 48 oz entre 5 oz y obtener como resultado 9,6 vasos (es decir, un 9 vasos y un poco más de la mitad de otro). Aquí se utiliza el hecho de que el producto de la variable independiente por la dependiente debe ser 48 oz. (O se puede preguntar por cuánto hay que multiplicar a 5 oz para obtener 48 oz, es decir, se determina la propiedad invariante que liga las dos variables), siendo necesario recurrir a un procedimiento como el siguiente $5oz \times f(5oz) = 48$ entonces $f(5oz) = \dfrac{48}{5oz}$. Estos procedimientos hacen parte de la técnica τ_{pdi}^{1}.

Aquí se recurre a un tipo de situación de repartición.

A partir de la gráfica cartesiana determinar el número de vasos para 5oz, esto es acudir a la técnica τ_{sr}^{2}. Si el estudiante recurre a realizar interpolación lineal para dar esta respuesta (esta interpolación también la podría hacer a partir de la tabla), a partir de los valores para 4 y 6 onzas (10 vasos). Se le solicita que haga la misma interpolación entre 2 y 8 onzas (15 vasos) y que compare los resultados obtenidos. Además se le puede pedir que extrapole el valor para 3 vasos de 2 oz y 4 oz y que lo compare con el valor obtenido directamente de la gráfica.

Nota1: Se esperan procedimientos análogos para encontrar el número de vasos para 9 oz.

La pregunta 3 literales (c) y (d) corresponde también al tipo de problema π_{pdi}.

La técnica asociada con este tipo de problema podrá ser:

Retomar la tabla, técnica τ^{1}_{sr}.

Volumen vaso (onzas)	2	4	6	8	10	12
Número de vasos	24	12	8	6	4,8	4

A partir de la tabla y utilizando la técnica τ^{2}_{pdi}, observar que 6 onzas es el triple de 2 onzas; 12 es el triple de 4 y el número de vasos son 8 y 24; 4 y 12 respectivamente por lo tanto al triplicar el tamaño del vaso, el número de vasos se reduce a la tercera parte. Igualmente se observa que al reducir el tamaño a la mitad, el número de vasos se duplica como ocurre con (4 oz y 2oz; 8 oz y 4 oz; 12 oz y 6 oz cuyos números de vasos son respectivamente 12 y 24; 6 y 12; 4 y 8). Se observa que mientras en una magnitud la razón juega un papel de ampliador en el otro funciona como reductor, observación que es sustentada por la teoría de la razón como operador.

La pregunta 3 literales (e) y (f) también corresponden al tipo de problema π_{pdi}, pero se solicitan análisis de tipo cualitativo, además se pretende que el estudiante a partir de los resultados obtenidos en los literales (a), (b), (c) y (d), a partir de las gráficas realizadas, de los registros de la tabla y de la experiencia en sí determine que:

Si el tamaño del vaso aumenta entonces el número de vasos disminuye y el producto de los dos valores es siempre el mismo y si el tamaño del vaso disminuye el número de vasos aumenta y el producto de los dos valores es siempre el mismo, es decir, que cualitativamente determinará que entre las cantidades de magnitud se da una proporcionalidad inversa.

4.3.2 Los sistemas de prácticas de los estudiantes

Esta actividad se realizó conservando los grupos de trabajo conformados en la primera situación. A cada grupo se le entregó un recipiente transparente graduado en onzas, cinco vasos desechables de diferente capacidad (2, 4, 6, 8, y 12 onzas), un balde con agua y una hoja de papel en donde estaba escrita la guía de trabajo que debían realizar, esta misma hoja fue también entregada a cada uno de los estudiantes.

Aunque en la tabla se mencionaba el uso de un vaso de 10 onzas, para la realización de la experiencia este no se les proporcionó, para determinar las estrategias utilizadas para completar la tabla.

En el desarrollo de la experiencia, al igual que en la situación 1, los estudiantes recurrieron a realizar la práctica hasta utilizar el vaso más grande. En algunos instantes se notó como algunos de ellos intentaron pronosticar el número de vasos para el vaso de 12 onzas; uno de ellos lo hizo bien y al preguntársele como había llegado a esta respuesta manifestó:
"Llenando el vaso de seis la respuesta es ocho, ¿no? entonces llenando el vaso 12 la respuesta es 4 porque el doble del vaso 6 es 12, ¿no? entonces la respuesta del vaso 12 es 4 porque 4 es la mitad de 8", lo cual evidenció el uso de la técnica τ_{pdi}^{2} y de las relaciones parte – todo (éstas relaciones fueron reforzadas en el trabajo de intervención realizado en la semana teniendo en cuenta las "fallas" detectadas en la aplicación de la primera situación). El uso de la relación parte - todo que utiliza el estudiante no es que la relación entre un par de magnitudes en uno de las magnitudes, se refleja de manera análoga en la otra magnitud. Por el contrario, la relación parte - todo que él establece entre un par de cantidades de magnitud en una magnitud, sirve como base para establecer la relación inversa entre el par de cantidades de magnitud en la otra magnitud. Esto implica una mayor conciencia de la manera como se correlacionan las dos variables de la situación.

Completando la tabla: Experiencia con el material concreto

Para determinar el número de vasos para el vaso de 10 onzas la mayoría de estudiantes utilizaron la tabla, técnica τ^4_{pdi}, para "interpolar" el valor, razonando de la siguiente manera:

Si con el vaso de ocho onzas se requieren 6 vasos y con el de doce onzas 4, y como diez está en la mitad entre 8 y 12 entonces se requieren 5 vasos puesto que 5 está en la mitad entre 6 y 4.

Este razonamiento muestra que los chicos identifican que las dos variables se correlacionan de alguna manera, pero no tienen claro el tipo de correlación que se establece entre ellas. Es tal sentido intentan utilizar ciertos conocimientos que se basan en la intuición de la linealidad entre variables y a un razonamiento por analogías.

Un estudiante afirmó que con el vaso de diez onzas se requerían 3 vasos para llenar el recipiente hasta el nivel indicado, demostrando que no tenía claro que una de las condiciones de la situación era que si el tamaño del vaso disminuía, el número de vasos aumentaba y esto no ocurría si se compara el número de vasos para el vaso de 12 onzas (4 vasos) con el número de vasos para el vaso de 10 onzas.

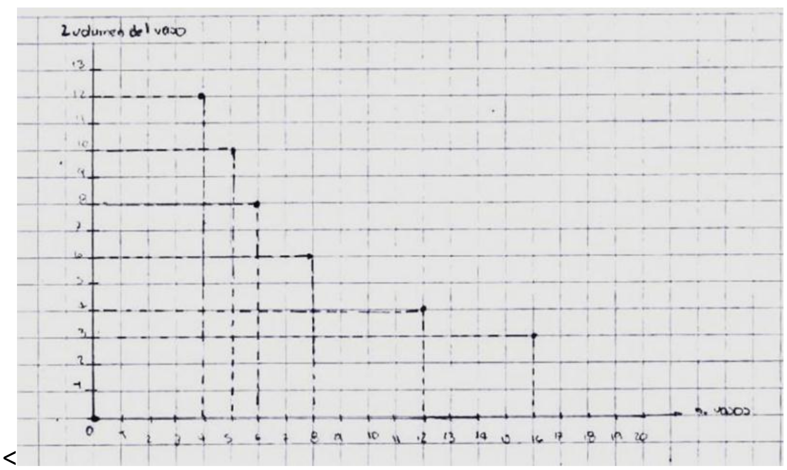
Un estudiante intentó utilizar la gráfica, es decir acudir a la técnica τ^4_{pdi}, para dar la respuesta para el vaso de 10 onzas, infortunadamente su gráfica no estaba bien hecha.

Respondiendo las preguntas de reflexión

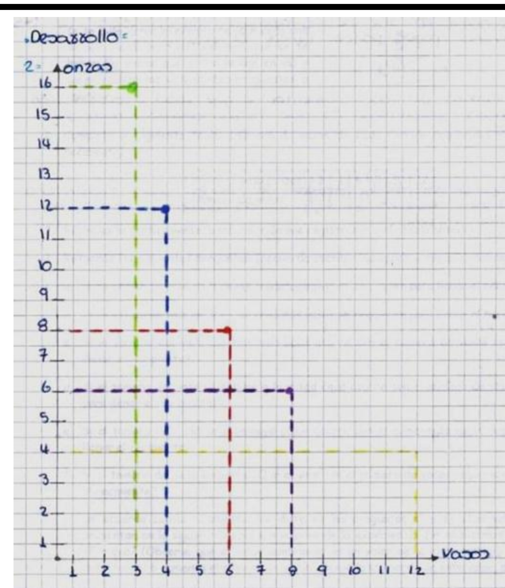
Haciendo las gráficas

La intervención realizada acerca de la funcionalidad de utilizar gráficas cartesianas llevó a que los chicos utilizaran este tipo de representación para la respuesta a la primera cuestión, esto significa que acudieron a la técnica τ^2_{sr}. Sin embargo, los estudiantes no utilizan la gráfica para dar respuesta a las preguntas, es decir no utilizan la técnica τ^{4}_{pdi}, lo cual demuestra que esta representación aún carece de un poder operatorio, entre otras cosas, porque no son bien construidas, o porque el sentido que les dan los estudiantes aún es muy incipiente. Esto empieza a mostrar la necesidad de nuevas líneas de intervención pedagógica, que busquen mostrar el valor de una gráfica cartesiana como instrumento para realizar cálculos, resolver problemas (claro está, con sus respectivas limitaciones.)

La mayoría de estudiantes (20) realizó correctamente la gráfica cartesiana haciendo nubes de puntos y no trazo continuo. Algunos utilizaron colores distintos para cada punto.



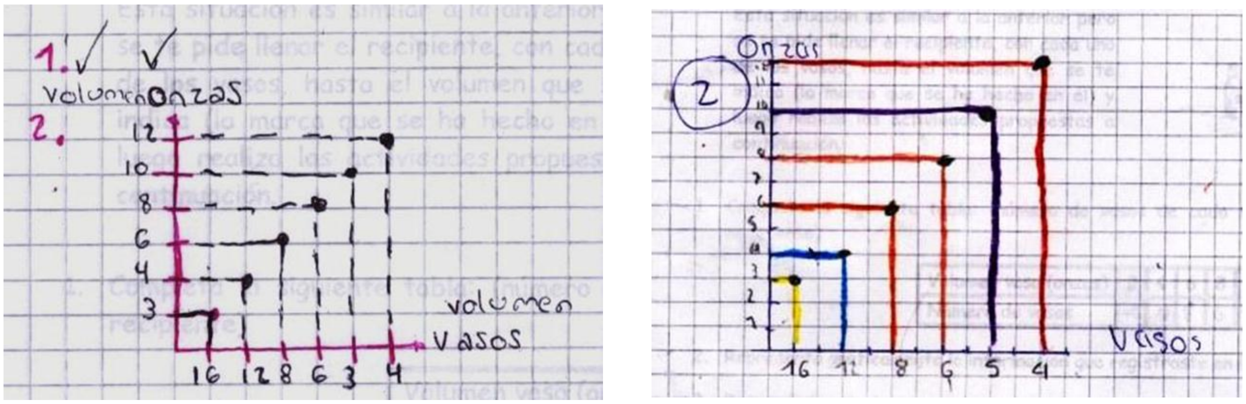
Gráfica 10a



Gráfica 10b

Gráfica 10. Dos gráficas cartesianas para la situación 2.

Algunos (6), representaron en el eje x el número de vasos utilizados, pero lo hicieron en el mismo orden en que aparecía en la tabla, es decir, representaron los números en orden descendente 16, 12, 8, 6, 5 y 4, es decir, no consideraron la posición de los enteros en la recta numérica, a esto se suma que no se hizo un adecuado manejo de la escala, esto es, 2 cuadritos podría representar indistintamente 2, 4 o 1 onza al mismo tiempo, esto llevó a que en la nube de puntos, si estos se unieran, se obtendría una línea recta.

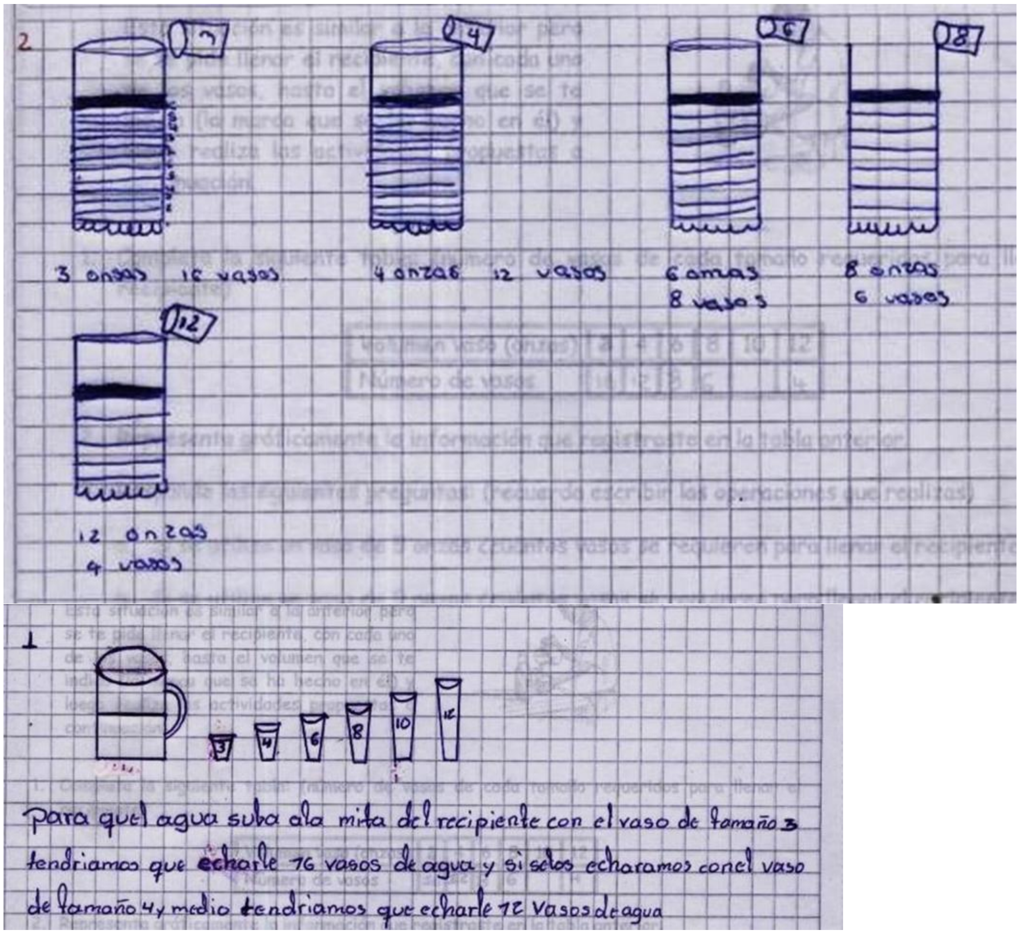


Gráfica 11. Gráficas cartesianas que no consideran la posición de los enteros

Otros (4) aunque respetaron el orden de los números enteros no emplearon una escala adecuada y les ocurrió lo mismo que a los del grupo anterior.

Gráfica 12. Una gráfica cartesiana sin una escala adecuada para la situación 2.

Dos estudiantes persistieron en la técnica τ_{sr}^{4} en la que nuevamente no se exhibe relación alguna entre los tamaños de los vasos representados y las relaciones parte - todo entre estos. Uno de ellos deja ver en su representación icónica la constancia del nivel de agua alcanzado, es decir que independiente del tamaño del vaso siempre se alcanza el mismo volumen, y utiliza diferentes alturas de igual tamaño para representar los números de vasos requeridos con cada vaso.



Gráfica 13. Dos gráficas icónicas para la situación 2.

Utilizando la razón

Con respecto a la pregunta: Si se utiliza un vaso de 5 onzas ¿cuántos vasos se requieren para llenar el recipiente?, correspondiente al tipo de problema π_{pdi}, la respuesta más común fue que se requieren 10 vasos.

> "Yo digo que se requieren 10 vasos porque si con 4 onzas se requieren 12 y con 6 onzas se requieren 8 entonces sería como que va de dos en dos" (audio6sit2 0:15 – 0:25)
>
> "*Con 6 que es más grande número se necesitaron 8 con cinco que es más pequeño se necesitaron 7*", (audio10sit2 1:25 – 1:32) aquí se evidencia que el estudiante está percibiendo la correlación entre las dos variables involucradas en la

situación de manera lineal y no como se esperaba esto es, que si el tamaño del vaso disminuye el número de vasos debería aumentar.

"Podría ser 10 vasos…restando 12 menos 2 … porque en cada uno se restan dos", (audio12sit2 0:12 – 1:08) al cuestionarlo del por qué y si siempre se hace esta resta; cambia y dice: "es que con el de 10 onzas colocamos 5, luego con el de 5 10 porque 5 es la mitad de 10". (audio12sit2 1:21 – 2:10)

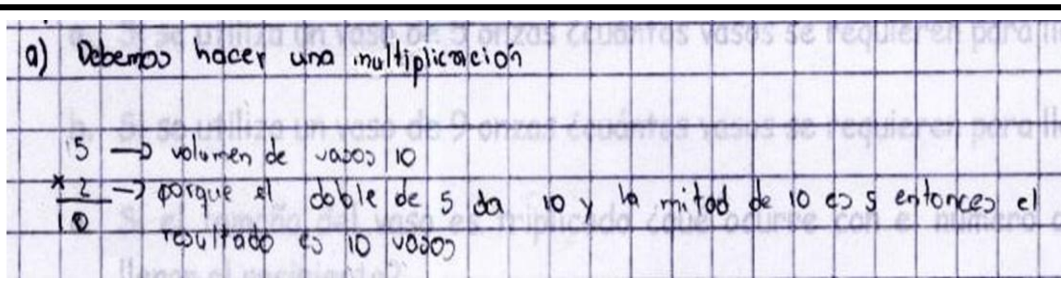
Un estudiante responde: "*para 5 onzas se requieren 13 vasos, para 9 onzas 7 vasos*", (audio12sit2 5:05 – 5:35) se le pregunta "entre más grande el vaso qué ocurre" y él responde "*se requieren menos vasos*", (audio12sit2 6:13) al mirar sus resultados y lo que acaba de responder dice "*¡dañe!*"

Un estudiante dice que "*para 5 requiere 14 puesto que para 4 son 12*" (audio13sit2 1:00 – 1:20) se evidencia, nuevamente que el estudiante está percibiendo la correlación entre las dos variables involucradas en la situación de manera lineal y no como se esperaba, (a más, menos).

"Para 10 la respuesta es 5 porque no hay otro número entre 4 y 6 y 10 está en medio de 8 y 12" (audio13sit2 1:44 – 2:00). Está respuesta se debe posiblemente a que en la escuela hasta grado sexto, se privilegia el trabajo con números naturales, lo cual lleva a los estudiantes a considerar que entre dos números solamente hay un número, es decir, los estudiantes piensan sólo con naturales, o a que asumen, que la variación entre las dos magnitudes tiene un cierto comportamiento lineal.

Algunos realizaron y escribieron la operación:

Se necesitan 10 vasos para llenar un recipiente



Gráfica 14. Uno de los procedimientos empleados para completar la tabla

En esta operación realizada por el estudiante, que aunque no lo conduce a la respuesta correcta, aparece la técnica τ^2_{pdi}.

En las respuestas de los estudiantes se refleja la determinación de la condición de que entre más grande el vaso, menos vasos, pero no surge la otra relación, y es que el producto entre las dos cantidades debe ser constante. Se recurre a las propiedades de la linealidad y a la interpolación, la cual en cierta manera puede interpretarse como otra intuición acerca de que las correlaciones presentan un comportamiento lineal. Predomina el razonamiento por analogías, por ejemplo cuando expresan que va de dos en dos. Hay conciencia y uso de las relaciones parte - todo para dar la respuesta para el vaso de 5 onzas a partir de la respuesta para el vaso de 10 onzas. En este caso, en el que se evidencia la comprensión de la relación parte - todo, se puede tener cierta intuición que esta relación es una razón, pero lo que no se ha logrado comprender es el asunto de la proporcionalidad, particularmente de la correlación inversamente proporcional.

Para responder: Si se utiliza un vaso de 9 onzas ¿cuántos vasos se requieren para llenar el recipiente?

Una de las respuestas mayoritariamente dada fue 5,5 vasos.

Para varios estudiantes las respuestas fueron o 5 o 4 vasos y no detectaron que estos valores ya correspondían a otros tamaños de vasos. Se evidencia que aún no se comprende la manera como están correlacionadas las variables. Si un valor en una magnitud aumenta, en la otra disminuye.

"Para el nueve sería un número entre 6 y 5 porque ellos ya están, esto es, 5,5". (audio15sit2 1:59 – 2:40)

Para responder estas dos cuestiones una estudiante pregunta: "¿De pronto usted sabe cuánto medía la botella? ¿Cuántos centímetros o algo así? (audio22sit2 0:00 – 0:50)

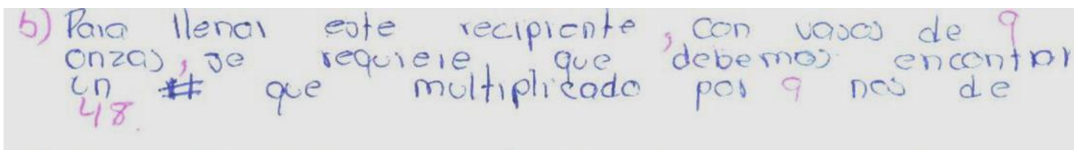
Investigador: ¿Y tú sabes cuánto medía la botella?

Estudiante: Sí, 12… ¡no, no, no, no! Nosotros necesitamos saber la medida de esa botella para poder encontrar el número de vasos.

Otro niño interviene y dice "35 porque hay que sumar todas las onzas que hay en la fila de debajo de la tabla".

La misma niña: “48 porque al sumar el 12 cuatro veces serían 48, ¿cierto?” “Estamos buscando un número que multiplicado, dividido, restado o sumado nos de 48 con el nueve” (audio24sit2 0:00 – 0:23) Al mencionar todas las operaciones, la estudiante se apartó del razonamiento que venía haciendo sin embargo, es importante resaltar que identificar el 48 como un número que sirve de base para resolver los problemas que se presentan, es un buen comienzo en el camino de identificar la constante, el principio invariante, que permite resolver todo tipo de problemas que se presentan.

Finalmente en la hoja de respuestas escribió:


b) Para llenar este recipiente, con vasos de 9 onzas, se requiere que debemos encontrar un # que multiplicado por 9 nos de 48.

Gráfica 15. Una de las respuestas a la pregunta 3(b) de la situación 2

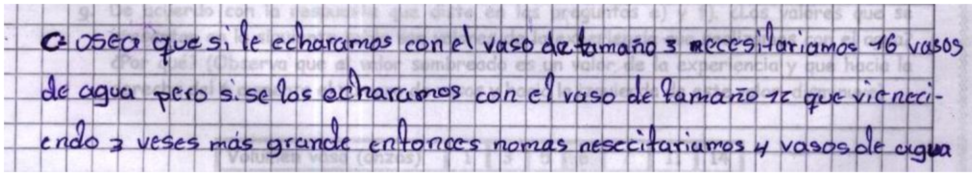
Los valores numéricos dados como respuesta a esta pregunta correspondían a valores que ya se habían utilizado como respuesta para otros tamaños de vasos, pero tal situación no les pareció extraña esto se debe, quizá, a que para responder cada preguntan se desligan u olvidan de la respuesta anterior.

Aunque el resultado no es correcto, (8,5 vasos), un alumno intento determinar, erróneamente, que 6 es la tercera parte de 9 y luego llegó a tal respuesta. Llama la atención, pues intentó utilizar las relaciones parte - todo, y recurrió a la técnica τ^{2}_{pdi}.

Con respecto a la pregunta. “Si el volumen del vaso es triplicado ¿qué ocurre con el número de vasos requerido para llenar el recipiente?”, que también corresponde al tipo de problema π_{pdi}.

Un significativo número de estudiantes (15) determinaron únicamente que se requería un menor número de vasos.

Un pequeño número de estudiantes determinó que el número de vasos se redujo en la tercera parte y lo ilustró con ejemplos tomados de la tabla construida.


c. osea que si le echaramos con el vaso de tamaño 3 necesitariamos 16 vasos de agua pero si se los echaramos con el vaso de tamaño 12 que vieneci-endo 3 veses más grande entonces nomas nesecitariamos 4 vasos de agua

Gráfica 16. Una de las respuestas a la pregunta 3(c) de la situación 2

Aunque en esta respuesta el estudiante no triplicó sino que cuadruplicó, de todas maneras acudió a la técnica τ^2_{pdi}.

Algunos estudiantes al responder esta pregunta establecieron que el volumen del vaso cambiaba y además dieron a entender que el volumen del recipiente se mantenía.

"Si se utiliza un vaso muy grande entonces el agua se va a salir del recipiente". Esta respuesta permite pensar en la posibilidad, en una futura aplicación de esta situación, de introducir a los chicos en el problema del valor constante del volumen total del recipiente a través de la pregunta: ¿cuál es la capacidad del vaso más grande que se puede utilizar, tal que usando un solo vaso, se llene el recipiente y no sobre el líquido en el vaso?

Si se triplica el tamaño del vaso se necesitan menos vasos. Es la respuesta común pero no se cuantifica cuánto más.

Al preguntar por triplicar el vaso, la pregunta de los estudiantes fue, ¿cuál vaso se triplica? Es decir no se acudía fácilmente a la generalización.

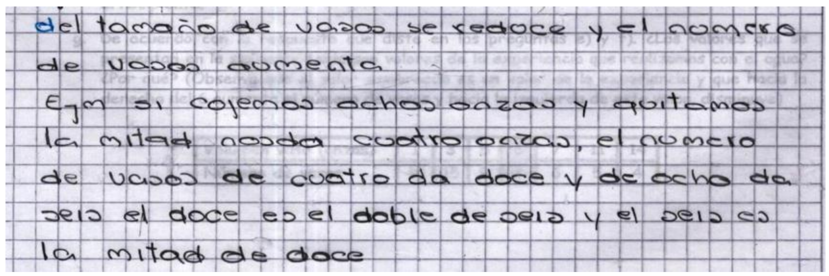
"Si se hace más grande el vaso, el recipiente se llena más rápido".

En esta pregunta los estudiantes tenían la necesidad de dar valor al volumen del vaso.

Sabían que reducía pero no podían cuantificar y llegar a decir que era la tercera parte.

En la pregunta: Si el volumen del vaso se reduce a la mitad ¿qué ocurre con el número de vasos requerido para llenar el recipiente?

Se mantuvo la tendencia de la pregunta anterior y una de las respuestas dadas por los estudiantes es:


del tamaño de vasos se reduce y el numero de vasos aumenta
Ejm si cojemos ochos onzas y quitamos la mitad nos da cuatro onzas, el numero de vasos de cuatro da doce y de ocho da seis el doce es el doble de seis y el seis es la mitad de doce

Gráfica 17. Una de las respuestas a la pregunta 3(d) de la situación 1.

La otra fue: "La respuesta a la pregunta d) también la habríamos podido dar así: Que tres es la mitad de seis, y 4 es la mitad de 8". (audio33sit2 0:13 – 0:36)

La primera respuesta fue escrita en la hoja de operaciones, la segunda respuesta fue grabada en audio cuando estaban desarrollando la actividad.

En la pregunta. "Si el volumen del vaso disminuye ¿Qué ocurre con el número de vasos requeridos para llenar el recipiente? La mayoría de estudiantes respondió que si el volumen del vaso disminuye entonces el número de vasos aumenta y si el volumen aumenta, el número de vasos disminuye. Utilizan o surge el concepto de rapidez, si el vaso es grande el recipiente se llena más rápido.

Nota: Dos estudiantes consideran que si el valor de una cantidad en una magnitud aumenta la correspondiente cantidad en la otra magnitud también debe aumentar. Lo cual se demuestra con las respuestas que dan.

La pregunta sobre la tabla final, correspondiente a un tipo de problema π_{sr} y a la técnica τ_{sr}^{1}, no permitió determinar que el producto debía ser constante; los estudiantes no establecieron el producto entre cantidades de magnitud correspondientes de las dos magnitudes. Ni siquiera la chica que determinó la altura del recipiente identificó el error en la tabla de que el producto debería ser constante.

A manera de conclusiones de la situación 2

El desempeño de los estudiantes en esta situación se puede agrupar así:

- ✓ Aquellos que definitivamente no son conscientes que si una cantidad de una magnitud aumenta la respectiva cantidad en la otra magnitud disminuye.
- ✓ Quienes sí identifican la forma de relación anterior, pero hacen un tratamiento como si se tratará de una variación lineal negativa.
- ✓ Los que identificaron correctamente la forma de variación entre las magnitudes.

Si se analiza una sola situación de llenado del recipiente con un vaso determinado, al interior de esa situación, la variación es de proporcionalidad directa. A manera de hipótesis, para futuros trabajos, las situaciones de variación inversa están relacionadas, no con funciones de una variable, sino con funciones de dos variables.

Las respuestas dadas a la pregunta referente a triplicar el volumen del vaso podría ser un indicio de otro fenómeno: la acción de llenar el recipiente con un vaso distinto, es asumido por los estudiantes como un problema diferente. En cuyo caso el volumen variable de los vasos no es asumido como parte de los posibles valores de una misma variable, y por lo tanto no se conectan entre sí. Dicho de otra manera, cada situación de llenado fue vivida como un problema independiente de los demás. Y por lo tanto el volumen de los vasos no fue visto como los valores posibles de una misma situación.

El avance en la construcción correcta de las gráficas permite afirmar que los chicos logran identificar la presencia de dos cantidades que cambian. Esto es, los estudiantes identifican las dos variables y determinan que éstas varían de manera conjunta. Por otro lado, las gráficas cartesianas que no están adecuadamente construidas nos permiten plantear, acerca de los estudiantes que la hicieron que:

Una posible causa de fallas en la construcción de gráficas cartesianas es el no reconocimiento de que se está trabajando con rectas numeradas (o graduadas) y que por tanto lo que se representa en los ejes son cantidades. Por otro lado, se evidencia el manejo de relaciones de orden pero no en el sentido numérico sino en el sentido de aparición de los eventos. Esto es, los datos en uno de los ejes se ubican no de acuerdo al orden de los números reales sino de acuerdo al orden de aparición en la realización de la experiencia.

De igual forma, la construcción de gráficas cartesianas implica un manejo intuitivo de la proporcionalidad[45] en lo referente a la utilización de una escala adecuada. En tanto que la representación estadística no necesariamente requiere el empleo de una recta graduada en el eje utilizado para representar la variable. Esta observación, sobre gráficas cartesianas, nos permite recomendar que para la enseñanza de éstas, se fortalezca inicialmente el trabajo unidimensional, haciendo representaciones que favorezcan el uso y manipulación de escalas adecuadas.

4.4 Situación 3

4.4.1 Análisis desde la mirada del experto

Situación 3: A comprar el arroz

Un almacén de cadena de la ciudad de Popayán, ofrece arroz de diferentes marcas, presentaciones y precios, esta información aparece detallada en la siguiente tabla:

(Nota: 1 libra equivale a 500 gramos y 1 Kilogramo a 1000 gramos)

MARCA	PRESENTACIÓN	PRECIO ($)
ARROCERO	3 Kilogramos (Kg)	4800
	5 Kilogramos (Kg)	8000
	12 Kilogramos (Kg)	19200
ROCITO	6 libras (lb)	5400
	5 Kilogramos (Kg)	7800

[45] Tal vez no de la proporcionalidad como función pero sí del establecimiento de proporciones en el manejo de la escala, por ejemplo, si se duplica el valor de una variable, el segmento que la representa debe ser el doble.

	14 Kilogramos (Kg)	21000
EXTREMO	1 libra (lb)	850
	2 Kilogramos (Kg)	3400
	8 Kilogramos (Kg)	13600

1. Si tuvieras que hacer las compras mensuales para tu casa con el ánimo de economizarte algún dinero ¿qué marca de arroz comprarías y porqué lo harías?

2. Para cada marca realiza una gráfica que represente la presentación y el precio.

3. Para la marca de arroz que seleccionaste: (Recuerda escribir las operaciones que realizas)
   a. ¿Cuál sería el valor de 10 kilos de arroz?
   b. ¿Cuál sería el valor de 7 kilos de arroz?
   c. ¿Cuántos kilos de arroz se alcanzan a comprar con 23400 pesos?
   d. ¿Cuántos kilos de arroz se alcanzan a comprar con 63000 pesos?
   e. ¿Cómo se calcularía el valor de un determinado número de Kilos de arroz?
   f. ¿Cómo se podría encontrar la cantidad de kilos de arroz que se pueden comprar con una cantidad determinada de dinero?

Propósitos:

Reconocer las magnitudes presentes en la situación.

Identificar procesos de covariación entre magnitudes.

Reconocer el rol de la razón.

Gestión de la situación "A comprar el arroz"

Estructura de la situación

En la actividad se presentan tres marcas de arroz en diferentes presentaciones y diferentes precios. Para dos de las marcas se ha mantenido constante el precio por Kilogramo de tal manera que el estudiante determine que el precio es independiente de la presentación y para una de ellas se ha variado el precio en cada presentación con el propósito que el estudiante observe que el precio por kilogramo va disminuyendo a medida que el peso aumenta. Para una de las marcas se ha dejado expresado el precio de una libra, habiendo dado inicialmente el factor de conversión de libras a kilogramos, para observar si recurre a utilizar directamente este valor a manera de una razón como operador.

En dos de las marcas se ha dado un mismo peso con diferentes precios para determinar si el estudiante utiliza este hecho para dar respuesta a cuál marca de arroz es la más económica, exhibiendo así el uso de un análisis funcional.

En la pregunta 1 se pretende que el estudiante identifique que para presentaciones de mayor peso una de las marcas es más económica que las otras dos, es decir, aquí se hace necesario que el estudiante ponga en relación las dos magnitudes, siendo la magnitud M_1 el peso en kilogramos y M_2 el precio del arroz.

Nota: Es posible que el alumno determine, sin hacerlo explicito, que M_1 sea el peso en Kg y M_2 sea el precio en pesos, es decir, la razón como cantidad extensiva haría referencia a la cantidad de Kg por cada peso ($), en cuyo caso la razón sería el inverso multiplicativo de la razón con la que se trabajaría si se definen las magnitudes al contrario.

La segunda pregunta pretende incentivar el uso de diferentes tipos de representaciones, especialmente las gráficas (diagramas de barras, gráficas cartesianas, representaciones icónicas). Las dos primeras se ven favorecidas por la presentación de los datos en una tabla. No se exige un gráfico en particular para poder observar en los estudiantes, además de las representaciones escritas, a que gráficos recurren para representar el comportamiento de la situación.

En la tercera pregunta, partes a y b, se pretende observar cuál es el uso que se le da a la razón para obtener el resultado. La parte e) de esta pregunta busca que el alumno se obligue a determinar una relación funcional entre los espacios de medida, esto es, para cualquier valor de la variable independiente (peso en Kg) hallar el valor de la dependiente (precio en pesos). En los literales c) y d) se pretende mirar cómo se obtiene la variable independiente a partir del conocimiento de la variable dependiente. Y el f) busca observar procesos de generalización dados en las respuestas c) y d) y obligar a la utilización de análisis funcionales.

Conceptos y Tecnologías:

Los conceptos que están involucrados en la Situación 3 tienen que ver con: la covariación entre dos magnitudes, a saber, $Magnitud\ uno\ (M_1)$ – el precio de cada presentación, y $Magnitud\ dos\ (M_2)$– el peso de las presentaciones de arroz. Por las condiciones de la situación, ambas magnitudes son continuas, esto es, $M_1\ y\ M_2$ son subconjuntos de los números reales. La teoría que soporta las tecnologías asociadas a los tipos de problemas que se espera que los estudiantes resuelvan en esta situación de proporcionalidad simple directa (psd) es la de la razón como relator, la razón como operador, la razón como correlator entre cantidades y los sistemas lineales directos.

Técnicas

Para dar respuesta a la pregunta 1 es posible que los estudiantes recurran a:

Determinar el precio por kilogramo de arroz para cada una de las presentaciones en cada una de las marcas y a partir del resultado determinar la más conveniente, así:

Nota: Los siguientes tres procedimientos corresponden a utilizar la primera parte de la técnica.

- ✓ Sabiendo que el valor de 3 Kg de arroz es $ 4800 entonces se construye la relación:

$$R : M_1 \times M_2 \to Q$$
$$(a,b) \mapsto \frac{a}{b} = \rho = R(a,b)$$

donde M_1 es el peso en Kg, M_2 el precio y Q es el precio por Kg $\frac{\$4800}{3kg} = \$1600 \text{ por cada Kg}$, es decir, ρ = $1600 por cada Kg (en este caso ρ es una razón).

- ✓ A partir del conocimiento de que el valor de 5 Kg de arroz es $8000 el estudiante puede proceder análogo al proceso anterior y encontrar nuevamente que ρ = $1600 por cada Kg.
- ✓ Sabiendo que el precio de 12 Kg de arroz es $ 19200 el estudiante puede proceder análogo a los anteriores procesos y encontrar nuevamente que ρ = $1600 por cada Kg.

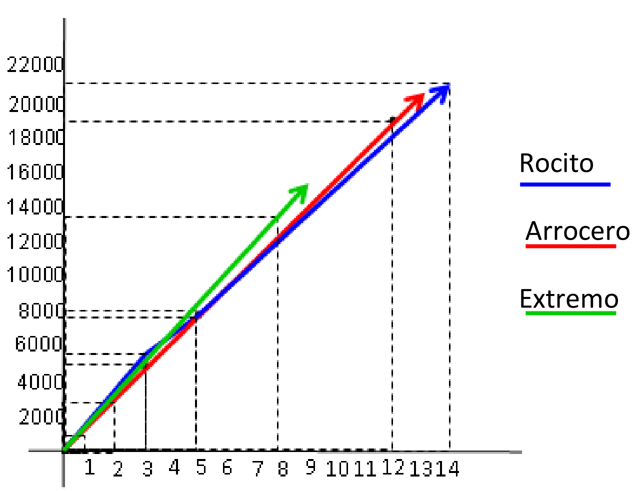
Nota: El estudiante concluirá que el arroz ARROCERO tiene el mismo precio, ($ 1600) por cada Kg en cualquier presentación.

Se empleará un procedimiento similar para las otras dos marcas, determinando que para EXTREMO las tres presentaciones tienen el mismo valor ρ = $1700 por cada Kg, mientras que para ROCITO los precios varían ρ = $1800 por cada Kg en presentación de 6 lb (3Kg), ρ = $1560 por cada Kg en la presentación de 5 Kg y ρ = $ 1500 por cada Kg en la presentación de 14 Kg.

Lo anterior indicaría que se compraría la marca de arroz ROCITO puesto que para las presentaciones de 5 y 14 kg ofrece más bajos precios.

En el desarrollo de la pregunta 2 relacionada con el tipo de problema π_{sr}, se prevé acudir a las técnicas de representación τ_{sr}^{2}, τ_{sr}^{3} y τ_{sr}^{4}.

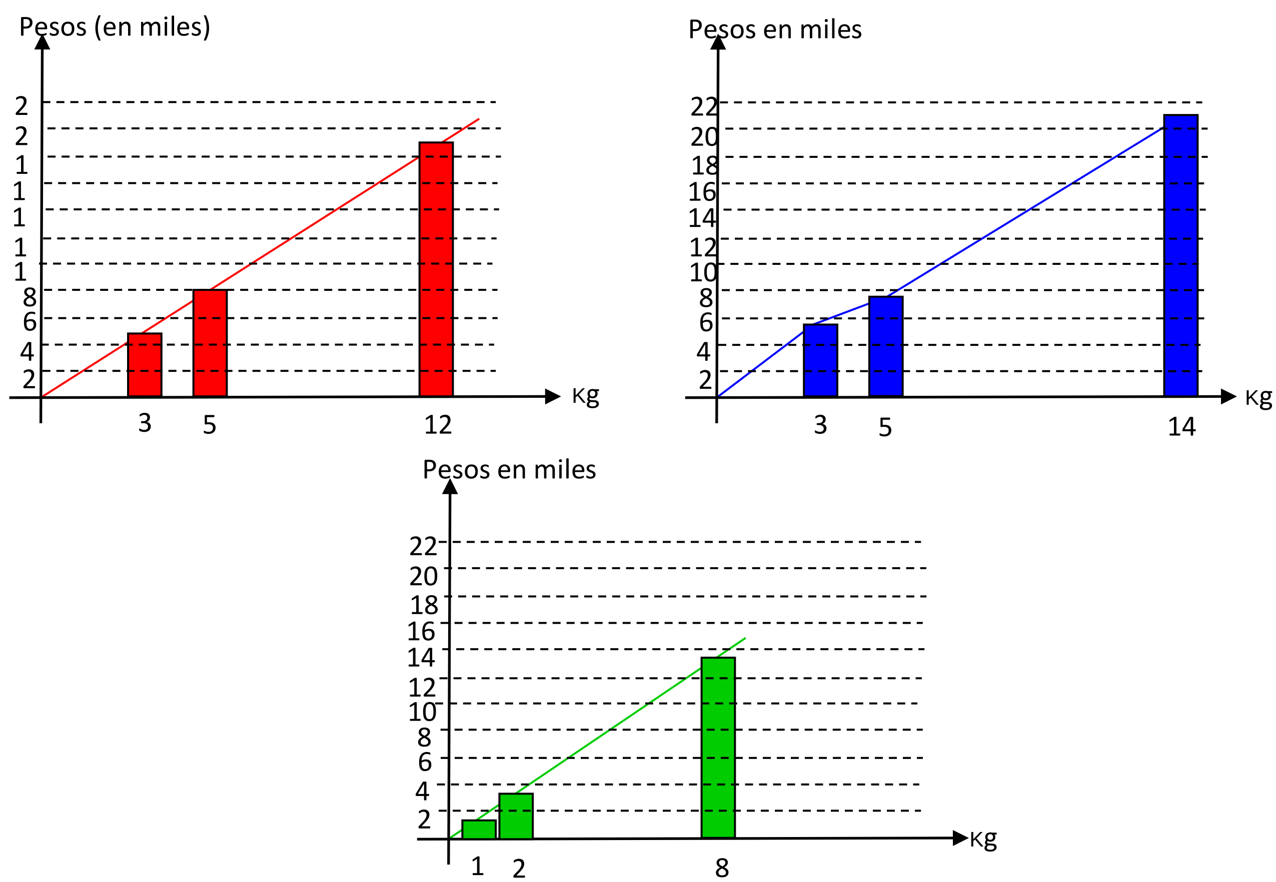
Gráfica cartesiana (τ_{sr}^{2}):



Para arrocero y extremo la representación es una recta lo cual evidencia que el valor por kilogramo para estas marcas es constante, es decir, independiente de la presentación, mientras que para rocito no se obtiene una única recta que exhibe la diferencia de precio de acuerdo con la presentación.

Nota: Se puede presentar también el caso de representar cada marca en planos diferentes.

Diagrama de barras (τ_{sr}^{3}): (Rojo: arrocero; azul: rocito y verde: extremo)



Representaciones icónicas **(** τ_{sr}^{4} **),** aunque no ofrecen información pertinente para el análisis, es posible para la edad en la que se aplica, que algunos estudiantes realicen “dibujos” de bolsas de arroz.

Cada uno de los literales de la pregunta 3 corresponde al tipo de problema π_{pdi} .

Para determinar las técnicas que posiblemente serán usadas se va a suponer que se haya escogido a ROCITO como la marca más económica.

Para dar respuesta a la pregunta 3.a. se podrá construir una tabla, es decir, utilizar la técnica τ^4_{pdi} y técnica τ^4_{pdi} para determinar el valor de 10 Kg de arroz, esto sustentado en la tecnología de los análisis escalares θ_{ae}.

M_1	M_2
5 Kg	$7800
10 Kg	$15600
15 Kg	$23400
20 Kg	$31200

Tabla 5. Análisis escalar para determinar el valor de 10 Kg de ROCITO

Como el precio de 5 Kg es \$ 7800 entonces el precio de 10 Kg es 2 × \$ 7800 = \$ 15600. Aquí nuevamente se recurre a un análisis escalar puesto que se identifica que al duplicar un valor en una magnitud (peso en Kg) se duplica el valor correspondiente en la otra magnitud (precio). Este procedimiento corresponde a la técnica τ^2_{pdi}.

También se puede recurrir a utilizar la razón como correlación entre cantidades para buscar el cuarto valor en la expresión: $\frac{5Kg}{\$7800} = \frac{10Kg}{?}$. Procedimiento que se sustenta en la tecnología θ_{pr}.

Otra posibilidad sería utilizar procedimientos que empleen como operador el valor de la razón como relación encontrado para responder la pregunta 1. Es decir $\left(\rho(10kg) = {}^{\$1560}\!/_{1Kg} \times 10Kg = \$15600\right)$. Se estaría recurriendo a un análisis funcional (tecnología θ_{af}) que sustenta la técnica τ^1_{pdi}.

Para la pregunta 3 literal b.

Como el precio de 14 Kg es \$ 21000 entonces el precio de 7 Kg es \$ 21000 ÷ 2 = \$ 10500. Aquí nuevamente se recurre a un análisis escalar puesto que se identifica que al reducir a la mitad un valor en una magnitud (peso en Kg) se reduce a la mitad el valor correspondiente en la otra magnitud (precio), este proceso corresponde a la técnica τ^2_{pdi}.

También se puede recurrir a utilizar la razón como correlación entre cantidades para buscar el cuarto valor en la expresión: $\frac{14Kg}{\$21000} = \frac{7Kg}{x}$ procedimiento sustentado por la tecnología θ_{pr}.

Otra posibilidad sería utilizar como operador el valor de la razón como relación encontrado para responder la pregunta 1. Es decir $\left(\rho(7kg) = {}^{\$1500}\!/_{Kg} \times 7Kg = \$10500\right)$. Aquí se estaría recurriendo a análisis funcional. La técnica asociada con este procedimiento es τ^{1}_{pdi}.

Nota: En este procedimiento no necesariamente la respuesta es correcta.

Para llegar a la respuesta adecuada sería conveniente utilizar la estrategia siguiente:
Como 7 Kg es igual a 5Kg + 2Kg entonces el valor de 7 Kg es el resultado de sumar el precio de 5 Kg, es decir \$7800 y el precio de 2Kg, esto es (\$1800 × 2 = \$3600) (**RAZÓN COMO OPERADOR**) luego el valor total sería de \$ 11400. Aquí se observa la utilización de la linealidad de la función puesto que *f(5Kg+2Kg) = f(5Kg)+f(2Kg)* = \$7800 + \$ 3600 = \$11400, recurriéndose a un análisis escalar. Además esta forma de solución se corresponde con la técnica τ^{3}_{pdi}.

Nota: Como no existe una presentación de 2Kg o una combinación de las tres presentaciones que de exactamente 7 Kg para la marca ROCITO, el estudiante puede dudar acerca de qué valor individual tomar por Kilogramo, si el de la presentación de 6lb, o el de 5 Kg o el de 14 Kg. Para objeto de la investigación sería interesante que tome a 7 como la mitad de 14. Es decir que utilice la tecnología de las relaciones parte - todo y la técnica τ^{2}_{pdi}.

Para determinar cuánto arroz comprar con \$63000 en la marca ROCITO el estudiante podrá:

Utilizar la técnica τ^{1}_{pdi}, es decir, construir una tabla de doble entrada con las dos magnitudes y a partir de ella, a través de un análisis escalar y utilizando la técnica τ^{4}_{pdi}, encontrar la respuesta.

M_1	M_2
14 Kg	$21000
28 Kg	$42000
42 Kg	$63000
56 Kg	$84000

Tabla 6. Cantidad de Kg de ROCITO que se puede comprar con $63000

Dividir $63000 entre el valor por Kilo para la presentación de 14 Kg, es decir, $1500 por Kg y obtendría como resultado 42 Kg. (Se está utilizando la **RAZÓN** encontrada en la pregunta 1 **COMO OPERADOR,** que son las tecnologías que soportan la técnica τ_{pdi}^{1} aquí expuesta).

Apoyado en la tecnología θ_{ae} observar que $63000 es el triple de $21000 el costo de 14 Kg de ROCITO, luego se multiplica 14Kg × 3 = 42 Kg. Es decir, se identifica que al triplicar un valor en una magnitud el valor correspondiente en la otra magnitud también se debe triplicar, que corresponde a la técnica τ_{pdi}^{2}.

También se puede recurrir a utilizar la razón como correlación entre cantidades, tecnología θ_{pr}, para buscar el tercer valor en la expresión: $\frac{14Kg}{\$21000} = \frac{x}{\$63000}$.

Nota: Procedimientos análogos serán utilizados para obtener la cantidad de kilos de arroz que se desea comprar con $23400, pero utilizando la presentación de 5Kg.

Para la pregunta 3 literal e, las técnicas empleadas, son similares con aquellas que se emplearon en los anteriores literales la única diferencia es que se utiliza un valor genérico *n*.

El valor de un número *n* de Kilogramos de arroz puede ser obtenido así:

Multiplicando el número de Kilogramos *n* por el valor por Kilogramo, es decir $\left(\rho(n) = \$1500 / Kg \times nKg\right)$

En este caso se está realizando e induciendo a realizar un análisis funcional en la técnica τ^{1}_{pdi}.

En la pregunta 3 literal f se hace la misma consideración que la pregunta 3.e.

Para determinar la cantidad de kilogramos de arroz que se pueden comprar con una cantidad *n* de dinero el estudiante puede, a partir de tomar la presentación para la cual el valor por kilogramo es el menor:

Dividir la cantidad *n* de dinero entre $ 1500 por Kg. (razón como operador), que es parte de la técnica τ^{1}_{pdi}.

Dividir la cantidad *n* entre $21000 y multiplicar el resultado por 14 Kg. (tecnología θ_{pr}, fundamentado en la teoría de la razón como correlación entre cantidades, $n\times\frac{14}{21000}$ este resultado proviene de despejar *x* en la proporción $\frac{14Kg}{\$21000}=\frac{n}{x}$

En este ejercicio es posible que surja otro tipo de representación que sería la ecuación

$$14n = 21000x$$

4.4.2 Los sistemas de prácticas de los estudiantes

Esta situación se desarrolló de manera individual. Cada estudiante respondió unas preguntas a partir de una situación planteada. Aunque no era una situación experimental, esta trajo a sus mentes los momentos en que deben ir a la tienda a hacer los mandados o cuando van al supermercado a hacer sus compras.

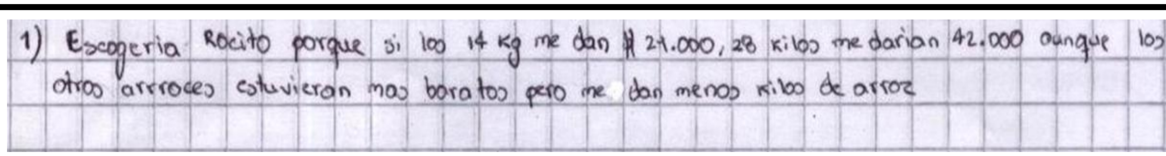
Respondiendo las preguntas de reflexión

Tomando una decisión

Para determinar cuál era la marca de arroz más económica se acudió a distintas estrategias, ellas fueron:

- Determinar la marca más económica por simple inspección, es decir, mirando cuál marca tenía los precios más bajos, sin tener en cuenta la presentación.
- Sumar los tres valores en cada una de las marcas, sin tener en cuenta que la suma de Kilogramos era distinta y comparar los resultados obtenidos. Mediante este procedimiento la más económica fue “Extremo”. Este hecho demuestra que los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones en las que aparecen dos magnitudes las trabajan por separado.
- Determinar la marca más económica obteniendo el valor de la primera presentación para cada marca que aparecía en la tabla y determinar que la más económica era “arrocero”.

Dos de ellos manifestaron escoger “Rocito” porque era la que más cantidad de arroz ofrecía (14 kilogramos)

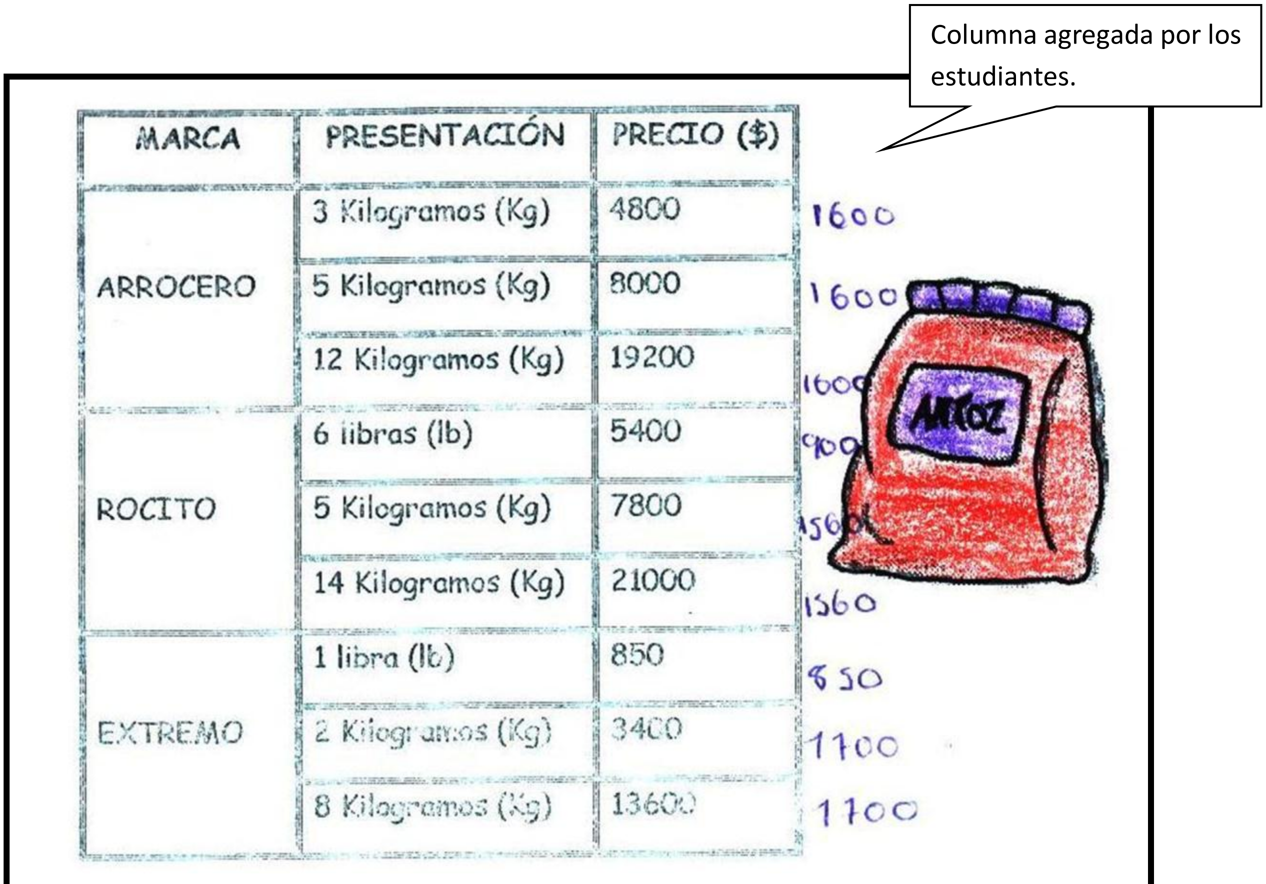


Gráfica 18. Uno de las respuestas a la primera pregunta de la situación 3.

- Otro grupo determinó, sin escribirlo, el precio por libra y por Kilogramo (o solamente por libra o sólo por kilogramo) de cada marca y cada presentación para determinar cuál era la más económica. Lo cual hace parte de la técnica τ_{pdi}^{1}.
- Un estudiante, al intentar determinar la marca más económica, observó que para ARROCERO el valor por kilogramo se mantenía constante y supuso que lo mismo ocurría para la segunda marca, ROCITO, por lo tanto fue sumando valores iguales por kilogramo a las presentaciones y los valores que obtenía no le coincidan con los de la tabla. Se le preguntó acerca del porqué y fue poco a poco deduciendo que ahí el valor no era constante.
- Dividir precio entre presentación, procedimiento que hace parte de la técnica τ_{pdi}^{1}. En este caso, hay que determinar si el número obtenido por los alumnos en la división corresponde al precio de un kilogramo de arroz, o es la relación constante entre la cantidad de arroz, y el precio de dicha presentación, y que por tanto se estaría

trabajando la razón como relator. Este hecho se definirá, observando en las siguientes preguntas si los estudiantes usan este valor para determinar el precio de una determinada cantidad de libras de arroz o la cantidad de libras de arroz que se pueden comprar con cierta cantidad de dinero.

- Un grupo, más o menos numeroso, agregó una “columna” a la tabla dada en la situación en la que colocó el precio por libra y por kilogramo para cada marca y cada presentación. Es decir, amplió la tabla, lo que corresponde a la técnica τ_{sr}^{1}, de la siguiente manera:

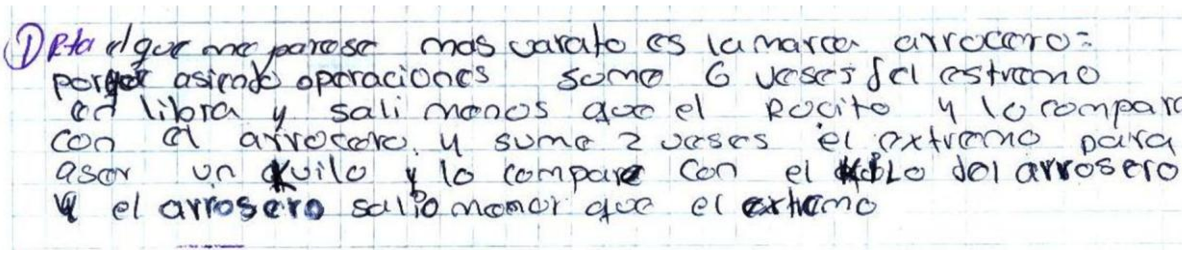


MARCA	PRESENTACIÓN	PRECIO ($)	
ARROCERO	3 Kilogramos (Kg)	4800	1600
	5 Kilogramos (Kg)	8000	1600
	12 Kilogramos (Kg)	19200	1600
ROCITO	6 libras (lb)	5400	900
	5 Kilogramos (Kg)	7800	1560
	14 Kilogramos (Kg)	21000	1560
EXTREMO	1 libra (lb)	850	850
	2 Kilogramos (Kg)	3400	1700
	8 Kilogramos (Kg)	13600	1700

Gráfica 19. Otra forma de responder la pregunta 1 de la situación 3.

Para realizar esta ampliación se recurre a calcular el precio por kilogramo (o por libra), nuevamente estamos en presencia de la estrategia τ_{pdi}^{1}. Aquí hay que hacer la misma consideración realizada para la anterior estrategia.

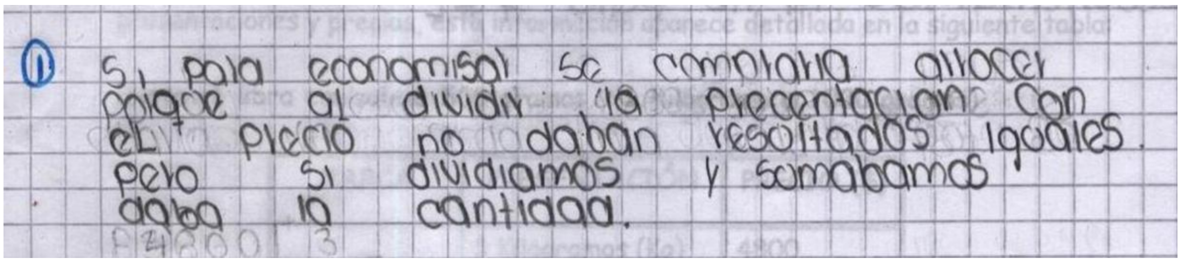
- Comparar dos a dos marcas para ir descartando



1 Rta el que me parese mas varato es la marca arrocero: porque asiendo operaciones sume 6 veses el estremo ed libra y sali menos que el Rocito y lo compara con el arrocero, y sume 2 veses el extremo para asar un kilo y lo compare con el kilo del arrosero y el arrosero salio menor que el extremo

Gráfica 20. Otra de las maneras como se respondió la pregunta 1 de la situación 3.

- Realizar una división entre presentación y precio, aquí también se acude a parte de la técnica τ_{pdi}^{1}.



1 Si, para economisar se compraria arrocer poique al dividir la precentacion con el precio no daban resoltados iguales. pero si dividiamos y somabamos daba la cantidad.

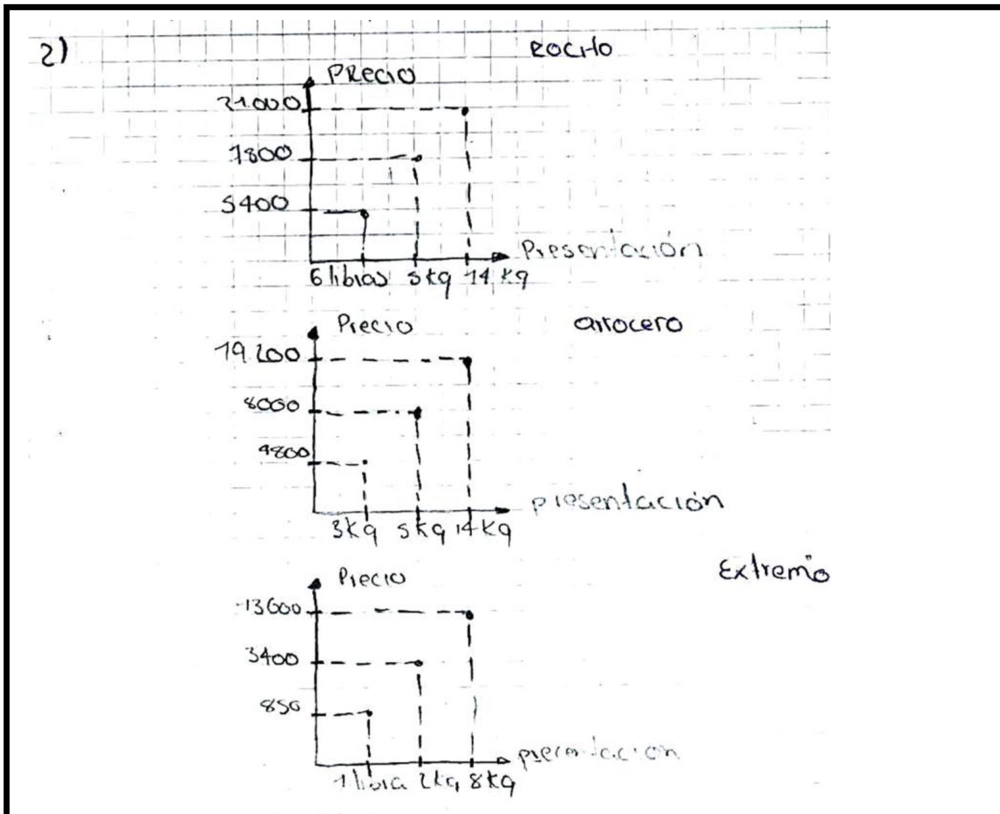
Gráfica 21. Otra de las respuestas a la pregunta 1 de la situación 3.

Nota: Manejaron bien lo de pasar de libras a kilogramos, pero prefirieron trabajar con libras y luego multiplicar por dos para obtener el precio en kilogramos. Algunos, muy pocos, comparan precio por libra con precio por kilogramo, pero el investigador estuvo pendiente de llamar la atención para evitar estas confusiones. Utilizaron las relaciones parte - todo sustentadas en la tecnología de los sistemas lineales, para decir que una libra es medio kilogramo o que 1 kilogramo es el doble de una libra.

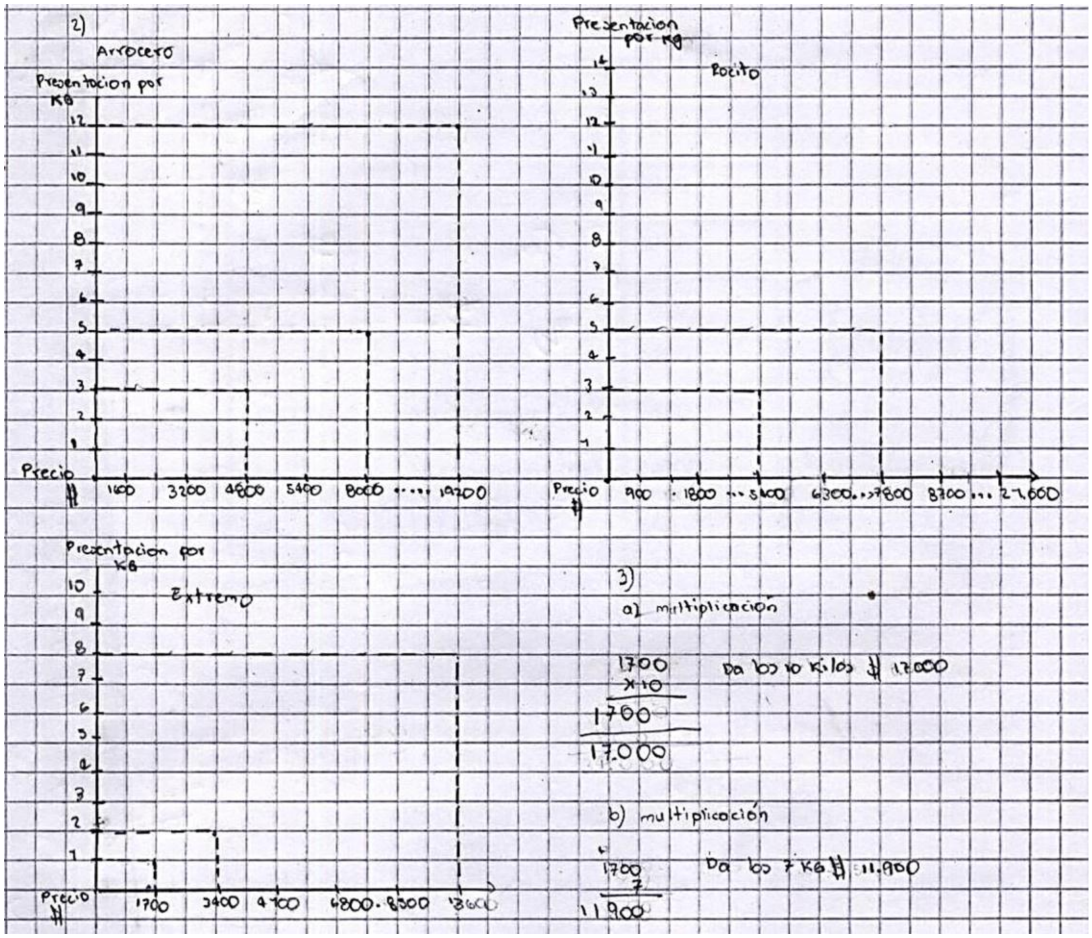
Haciendo las gráficas

La efectividad de la intervención en cuanto a gráficas cartesianas, técnica τ_{sr}^{2}, queda demostrada nuevamente en esta actividad ya que acudieron en gran mayoría a ellas. Mantienen el hacer nubes de puntos y no trazos continuos.

La falta de continuidad en los valores de las presentaciones (3, 5, 12 o 3, 5, 14, etc.), llevaron a que las gráficas de los estudiantes, en su mayoría, no fueran las que se esperaba, debido a un inadecuado manejo de la escala o de divisiones hechas a los ejes, (v.g. el lado de un cuadro podría representar 3kg, mientras que el lado de un cuadro también podía representar 4, 1, 2 o 3 kilogramos). Algunos ubicaron en el eje X la presentación y en Y el precio, otros al contrario. Otros hicieron bien la división para los Kg, pero para el precio no hubo respeto de la escala. Esto debido, quizá, a que los valores de las presentaciones, por llegar como máximo a 14 podían hacerse de uno en uno, mientras que los precios eran cantidades mayores (hasta $21.000) que no les permitía representaciones de 1000 en mil.



Gráfica 22. Una gráfica cartesiana en la que no se manejó bien la escala.



Gráfica 23. Una representación cartesiana para la pregunta 2 de la situación 3.

Un estudiante acudió a la técnica τ_{sr}^{4}, pero ésta no aporta al análisis que se pretende desarrollar.

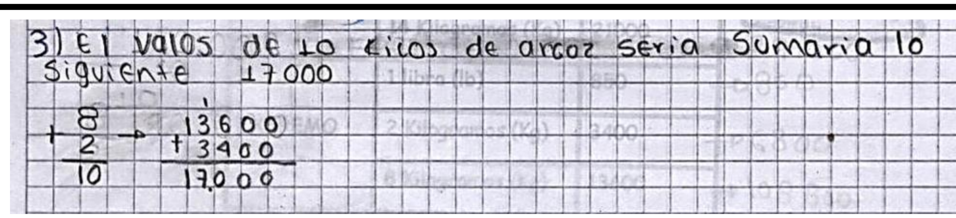
Nota: El hecho que el estudiante haga una nube de puntos, o probablemente una los puntos y obtenga una recta, no implica que pueda concluir que el comportamiento sea directamente proporcional, puesto que el manejar mal la escala puede llevar a esa conclusión. Hay que revisar este hecho a la luz de lo ocurrido en la representación gráfica con el manejo de escala adecuada.

Respondiendo las preguntas de reflexión

Para responder estas preguntas hay que tener en cuenta que los resultados numéricos varían entre los estudiantes, debido a que no todos seleccionaron la misma marca como la más económica.

Para responder: ¿Cuál sería el valor de 10 kilogramos de arroz?, correspondiente al tipo de problema π_{pdi}, las técnicas detectadas fueron:

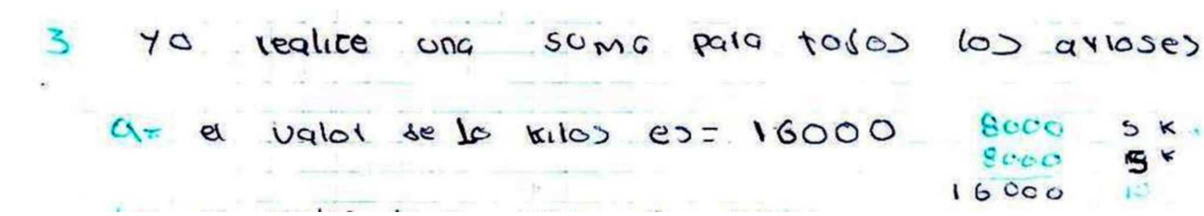
- Sumar \$800 diez veces (para el caso de ARROCERO), evidencia de que algunos estudiantes siguen ligados al pensamiento aditivo. El valor \$800 procede de dividir precio entre presentación y es un procedimiento que hace parte de la técnica τ^1_{pdi}.
- Determinar el valor de 1Kg (o de 1 libra), es decir se pasa de la razón como relator a razón como operador y se acude a un análisis funcional, correspondientes a la teoría de los roles de la razón y a tecnología θ_{af}, respectivamente, de la forma $f(10Kg) = \rho \times 10Kg = \$1600/Kg \times 10Kg = \$16.000$. Este procedimiento corresponde a la técnica τ^1_{pdi}.
- Aplicar la técnica τ^2_{pdi}, que para este caso, consiste en sumar 8 Kilogramos más dos Kilogramos (10 Kilogramos) y luego sumar los precios respectivos (7 estudiantes)



Gráfica 24. Uno de los procedimientos empleados para resolver la pregunta 3 (a).

En esta estrategia se utilizan análisis escalares de la forma $f(8Kg + 2Kg) = f(8Kg) + f(2Kg) = \$13.600 + \$6.400 = \$17.000$. Y nuevamente estaríamos en presencia de un teorema en acción, según Vergnaud (1983), en cuanto a los principios de linealidad que deberán formalizarse más adelante.

- Multiplicar el valor por libra (o por kilogramo) de la marca que escogió como respuesta en la pregunta 1 por 20 (por 10) (4 estudiantes), que se corresponde con la técnica τ^{1}_{pdi}. Surge la razón como operador. Esta operación puede verse en la ilustración 22 donde aparece escaneada junto a una gráfica cartesiana.
- Como en la tabla aparece el valor de 5Kg sumar este valor dos veces.(2 estudiantes)


3 yo realice una suma para todos los arroses
a= el valor de los kilos es= 16000
8000 5 K
8000 5 K
16000 10

Gráfica 25. Una respuesta a la pregunta 3 (a) de la situación 3.

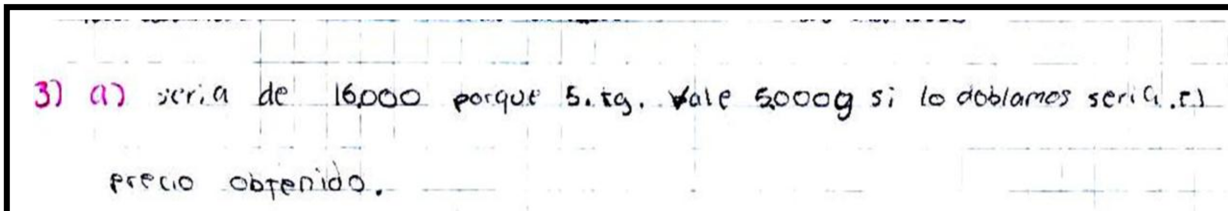
Se realiza un análisis escalar de la forma

$$f(5Kg+5Kg)=f(5Kg)+f(5Kg)=\$8.000+\$8.000=\$16.000$$

- Como en la tabla aparece el valor de 5Kg multiplicar este valor por 2. (2 estudiantes) $f(2\times 5Kg)=2\times f(5Kg)=2\times\$8.000=\$16.000$ correspondiente con la técnica τ^{3}_{pdi}.

Estaríamos otra vez en presencia de otro teorema en acción, (Vergnaud, 1983, 1990), que fundamenta la linealidad de la variación objeto de estudio.

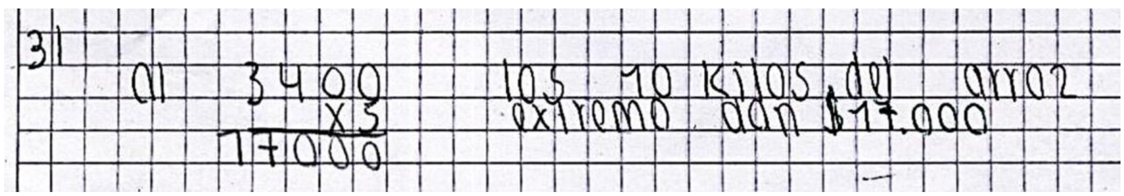
Recurrir a la técnica τ^{3}_{pdi}. Como se muestra en las siguientes gráficas.


3) a) seria de 16000 porque 5 kg. vale 8000 si lo doblamos seria el precio obtenido.

Gráfica 26. Otra respuesta a la pregunta 3 (a) de la situación 3.

Gráfica 27. Otro procedimiento para responder la pregunta 3 (a) de la situación 3.

Aplicar la técnica τ^3_{pdi}, consistente en utilizar el valor de 2 Kg de extremo y saber que este es la quinta parte de 10; luego multiplica el precio de 2 Kg por 5. Este proceso se apoya en la teoría de los sistemas lineales directos y en la tecnología de los análisis escalares tales como $f(5\times 2Kg) = 5\times f(2Kg) = 5\times \$3.400 = \$17.000$ (1 estudiante)



Gráfica 28. Otra forma de responder a la pregunta 3 (a) de la situación 3.

- Sumar 10 veces el valor por Kg. (1 estudiante). Es una técnica no codificada, que se podría describir como una estrategia aditiva, aunque también podría catalogarse dentro de la técnica τ^3_{pdi}.

Para determinar ¿Cuál sería el valor de 7 kilos de arroz? Algunas técnicas fueron:

Nota: En el procedimiento que se describe a continuación se observa una combinación de varias técnicas.

- Inicialmente se aplica la primera parte de la técnica τ^1_{pdi}, consistente en dividir el precio entre la presentación para obtener el valor de 1 Kilogramo. Luego la segunda parte de la técnica τ^1_{pdi}, cuando se multiplica por 2 el valor de 1 Kilogramo, procedimiento que debe emplearse puesto que el valor de 2 Kilogramos no aparece directamente en la tabla. Finalmente, sumar 5 Kilogramos más dos Kilogramos (7 Kilogramos) y luego sumar los precios respectivos. Este proceso corresponde a la técnica τ^3_{pdi}. Aquí se utiliza la teoría de los roles de la razón, pasando de relator a operador, de igual forma combina análisis escalares con análisis funcionales. De la siguiente manera: primero $\rho = \frac{\$4.800}{3Kg} = \frac{\$1.600}{1Kg}$.

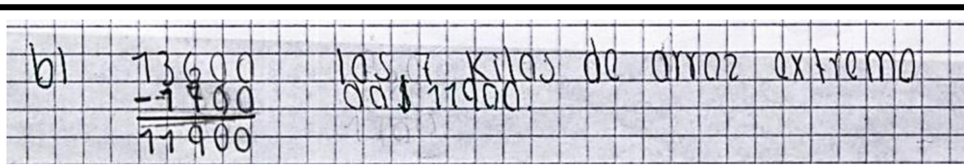
Luego

$$f(2Kg) = \rho \times 2Kg = \frac{\$1.600}{1Kg} \times 2Kg = \$3.200$$

y finalmente

$$f(7Kg) = f(2Kg + 5Kg) = f(2Kg) + f(5Kg) = \$3.200 + \$8.000 = \$11.200.$$

- Sumar 7 veces el valor de 1 Kilogramo. No es una técnica muy eficiente, pero es importante que se determine el precio de 1 Kg de arroz es decir, se acude a la primera parte de la técnica τ^1_{pdi} , soportada por la teoría de la razón como relator.
- Multiplicar por 14 (o por 7) el valor por libra (o por Kilogramo) de la marca que escogió como respuesta en la pregunta 1 (4 estudiantes), procedimiento que se fundamenta en la segunda parte de la técnica τ^1_{pdi}. Y que se sustenta en la tecnología de los análisis funcionales y en la teoría de la razón como operador.
- Acudir a la técnica τ^3_{pdi}, aunque en lugar de sumar dos cantidades de magnitud estas se restan, es decir, encontrar la diferencia entre el valor de 8 Kilogramos y el valor de 1 Kg. (9 estudiantes).

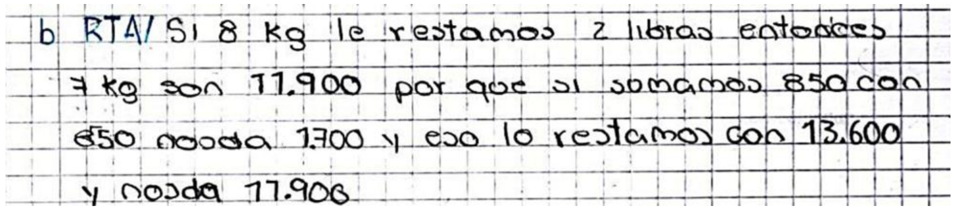


Gráfica 29. Una de las respuestas a la pregunta 3 (b) de la situación 3.

Se apoya en la tecnología θ_{ae} del análisis escalar así:

$$f(7Kg) = f(8Kg - 1Kg) = f(8Kg) - f(1Kg) = \$13.600 - \$1.700 = \$15.300$$

La respuesta textual de Natalia fue:



b RTA/ Si 8 Kg le restamos 2 libras entonces 7 kg son 11.900 por que si sumamos 850 con 850 nos da 1.700 y eso lo restamos con 13.600 y nos da 11.900

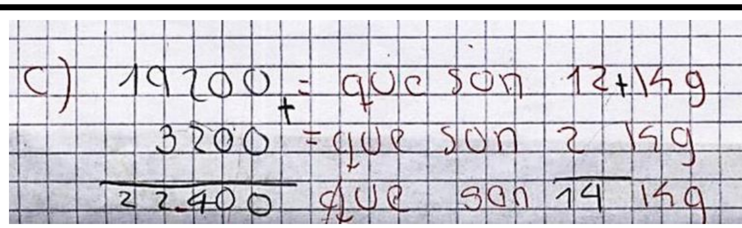
Gráfica 30. Otra forma de responder la pregunta 3 (b) de la situación 3.

- Aplicar la técnica τ^{2}_{pdi}, mediante la cual encuentra el valor de 6 kilogramos a partir de duplicar el valor de 3 Kilogramos y a eso le suma el valor de un kilogramo obtenido en la pregunta 1. La realización de esta adición corresponde a la aplicación de la técnica τ^{3}_{pdi}, al igual que el siguiente planteamiento.

  Sumar el valor de 4 Kg más el valor de 3 Kg.

Para las preguntas que pedían encontrar la variable dependiente (precio) a partir de la independiente (presentación). Recurrieron a técnicas como las siguientes:
Para $23.400

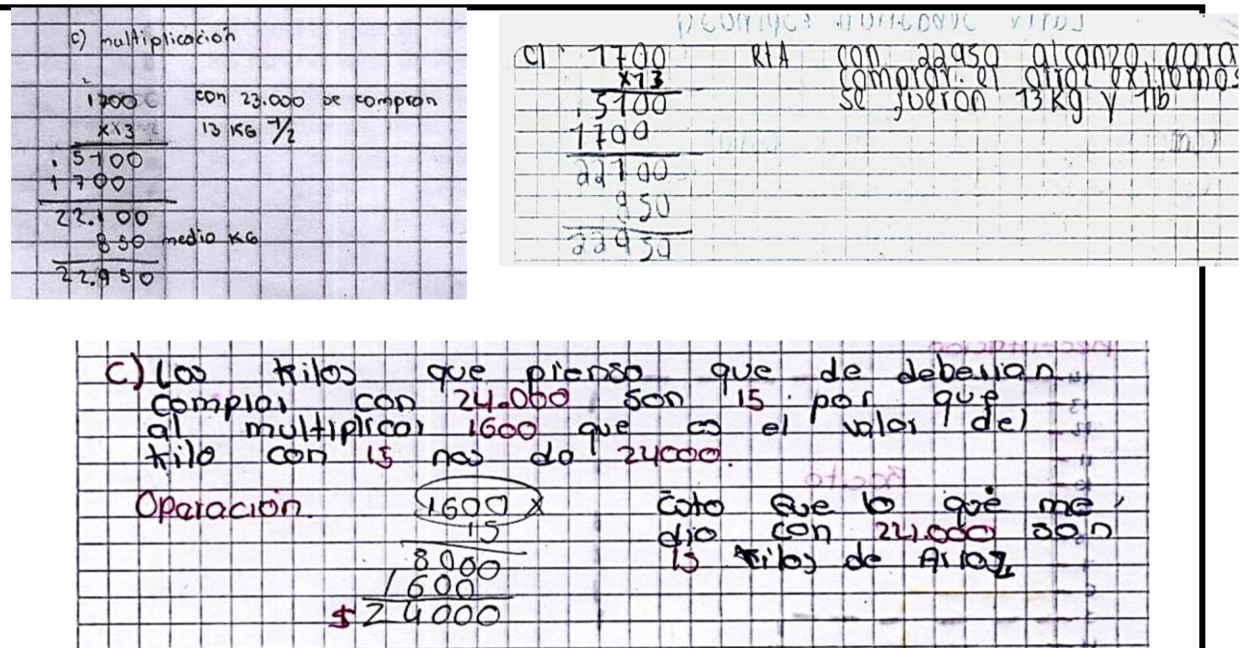
- Buscar en la tabla, de la marca seleccionada, valores cuya suma diera $23400 o cercano a este valor y luego sumaron los valores en Kg correspondientes. (8 estudiantes). Este procedimiento se corresponde con las técnicas τ^{4}_{pdi} y τ^{3}_{pdi}, además se fundamenta en la tecnología del análisis escalar θ_{ae}.



c) 19200 = que son 12 kg
\+ 3200 = que son 2 kg
22.400 que son 14 kg

Gráfica 31. Una respuesta para la pregunta 3 (c) de la situación 3.

- Buscar un número que multiplicado por el valor del kilogramo, en la marca seleccionada, dé $23.400 o un valor cercano. (4 estudiantes). Este proceso es una aplicación de la técnica τ^{2}_{pdi}.

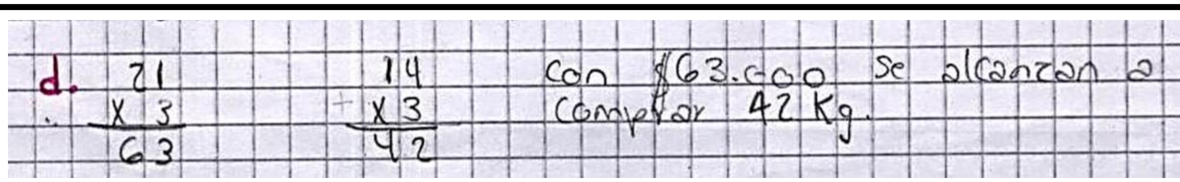


Gráfica 32. Una estrategia similar para responder la pregunta 3 (c) de la situación 3.

Fundamentado en la teoría de la razón como operador. A través de la expresión $f(x) = \frac{\$1700}{Kg} \times x = \$23.400$ y de la tecnología del análisis funcional (θ_{af}).

Para $63.000

- Identificar que el valor dado $63.000 era el triple del valor de 14 Kg para la marca ROCITO, que fue la marca que seleccionaron en el primer punto. Luego multiplicaron 14 Kg por 3 para obtener la respuesta, procedimiento que hace referencia a la técnica τ^2_{pdi} . (2 estudiantes)

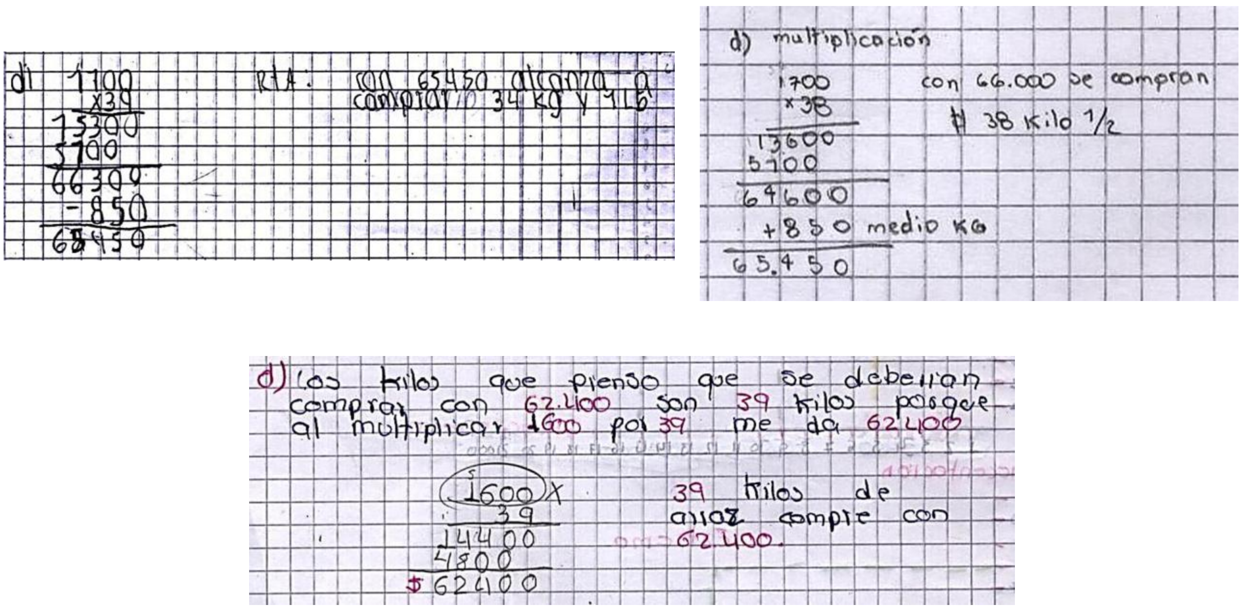


Gráfica 33. Una respuesta a la pregunta 3 (d) de la situación 3.

Se evidencia un análisis escalar y la utilización de nuevo de un teorema en acción, (Vergnaud, 1983), que fundamenta una de las propiedades de la linealidad, a saber:

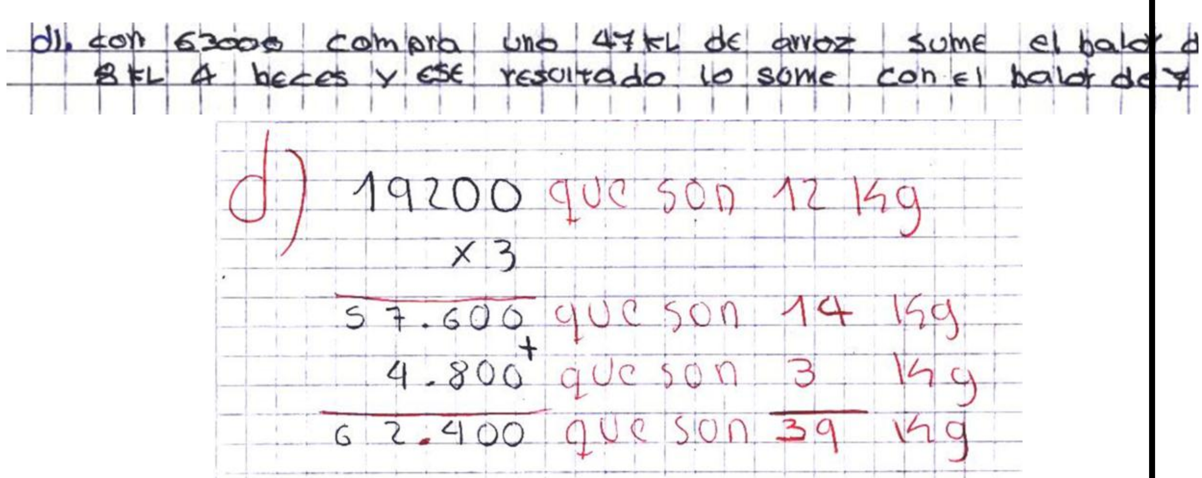
$f(3\times 14Kg) = 3\times f(14Kg) = 3\times \$21000 = \$63.000$

- Buscar un número que multiplicado por el valor del kilogramo de la marca seleccionada dé $63.000 o un valor cercano. Igual que el anterior está incluido dentro de la técnica τ_{pdi}^{2}.(3 estudiantes)



Gráfica 34. Tres estrategias similares para dar respuesta a la pregunta 3 (d).

- Utilizar el producto y la adición para encontrar la respuesta, es decir, combinar τ_{pdi}^{2} y τ_{pdi}^{3}.

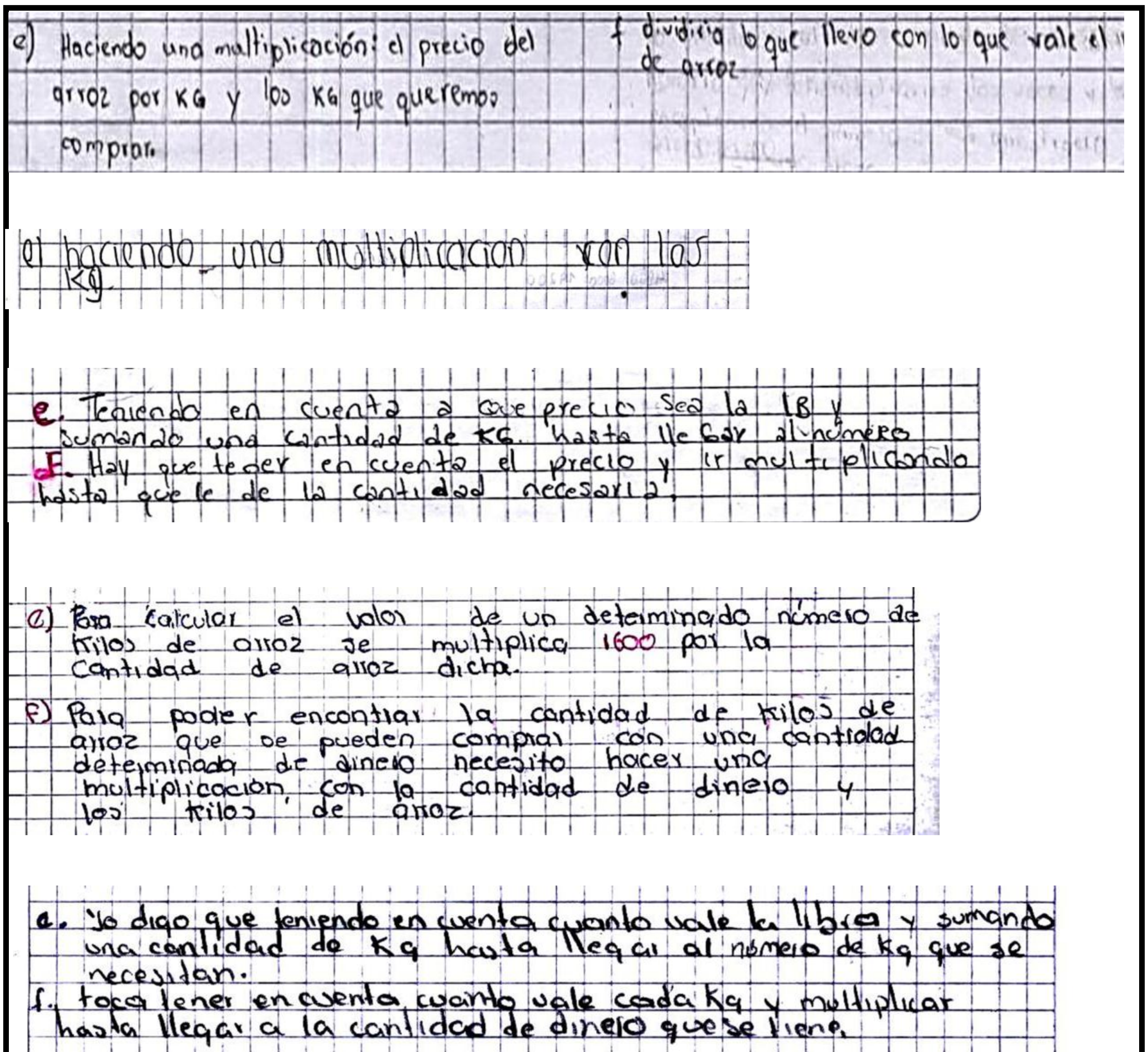


Gráfica 35. Dos estrategias similares para responder a la pregunta 3 (d) de la situación 3.

Nota: En este procedimiento hay un error de escritura del alumno, donde aparece 14 Kg es 36 Kg.

- Buscar en la tabla de la marca seleccionada valores cuya suma diera $63000 o cercano a este valor y luego sumar los valores en Kg correspondientes. Lo cual hace referencia a la utilización de la técnica τ^{3}_{pdi} (1 estudiante)

Las dos últimas preguntas que pretendían generalizar y determinar el papel jugado por la razón (relator, operador, correlator) fueron respondidas de las siguientes formas:


e) Haciendo una multiplicación: el precio del arroz por KG y los KG que queremos comprar.
f dividiria lo que llevo con lo que vale el de arroz

e) haciendo una multiplicacion con los Kg.

e. Teniendo en cuenta a que precio sea la LB y sumando una cantidad de KG. hasta llegar al número
F. Hay que tener en cuenta el precio y ir multiplicando hasta que le de la cantidad necesaria.

e) Para calcular el valor de un determinado número de kilos de arroz se multiplica 1600 por la cantidad de arroz dicha.
F) Para poder encontrar la cantidad de kilos de arroz que se pueden comprar con una cantidad determinada de dinero necesito hacer una multiplicación con la cantidad de dinero y los kilos de arroz.

e. Yo digo que teniendo en cuenta cuanto vale la libra y sumando una cantidad de Kg hasta llegar al número de Kg que se necesitan.
f. toca tener en cuenta cuanto vale cada Kg y multiplicar hasta llegar a la cantidad de dinero que se tiene.

Gráfica 36. Las respuestas a las preguntas de generalización de la situación 3

En las respuestas a estas dos últimas preguntas se observa que los estudiantes utilizaron el valor por libra (o por kilogramo) determinado para responder la pregunta 1 como un valor constante, por lo tanto, quienes acudieron a este uso, estaban pensando en la razón como relator y en estas últimas respuestas la usaron como operador.

Nota: En las soluciones escritas no manejan las unidades en las operaciones; éstas vuelven a aparecer, en algunos casos, otra vez en la respuesta.

A manera de conclusiones de la situación 3.

Para algunos estudiantes la determinación de la marca de arroz más económica se hace desde dos perspectivas. La primera es mirar únicamente los precios, para tal fin se suman los precios de cada presentación en cada una de las marcas y se determina el precio menor. La segunda consiste en mirar la cantidad de arroz ofrecido, en tal caso, la más económica será la que más arroz, cantidad de Kilogramos, ofrezca. Esto es una muestra de que algunos estudiantes, en muchas situaciones, trabajan por separado cada magnitud, lo cual mostraría que dichos estudiantes no establecen ningún tipo de relación entre las magnitudes.

Para resolver algunas de las preguntas de reflexión, en las que se requería hacer algunos cálculos aritméticos, los estudiantes acudieron a sumas o restas entre valores conocidos o dados en la tabla. Por ejemplo, para hallar la variable independiente a partir de la dependiente, en lugar de realizar la división, trabajan con aproximaciones, es decir, buscan un número de kilogramos de arroz que multiplicado por el valor por kilogramo les dé la cantidad de dinero dada o un valor cercano. Esto se debe quizá a que se está trabajando con cantidades pequeñas, tanto en el precio como en la cantidad de arroz, por tanto se hace necesario, en una próxima aplicación de la situación, hacer preguntas con cantidades de peso más grandes o con cantidades elevadas de dinero que los lleven necesariamente a multiplicar o a dividir según sea el caso, no interesa si deben utilizar la calculadora para realizar la operación.

La conclusión planteada anteriormente llevó al diseño de dos subsituaciones, las cuales se aplicaron luego de una segunda intervención.

4.5 Segunda intervención.

La segunda intervención estuvo motivada por el hecho que un número reducido de estudiantes estaban utilizando procesos apoyados en la tecnología de la razón como relator y a la de los análisis funcionales y pretendió hacer más general este hecho.

Vale la pena anotar que en la intervención se proponen problemas del tipo π_{pdi} y se privilegia la técnica τ^{1}_{pdi}, para motivar, precisamente el uso de la de la razón como relator y de la razón como operador.

La intervención se realizó en torno al siguiente plan de trabajo.
Recordemos la Situación 1.
El volumen del vaso A es 1,5 oz.

Con esa información respondamos las siguientes preguntas:

¿Cuál es el volumen de agua en el recipiente si depositáramos 36 vasos?

Solución: $Volumen = 36 \times 1,5oz = 54oz$

¿Cuál es el volumen de agua en el recipiente si depositáramos 122 vasos?

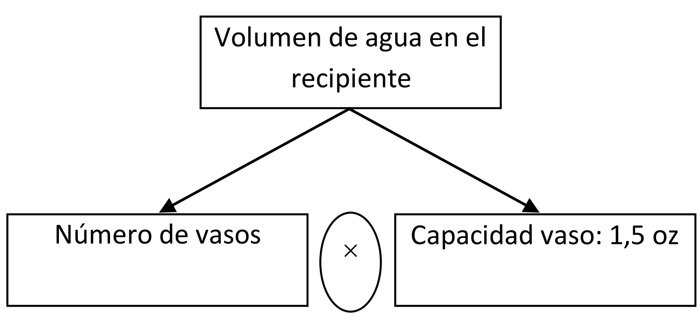
Solución: $Volumen = 122 \times 1,5oz = 183oz$

¿Cuál es el volumen de agua en el recipiente si depositáramos 7,5 vasos?

Solución: $Volumen = 7,5 \times 1,5oz = 11,25oz$

Estructura de la solución:

Se observa que siempre hay que multiplicar el número de vasos por 1,5 oz (Capacidad del vaso), es decir, la solución al ejercicio podría esquematizarse así:



En general ¿cómo podemos calcular el volumen de agua para un determinado número de vasos?

Solución: De acuerdo con la estructura observamos que: $Volumen = número\ de\ vasos \times 1,5oz$

¿Cuántos vasos se han depositado si el volumen de agua es 84 onzas?

Solución: $Número\ de\ vasos = 84 \div 1,5oz = 56oz$

¿Cuántos vasos se han depositado si el volumen de agua es 210 onzas?

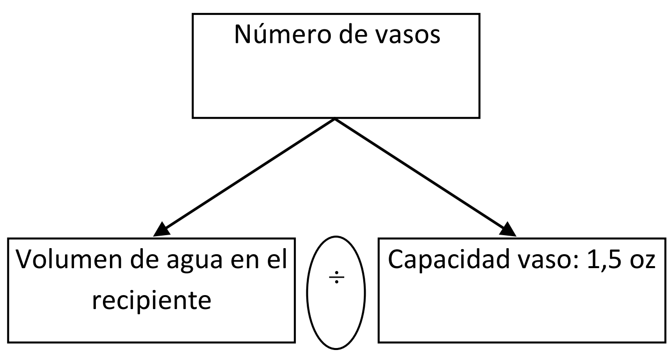
Solución: $Número\ de\ vasos = 210 \div 1,5oz = 140oz$

¿Cuántos vasos se han depositado si el volumen de agua es 315 onzas?

Solución: $Número\ de\ vasos = 315 \div 1,5oz = 210oz$

Estructura de la solución:

Se observa que siempre hay que dividir el volumen de agua en el recipiente entre 1,5 oz (volumen del vaso), es decir, la solución al ejercicio podría esquematizarse así:



En general ¿Cuántos vasos se requieren para alcanzar un determinado volumen de agua?

Solución: De acuerdo con la estructura observamos que: $número\ de\ vasos = Volumen \div 1,5oz$

¿Qué valor se repite siempre en todas las soluciones? ¿A qué corresponde este valor?

Recordemos la situación 2

MARCA	PRESENTACIÓN	PRECIO ($)	PRECIO POR KG
ARROCERO	3 kilogramos (Kg)	4800	$1600/Kg
	5 kilogramos (Kg)	8000	$1600/Kg
	12 kilogramos (Kg)	19200	$1600/Kg
ROCITO	6 libras (lb)	5400	$1800/Kg
	5 kilogramos (Kg)	7800	$1560/Kg
	14 kilogramos (Kg)	21000	$1500/Kg
EXTREMO	1 libra (lb)	850	$1700/Kg
	2 kilogramos (Kg)	3400	$1700/Kg
	8 kilogramos (Kg)	13600	$1700/Kg

Escogiendo Rocito de 14 kilogramos cuyo valor es $1500 por Kilogramo entonces respondamos:

¿Cuál sería el valor de 10 kilogramos de arroz?

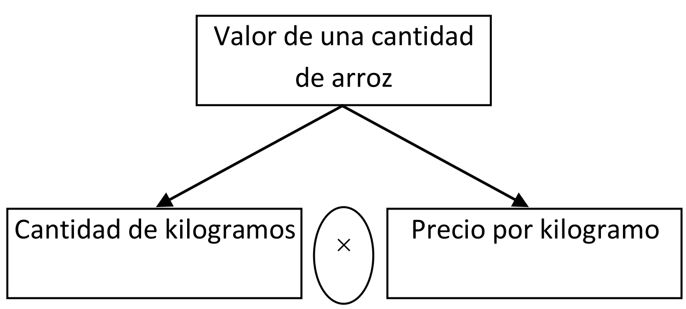
Solución: $valor = 10Kg \times \$1500/1Kg = \$15000$

¿Cuál sería el valor de 7 kilogramos de arroz?

Solución: $valor = 7Kg \times \$1500/1Kg = \$10500$

Estructura de la solución:

Se observa que siempre hay que multiplicar la cantidad de kilogramos por $1500/1Kg (precio por kilogramo), es decir, la solución al ejercicio podría esquematizarse así:



En general ¿Cómo se calcularía el valor de un determinado número de kilogramos de arroz?

Solución: De acuerdo con la estructura observamos que: $Valor = cantidad\ de\ kilogramos \times \$1500/1Kg$

¿Cuántos kilos de arroz se alcanza a comprar con 23400 pesos?

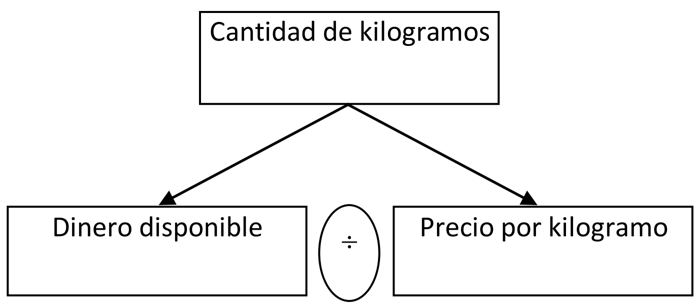
Solución: $cantidad\ de\ kilogramos = \$23400 \div \$1500/1Kg = 15,6Kg$

¿Cuántos kilos de arroz se alcanza a comprar con 63000 pesos?

Solución: $cantidad\ de\ kilogramos = \$63000 \div \$1500/1Kg = 42Kg$

Estructura de la solución:

Se observa que siempre hay que dividir el dinero disponible entre \$1500/1Kg (precio por kilogramo), es decir, la solución al ejercicio podría esquematizarse así:



En general ¿Cómo se podría encontrar la cantidad de kilogramos de arroz que se pueden comprar con una cantidad determinada de dinero?

Solución: De acuerdo con la estructura observamos que:
$cantidad\ de\ kilogramos = dinero\ disponible \div \$1500/1Kg$

¿Qué valor se repite en todas las soluciones? ¿A qué corresponde este valor? ¿Hay algo en común entre las dos situaciones?

En esta intervención se observó que los estudiantes identificaban que en ambas situaciones había un valor constante, la constante de proporcionalidad, que en ocasiones aparecía multiplicando y en otras dividiendo.

Además se aprovechó para comparar las situaciones 1 y 3 con la situación 2. Los estudiantes no identificaron tan rápidamente cuál era el valor constante en la situación 2, pero para tal fin se les recordó dos elementos de esta situación. El primero hacía referencia a que el recipiente tenía un nivel fijo sin importar el vaso usado y el segundo la tabla que ellos completaron:

Capacidad vaso (onzas)	2	4	6	8	10	12
Número de vasos	24	12	8	6		4

Se volvió a dejar en blanco el número de vasos para el vaso de 10 onzas y surgieron nuevamente las interpolaciones para intentar completar la tabla. Entonces se les pidió que multiplicaran la capacidad del vaso con el número de vasos y se dieron cuenta que se obtenía siempre el mismo valor, es decir, dedujeron que el producto de estas dos magnitudes era constante e igual a 48 onzas por vaso. Luego para determinar el número de vasos para el vaso de 10 onzas dividieron 48 onzas por vaso entre 10 onzas y obtuvieron 4,8 vasos.

4.6 Las subsituaciones diseñadas

Las siguientes dos situaciones fueron aplicadas después de la segunda intervención. Plantean actividades para desarrollar en una hoja de papel. Se solicitó a los estudiantes el uso de calculadora, puesto que se trabajó con cantidades grandes y con números decimales y se tuvo en cuenta que en las situaciones anteriores, cuando tuvieron que acudir a operaciones con estos números habían olvidado el mecanismo o les quitaba demasiado tiempo la realización de tales cálculos.

4.6.1 **Situación 3.1. “Compremos cemento”**

Se sabe que en Popayán el bulto de cemento de 50 Kg $18.000.

Responde las siguientes preguntas:

1. Para realizar una obra una constructora requiere comprar 752 bultos. ¿Cuánto le cuesta a la constructora esta cantidad de bultos de cemento?

2. Para pavimentar una calle de Popayán el municipio emplea 346 bultos. ¿Cuás el valor de esta cantidad de cemento?

3. ¿Cómo se calcula el valor de una determinada cantidad de bultos de cemento?

4. Para realizar una reparación en el colegio el albañil pide 34 kilos de cemento. ¿Cuál es el valor de esta cantidad de cemento?

5. En la ferretería del barrio se vendieron durante el mes 478 Kilos de cemento. ¿Cuánto se vendió en cemento ese mes en la ferretería?

6. Una asociación de vivienda ha conseguido un auxilio de $13'950.000 para la compra de cemento. ¿Cuántos bultos alcanzan a comprar?

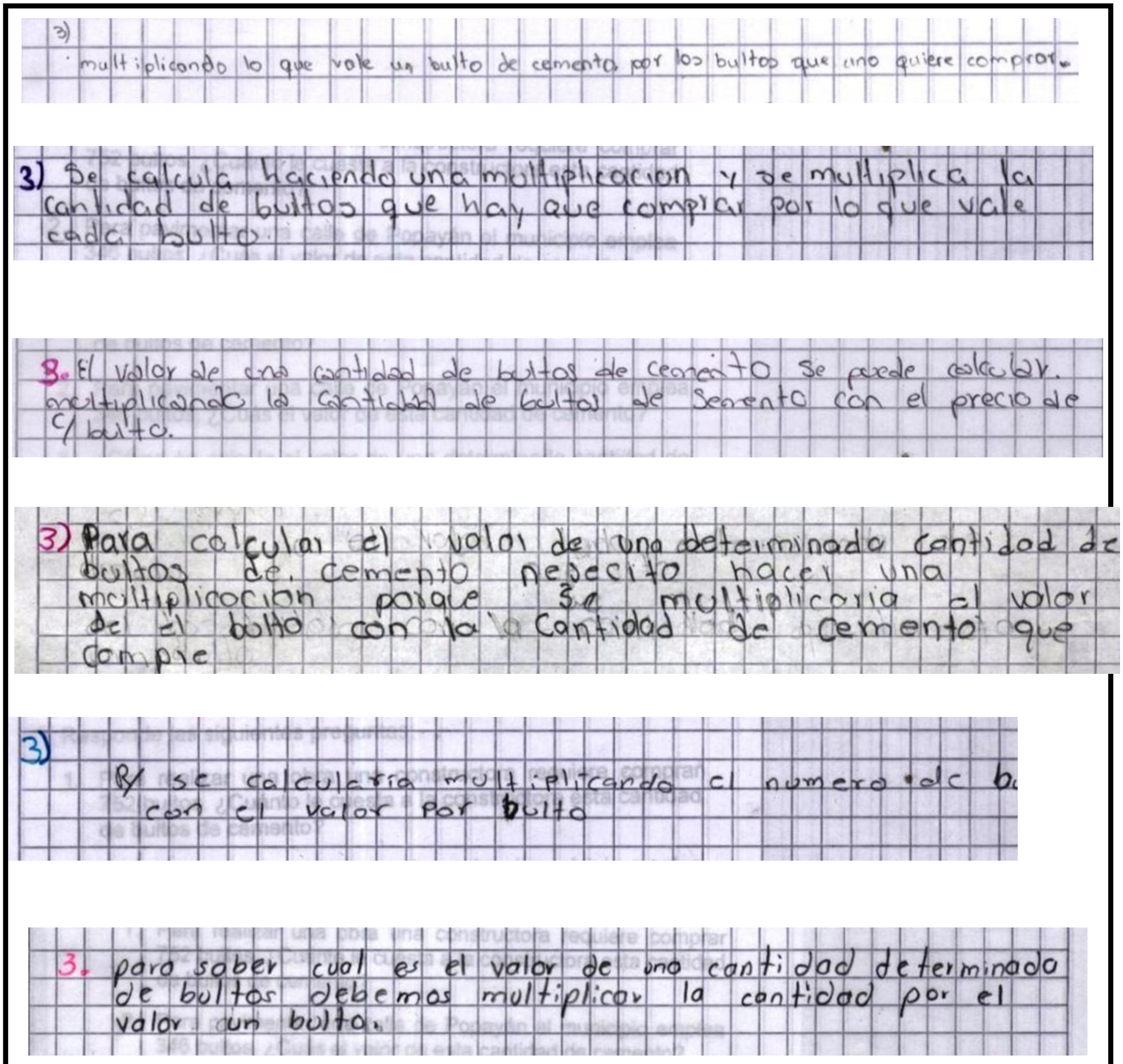
7. El dueño de una ferretería va a surtirla con cemento, para tal fin envía $69'400.000 a la fábrica de cemento. ¿Cuántos bultos le envía la cementera?

8. ¿Cómo se puede determinar la cantidad de bultos de cemento que se pueden comprar con cierta cantidad de dinero?

Respondiendo las preguntas

Para el primer bloque de preguntas (preguntas 1,2 y 3), que corresponden a un problema de tipo π_{pdi} y que hace referencia a calcular el valor de una determinada cantidad de bultos, la mayoría de los estudiantes utilizaron el valor del bulto ($18.000) como constante de proporcionalidad y acudieron a análisis escalares y a la utilización de la razón como operador. Además en la pregunta de generalización: ¿Cómo se calcula el valor de una determinada cantidad de bultos de cemento? La respuesta más común fue:

Se multiplica el valor del bulto de cemento por la cantidad de bultos de cemento que se desean comprar. Respuesta que se relaciona con la técnica τ^{1}_{pdi}.



3) multiplicando lo que vale un bulto de cemento por los bultos que uno quiere comprar.

3) Se calcula haciendo una multiplicacion y se multiplica la cantidad de bultos que hay que comprar por lo que vale cada bulto

8. El valor de una cantidad de bultos de cemento se puede calcular. multiplicando la cantidad de bultos de semento con el precio de c/bulto.

3) Para calcular el valor de una determinada cantidad de bultos de cemento necesito hacer una multiplicacion porque se multiplicaria el valor de el bulto con la cantidad de cemento que compre

3) R/ se calcularia multiplicando el numero de bu con el valor por bulto

3. para saber cual es el valor de una cantidad determinado de bultos debemos multiplicar la cantidad por el valor un bulto.

Gráfica 37. Respuestas a las preguntas de la subsituación 3.1

El segundo bloque de preguntas (preguntas 4 y 5) hacía referencia a calcular el costo de una determinada cantidad de kilogramos de cemento, problema π_{pdi}. La primera acción que ejecutaron la mayoría de estudiantes fue determinar el valor de 1 kilogramo de cemento, para tal fin dividieron el valor del bulto de cemento entre la cantidad de kilogramos de un bulto.

Hay que determinar si el número obtenido por los alumnos en la división corresponde al valor de un kilo de cemento, o es la relación constante entre la cantidad de kilogramos, y el precio, y que por tanto se estaría planteando la razón como relación, esto es, $\rho = \frac{\$18.000}{50\text{kilogramos}} = \frac{\$360}{1\text{kilogramo}}$

A continuación utilizaron este valor para determinar el valor de las cantidades de Kilos solicitadas, que corresponde a la técnica τ^1_{pdi}. Se acude a análisis funcionales y al paso de la razón de relator a operador.

El bloque final (preguntas 6, 7 y 8) consistía en determinar cuántos bultos de cemento se alcanzaban a comprar con determinada cantidad de dinero, nuevamente un problema de tipo π_{pdi}. Al igual que en el primer bloque, la mayoría de estudiantes utilizaron el valor $18.000 como operador, dividiendo la cantidad de dinero disponible entre dicho valor. Este procedimiento se evidencia en la respuesta a la pregunta de generalización (¿Cómo se puede determinar la cantidad de bultos de cemento que se pueden comprar con cierta cantidad de dinero?): Dividiendo la cantidad de dinero entre el valor de cada bulto de cemento.

Se acude a la razón como operador y a análisis funcionales de la forma: $f(x) = \frac{\$18.000}{1\,bulto} \times x = \$13'950.000$ de donde $x = \frac{\$13'950.000}{\$18.000} = 775 \text{ bultos}$, lo cual se corresponde con la técnica τ^1_{pdi}.

4.6.2 **Situación 3.2. “Exportando e importando café”**

Un exportador de café ha realizado compras de café que aparecen en la siguiente tabla, la cual está incompleta. Ayudémosle a completarla:

CANTIDAD DE CAFÉ	PRECIO
2 libras	3,4 dólares
54 libras	
237	
	1200 dólares
	34000 dólares

1. ¿Cómo determinamos el precio de una cantidad conocida de café?
2. ¿Cómo determinamos cuántas libras de café se compran con una determinada cantidad de dinero?

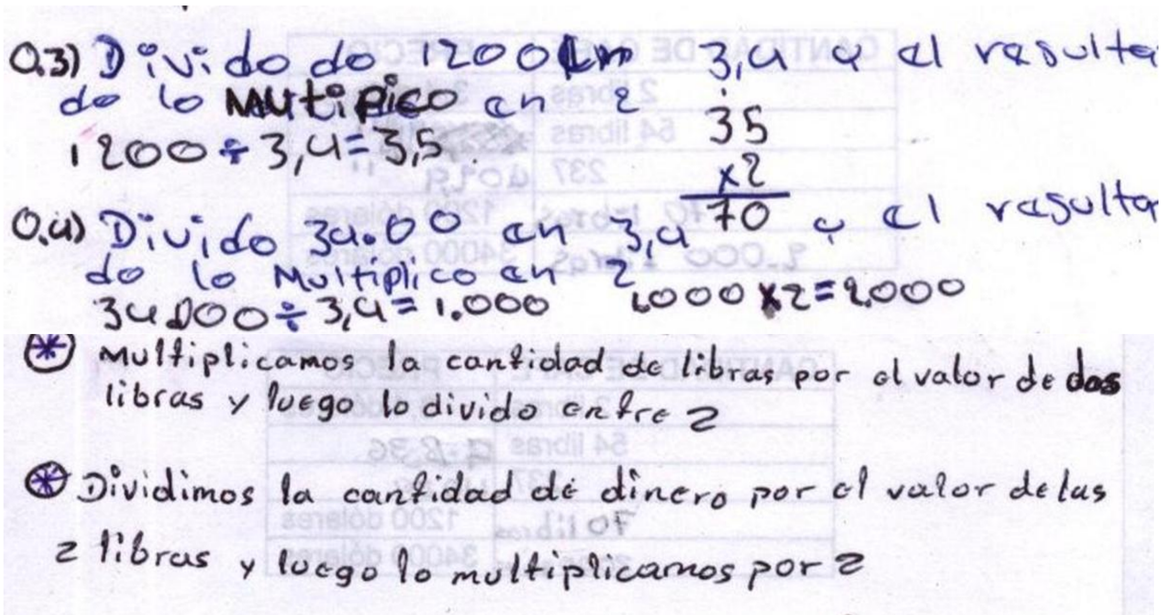
Respondiendo las preguntas.

En esta situación tanto el problema de completar la tabla π_{sr}, como la de responder las preguntas de reflexión que corresponden al tipo de problema π_{pdi}. Tienen como técnica común a τ^{1}_{pdi} .la cual se evidencia en cada uno de los procedimientos descritos a continuación.

Para completar la tabla en esta situación la mayoría de estudiantes inicialmente determinó el valor de 1 libra de café, dividiendo el valor de 2 libras de café entre dos. Será necesario, como en las anteriores situaciones, determinar si el número obtenido por los alumnos en la división corresponde al valor de una libra de café, o es la relación constante entre la cantidad de libras, y el precio, y que por tanto se estaría planteando la razón como relación, es decir, $\rho = \frac{3,4\ dólares}{2\ libras} = \frac{1,7 dólares}{1\ libra}$. Para determinar el precio de una determinada cantidad de libras de café multiplicaron dicha cantidad por el valor por libra obtenido anteriormente. Este procedimiento corresponde al uso de la razón como operador y análisis escalares. Para calcular la cantidad de libras de café que se podrían comprar con cierta cantidad de dinero dividieron dicha cantidad de dinero entre el valor por libra. Estos procedimientos permitieron que las dos preguntas de generalización se respondieran acudiendo a la razón como operador y a análisis funcionales de la forma:

$$f(54\ libras) = \frac{1,7\ dólares}{1\ libra} \times 54\ libras = 91,8\ dólares \text{ y } f(x\ libras) = \frac{1,7\ dólares}{1\ libra} \times x\ libras = 1200\ \ dólares$$

Observación: Hubo dos estudiantes que para calcular el precio, multiplicaron por 3,4 dólares y el resultado obtenido lo dividieron entre dos y para calcular la cantidad de libras de café dividieron entre 3,4 dólares y el resultado lo multiplicaron por 2.



Gráfica 38. Una respuesta para las preguntas utilizando el precio de dos libras.

4.7 Situación 4

4.7.1 Análisis desde la mirada del experto.

Situación 4: Repartamos el premio

Luisa, Pedro, José y Martha (**quienes no se conocen**) compraron una boleta para la rifa de 12'000.000 de pesos en efectivo. El valor total de la boleta es $10.000. Para la compra Luisa aportó 1.000 pesos, Pedro 2.000, José 3.000 y Martha 4.000 pesos.

(Recuerda escribir las operaciones que realizas)

1. Si las cuatro personas se ganan la rifa :
   a. ¿Quién recibe más dinero? ¿Por qué?
   b. ¿Quién recibe menos dinero? ¿Por qué?
   c. ¿Qué cantidad de dinero le corresponde a cada uno?

2. ¿Cuánto debería recibir José si su aporte hubiese sido de 5.000 pesos?
3. ¿Cuánto debería recibir Martha si su aporte hubiese sido de 7.000 pesos?
4. ¿Cuánto debería haber aportado una de las cuatro personas si hubiese querido ganarse $9’000.000?
5. ¿Cuánto debería haber aportado una de las cuatro personas si hubiese querido ganarse 5’400.000 pesos?
6. ¿Cómo se calcularía la cantidad de dinero recibido de acuerdo con una cantidad de dinero aportado?
7. ¿Cómo se calcularía la cantidad de dinero aportado de acuerdo con la cantidad de dinero que se quiere recibir?
8. El realizador de la rifa informa que en una anterior ocasión realizó la repartición de acuerdo con la siguiente tabla:

Aporte	$500	$1.500	$3.000	$5.000
Premio	$500.000	$1’500.000	$3’000.000	$7’000.000

¿Consideras que está correctamente distribuido el premio? ¿Por qué?

Propósitos:

Reconocer la magnitud presente en la situación.

Identificar las dos series que son subconjunto de la magnitud dinero.

Determinar la correspondencia entre las dos series.

Reconocer el rol de la razón en situaciones de reparto proporcional.

Gestión de la situación “Repartamos el premio”

Estructura de la situación

La actividad presenta una situación en la cual cuatro personas aportan, cada una, diferente cantidad de dinero para comprar una boleta para la rifa de dinero en efectivo.

El valor aportado por una de las personas puede ser utilizado como magnitud y se pretende identificar si utiliza tal valor para determinar cómo deberá repartir el premio entre cada uno de los aportantes, utilizando relaciones multiplicativas y no únicamente aditivas.

La situación plantea que Martha ha aportado el doble de Pedro, con el fin de determinar si utiliza tal hecho en el momento de establecer el monto del premio que va a recibir cada uno, y de igual forma para hacerlo consciente de que la relación del premio recibido por cada uno no debe responder únicamente a una relación de índole aditivo, es decir, que no se quede únicamente en un análisis cualitativo que le permita afirmar que al que aporta más le corresponde más y que haga la repartición de tal forma que al final únicamente verifica que la suma de las partes le dé el total.

En las preguntas 1a) y 1b) se pretende identificar si el alumno hace inicialmente análisis cualitativos, es decir, si determina verbalmente que quien aporta más recibe más, mientras que en la pregunta 1c) se quiere que acuda a cantidades numéricas, para determinar cuánto le corresponde a cada uno, además, verificar si no se queda exclusivamente en la relación aditiva, sino que además acude a la relación multiplicativa. Para encontrar los valores se pueden definir dos series que son subconjuntos equipotentes de una misma magnitud, a saber M: dinero en pesos.

La segunda pregunta pretende incentivar el uso de diferentes tipos de representaciones, especialmente las gráficas (diagramas de barras, gráficas cartesianas, representaciones icónicas). No se exige un gráfico en particular para poder observar a que gráficos recurren los estudiantes para representar el comportamiento de la situación.

Las preguntas 3 y 4 pretenden observar cuál es el uso que se le da a la razón para obtener el resultado. En las preguntas 5 y 6 se pretende mirar cómo se obtiene la variable independiente a partir del conocimiento de la variable dependiente y también cómo se recurre a comparar la serie de razones planteadas, hallando el valor desconocido a partir de igualar parejas de razones iguales en las cuales tres de las cuatro cantidades son conocidas. Finalmente las preguntas 7 y 8 buscan, en primer lugar, llevar al estudiante a determinar una relación entre los dos subconjuntos, esto es, para cualquier valor de la variable independiente (valor invertido en pesos) hallar el valor de la dependiente (valor a recibir en pesos) y viceversa. En segundo lugar se busca observar procesos de generalización dados para responder las preguntas 3, 4, 5 y 6.

Conceptos y tecnologías:

Los conceptos que están involucrados en la situación 4 tienen que ver con: la correspondencia entre dos series (S_1*: Dinero invertido y* S_2*: Dinero recibido*) que son subconjuntos de una $Magnitud$ (M)– dinero en pesos. Por tratarse de valores en pesos ($), la magnitud es discreta, esto es, M es un subconjunto de los números racionales. Las teorías que sustentan las tecnologías asociadas a los tipos de problemas que se espera que los estudiantes resuelvan en esta situación de proporcionalidad simple directa (psd), de reparto proporcional son la de los roles de la razón, como relator, como operador, como correlator entre cantidades y la de los sistemas lineales directos.

Técnicas

Las preguntas 1a y 1b corresponden a análisis de índole cualitativo, para los cuales no se ha codificado una técnica particular y se espera que los estudiantes acudan a determinar que quién aporta más dinero para comprar la boleta debe recibir una mayor parte del premio y que quien aporte menos debe recibir una parte menor.

La pregunta 1c requiere la determinación de la cantidad de dinero que corresponde a cada uno, es decir, que se requiere una cuantificación, en este sentido, las técnicas de resolución asociadas al tipo de problema π_{rp} apuntan a:

Comprobar inicialmente que $1.000 + $2.000 + $3.000 + $4.000 = $10.000 (valor total de la boleta), lo cual está sustentado en la teoría de los repartos sistemas lineales directos.

Además se esperan algunos de los siguientes procedimientos:

Luisa puso la décima parte de la cantidad total de dinero aportado luego debe recibir la décima parte de $12’000.000, es decir, $ 1’200.000. Procedimiento que se corresponde con la técnica τ_{rp}^{3}. Y este resultado podría utilizarse para decir que por cada $1.000 se recibe $ 1’200.000. Aquí se está apoyando en un análisis escalar, tecnología θ_{ae} y la teoría de los sistemas lineales directos puesto que al sacar la décima parte de una cantidad en una serie (valor aportado), se reduce a la décima parte el valor correspondiente en la otra serie (valor a recibir).

Teniendo esta respuesta para Luisa, el estudiante para determinar el valor del premio correspondiente a los demás puede:
Emplear la técnica τ_{sr}^{1}, en este caso construir la siguiente tabla.

M_1	M_2	
\$1.000	\$1’200.000	Lo que le corresponde a Luisa
\$2.000	\$2’400.000	Lo que le corresponde a Pedro
\$3.000	\$3’600.000	Lo que le corresponde a José
\$4.000	\$4’800.000	Lo que le corresponde a Martha
\$5.000	\$6’000.000	Lo que recibiría José si aumenta el aporte
\$6.000	\$7’200.000	
\$7.000	\$8’400.000	Lo que recibiría Martha si aumenta su aporte
\$8.000	\$9’600.000	
\$9.000	\$10’800.000	
\$10.000	\$12’000.000	

Tabla 7. Distribución del premio por cada mil pesos de aporte.

Emplear la Tabla 5, técnica τ_{pdi}^{4}, y determinar, fundamentado en la tecnología θ_{ae} cuánto le corresponde a Pedro, a José y a Martha.

Sin construir alguna tabla el estudiante podría, para encontrar el valor del premio recibido, utilizar el valor obtenido para Luisa y determinar mediante la técnica τ_{pdi}^{2} que: Pedro invirtió el doble de Luisa luego debe recibir 2 × \$ 1’200.000 = \$ 2’400.000, José invirtió el triple de Luisa luego debe recibir 3 × \$ 1’200.000 = \$ 3’600.000 y Martha invirtió el cuádruple de Luisa por lo tanto recibe 4 × \$ 1’200.000 = \$ 4’800.000 o también Martha invirtió el doble de lo invertido por Pedro por lo tanto debe recibir 2 × \$ 2’400.000 = \$ 4’800.000. En todos los casos la técnica se fundamenta en un análisis escalar.
También se puede recurrir a un procedimiento fundamentado en la tecnología de las proporciones θ_{pr} apoyada en la teoría de la razón como correlación entre cantidades para

buscar el tercer valor en la serie de razones $\frac{\$1.200.000}{\$1.000}=\frac{?}{\$2.000}=\frac{?}{\$3.000}=\frac{?}{\$4.000}$. O, aunque no se plantee explícitamente la serie, se calcule el cuarto valor tomando de dos en dos razones. (Es posible que se recurra a las razones formadas con los inversos multiplicativos, esto es, $\frac{\$1.000}{\$1.200.000}=\frac{\$2.000}{?}=\frac{\$3.000}{?}=\frac{\$4.000}{?}$.

Dividir el valor del total del premio \$12'000.000 entre el valor total de la boleta \$10.000, es decir, $\rho=\frac{\$12.000.000}{\$10.000}=\frac{\$1.200}{\$1}$, lo que indica que por cada peso (\$) invertido se ganan \$1.200, observándose el uso de la primera parte de la técnica τ_{rp}^{1} que se fundamenta en la teoría de la razón como relación.

Para determinar el premio a recibir por cada uno de los otros aportantes, se utiliza la segunda parte de la técnica τ_{rp}^{1} que consiste en utilizar como operador el valor de la razón como relación encontrada con la técnica anterior, es decir, $\rho(\$2.000)=\frac{\$1.200}{\$1}\times\$2.000=\$2'400.000$ para el caso de Pedro. Un procedimiento análogo se emplearía para las otras dos personas, aquí se estaría apoyando en la tecnología del análisis funcional.

Teniendo en cuenta que Pedro aportó la quinta parte del valor de la boleta entonces debe recibir la quinta parte de \$12'000.000, es decir, \$ 2'400.000. Procedimiento que se corresponde con la técnica τ_{rp}^{3}. Aquí se está apoyando en un análisis escalar, tecnología θ_{ae} y la teoría de los sistemas lineales directos puesto que al sacar la quinta parte de una cantidad en una magnitud (valor aportado) se reduce a la quinta parte el valor correspondiente en la otra magnitud (valor a recibir).

Si se parte de la respuesta anterior, entonces Luisa debe recibir la mitad de Pedro y Martha el doble de Pedro, esto es, acudir a la técnica τ_{pdi}^{2} sustentada por la tecnología θ_{ae}.

También se puede utilizar un procedimiento fundamentado en la tecnología θ_{pr} para encontrar el tercer valor en $\frac{\$2.400.000}{\$2.000} = \frac{?}{\$1.000}$ (y de manera análoga para las otras dos personas).

Nota: Cuando se encuentran los valores se comprueba que la suma de las cantidades recibidas por cada uno sea $ 12’000.000, en efecto

$$\$1’200.000 + \$2’400.000 + \$3’600.000 + \$4’800.000 = \$12’000.000.$$

Otras respuestas posibles, pero no necesariamente correctas:

Cada uno recibe $12’000.00 ÷ 4 = $ 3’000.000. Aquí no se evidencia un pensamiento proporcional cualitativo.

Emplear la técnica τ_{sr}^{1}, en este caso construir la siguiente tabla:

	APORTE	PREMIO RECIBIDO
	$ 1.000	$ 1’500.000
	$ 2.000	$ 2’500.000
	$ 3.000	$ 3’500.000
	$ 4.000	$ 4’500.000
TOTAL	$ 10.000	$12’000.000

Tabla 8. Una distribución proporcional.

Nota: Los valores de la columna “premio recibido” pueden ser otros, pero la idea es que el que aporte más reciba más y la suma obtenida sea $12’000.000. Se evidencia pensamiento proporcional cualitativo y la relación parte - todo, pero no se evidencia presencia de pensamiento multiplicativo.

La pregunta 2 correspondiente a un problema de tipo π_{rp} y las posibles técnicas de solución son.

- Utilizar la Tabla 7 y determinar, mediante la técnica τ_{pdi}^{4}, el valor que recibiría José.
- Tomar de la Tabla 7 el valor recibido por Luisa, y a partir de la técnica τ_{pdi}^{2} concluir que José recibiría 5 veces lo que recibe Luisa, es decir, 5 × $1’200.000= $6’000.000.

Nuevamente a través de la técnica τ_{pdi}^{2}, como \$5.000 es la mitad de \$10.000 entonces recibe la mitad del premio.

- Realizar la siguiente operación $\rho(\$5.000) = \frac{\$1.200}{\$1} \times \$5.000 = \$6'000.000$, que se fundamenta en la teoría de la razón como operador.

Encontrar el valor desconocido en la expresión: $\frac{\$1.200.000}{\$1.000} = \frac{?}{\$5.000}$, procedimiento que tiene como fundamento la tecnología θ_{pr}.

Nota: Los valores de la razón de la izquierda dependen de cual valor de premio se encuentra primero, si el de Luisa, el de Pedro, el de Martha o el de José.

Para la pregunta 3 se pueden aplicar técnicas análogas a las empleadas en la pregunta 2.

Por otro lado, si no se tienen los resultados de la Tabla 7, puede observarse que \$ 7000 puede obtenerse sumando \$3.000 + \$ 4.000 que son los valores aportados inicialmente según el enunciado de la situación por José y Martha respectivamente y por lo tanto para este nuevo aporte Martha recibiría \$3’600.000 + \$ 4’800.000 = \$ 8’400.000, es decir se acude a la técnica τ_{pdi}^{3} fundamentada en la tecnología del análisis escalar, de la forma *f(\$3.000+\$4000) = f(\$3.000)+f(\$4.000)* y de la linealidad de la función.

Acudiendo a la linealidad de la función y teniendo en cuenta que \$ 7.000 = 2 × \$ 3.000 (aporte de José) + \$ 1.000 (aporte de Luisa) y aprovechando los resultados obtenidos en la pregunta 1 se concluiría que por \$ 7.000 Martha recibe 2 × \$ 3’600.000 + \$ 1’200.000 = \$ 8’400.000, esto es, *f((2×\$3.000)+\$1000) = 2×f(\$3.000)+f(\$1.000)*

Como \$ 3.000 + \$ 7.000 = \$10.000 y según la pregunta 1 por \$3.000 se reciben \$3’600.000 entonces por \$7.000 se recibe \$12’000.000 - \$ 3’600.000 = \$ 8’400.000. Aquí se evidencia la utilización de la técnica τ_{pdi}^{3}, pero acudiendo a una resta de cantidades de magnitud.

Las preguntas 4 y 5 también corresponden al tipo de problema π_{rp}.

Para saber cuánto dinero aportar si se quiere recibir \$ 9’000.000, algunas técnicas y/o posibles soluciones serían:

- Dividir \$9’000.000 entre \$12’000.000 y el resultado multiplicarlo por \$10.000. Estrategia que se corresponde con la técnica τ_{rp}^{2} y se sustenta en el uso de la tecnología de las proporciones θ_{pr}, puesto que implícitamente se pretende encontrar el cuarto valor en la proporción:

$$\frac{\$12'000.000}{\$10.000}=\frac{\$9'000.000}{?}$$

- A partir del valor obtenido al dividir el valor total del premio entre el valor total del aporte, buscar un número que multiplicado por dicha razón dé como resultado \$9’000.000, es decir, se está utilizando el siguiente planteamiento $\left(\rho(?)=\frac{\$1.200}{\$1}\times ?=\$9'000.000\right)$ que se fundamenta en la teoría de la razón como operador.

Nota: Podría emplearse un procedimiento análogo para determinar el monto de la inversión para obtener un premio de \$ 5’400.000.

Para la pregunta 7. El valor de una cantidad *n* de dinero que se va a recibir puede ser obtenido así:

Multiplicar la cantidad de dinero *n* por el valor por peso invertido, es decir que corresponde a la segunda parte de la técnica τ_{pdi}^{1} $\left(\rho(n)=\frac{\$1200}{\$1}\times n\$\right)$ y se apoya en la tecnología del análisis funcional.

Para la pregunta 8 correspondiente a encontrar la cantidad de dinero *x* que se debe aportar de acuerdo con la cantidad de dinero *n* que se quiere recibir se puede:

- Dividir la cantidad *n* de dinero entre 1200, procedimiento que se fundamenta en la tecnología de la razón como operador asociada a la segunda parte de la técnica τ_{pdi}^{1}, a saber $\left(\rho(x)=\frac{\$1.200}{\$1}\times x=n\right)$
- Dividir la cantidad *n* entre \$12’000.000 y multiplicar el resultado por \$10.000, o de otra forma, $n\times\frac{\$10.000}{\$12'000.000}$. Este resultado proviene de despejar *x* en la proporción $\frac{\$12'000.000}{\$10.000}=\frac{n}{x}$ procedimiento que es soportado por la tecnología θ_{pr} soportada por la

teoría de la razón como correlación entre cantidades. En cierta forma el procedimiento anterior está vinculado con la técnica τ^{1}_{pdi} y con la técnica τ^{2}_{rp}.

En este ejercicio es posible que surja otro tipo de representación que sería la ecuación

$$10.000n = 12'000.000x$$

4.7.2 Los sistemas de prácticas de los estudiantes

Esta actividad se desarrolló en forma individual y consistió en la entrega de una fotocopia en donde estaba escrita la guía de trabajo que debían realizar con una situación y algunas preguntas surgidas de ella.

Respondiendo las preguntas

Con respecto a la pregunta ¿Quién recibe más dinero? se encontraron varios tipos de respuesta, a saber:

- *"Martha porque ella aportó más dinero que los demás"*. Esta fue la respuesta mayoritaria. Se evidencia el reconocimiento de una de las condiciones de la proporcionalidad directa, esto es, quien aporta más, recibe más.
- *"Las cuatro personas reciben lo mismo porque todos aportaron para la rifa"*. Posteriormente al dialogar con ellos se constató que esta respuesta obedece a dos razones:
  - ✓ En la vida cotidiana, cuando estamos entre amigos o entre conocidos y compramos algo de comida o de bebida aportando entre todos, o así alguno no aporte, lo que compramos se distribuye en partes iguales. En particular ellos comentan que cuando salen al descanso y van a la tienda del colegio con su mejor amigo o con un amigo, si ellos compran y el otro no tiene dinero para colaborar lo que se compra, se comparte de manera equitativa. En este punto se insistió en suponer que las personas no se conocen, pero su respuesta se mantuvo y fue así como surgió la segunda razón.
  - ✓ Si uno de los cuatro no hubiera hecho su aporte no se hubiese podido comprar la rifa y ninguno se habría ganado el premio. Esta respuesta fue dada por cinco estudiantes. Al observar que la respuesta se mantenía en el grupo de

estudiantes, se intentó en primera instancia acudir a un juego popular que tiene que ver con apuestas, el “Chance”, pero al preguntárseles si lo habían jugado, todos dijeron que no, que sus papás sí, pero que ellos no sabían cómo se pagaban los premios en el juego. Por tal razón se acudió a un segundo planteamiento:

Supongamos que en una empresa hay $12’000.000 de premio para distribuir entre cuatro de sus trabajadores de los cuales Martha ha trabajado 4 horas, José 3, Pedro 2 y Luisa 1 hora. ¿Quién debería recibir más dinero del premio?

Ante este supuesto todos los estudiantes, sin dudarlo, aseguraron que Martha debería recibir más.

Las respuestas a la pregunta acerca de quién recibe menos dinero son análogas a las que se dan en el punto anterior.

En cuanto a la pregunta sobre la cantidad de dinero que debe recibir cada uno, algunas respuestas y procedimientos fueron:

- Cada uno debe recibir $3’000.000, resultado de dividir 12’000.000 entre 4. Esta respuesta corresponde a los que consideraron que se debía repartir por igual el premio.
- En este punto algunos de los que respondieron que Martha recibía más, colocaron como respuesta $3’000.000.

Hemos representado algunas respuestas numéricas en las siguientes tres tablas (9,10 y 11):

Nombre	Aporte en pesos	Premio en pesos
LUISA	1.000	1’000.000
PEDRO	2.000	2’000.000
JOSÉ	3.000	3’000.000
MARTHA	4.000	4’000.000
Total	10.000	10’000.000

Tabla 9. Distribución que no satisface la condición de la suma de las cantidades.

Los estudiantes han identificado que con un mayor aporte se recibe una mayor parte del premio, para tal fin otorgaron $1’000.000 por cada $1.000 invertidos, pero no determinaron que la suma de las partes del premio debería darles $12’000.000. En este caso, la técnica empleada por los estudiantes no conduce a una respuesta adecuada puesto que no cumple las condiciones impuestas por las situaciones de reparto proporcional.

Nombre	Aporte en pesos	Premio en pesos
LUISA	1.000	1’500.000
PEDRO	2.000	2’500.000
JOSÉ	3.000	3’500.000
MARTHA	4.000	4’500.000
Total	10.000	12’000.000

Tabla 10. Distribución que satisface la condición de la suma de las cantidades.

Para dar estos valores los alumnos recurrieron a un procedimiento similar al empleado para construir la anterior tabla, sin embargo identificaron que hacían falta $2’000.000, por lo tanto repartieron este valor en cuatro, es decir, $500.000 para cada uno, combinando un reparto proporcional con un reparto equitativo. En esta técnica nuevamente falla una de las condiciones que impone la forma como están definidos los repartos proporcionales.

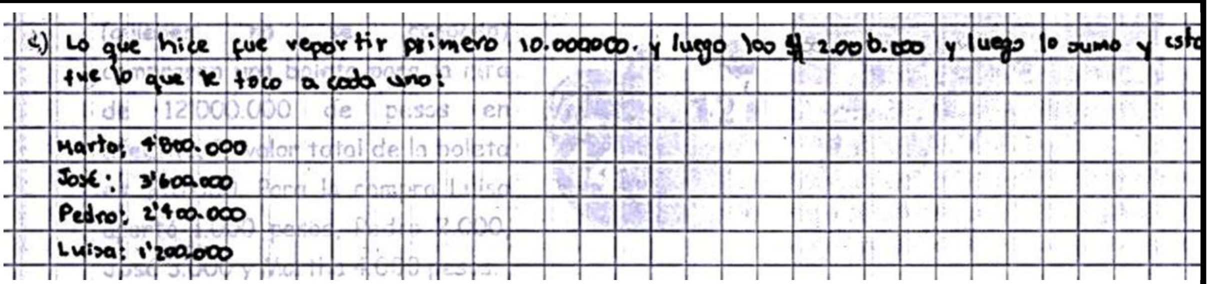
Nombre	Aporte en pesos	Premio en pesos
LUISA	1.000	1’200.000
PEDRO	2.000	2’400.000
JOSÉ	3.000	3’600.000
MARTHA	4.000	4’800.000
Total	10.000	12’000.000

Tabla 11. Distribución que satisface la dos condiciones.

El cálculo de los valores en esta tabla se realizó de dos formas:

- Aplicando la primera parte de la técnica τ_{rp}^{1}, es decir determinando cuánto debía repartirse por cada $1.000, este valor lo obtuvieron dividiendo $12’000.000 entre $10.000, es decir, $\rho = \frac{\$12'000.000}{\$10.000} = \frac{\$1.200}{\$1}$. En este momento y luego de haber analizado lo ocurrido en las situaciones 3.1 y 3.2, puede afirmarse que de manera intuitiva los estudiantes están utilizando la razón como relator. A continuación se aplica la segunda parte de la técnica τ_{rp}^{1} en la que la razón pasa de su papel como relator a un papel como operador y a través de análisis funcionales se determina el resto de valores, por ejemplo $f(\$2.000) = \rho \times \$2.000 = \frac{\$1.200}{\$1} \times \$2.000 = \$2'400.000$.

- Un estudiante repartió primero $10.000.000 y luego los $2.000.000. Sumó los dos resultados y esto es lo que le corresponde a cada uno. (ver gráfica 39)

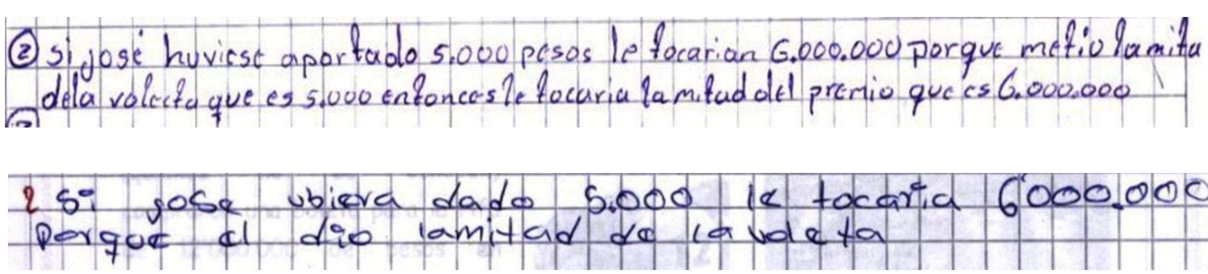


Gráfica 39. Una forma para distribuir el premio en la situación 4.

El estudiante establece dos razones, a saber, $\rho_1 = \frac{\$10'000.000}{\$10.000} = \frac{\$1.000}{\$1}$ y $\rho_2 = \frac{\$2'000.000}{\$10.000} = \frac{\$200}{\$1}$, luego las suma para establecer una única razón y a partir de ahí determinar cuánto le correspondió a cada uno. Este procedimiento se corresponde con la técnica τ_{rp}^{1}.

Para responder a la pregunta: ¿Cuánto debería recibir José si su aporte hubiese sido de 5.000 pesos? Se dieron las siguientes respuestas numéricas y las técnica descritas a continuación.

- Le hubiera correspondido $6'000.000, es decir, la mitad del premio puesto que aportó la mitad del valor de la boleta. Utilizan la técnica τ_{rp}^{3} fundamentada en la teoría de los sistemas lineales directos y de los análisis escalares.



Gráfica 40. Una respuesta para la pregunta 2 de la situación 4.

- Le hubiera tocado $ 5’000.000. Para dar esta respuesta los estudiantes utilizan la idea de que por cada $1.000 invertidos se gana $1’000.000.
- Le corresponderían $5’200.000. En esta respuesta se parte del hecho de que por cada $1.000 se gana $1’000.000 y que los $2’000.000 que sobran se dividen en 5 partes iguales de $200.000.
- A José le corresponde $3’000.000. Respuesta dada bajo el supuesto que todos deben ganar lo mismo.

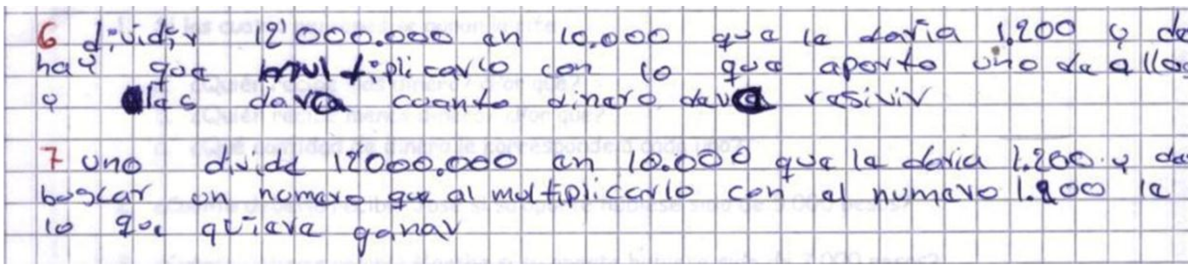
Para determinar el valor del premio al invertir $7.000, los procedimientos son análogos a los anteriores, con excepción de la no utilización de técnicas soportadas por las relaciones parte - todo.

Con las preguntas: ¿Cuánto debería haber aportado una de las cuatro personas si hubiese querido ganarse $9’000.000? y ¿Cuánto si hubiese querido ganarse 5’400.000 pesos?; se pretendía identificar las estrategias desplegadas por los estudiantes para determinar la variable independiente (valor aportado) conociendo la variable dependiente (valor ganado).

Las respuestas y estrategias están ligadas a las planteadas para resolver la pregunta 1c) y son:

- Para quienes consideran que por cada $1.000 de aporte se recibe $1’000.000, las respuestas fueron $9.000 y $5.400, respectivamente.
- Quienes encontraron la razón $\rho = \frac{\$1200}{\$1}$ dividieron el valor del premio que se quiere ganar entre esta razón y así obtienen el resultado. Es decir, emplean la técnica τ_{rp}^{1} que se sustenta en las tecnologías de la razón como operador y de los análisis funcionales de la forma $f(x) = \rho \times x = 9'000.000$. De donde $x = \frac{\$9'000.000}{\frac{\$1200}{\$1}} = \$7.500$

Las estrategias para dar respuesta a las preguntas: ¿Cómo se calcularía la cantidad de dinero recibido de acuerdo con una cantidad de dinero aportado? Y ¿Cómo se calcularía la cantidad de dinero aportado de acuerdo con la cantidad de dinero que se quiere recibir?, fueron:


6 dividir 12'000.000 en 10.000 que le daria 1.200 y des
hay que multiplicarlo con lo que aporto uno de ellos
y les dara cuanto dinero devera resivir
7 uno divide 12000.000 en 10.000 que le daria 1.200 y des
buscar un numero que al multiplicarlo con el numero 1.200 le
lo que quiera ganar

Gráfica 41. Una de las respuestas a las preguntas 6 y 7 de la situación 4.

Estas respuestas provienen de la aplicación de la técnica τ_{rp}^{1} .

A manera de conclusiones de la situación 4.

En el primer grupo de preguntas se observa que los estudiantes a pesar que inicialmente responden que hay una persona que debe recibir más que las otras y otra que recibe menos, al decidir cuánto le corresponde a cada uno deciden hacer un reparto equitativo. Esto evidencia que los estudiantes acuden con mayor comodidad a análisis de tipo cualitativo que a los análisis de tipo cuantitativo.

Para dar las respuestas numéricas, algunos estudiantes que repartieron en cantidades diferentes de acuerdo con el aporte dado, no consideraron en primera instancia que la suma era un valor constante, en este caso, $12.000.000 y en segunda instancia, ya sea que hayan considerado este hecho o no, los estudiantes no tuvieron en cuenta las relaciones parte - todo, esto es, que una persona que aporta $2000, por ejemplo, debe recibir la mitad de lo que reciba alguien que haya aportado $4000.

La resolución de la situación realizando un reparto en cantidades iguales de dinero, que tradicionalmente en un examen o prueba escrita, puede ser considerado un procedimiento erróneo, en nuestro caso y teniendo en cuenta la posibilidad de discutir con el estudiante su respuesta, muestra que quizá matemáticamente el procedimiento no sea adecuado, pero que aquí, está mediando una práctica social de la solidaridad entre amigos.

4.8 Situación 5

4.8.1 Análisis desde la mirada del experto

Situación 5: Un paseo por los descuentos

Una familia realiza algunas compras en un almacén de cadena de su ciudad el cual, por estar cumpliendo años, está ofreciendo diferentes descuentos en los productos que vende. Los artículos comprados, y el descuento ofrecido aparecen en la tirilla de compras representada por la tabla de la derecha:

(Recuerda escribir las operaciones que realizas)

1. ¿Cuál es el valor del descuento para:

   a. el arroz?
   b. la cámara?
   c. la camisa?
   d. el detergente?

2. ¿De cuánto sería el descuento para:

   a. 5 arrobas de arroz?
   b. 3 camisas?

3. ¿Cuál es el valor total del descuento para:

   a. la cámara, la memoria y el celular?
   b. el arroz, el azúcar y el aceite?

	ALMACENES PROGRESO		
CANTIDAD	**ARTÍCULO**	**PRECIO (PESOS)**	**PORCENTAJE DE DESCUENTO**
1 ARROBA	ARROZ	30000	20%
1 ARROBA	AZUCAR	17000	20%
1 LITRO	ACEITE	6000	20%
1	CÁMARA DIGITAL	200000	5%
1	MEMORIA USB 2GB	20000	5%
1	CELULAR	150000	5%
1	PANTALON	50000	15%
1	CAMISA	40000	15%
1 KILO	DETERGENTE	5000	10%
1	JABON DE TOCADOR	3000	10%

4. Si el padre decide luego comprar un martillo cuyo valor original es 15.000 pesos y el valor del descuento es 1.500 pesos. ¿Qué porcentaje de descuento tiene el martillo?

Propósitos:

Reconocer la magnitud presente en la situación.

Identificar procesos de covariación entre magnitudes.

Reconocer el rol de la razón en situaciones de porcentaje.

Gestión de la situación "un paseo por los descuentos"

Estructura de la situación

En la actividad se presenta una tirilla de compras, realizadas en un almacén de cadena, en la cual se conoce el precio en pesos de 10 artículos y unos valores para aplicar descuentos a dichos precios. Se pretende que el estudiante calcule el monto del descuento. Los artículos se han organizado en cuatro grupos, cuya característica es tener el mismo porcentaje de descuento, pero diferente precio. Dentro de los dos primeros grupos de artículos con el mismo porcentaje de descuento, se ha dejado que dos de los precios netos sean uno múltiplo del otro, con el fin de determinar si se observa que al mantenerse constante el porcentaje, se puede establecer, a través de un análisis escalar, que la duplicación de una magnitud produce el mismo efecto en el elemento correspondiente en la otra magnitud. Para los dos últimos grupos dicha característica no se conserva.

Los precios netos de los artículos corresponden al valor de una unidad (arroba, litro, kilo) del artículo. Para luego realizar preguntas que permitan acudir a la linealidad de la función que define el cálculo de los porcentajes.

En la pregunta 1 se han seleccionado cuatro artículos que no tienen coincidencias en el valor neto, ni en el porcentaje de descuento para que el estudiante identifique a cuánto asciende el valor del descuento. Aquí se hace necesario que el estudiante ponga en relación las dos magnitudes, siendo la magnitud M_1 el precio neto y M_2 el monto del descuento.

La segunda pregunta pretende determinar si se utiliza la linealidad de la función porcentaje (propiedad de multiplicación por escalar) para encontrar el valor del descuento de varias unidades de un mismo artículo, aprovechando para ello los resultados obtenidos en la pregunta 1.

La tercera pregunta pretende aprovechar la circunstancia de que hay varios artículos con un mismo porcentaje de descuento, para determinar si el estudiante recurre a la propiedad aditiva de la linealidad de la función porcentaje para ir de una magnitud a otra.

En el último ejercicio se pretende, a partir de conocer el valor de la variable dependiente y el valor de la variable independiente, encontrar el porcentaje aplicado.

Conceptos y tecnologías:

Los conceptos que están involucrados en la situación 5 tienen que ver con: la covariación entre dos series de cantidades de una misma magnitud, a saber, $Serie\ uno\ (S_1)$ – el precio neto de cada artículo, y $Serie\ dos\ (S_2)$– el valor en pesos del descuento. La magnitud M_1 de la que provienen estas series de cantidades de magnitud es el dinero en pesos. Por las condiciones de la situación, la magnitud es descrita, esto es, M_1 es subconjunto de los números racionales. Las tecnologías asociadas a los tipos de problemas que se espera que los estudiantes resuelvan en esta situación de proporcionalidad simple directa (psd), porcentajes, están apoyadas en la teoría de la razón como relator, la razón como operador, la razón como correlator entre cantidades y los sistemas lineales directos (θ_{ld}).

Técnicas

En la pregunta 1 correspondiente al tipo de problema π_{pc1}. Algunas tecnologías que emplearan los estudiantes son:

- Para calcular el descuento en la arroba de arroz acudir a la técnica τ^1_{pc1}, es decir, aplicar la forma tradicional de calcular porcentajes, correspondiente a multiplicar el precio neto por 20 y dividirlo entre 100, esto es, $\$30000 \times \frac{20}{100} = \$6000$. Este procedimiento proviene de aplicar la relación $\frac{m_1}{\$30000} = \frac{20}{100}$ la cual corresponde a la tecnología θ_{pr} que define los porcentajes.

- Como \$30000 es el 100% y 20% es la quinta parte de 100% entonces se divide \$30000 entre 5, expresándose una utilización de la técnica τ_{pc1}^{3} , sustentada por la tecnología θ_{ae} del análisis escalar.

Nota: Se esperan soluciones análogas para los literales b, c y d.

La pregunta 2 está vinculada con el tipo de problema π_{pc3} y tiene asociadas las siguientes técnicas:

- Técnica τ_{pc3}^{1}, correspondiente al proceso de calcular el precio de las cinco arrobas de arroz y luego calcular el monto del descuento para este nuevo valor, esto es, $5 \times \$30000 = \$150000$ luego $\$150000 \times \frac{20}{100} = \$30000$, por lo tanto el descuento es de \$30000.
- Tomar el valor obtenido en la pregunta (1c) y multiplicarlo por 5. Aquí se utiliza la técnica τ_{pc3}^{2}, técnica que se fundamenta en propiedad de linealidad de la función puesto que $f\ (5 \times (\$30000))\ =\ 5 \times f\ (\$30000)$.

  Nota: Se esperan soluciones análogas para el litera b.

  El tipo de problema π_{pc4} es el que aglutina a la pregunta 3.

  A continuación se enuncian algunas técnicas que podrían ser empleadas.

  Sumar el valor de los artículos y sacar el porcentaje de esa suma, es decir, $\$200000 + \$20000 + \$150000 = \$370000$, luego $\$370000 \times \frac{5}{100} = \$18500$, que corresponde a la aplicación de la técnica τ_{pc4}^{1}. Aunque en este caso los n_i son todos 1.

- Aplicar la técnica τ_{pc4}^{2}, es decir, calcular los descuentos por separado y luego sumar estos resultados. Esta técnica se apoya en la linealidad de la función

  $f(\$200000 + \$20000 + \$150000) = f(\$200000) + f(\$20000) + f(\$150000)$

Nota: Se esperan soluciones análogas para el literal b.

La pregunta 4 obedece a un problema de tipo π_{pc2} y para determinar cuál fue el porcentaje aplicado se puede recurrir a:

La técnica τ^2_{pc2}, que tiene que ver con preguntarse por cuánto hay que multiplicar a \$15000 para que al dividir dicho resultado entre cien el nuevo valor sea \$1500, es decir, encontrar el cuarto valor en la proporción, tecnología θ_{pr} $\frac{\$15000}{100}=\frac{\$1500}{?}$. Dicho de otra forma, buscar un número que guarde con 100 la misma relación que \$ 1500 con \$15000.

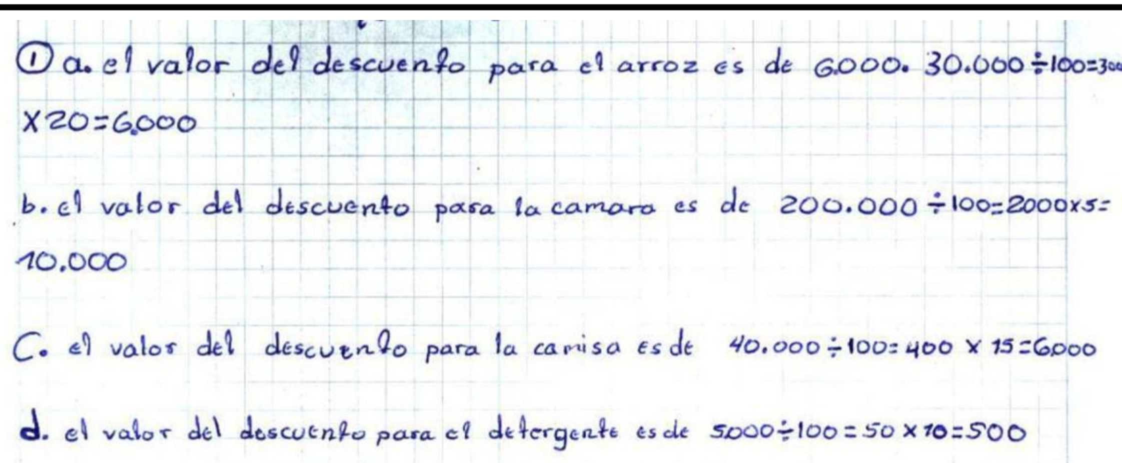
4.8.2 Los sistemas de prácticas de los estudiantes

Esta actividad se desarrolló en forma individual y consistió en la entrega de una fotocopia en donde estaba escrita una situación y algunas preguntas de reflexión surgidas de ella.

Respondiendo las preguntas de reflexión

En el primer bloque de preguntas, correspondientes al tipo de problemas π_{pc1}, los estudiantes desplegaron las siguientes estrategias para responder.

- Dividieron el valor original del artículo entre 100 y el resultado lo multiplicaron por el porcentaje del descuento. Por ejemplo para encontrar el 20% de \$30.000 (precio de una arroba de arroz), dividieron \$30.000 entre 100 y obtuvieron \$300, luego multiplicaron este valor por 20 obteniendo como resultado \$6.000, por lo tanto el descuento en el arroz fue de \$6.000. Esta estrategia corresponde a la técnica τ^2_{pc1}.


1 a. el valor del descuento para el arroz es de 6.000. 30.000 ÷ 100 = 300 X 20 = 6.000

b. el valor del descuento para la camara es de 200.000 ÷ 100 = 2000 x 5 = 10.000

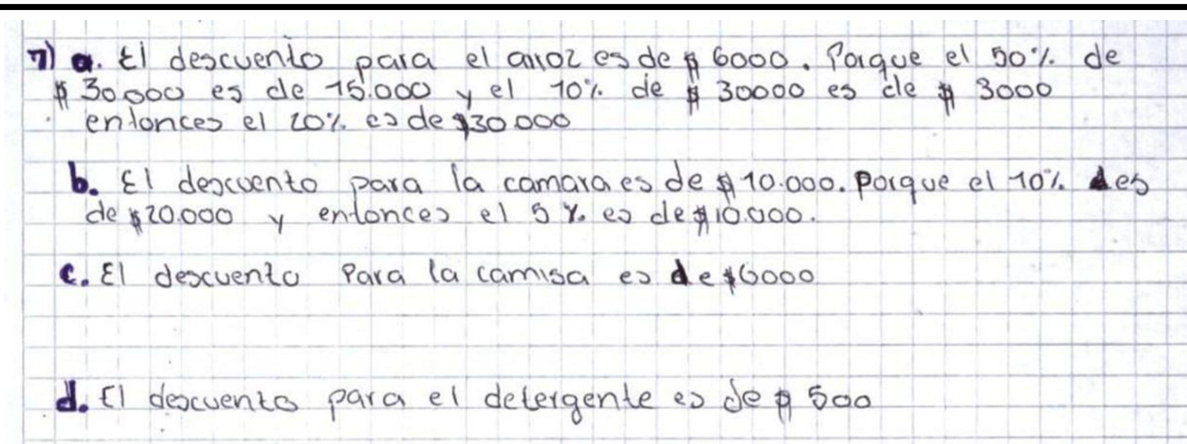
C. el valor del descuento para la camisa es de 40.000 ÷ 100 = 400 X 15 = 6000

d. el valor del descuento para el detergente es de 5000 ÷ 100 = 50 X 10 = 500

Gráfica 42. Una estrategia para dar respuesta al primer bloque de preguntas.

Se está recurriendo a dividir el todo en 100 partes (1%), es decir, se está tomando al porcentaje como un relator y posteriormente como operador (nuevamente en acto).

- Multiplicaron el valor original del artículo por el porcentaje del descuento y este resultado lo dividieron entre 100. Por ejemplo para determinar el 5% de $200.000 (precio de la cámara digital), multiplicaron $200.000 por 5 cuyo resultado es $1'000.000; luego dividieron este valor entre 100 y el resultado es $10.000 es decir, que el descuento para la cámara es de $10.000. Procedimiento que se corresponde con la técnica τ^{1}_{pc1}.
- Utilizaron la técnica τ^{3}_{pc1}, soportada en la tecnología de las relaciones parte - todo, así: Si el valor total es el 100%, el 50% es la mitad del valor total y así sucesivamente hasta llegar al porcentaje solicitado. Es interesante mirar cómo para hallar el 5% de $150.000 se procedió así: el 50% de $150.000 es $75.000, luego el 5%, que es la décima parte de 50%, de $150.000 es la décima parte de $75.000 o sea $7.500.



7) a. El descuento para el arroz es de $ 6000. Porque el 50% de $ 30.000 es de 15.000 y el 10% de $ 30000 es de $ 3000 entonces el 20% es de $30 000

b. El descuento para la camara es de $ 10.000. Porque el 10% es de $20.000 y entonces el 5% es de $10.000.

c. El descuento Para la camisa es de $6000

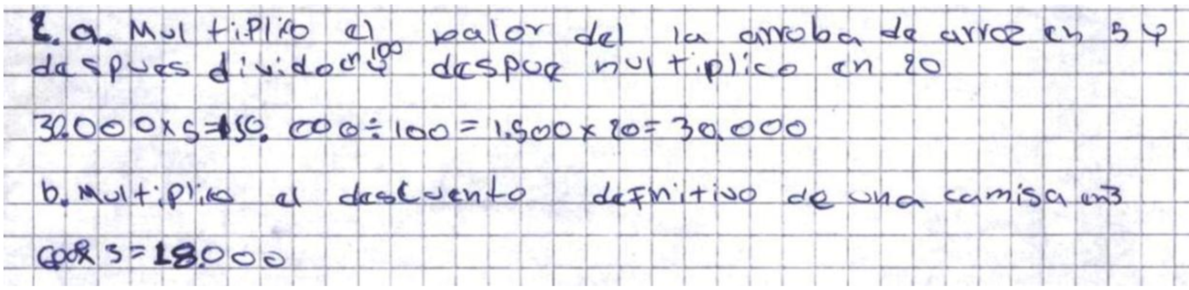
d. El descuento para el detergente es de $ 500

Gráfica 43. Otra forma de dar respuesta al primer bloque de preguntas de la situación 5.

- Para determinar el 20% de $30.000 se dividió $30.000 entre 5, puesto que 20% es la quinta parte del 100% que también corresponde a la técnica τ^{3}_{pc1}.

Para el segundo bloque de preguntas ligado al tipo de problemas π_{pc3}, en el cual se consideraban varias unidades del mismo artículo se desplegaron dos estrategias:

- Multiplicar el valor original del artículo por la cantidad de unidades compradas y luego calcular el descuento de este valor total. Por ejemplo multiplicar 5 por \$30.000 (precio de una arroba de arroz), obteniéndose \$150.000 y a continuación calcular el 20% de este valor, que corresponde a la técnica τ^{1}_{pc3}.


2. a. Multiplico el valor del la arroba de arroz en 5 y despues divido en 100 despue multiplico en 20
32000x5=150.000÷100=1.500x20=30.000
b. Multiplico el descuento definitivo de una camisa en 3
6000x3=18000

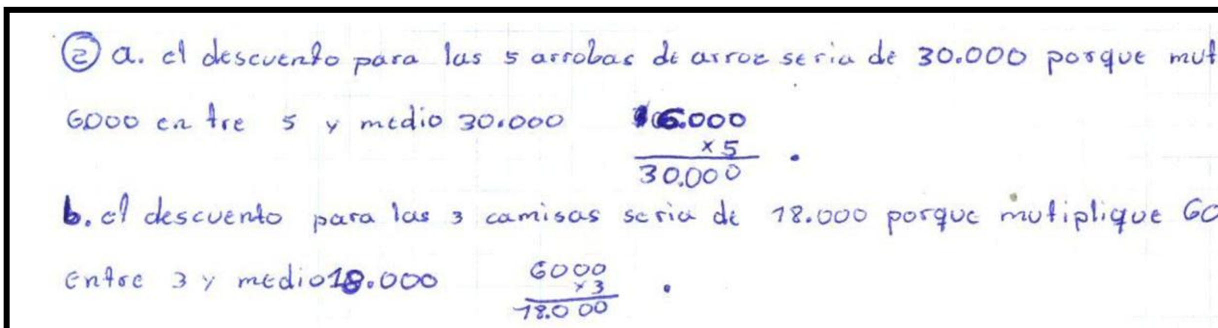
Gráfica 44. Las respuestas al segundo bloque de preguntas de la situación 5.

Se recurre a un proceso fundamentado en la tecnología del análisis funcional de la forma:

$$f(5\times\$30.000) = f(\$150.000) = \frac{\$150.000}{100}\times 20 = \$30.000$$

A partir de esta respuesta un estudiante expresó verbalmente: "Eso es equivalente a que uno paga 4 arrobas de arroz y lleva 5".

- Acudir a la técnica τ^{2}_{pc3} consistente, en este caso, en aprovechar que ya se sabe el valor del descuento de 1 artículo y multiplicar este valor por la cantidad de artículos adquiridos. Por ejemplo, como el descuento para una camisa es de \$6.000 entonces el descuento para tres camisas es el resultado de multiplicar \$6.000 por 3, es decir \$18.000.

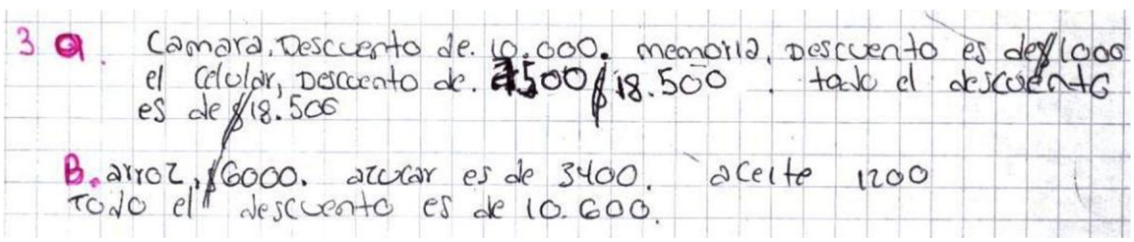

2 a. el descuento para las 5 arrobas de arroz seria de 30.000 porque multi
6000 en tre 5 y medio 30.000 $6.000 x5 30.000.
b. el descuento para las 3 camisas seria de 18.000 porque mutiplique 60
entre 3 y medio 18.000 6000 x3 18.000.

Gráfica 45. Otra estrategia para dar respuesta al segundo bloque de preguntas.

Se utiliza un teorema en acto, en el sentido de (Vergnaud, 1983), que corresponde a una de las condiciones de las transformaciones lineales, que como ya se ha mencionado deberá ser formalizada más adelante, esto es,

$f(3\times\$40.000)=3\times f(\$40.000)=3\times\$6.000=\$18.000$, acudiéndose a la tecnología de los análisis escalares.

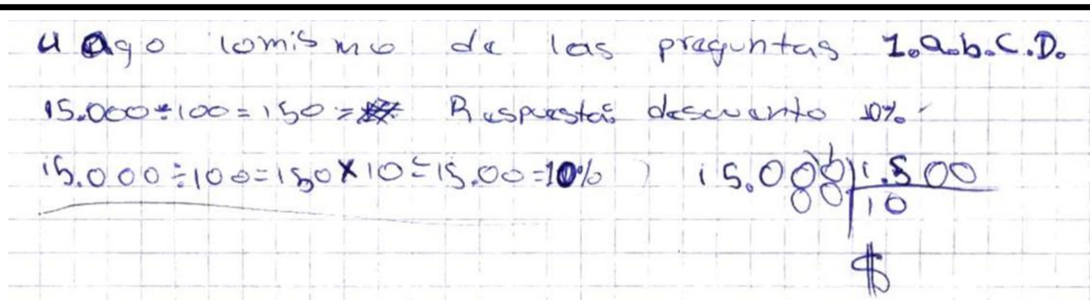
Para el tercer bloque de preguntas relacionado con el tipo de problema π_{pc4}, en el cual se trabaja con diferentes artículos que tiene el mismo porcentaje de descuento, los estudiantes calcularon por separado el valor de cada descuento y luego sumaron dichos descuentos, es decir recurrieron únicamente a la técnica τ^{2}_{pc4}.



Gráfica 46. Una de las respuestas a las preguntas 3(a) y 3 (b) de la situación 5.

La resolución de la última pregunta, correspondiente al tipo de problemas π_{pc2} arrojó las siguientes técnicas:

- Dividir \$15.000 entre 100 y buscar un número que multiplicado con este cociente dé como resultado \$1.500, dicho número es el porcentaje buscado. Este proceso corresponde a la técnica τ^{3}_{pc2}.



Gráfica 47. Una forma de responder a la pregunta 4 de la situación 5.

Se observa la utilización en acto (Vergnaud, 1983) de la idea de proporción, puesto que se está buscando el cuarto valor en la expresión $\frac{\$15.000}{100}=\frac{\$1.500}{x}$, es decir, implícitamente se está buscando el valor que guarde la misma razón con el 100 que el todo con la parte

Nota: Luego de realizado este procedimiento se les preguntó a los estudiantes si existía otra manera de resolver el problema utilizando únicamente los valores iniciales. Su respuesta fue afirmativa y consistió en dividir \$15.000 entre \$1.500, obteniendo como resultado 10. Valor que ellos relacionaron con el 10%.

Gráfica 48. Otra forma de responder la pregunta 4 de la situación 5.

La solución a esta última pregunta puede conducir a una falsa generalización por parte de los estudiantes. Ésta es, “para hallar el porcentaje se divide el todo entre la parte”, puesto que es en el caso particular del 10% en el cual este número coincide con la relación parte - todo de que el todo es 10 veces la parte, que es el resultado de la división.

A manera de conclusiones de la situación 5.

Las situaciones de porcentaje aparecen con suficiente frecuencia en actividades cotidianas, sobre todo en aquellas que tiene que ver con compras y en las respuestas de los chicos surgió una afirmación relacionada con las promociones ofrecidas por almacenes, supermercados, depósitos, etc, lo cual nos llevó a preguntarnos y plantear:

¿Qué criterios emplean los encargados del mercadeo de los productos, para ofrecer promociones de pague una cantidad y lleve más, o para hacer descuentos en un determinado porcentaje?

Por otro lado, aunque no ocurrió con el grupo de estudiantes con el que se estaba trabajando, algunas personas para determinar descuentos sobre varios productos proceden de manera errónea sumando dichos valores porcentuales para luego calcular el valor del descuento.

5 Capitulo 5. Consideraciones finales.

Sistemas de prácticas desplegados por los estudiantes:

En los procedimientos empleados por los estudiantes para la resolución de las situaciones se evidencia en gran medida la aplicación de las siguientes técnicas, tecnologías y teorías. Vale la pena aclarar que en lo que tienen que ver con los procedimientos utilizados por los estudiantes, las técnicas, las tecnologías y las teorías, no son usadas en un nivel formal sino a un nivel intuitivo previo a la instrucción y que por tanto se consideran como teoremas y conceptos en acto, en el sentido de Vergnaud, los cuales deberán ser formalizados más adelante por parte del profesor o de otra institución.

Teorías.

Tanto para el análisis de las situaciones por parte del investigador como para las soluciones dadas por los estudiantes se observa la necesidad de acudir a todo el aparato formal de las transformaciones lineales y de las funciones reales, por ejemplo, es necesario acudir a las funciones lineales, a las funciones bilineales, a las tres propiedades fundamentales de la linealidad y a los sistemas lineales directos e inversos, de igual forma a los tres roles de la razón (relator, operador y correlator).

Técnicas y tecnologías asociadas.

En cuanto a las técnicas empleadas para resolver el tipo de problemas π_{sr} referidas a las formas de representación, hay que decir que los estudiantes, inducidos por el diseño de las situaciones que incluían tablas de datos para ser completadas, recurrieron inicialmente a la técnica τ_{sr}^{1}, correspondiente a las representaciones tabulares, para dar algunas respuestas. Por ejemplo, en el caso de la situación 2, emplearon la tabla para extrapolar un valor que se pedía calcular. Esta técnica también está codificada como τ_{pdi}^{4}, puesto que también permitió a los estudiantes resolver situaciones de linealidad simple directa y simple inversa.

Por otro lado, en la situación 1, en la que se les solicitó hacer una gráfica, la mayoría de los estudiantes acudieron a la técnica de las representaciones icónicas τ_{sr}^{4}, representación que en la mayoría de los casos no favoreció su utilización para dar respuesta a otras preguntas. Este hecho llevo a que en la primera intervención se recordará lo referente a las gráficas cartesianas y estadísticas (diagrama de barras), situación que condujo a que en las siguientes dos situaciones, en las que se pedía hacer una gráfica, los estudiantes acudieran a la técnica τ_{sr}^{2} de las gráficas cartesianas. Vale la pena anotar que las gráficas cartesianas, a pesar que en un buen número de casos fueron bien construidas, tampoco se utilizaron para dar respuesta a otras preguntas.

Para los tipos de problemas π_{pdi} referentes a situaciones de proporcionalidad simple directa e inversa, la técnica τ_{pdi}^{1} fue la que apareció con mayor frecuencia entre los estudiantes y en las cinco situaciones. Está técnica se sustenta en el reconocimiento de los distintos roles de la razón, aunque se haga de manera intuitiva, es decir, se acuda a teoremas en acto. En este sentido, se observó cómo en las situaciones (1) a (4), para dar respuesta a las primeras preguntas, los estudiantes acuden a realizar la división entre las cantidades de magnitud involucradas para determinar el valor por unidad. En este momento fue difícil determinar si los estudiantes estaban utilizando la razón como relator. Pero en las preguntas finales, las que se han denominado preguntas de generalización, se observa que el valor encontrado es utilizado como invariante o como constante de proporcionalidad.

En este tipo de problemas también se observó, aunque con menos frecuencia que la anterior, la aplicación de las técnicas τ_{pdi}^{2} y τ_{pdi}^{3}. La primera se asocia con la tecnología de los análisis escalares, y con el razonamiento por analogías; la segunda muestra el uso, por parte del estudiante, de una serie de principios que son válidos en el contexto de la situación tratada en virtud de la linealidad de la relación entre las variables involucradas. Además la técnica τ_{pdi}^{3} pone en evidencia la preferencia de algunos estudiantes por la realización de procesos aditivos (o aditivos inversos) en lugar de la multiplicación.

En los tipos de problemas denominados repartos proporcionales π_{rp}, se evidenció mayor comodidad de los estudiantes para realizar análisis de tipo cualitativo y no tanto para los análisis de índole cuantitativo. De igual manera en un grupo significativo de estudiantes se observó la primacía de los repartos equitativos por encima de los repartos proporcionales, influenciada por la manera como en la vida cotidiana se dan las cosas. Por ejemplo, en una fiesta no se destapan los regalos antes para saber qué cantidad de comida o de bebida le corresponde a cada uno de acuerdo con el valor del regalo. En este sentido es necesario diseñar situaciones de tal forma que induzcan al estudiante a asignar de manera natural el carácter proporcional que debe tener el reparto que se va a realizar.

Ahora bien, en la realización de los análisis cuantitativos la técnica mayoritariamente utilizada fue τ_{rp}^{1}, la cual está estrechamente relacionada con la técnica τ_{pdi}^{1}, que permitió calcular la constante de proporcionalidad que luego se aplicó para determinar los valores del premio que debe recibir cada persona. Esta técnica está sustentada por las tecnologías de los análisis escalares y funcionales y de las proporciones, apoyadas por la teoría de los roles de la razón.

En un menor número, los estudiantes utilizaron las técnicas τ_{rp}^{2} y τ_{rp}^{3}, las que se apoyan en el uso de la razón como relator y de los sistemas lineales directos respectivamente. Vale la pena anotar que la segunda técnica aplica los mismos principios que la técnica τ_{pdi}^{2}.

En lo referente a los problemas de tipo π_{pc1}, relacionados con porcentajes, la mayoría de los estudiantes acudieron a la técnica de determinar a cuanto correspondía el 1% de determinado valor, es decir, acudieron a la técnica τ_{pc1}^{2} la cual también tiene su sustento en la teoría de los roles de la razón. Por otro lado, teniendo en cuenta que se trabajó con porcentajes que eran múltiplos de 5, algunos estudiantes, aunque en menor número, recurrieron a la técnica τ_{pc1}^{3}, soportada por la teoría de los sistemas lineales.

Para los tipos de problema π_{pc3} y π_{pc4} consistentes en determinar el mismo porcentaje para n veces un valor o para n_i veces varios valores, los estudiantes lograron comprender que da lo mismo sumar los valores y luego calcular el porcentaje de dicha suma o calcular los porcentajes para cada valor y luego sumar dichos porcentajes. Las técnicas relacionadas con estos procedimientos ($\tau^1_{pc3}, \tau^2_{pc3}, \tau^1_{pc4}, \tau^1_{pc5}$) están fundamentadas en las tecnologías de los análisis escalares (θ_{ae}) y funcionales (θ_{ae}) y en las propiedades de la linealidad.

Cabe anotar que aunque se definió un tipo de problema para distintos valores con distintos porcentajes, la situación 5, no incluyó alguna pregunta en este sentido, por tanto queda como recomendación, para una nueva aplicación, diseñar preguntas que apunten a este tipo de problema para determinar qué hacen los estudiantes.

Algunas sugerencias

La continua utilización de teoremas en acto, por parte de los estudiantes, relacionados con las propiedades de linealidad, análisis funcionales y las diferentes caras de la razón, son una señal de que al resolver situaciones de variación y cambio, las razones, las proporciones y la proporcionalidad son llevadas al aula de clase por parte de los estudiantes. Por tanto, el trabajo de los docentes después de implementar este tipo de situaciones será formalizar las propiedades de la linealidad, los análisis funcionales y escalares y los diferentes roles de la razón. En estos procesos de formalización del trabajo matemático con las razones, las proporciones y la proporcionalidad se hace necesario insistir en el manejo y escritura de las unidades de cada cantidad de magnitud. Es decir, hay que exigir a maestros y a estudiantes que en cada una de las operaciones que se realicen, para dar respuesta a las preguntas, las unidades aparezcan explícitamente. Esto favorece en los estudiantes la identificación de los distintos roles de la razón, principalmente de la razón como relator cuando se trabaja con magnitudes heterogéneas.

Se observa una inclinación de los estudiantes por acudir a procesos aditivos o aditivos inversos para la resolución de las situaciones, en la preguntas en las cuales se esperaría se acudiera a productos o cocientes. Este hecho puede convertirse en un obstáculo para que los estudiantes exhiban la manera como ellos llevan las razones, las proporciones y la proporcionalidad al aula de clase. En gran medida, este obstáculo se salvó en la aplicación de las subsituaciones 3.1 y 3.2 en las que se trabajó con cantidades numéricas grandes y se permitió el uso de la calculadora, lo cual encaminó a los estudiantes a la utilización de multiplicaciones o divisiones.

Teniendo en cuenta que las tres primeras situaciones solicitaban la realización de una gráfica, el análisis de los tipos de gráficas empleados, permitió determinar que se requiere un trabajo previo en lo que tiene que ver con la elaboración, lectura e interpretación de gráficas cartesianas o estadísticas. Pero ante todo, se debe lograr que estas gráficas sean significativas para los estudiantes, es decir, que ellos determinen la necesidad y utilidad de este tipo de representación, resaltando que el trabajo no se remita a saberlas elaborar sino a poderlas interpretar y a dar respuesta a preguntas surgidas de ellas.

La aplicación de las situaciones permitió determinar que es posible obtener mejores resultados si se cambia el orden en algunas preguntas de reflexión, por ejemplo en la situación 1 debió colocarse la pregunta 5.d) a continuación de las preguntas de la 5.a) puesto que la respuesta a esta primera cuestión es la generalización de estas preguntas.

Finalmente vale la pena anotar que algunas preguntas estaban orientadas a determinar los análisis cualitativos desplegados por los estudiantes. En tal sentido, se hizo notorio que los alumnos acuden con mayor naturalidad y espontaneidad a este tipo de análisis y no fue tan cómodo, al inicio, para ellos realizar análisis cuantitativos, pero las intervenciones realizadas, las subsituaciones diseñadas y el proceso de solución de las situaciones permitió una mayor apropiación del trabajo de tipo cuantitativo.

6 Referencias Bibliográficas

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS enviroment: the genesis of a reflection about instrumentation conceptual work. (pp. 245 - 274). *International Journal of Computers for Mathematical Learning.*

Arzarello, F., Bosch, M., Gascón, J., & Sabena, C. (2008). The ostensive dimension through the lenses of two didactic approaches. (pp. 179 - 188). *ZDM Mathematics Education.*

Barra, A., Díaz, L., & Ramírez, G. (2006). Una estrategia para la aprehensión cognitiva de la razón. Retrieved from http://www.sochiem.cl/jornadas2006/ponencias/37.pdf.

Block, D. (2000). *La noción de razón en la matemáticas de la escuela priamaria. Un estudio didáctico.* Doctorado. universidad .

Block, D. (2005). Notas sobre el papel de la noción de razón en la construcción de las fracciones en la escuela primaria investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las amtemáticas: Un reporte Iberoamericano. (pp. 1 - 17) .México: Reverté Ediciones - Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). Ostensifs et sensibilité aux ostensifs dans l'activité mathématique.(pp. 77 - 124) .*Recherches en didactique des mathématiques*.

Castaño, J. (1998). *Descubro la Matemática*. Bogotá: Comunidad de Hermanos Maristas de la Enseñanza.

Cochran -Smith, M. (2003). Learning and unlearning: the education of teacher educators. (pp. 5 - 28). *Teaching and teacher education.*

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir. (pp. 81-104). Paris: Editions Fabert.

D'amore, B., & Godino, J. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de las matemáticas. (pp. 191 - 218).*Revista Latinoamenricana de Investigación en Matemática Educativa*.

Diez - Palomar, J., Giménez, J., & García, P. (2007). Una aproximación dialógica de la inclusión en matemáticas en la escuela obligatoria. El caso del razonamiento proporcional. *Educación matemática y exclusión.* (pp. 147 - 177). Barcelona: Grao.

Espinoza, L., & Azcarate, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto "limite de una función": una propuesta metodológica para el análisis.(pp. 355-368). *Enseñanza de las Ciencias*.

García, F. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar.De la proporcionalidad a las relaciones funcionales.* Teis Doctoral, Universidad de Jaen, Jaen.

García, F., Bosch, M., Gascón, J., & Ruiz, L. (2006). Integración de la proporcionalidad escolar en una organización matemática regional en torno a la modelización funcional: los planes de ahorro. Retrieved from www4.ujaen.es/~aestepa/TAD/.../Garcia_Bosch_Gascón_Ruiz.pdf

García, J. (2005). *La comprensión de las representaciones gráficas cartesianas presentes en los libros de texto de ciencias experimentales, sus caracterísiticas y el uso que se hace de ellas en el aula.* Teis Doctoral, Universidad de Granada, Granada.

Gascón, J. (2010). Del problem solving a los recorridos de estudio e investigación.Crónica del viaje colectivo de una comunidad científica. (pp. 9 - 35) . *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático. Retrieved from http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm

Godino, J., Batanero, C., & Roa, R. (2002). Medida de magnitudes y su didáctica para maestros. Retrieved from http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/5_Medida.pdf

Guacaneme, E. (2001). *Estudio didáctico de la proporción y la proporcionalidad: una aproximación a los aspectos matemáticos formales y alos textos escolares de matemáticas.* Tesis de Maestría, Universidad del Valle, Cali.

Hart, K. (1988). Ratio and proportion. In Y. M. B. Hiebert (Ed.), Concepts and operations in the Middle Grades 2 (pp. 198-219). Reston, Virginia: USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Heath, T. (1908). *The thirteen books of Euclide's Elements* (Vol. Volumen 2). Cambridge: Cambridge: at the University Press.

Lamon, S. (1994). Ratio and proportion: cognitive foundations in unitizing and norming *The Development of multiplicative reasoning in the Learning of Mathematics.* (pp. 89 - 123). Albany: State University of New York.

Lamon, S. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. Toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 629 - 667). New York: Information Age Pub Inc.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In Y. M. B. Hiebert (Ed.), Concepts and operations in the Middle Grades 2 (pp. 198-219). Reston, Virginia: USA: National Council of Teachers of Mathematics.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá: Minsiterio de Educación Nacional.

MEN. (2004). *Pensamiento variacional y tecnologías computacionales*. Bogotá: Ministerio de Educaión Nacional, (MEN).

MEN. (2006). *Estándares básicos de competencia matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Miyakawa, T., & Winslow, C. (2009). Didactical designs for students' proportional reasoning. (pp. 199 - 218). *Educ Stud Math*.

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2010). Cognitive and metacognitive aspects of proportional reasoning. (pp. 36 - 53). *Mathematical thinking and learning*.

Obando, G., & Munera, J. (2003). Las situaciones problema como estrategia para la coceptualización matemática. *Revista Eduación y Pedagogía.*

Obando, G., Vasco, C., & Arboleda, L. (2009). *Praxeologías matemáticas en torno al número racional, las razones, las proporciones y la proporcionalidad*. Teis de Maestría. Universidad del Valle. Cali.

Obando, G., Vanegas, M, & Vásquez, N. (2006). *Pensamiento numérico y sistemas numéricos*. Medellín: Gobernación de Antioquia. Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia. Dirección de Fomento a la Educación con Calidad.

Perry, P., Gucaneme, E., Andrade, L., & Fernández, F. (2003). *Transformar la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela: Un hueso duro de roer*. Bogotá: una empresa docente.

Ponte, J. P. (2008). Investigar a nossa própria prática: Uma estratégia de formação e de construção do conhecimento profissional. *Revista PNA–Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*.

Ponte, P., Oliveira, H., Brunheira, L., Varandas, J., & Ferreira, C. (1998). O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. (p.p 41 - 70). *Quadrante*.

Posada, F. (2006). *Módulo 2 Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico*. Medellín: Gobernación de Antioquia. Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia. Dirección de Fomento a la Educación con Calidad.

Rico, L. (1997). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación superior*. Madrid: Editorial Síntesis.

Ruiz, E. (2006). La proporcionalidad como objeto de enseñanza del docente. (pp. 236 - 250). *Memorias I REPEM*.

Ruiz, E., & Valdemoros, M. (2006). Vinculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de Paulina.(299 - 324). *Relime*.

Schwartz, J. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 41-52). Reston Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Schwartz, J. (1996). Semantic aspects of quantity. (pp. 1 - 73).

Stemn, B. S. (2008). Building middle school students' understanding of proportional reasoning through mathematical investigation. (pp. 383 - 392). *Education 3 - 13*.

Vasco, C. (1994). La educación matemática: Una disciplina en formación. *Matemáticas: Enseñanza universitaria.(pp. 59 - 75). Revista de la ERM.*

Vasco, C. (2006). *Razones y proporciones, proporcionalidad directa e inversa*. En C.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-124). New York: Academic Press.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. (pp. 133 - 170). *Recherches en Didactiques des Mathématiques*.

Vergnaud, G. (1991). *El niño las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria.* México: Trillas.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why? .*The Devepopment of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 41-61). Albany: State University of New York.

Vergnaud, G. (2007). In what sense the conceptual fields theory might help us to facilitate meaningful learning? [¿En qué sentido la teoría de los campos conceptuales puede ayudarnos para facilitar aprendizaje significativo?].(pp. 285 - 302). *Investigações em Ensino de Ciências, 12*.