GENERANDO HABILIDADES PARA LA DEMOSTRACIÓN MEDIANTE EL MÉTODO DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ALLAN SCHOENFELD

Sistematización práctica pedagógica

Alexis Santiago Martínez Silva

Directora: Dra. Martha Lucía Bobadilla Alfaro

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

POPAYÁN-CAUCA

2023

Nota de aceptación

Jurado: Doc. Jose Luis Herrera Bravo

Directora: Dra. Martha Lucía Bobadilla Alfaro

Agradecimientos

A Dios por darme la fortaleza necesaria para superar las distintas circunstancias durante mi preparación profesional

A mis padres quienes me brindan todo su amor y su apoyo incondicional

A mis hermanos quienes siempre creyeron en mí y son una fuente de amor e inspiración

A mis profesores quienes me han brindado todas sus experiencias académicas

A mis compañeros que me brindaban su amistad

A la familia Franco quienes me brindaron todo su apoyo, amor y comprensión

A la familia Guerrero Ordoñez por brindarme su valiosa amistad y cariño

A todos los anteriores mil gracias.

Resumen

Esta intervención pedagógica dio lugar a la implementación y uso del método para la solución de problemas planteado por Allan Schoenfeld acompañado de secuencias didácticas, con el fin de generar habilidades para la demostración en los estudiantes del curso conjuntos numéricos ofertado en el segundo periodo académico del 2022 en la Universidad del auca. El promedio de estudiantes que participaron en las asesorías es cinco. Las técnicas y herramientas usadas para la recolección de datos fueron: observación constante del practicante, registro fotográfico, resaltar que los registros de cada sesión fueron anotados en un diario de campo. La estrategia metodológica fue dada mediante la implementación de guías donde de abarcaban las temáticas centrales al curso, con el interés de atender todas las dificultades presentadas por parte de los estudiantes. Finalmente, las dificultades fueron solventadas con el método para la solución de problemas propuesto por Allan Schoenfeld, lo que quiere decir, que se logró generar habilidades para la demostración.

Contenido

Introducción

En este documento se sistematiza la Práctica Pedagógica, cuya intervención en el aula fue mediada por el método para la solución de problemas planteado por Allan Schoenfeld acompañado de secuencias didácticas, con el fin de generar habilidades para la demostración. La práctica pedagógica se desarrolló en la Universidad del Cauca, principalmente con estudiantes de cuarto semestre pertenecientes al programa de Licenciatura en Matemáticas, en el curso de conjuntos numéricos.

El método para la solución de problemas planteado por Allan Schoenfeld otorga recursos y heurísticas que permiten generar un mejor desempeño a quien se enfrenta a resolver un problema o una demostración; permitiéndole reconocer una forma distinta a la tradicional, de iniciar, desarrollar y finalizar estos procesos. Por su parte, las secuencias didácticas ayudan al docente a tener una mejor organización, planeación y ejecución de las actividades a desarrollar en clase; además, destacan la importancia de tener en cuenta la opinión del estudiante y sus conocimientos previos, lo cual facilita que estos vayan evolucionando al punto de generar nuevos conocimientos.

Vale la pena aclarar, que con esta Práctica Pedagógica no se pretende "enseñar" a demostrar, sino desarrollar las competencias y habilidades para que los y las estudiantes logren entender las demostraciones, y sobre todo que logren realizarlas pruebas de manera independiente haciendo uso correcto de las reglas de la lógica y los conceptos matemáticos pertinentes.

En el contenido de este documento se resaltan dos partes:

- la primera tiene que ver con información necesaria para fundamentar la planeación y la ejecución de la Práctica Docente.
- La segunda, y talvez la más importante en el proceso de formación docente, tiene que ver con la reconstrucción histórica y análisis crítico; en esta parte están plasmadas las experiencias, dificultades, reflexiones y aprendizajes que proporcionan la práctica docente.

1. Presentación

1.1 Descripción de la institución

La fase de intervención en el aula se desarrolló en la Universidad del Cauca. Esta es una institución de educación superior de carácter público, creada el 24 de abril de 1827 por Francisco de Paula Santander.

Su misión es un proyecto cultural que tiene un compromiso vital y permanente con el desarrollo social, mediante la educación de personas críticas, responsables, creativas, con integridad ética, y en armonía con el entorno (Universidad del Cauca, 2022).

“La Universidad del Cauca, fiel a su lema "Posteris Lvmen Moritvrvs Edat" (Quién ha de morir deje su luz a la posteridad), tiene un compromiso histórico, vital y permanente con la construcción de una sociedad equitativa y justa en la formación de un ser humano integral, ético y solidario” (Universidad del Cauca, 2022).

1.2 Población

La práctica pedagógica se llevó a cabo durante el segundo periodo académico del 2022, en los cursos de Conjuntos Numéricos ofertados por el Programa de Licenciatura en Matemáticas y el Programa de Matemáticas, los grupos estaban conformados por 32 y 27 estudiantes, respectivamente, cuyas edades oscilaban entre los 19 y 24 años. El número de estudiantes que eran repitentes en este curso era de 9 y 12, respectivamente. Teniendo en cuenta la opinión de algunos docentes del departamento de matemáticas, es posible resaltar, que este curso siempre ha sido problemático por su alto nivel de formalización, pero con la enseñanza asistida por computador, implementada durante la pandemia, fue notorio que se agudizaron más las dificultades para los estudiantes al momento de culminar con éxito este curso**,** el cual tienen un primer acercamiento a un sistema axiomático formal, que les exige altos niveles de generalización y abstracción, donde todo gira alrededor de la demostración.

De acuerdo con el Aconsejable de los Programas esta asignatura se cursa en cuarto semestre; su objetivo general es: Reflexionar sobre la teoría inherente a dos conceptos básicos de las matemáticas: relación y número, en un ambiente lógico deductivo. Además, busca motivar el gusto por la claridad y sencillez en la exposición de argumentos (demostraciones), sin dejar a un lado el rigor y la síntesis. (Universidad del Cauca, 2017) La asignatura dirigida a estudiantes de licenciatura en matemáticas estuvo a cargo de los profesores Jose Luis Herrera y Freddy William Bustos Rengifo, mientras que la asignatura dirigida a los estudiantes de matemáticas estuvo a cargo del profesor Carlos Andrés Martos Ojeda.

Inicialmente se trabajó con estudiantes de ambos grupos, sin embargo, durante el desarrollo de la práctica docente, los estudiantes pertenecientes al programa de matemáticas dejaron de participar en el espacio de estudio ofrecido.

1.3 Temática

Las temáticas principales del curso son: Teoría axiomática de Conjuntos, Relaciones de Orden y de Equivalencia, Funciones y Conjuntos Numéricos. En todas estas temáticas se hace énfasis en una construcción de argumentos que se sintetizan en la correspondiente demostración de los teoremas y proposiciones. Por esto la práctica docente se desarrolló en torno a la demostración, donde se guió el proceso de enseñanza-aprendizaje mediante el método de solución de problemas propuesto Allan Schoenfeld, acompañado de secuencias didácticas, lo que permitió analizar a profundidad algunos de los principales teoremas del curso y sus correspondientes demostraciones; con el fin de contribuir a la comprensión y estructuración de las ideas plasmadas en una demostración. También se brindó pautas a los y las estudiantes para que pudieran elaborar sus propias demostraciones de proposiciones que requerían de una demostración que se considera sencilla para el nivel de los estudiantes.

2. Planteamiento del problema

Históricamente el curso de Conjuntos Numéricos, que hace parte de los cursos básicos de la malla curricular de los Programas de Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas, ha presentado altos índices de repitencia. Según la apreciación de algunos docentes que han orientado el curso, esto podría deberse a que es el primer curso formal al que se enfrentan los y las estudiantes. Unido a lo anterior, el curso frecuentemente es dictado de forma tradicional, método que no ha tenido los mejores resultados en el ámbito educativo, puesto que carece de herramientas didácticas que podrían ser de gran ayuda para el aprendizaje de los estudiantes y no permite que los estudiantes experimenten el proceso de argumentación de manera detallada, lo cual podría contribuir en el aprendizaje de manera significativa.

Por otro lado, es necesario resaltar algunas problemáticas que están muy presentes en el aula, y que a su vez están relacionadas con la demostración, una de ellas radica en que los estudiantes difícilmente pueden transitar entre una escritura en lenguaje natural y una escritura formal. El curso de Conjuntos Numéricos, requiere del manejo de la escritura simbólica formal, lo cual genera dificultades en el aprendizaje del estudiante, pues uno de los obstáculos presentes en el aula y que en muchos casos no es considerado por parte del profesor, es la diferencia entre el lenguaje utilizado por el profesor y el estudiante, usados para escribir la solución de un problema o demostración.

En el aula podemos diferenciar entre, el lenguaje del estudiante (cotidiano), el lenguaje del profesor, el cual se aproxima a un lenguaje formal, y el lenguaje de las matemáticas; la transición que debe hacer el estudiante para lograr acercarse a un lenguaje casi formal, es muy dispendiosa, puesto que no se le brinda una estrategia o ayuda didáctica para hacer dicha transición.

Un factor que se suma a la problemática es la poca importancia que le da el estudiante a entender e interpretar el enunciado de un teorema, siendo dicho enunciado vital para poder empezar a organizar las ideas o estrategias que surgen de primer momento, para empezar un camino hacia la demostración. A pesar de que la demostración, requiere de las herramientas de la lógica, esta última no brinda información para determinar el camino a seguir en una demostración, tampoco da pautas para establecer las conexiones necesarias entre axiomas definiciones y teoremas que conlleven a la conclusión del teorema; ante esto, cuando el estudiante se enfrenta a una demostración se siente frustrado y con muy pocas ideas para empezar un bosquejo de la demostración, pues para ello se requiere una gran dosis de intuición, y en los cursos tradicionales a los estudiantes no se les brinda herramientas para transitar entre lo intuitivo y lo formal.

Otro factor que incide en la problemática del aprendizaje, es el poco tiempo que dispone el profesor para desarrollar sus clases y lograr los objetivos del curso; esto dificulta la comunicación entre estudiante y profesor, por lo cual el profesor no le puede brindar el debido acompañamiento al estudiante, dejándole la vía que lo lleva a acercarse al texto guía para intentar fortalecer su aprendizaje, ese acercamiento podría generar en algunos estudiantes, inconvenientes de aprendizaje debido a los vacíos conceptuales no reflexionados en clase, generando finalmente sentimientos de frustración a la hora de comprender los elemento teóricos pertenecientes al curso.

Algunos resultados de la investigación realizada por Barragán y Gómez (2011), plantean que la demostración como contenido temático no es siempre una problemática asumida por los docentes en forma sistemática, sino en algunos casos de manera intuitiva, los docentes diferencian entre demostrar y enseñar a demostrar, siendo esto último muy poco implementado en el aula, es por ello que los investigadores hacen una reflexión y se abre una brecha muy importante dentro de la educación matemática, pues muestra que la demostración, concepto central en la matemática como ciencia, no lo es dentro de la enseñanza, a pesar de uso constante.

Podríamos afirmar que muchos docentes de matemáticas ni siquiera establecen la diferencia entre reproducir una demostración en el tablero y enseñar a demostrar, ellos asumen que el estudiante debe aprender viendo, sin hacer un mayor esfuerzo por argumentarle al estudiante sus procedimientos.

Es por ello, que la intervención en el aula, se desarrolló mediante el uso y aplicabilidad del método para la solución de problemas planteado por Allan Schoenfeld acompañado de secuencias didácticas, lo cual llevó a los estudiantes a un contexto donde interactuaron con el practicante, y a su vez se crearon grupos de trabajo, donde los estudiantes libremente interactuaron e intercambiaron sus ideas. Finalmente, se diseñó todo un andamiaje para que los estudiantes pudieran generar habilidades para comprender y estructurar una demostración, que generaron resultados satisfactorios en el proceso de aprendizaje del estudiante.

3 Antecedentes

A continuación, se describen un par de investigaciones relacionadas con las funciones de la demostración en el aula de matemáticas, además se menciona una investigación que describe relaciones entre la resolución de problemas y la demostración.

Crespo y Christiane (2003) en su investigación “Las Funciones de la Demostración en el Aula de Matemática” la cual se desarrolla en la universidad de Buenos Aires (Argentina), con estudiantes y docentes del profesorado en matemáticas, se plantean el objetivo general de analizar las concepciones de los docentes acerca de las ideas matemáticas y su influencia en la práctica docente.

Dicha investigación se apoya en diversas investigaciones de la matemática educativa que señalan que el docente de matemáticas enseña esta disciplina de acuerdo con sus ideas acerca de la matemática (Ibáñez y Ortega, 1997). Estas investigaciones indican que, si un profesor piensa que el carácter deductivo de la matemática es su esencia, en sus clases pondrá un gran peso en las demostraciones. Si, por el contrario, piensa que la matemática es un conjunto de fórmulas y algoritmos aplicables a diversas situaciones, entonces el alumno se ejercitará para adquirir fluidez en su uso.

La investigación se desarrolla en dos etapas: en la primera se indaga acerca de las concepciones de los docentes y estudiantes del último año de la carrera de profesorado en matemáticas acerca de la matemática, su enseñanza y algunos conceptos claves en la manera de abordar la tarea docente. La siguiente etapa, se centra en el concepto de demostración, su presentación en el aula como problema y un estudio histórico – epistemológico; con la finalidad de conocer la evolución del concepto de demostración y sus implicaciones cognitivas.

Algunos resultados de la investigación, validan la concepción de que la demostración como contenido temático no es siempre una problemática asumida por los docentes en forma sistemática, sino en algunos casos de manera intuitiva. Como se dijo antes, los docentes diferencian la idea de demostrar y la de enseñar a demostrar, siendo esto último muy poco implementado en el aula, es por ello que los investigadores Crespo y Christiane (2003) hacen una reflexión y muestran una brecha muy importante dentro de la educación matemática educativa, pues evidencian que la demostración, concepto central en la matemática como ciencia, no lo es dentro de la enseñanza.

En el artículo también se mencionan diferentes conceptos vinculados con la demostración, los cuales surgen al tener en cuenta que la demostración no es un concepto que pueda ser enseñado y transmitido del mismo modo en un aula que en un ambiente científico, es por ello que en la práctica llevada a cabo en el aula se usan términos equivalentes como: explicación, argumentación, prueba y demostración , lo cual induce a un obstáculo epistemológico pues impide entender la conceptualización de sus ideas.

Al abordar el termino demostrar, (Balacheff, 1982) utiliza el termino explicación como idea primitiva de la cual se derivan las pruebas y demostraciones. Una prueba se compone de explicaciones aceptadas por una comunidad, para que una explicación sea una prueba debe ser reconocida por alguien con razón suficiente en el correspondiente marco discursivo.

Tanto (Blacheff, 1982) como (Duval, 1992) utilizan el término *demostración* con significados similares, como una secuencia de enunciados organizados según reglas determinadas. El concepto de demostración también está muy ligado al de verdad. Para Duval (1992) el objetivo de una demostración es la verdad y, por tanto, obedece a criterios de validez, mientras que la argumentación se propone lograr la convicción del otro o de sí mismo, obedeciendo a criterios de pertinencia. Las demostraciones son pruebas que se han codificado, pero algunos pasos pueden no estar explícitos.

Una de las funciones de la demostración matemática se basa en un proceso validativo que siguen los matemáticos para justificar las propiedades de sus teorías, el modelo actual dominante de demostración, dentro de la institución matemática, es la demostración lógica formal. No obstante, esa no es la única ni la más importante. Autores como (Villiers, 1993) presentan modelos en los que se evidencian más funciones de la demostración como: verificación o convicción, explicación, sistematización, descubrimiento o creación y comunicación.

Penagos et al. (2021) en su investigación *Caracterizando Relaciones entre la Resolución de Problemas y la Demostración en Algebra Abstracta*, la cual se desarrolla en el Programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Surcolombiana de Neiva en el periodo 2020-2, con estudiantes del programa mencionado, donde se dio respuesta a la pregunta: ¿Cómo son las relaciones entre la resolución de problema y la demostración en algebra abstracta, manifestada por profesores de matemática en formación?

Para el desarrollo de la investigación se implementaron seis actividades didácticas y dos encuestas semiestructuradas; como complemento para triangular la información se tomó la opinión a los docentes y finalmente se aplicó a los estudiantes una encuesta de satisfacción. Para el análisis de datos se tuvo en cuenta la teoría de la dualidad, necesidad y razonamiento repetitivo de Harel y Sowder. Se diseñaron, validaron e implementaron un sistema de seis actividades didácticas, en las que se pidió a los estudiantes, que demuestren teoremas o que resuelvan problemas de álgebra abstracta. sin decirles si es lo uno o lo otro

Un objetivo transversal de las actividades fue analizar la argumentación escrita y verbal (a través de entrevistas) de los estudiantes al resolver problemas y demostrar teoremas sobre algunos de los temas de álgebra abstracta estudiados en el curso: métodos de demostración, operaciones binarias, grupos y subgrupos, grupos cíclicos, clases laterales y homomorfismo de grupos. En cada actividad se especificaba el tema, los objetivos, los materiales necesarios contaban con un encabezamiento, el tiempo aproximado de duración y al final se formulaban los problemas teoremas que debían resolver.

Las entrevistas permitieron concluir que: es irrelevante que en la actividad se pida demostrar un teorema o resolver un problema, pues la mayoría de los estudiantes coinciden en que el proceso de solución guarda estrecha relación y que ambas actividades están vinculadas y que en cuanto al esfuerzo mental no encuentran diferencias significativas.

En la investigación también se concluye que, tanto al resolver problemas como al demostrar teoremas se encuentran patrones iguales en el abordaje, el uso de representaciones, los procesos de solución, justificación y verificación. El análisis de datos permite afirmar que la demostración matemática es una actividad de resolución de problemas y quienes son exitosos resolviendo problemas utilizan técnicas similares cuando hacen demostraciones.

Confirmando así que, desde el contexto del álgebra abstracta, la resolución de problemas y la demostración de teoremas se superponen, ya que esta última es un subconjunto de la primera, una consecuencia y que la literatura sobre resolución de problemas permite describir aspectos de la demostración matemática como lo propone Savic (2015).

4 Objetivos

4.1 Objetivo general

- Incentivar en los estudiantes el desarrollo de habilidades para la demostración, mediante el método para la solución de problemas de Allan Schoenfeld

4.2 Objetivos específicos

- Identificar las dificultades que se le presentan a los estudiantes al interpretar el desarrollo de una demostración.
- Desarrollar habilidades a partir de las heurísticas planteadas en el método de solución de problemas de Allan Schoenfeld.

- Resaltar la importancia de tener el *control* ante la demostración de una proposición, mediante el método de solución de problemas planteado por Allan Schoenfeld.

5 Justificación

El curso de Conjuntos Numéricos es orientado bajo el modelo de enseñanza tradicional, dicho modelo se basa en la trasmisión y recepción de información, el profesor es el trasmisor y el estudiante el receptor; este último solo se centra en escuchar y ver cómo el docente replica una demostración sin poder participar de su construcción, es así como el estudiante se convierte en un receptor pasivo de contenido, obligado a limitar sus procesos de aprendizaje, quedándole como único recurso el uso de la memoria y la autodisciplina, los cuales con mucho esfuerzo podrían brindarle ayuda para la comprensión de teoremas y sus respectivas demostraciones.

Los inconvenientes a los que se enfrenta el estudiante en el curso de Conjuntos Numéricos, en el que prima la construcción de argumentos que se sintetizan en la correspondiente demostración de los teoremas y proposiciones, están relacionados con la no comprensión de las demostraciones, lo cual repercuta en su construcción de conocimiento.

Lo antes mencionado es reconocido por algunos profesores de la Universidad del cauca que han orientado cursos donde la demostración es el eje central de las temáticas pertenecientes al curso; resaltan que para poder hacer una demostración es necesario adquirir ciertos niveles de abstracción e intuición; también mencionan que el modelo tradicional genera en los estudiantes vacíos teóricos y conceptuales que se ven reflejados en cursos posteriores; es por ello que se trabajó con el método de solución de problemas planteado por Allan Schoenfeld acompañado de secuencias didácticas, lo cual se convierte en una invitación a los y las estudiantes a reflexionar sobre dicho método y su utilidad en el desarrollo de una demostración matemática

La razón del por qué se hizo un intento de generar habilidades para la demostración con el método de solución de problemas planteado por Allan Schoenfeld, acompañado de secuencias didácticas, es porque permitiría al profesor reflexionar sobre la manera como es guiado el curso en interés y en los estudiantes brindaría recursos que contribuyen a entender los elementos heurísticos que se convierten en una herramienta para enfrentarse a la prueba de una proposición.

Por otra parte, se ha visto en investigaciones como la de Penagos et al., (2021), que existe una relación entre un problema matemático y la demostración de un teorema, teniendo en cuenta sus respectivas soluciones. Es por ello que en este trabajo de intervención en el aula se hizo uso del método de solución de problemas planteado por Schoenfeld, para ser implementado en el desarrollo de las demostraciones del curso de interés.

Por su parte, para Savic (2015) la demostración matemática y la solución de problemas se superponen. Al revisar la literatura sobre resolución de problemas se pueden describir aspectos de la demostración, ya que la última es una consecuencia de la solución de problemas. Este autor plantea tres fases: planificar, ejecutar y verificar; además de la fase de orientación incluida en la planificación.

Cabe considerar que, Selden (2013) afirma que al hacer demostraciones deben tenerse en cuenta dos aspectos: la parte retórica formal o marco de la prueba y la parte centrada en el problema. La primera depende de la interpretación, los preconceptos y la lógica para entender la formulación. La parte centrada en el problema tiene que ver con la teoría de solución de problemas en el sentido de Schoenfeld.

Finalmente, al mostrar a los y las estudiantes un camino distinto para empezar, desarrollar y concluir una demostración; se pone ante ellos una oportunidad que les permite reflexionar sobre la manera de argumentar y entender los diferentes conceptos que les brinda la teoría de conjuntos (teoremas, axiomas y corolarios, entre otros). Cambiando así la forma de ver las matemáticas, pues las matemáticas en el aula son presentadas por parte del docente como matemáticas acabadas, y no se permite exponer ante los estudiantes todas las dificultades que incluso el profesor pudo tener en la demostración de un teorema o proposición.

6. Marco teórico

6.1 La heurística

Alan Shoenfeld dice que las heurísticas o estrategias heurísticas son reglas para tener éxito en la resolución de problemas, que a su vez ayudan a comprender mejor el problema o hacer progresos hacia su solución. Alan Schoenfeld (1985), reconoce que las estrategias heurísticas presentadas por Polya (1945) son muy generales, por lo cual desarrolla una estrategia que se divide en cinco fases y una serie de métodos heurísticos.

Lo que pretende Schoenfeld con el planteamiento de sus métodos heurísticos es que los estudiantes, además de tener unos métodos heurísticos para afrontar un problema, sepan cuándo y dónde implementar cada método heurístico, en este sentido es de gran importancia resaltar que Schoenfeld, entiende que el proceso de resolución de problemas no es lineal, es así como supone caminos en zigzag y marchas hacia atrás y hacia adelante.

A continuación, se describirán 3 recursos o métodos heurísticos planteados por Schoenfeld para la resolución de problemas los cuales guiarán el desarrollo de la intervención en el aula; es necesario resaltar que el cuarto factor planteado por Schoenfeld no será tenido en cuenta puesto que para los objetivos que se quieren lograr no haría un mayor aporte.

6.2 Factores de la resolución de problemas Schoenfeld

Schoenfeld realizó experiencias con estudiantes y profesores en las que les proponía problemas a resolver. Los problemas eran suficientemente difíciles siguiendo las ideas de Polya.

Schoenfeld veía como actuaba cada uno los grupos durante la solución de problemas; por ejemplo, ponía a los estudiantes a trabajar en parejas e iba anotando todo lo que hacían durante el proceso de trabajo.

Al final de todas las experiencias, Schoenfeld llega a la conclusión de que cuando se quiere trabajar con solución de problemas como una estrategia didáctica, se deben tener en cuenta situaciones más allá de las puras heurísticas; de lo contrario no funciona, no tanto porque las heurísticas no sirvan, sino porque hay que tomar en cuenta otros factores como los descritos a continuación.

6.2.1 Recursos

Lo primero que Schoenfeld señaló en la categoría de los recursos son los *Conocimientos Previos* que posee el individuo como: conceptos, formulas, algoritmos, y en general, todas las nociones que se consideren necesarias saber para enfrentarse a un determinado problema. El docente debe cerciorarse de que los estudiantes, en efecto posean estos recursos; pues son indispensables para iniciar el proceso y así ayudar al estudiante a mejorar la interpretación de cualquier recurso que no esté claro.

Otro asunto es el de las *Circunstancias Estereotípicas*, que Schoenfeld dice que provocan respuestas estereotípicas. Esto se ve reflejado cuando al estudiante se le propone resolver un problema en el cual él ya ha tenido un cierto nivel de experticia y el proceso de resolución se da de manera casi automática, pero no es tenido en cuenta cualquier otro tópico con el que él se pueda encontrar.

Finalmente se tienen en cuenta los *Recursos Defectuosos*, que hacen referencia a una fórmula o procedimiento mal aprendido o que el estudiante cree que se usa en alguna situación, pero resulta que no es así.

6.2.2 Heurísticas

Schoenfeld dice que hay una problemática con las heurísticas en el trabajo de Polya y es que, por ejemplo, Polya propone como heurística dibujar diagramas, pero Schoenfeld dice que no en todo problema se puede dar este tipo de heurística específica.

En general, el problema con las heurísticas tal como son planteadas por Polya, según Schoenfeld, es que son muy generales, por eso no pueden ser implementadas, para ello habría que conocerlas, saber cómo usarlas y tener la habilidad para hacerlo.

Schoenfeld (1985) por medio de los métodos heurísticos pretende que los estudiantes no solo tengan un repertorio de heurísticas para resolver un problema, sino que, al mismo tiempo, sepa cuándo implementar cada uno de estos métodos heurísticos, es así como propone caminos en zigzag y marchas hacia atrás y hacia adelante. A continuación, se describirán las cinco fases. Propuestas por Schoenfeld

Primera fase: *Análisis.*

En esta fase se realiza por parte del estudiante la comprensión del problema, se tiene en cuenta la información suministrada para resaltar datos e incógnitas, se puede replantear el problema si es necesario, para hacerlo más fácil, pero sin perder la finalidad inicial

Algunas heurísticas importantes son:

- Realizar una figura, diagrama o esquema, en caso donde sea posible
- Examinar casos especiales, por medio de valores especiales para ejemplificar el problema, explorar los casos límites para probar las diferentes posibilidades o verificar si existe algún algoritmo o patrón inductivo en dicho problema.

Segunda fase: *Diseño.*

Esta segunda fase tiene como objetivo controlar el proceso que se va a llevar a cabo para resolver el problema, por medio de la creación de un plan, sobre el modo en que se va a proceder y asegurarse que los cálculos que se van a desarrollar no se ejecuten de modo prematuro, en esta fase no se sugieren heurísticas específicas.

Tercera fase: *Exploración.*

Esta fase se da cuando se presentan dificultades a la hora de resolver el problema y no se tiene un plan claro que pueda llevar a la solución directamente. Dentro de esta fase se plantean las siguientes heurísticas:

- Examinar problemas equivalentes, por medio de la sustitución de las condiciones por otras similares, la recombinación de los elementos del problema de distintos modos, introduciendo elementos auxiliares o replanteando el problema.
- Examinar problemas ligeramente modificados, por medio de la elección de sub-objetivos (para la satisfacción parcial de condiciones), descomponiendo el problema en casos y estudiando caso por caso.
- Examinar problemas ampliamente modificados, por medio de la construcción de problemas análogos con menos variables, mantener fijas todas las variables menos una,

para determinar el efecto que posee esta variable dentro del problemas, explorar casos limites o utilizar otros problemas afines que tengan parecida forma, datos o conclusiones.

Cuarta fase: *Realización.*

En esta fase se procede a realizar todas las operaciones que se tomaron en cuenta en la segunda fase, como parte del plan para resolver el problema planteado. El resultado de la realización es una solución provisional o definitiva al problema que se está resolviendo.

Quinta fase: *Verificación.*

En esta última fase se encuentran dos tipos de verificación: verificación de la solución de forma específica y verificación de los criterios de la solución a nivel general. Para el primer tipo de verificación es necesario plantearse los siguientes cuestionamientos:

- ¿Utiliza todos los datos pertinentes para el desarrollo de la solución?
- ¿Está la solución acorde con predicciones o estimaciones razonables?

Además, se debe tener en cuenta si la solución resiste a ensayos de simetría, análisis dimensional o cambio de escala

Respecto al segundo tipo de verificación, verificación de los criterios de la solución a nivel general, es pertinente preguntarse lo siguiente:

- ¿Es posible obtener la solución por otro medio?
- ¿Puede quedar concretada en casos particulares?
- ¿Es posible reducir a resultados conocidos?
- ¿Es posible utilizar para generar algo ya conocido?

Esta quinta fase permitirá al estudiante verificar que el desarrollo elaborado para dar solución de un problema es válido y en ese mismo sentido poder dar finalidad a la solución del problema, pero en el caso de que el desarrollo elaborado no cumpla alguno de los tipos de verificación, el estudiante deberá retroceder y ubicarse en las cuatro fases anteriores para poder superar la falla presentada en su solución del problema.

Es de resaltar que el objetivo principal de esta quinta fase consiste en controlar la solución del problema, a nivel general y especifico por medio de las heurísticas antes mencionadas.

6.2.3 Control

El control se refiere a cómo un estudiante controla su trabajo, debe saber si el camino que escogió para la solución de un problema está funcionando o lo lleva a un callejón sin salida; es decir, es menester que el estudiante se dé cuenta a tiempo de cuándo retroceder e intentar de nuevo por otra vía. Debe reconocer su forma de razonar ante una determinada situación, entonces en el caso de las acciones, tenemos acciones que se deben llevar acabo para adquirir el control de la situación cuando se está resolviendo un problema.

Por eso, es importante que el estudiante que está resolviendo un problema tenga la habilidad para monitorear y evaluar el proceso que está elaborando o va a elaborar para la solución del problema. Schoenfeld señala que se debe tener un conocimiento de sí mismo, pues el estudiante debe saber ¿qué es capaz de hacer? y ¿con qué conocimientos cuenta?, lo anterior contribuye a que el estudiante pueda conocerse y adquiera el control ante la forma de reaccionar y resolver problemas.

Algunas acciones que involucran el control según Schoenfeld (como se citó en Barrantes, 2006) son:

- Entendimiento: la idea es tener claridad acerca de lo que trata un problema antes de empezar a resolverlo, es decir entender bien el enunciado de un problema, sin importar el número de veces que se tenga que leerlo.
- Consideración de varias formas posibles de solución y escoger una específica, o sea hacer un diseño.
- Monitorear el proceso y decidir cuándo abandonar un camino no exitoso y tomar uno nuevo.
- Llevar a cabo ese diseño que se hizo, estar dispuesto a cambiarlo en un momento oportuno
- Revisar el proceso de resolución

En ese mismo sentido, Schoenfeld citado por (Barrantes, 2006) propone algunas actividades que pueden desarrollar habilidades en las personas para tener el control ante la resolución de un problema:

- El docente debe tomar las equivocaciones como modelo; es decir poner un problema y tratar de resolverlo y aunque sepa la solución debe escoger una estrategia que no lo lleve a un camino esperado y ver en qué momento decide que esa estrategia no lo lleva a ninguna parte y optar por otra estrategia.
- El profesor debe resolver problemas como modelo y posteriormente, discutir las posibles soluciones con el grupo para que cada estudiante aporte ideas.
- También propone que se resuelvan problemas en pequeños grupos, en un ambiente de trabajo colaborativo, esto para potenciar el desarrollo de habilidades relacionadas con la solución de problemas y para que así cada estudiante pueda aprender sobre la forma en que los demás controlan su trabajo.

- Se propone tomar videos durante las actividades de resolución de problemas. El video luego se comparte con los estudiantes para que vean qué es lo que han hecho en el desarrollo de la solución, porque en general, resuelven un problema y, al final, se les olvida qué fue lo que hicieron.

6.3 Explicar, Probar y Demostrar

(Balacheff et al., 2000) afirma que los verbos explicar, probar y demostrar son considerados frecuentemente como sinónimos en la práctica de la enseñanza de las matemáticas. Lo que pretende con esta distinción es que la demostración tenga sentido, pues debe ser presentada ante el estudiante como una herramienta eficaz y confiable para establecer la validez de una proposición. A continuación, se presentan algunas de las definiciones que él ha establecido para explicar, probar y demostrar.

6.3.1 Explicar

La explicación se sitúa al nivel del sujeto locutor, estableciendo y garantizando la validez de una proposición, se arraiga a sus conocimientos y en lo que constituye su racionalidad, es decir, sus propias reglas de decisión de la verdad. Además, cuando la explicación se expresa en un discurso, ésta pretende hacer inteligible a los espectadores la verdad de la proposición ya adquirida por el locutor.

> *"Ésta (la explicación) tiene como propósito establecer en el interlocutor un sistema de objetos caracterizados por una cierta homogeneidad. Estos objetos se encuentran, se armonizan y en su finalidad determinan la organización de una explicación que se orienta hacia el descubrimiento de un nuevo saber"*

Miéville, (1981. Pág. 12). La base de la explicación es esencialmente la lengua natural.

6.3.2 Probar

Cuando una explicación es reconocida y aceptada, para diseñarla conviene disponer de un término que permita marcar su distinción del sujeto locutor. En matemáticas el término demostración no es el más conveniente debido a que su acepción es muy específica, por esto se selecciona el término *prueba*.

El paso de la explicación a la prueba hace referencia a un proceso social por el cual un discurso que asegura la validez de una proposición cambia de posición siendo aceptada por una comunidad. Pero esta posición puede evolucionar simultáneamente con el avance de los saberes en los cuales se apoya. En conclusión, una prueba puede ser aceptada por una comunidad, pero también puede ser rechazada por otra.

6.3.3 demostrar

El tipo de prueba dominante en matemáticas tiene una forma particular. Se trata de una serie de enunciados que se organizan siguiendo un conjunto bien definido de reglas lógicas. De aquí en adelante se llama *demostraciones* a ese tipo de pruebas. Lo que caracteriza las demostraciones como género del discurso en su forma estrictamente codificada. Más aun, este rigor formal debe ser matizado a la luz de la práctica

Hilbert (1962) define una demostración de la siguiente forma: una demostración consiste en una sucesión de fórmulas que, o bien son axiomas o bien son teoremas, o se han obtenido de estas mediante inferencias admisibles.

6.4 Secuencia didáctica

Las secuencias didácticas son un ejercicio y un posible modelo que se propone al docente interesado en explorar nuevas formas de enseñar las matemáticas. Esta visión del aprendizaje sostiene que los estudiantes deben tener experiencias que les permitan dar sentido y significado a los diferentes aspectos del mundo. Si bien tener experiencias de primera mano es importante, todos los estudiantes necesitan desarrollar las habilidades que se usan en los procesos de construcción del saber, que rescatan la indagación como la solución de problemas tales como preguntar, predecir, observar, interpretar, comunicar y reflexionar (Oicata y Castro, 2013).

Es así como la secuencia didáctica sitúa las competencias comunicativas como un componente trasversal necesario para la construcción y perfeccionamiento de las competencias matemáticas. Todas estas realidades son posibles si se organizan y si facilitan diálogos en el aula, estimulando el compartir y validar conocimientos para lograr comprensiones. De esta manera, las secuencias dan a los estudiantes la oportunidad de expresarse en sus propias palabras, de escribir sus propias opiniones, hipótesis y conclusiones, a través de un proceso colaborativo y libre que les aumente la confianza en sí mismos y su autonomía como aprendices.

En el mismo orden de ideas , la solución de problemas requiere de habilidades de enseñanza que modifiquen las relaciones del aula para que los estudiantes se conviertan en aprendices más independientes, que desarrollan sus propios conocimientos y comprensiones mientras el docente asume un rol aún más protagónico que el que usualmente ha tenido, pues es ahora el responsable de hacer que los aprendizajes sean inevitables (Oicata y Castro, 2013).

Desde esta mirada las secuencias didácticas están construidas bajo dos pilares: una situación problema que orienta cada una de las preguntas durante cada semana de planeación (8 semanas) y el contenido temático que se desarrolla (Ojeda & Miguez, 2013). La situación problema se expone en la primera semana para que no solo los estudiantes se contextualicen con ella, sino para que el docente pueda determinar los conceptos que estén en juego y las preguntas que tendrá que contestar.

6.4.1 Etapas de una secuencia didáctica

Las secuencias didácticas presentan una estructura que se asemeja a la de una clase, la cual se desarrolla en los siguientes tres momentos: inicio, desarrollo y cierre. Para organizar dicha estructura, es necesario pensar en la selección y secuencia de los contenidos, los objetivos de aprendizaje, las tareas y actividades con sus tiempos, y los modos de evaluar. De esta manera, las secuencias de clase establecen no solo un orden en los contenidos y tiempos de trabajo, sino también un orden lógico para estudiantes y docentes (Laguzzi y Simón, 2018).

Inicio:

En estas actividades el docente propone dinamismos como: un diálogo, debate, lluvia de ideas que permitan al estudiante recordar conocimientos previos, buscando, que le sirvan como punto de partida para desarrollar los contenidos temáticos Rodríguez , (2014). Lo anterior corresponde a actividades diagnósticas que sirven como punto de partida para construir y reconstruir significados conceptuales. Es de resaltar que, pese a las actividades propuestas por el docente, no se sabe si las estrategias y actividades tratadas con los estudiantes son suficientes, y si van a funcionar. Por ello, es de suma importancia que el docente realice las primeras intervenciones. Como el seguimiento que le permite estar al tanto en los procesos de aprendizaje los cuales pueden desarrollarse a través de conflictos cognitivos que obligan al estudiante a cuestionar sus conocimientos, replantear su análisis, interpretación y explicación del contenido de estudio.

A su vez, es necesario revisar el impacto y funcionalidad de las actividades iniciales, así como las necesidades e intereses de los alumnos, pues es aquí cuando comienzan a ajustarse los aprendizajes los cuales pueden ser: conceptuales, procedimentales y actitudinales. El alumno es el protagonista, por eso, será él quien haga el desarrollo de la temática a través de diversas estrategias que facilita el docente. Rodríguez, (2014) plantea que para lleva a cabo el inicio de la secuencia didáctica se deben tener en cuenta las siguientes actividades y su respectiva implementación.

- Actividades para implementar en el inicio de una clase:

1. Utilizar recursos que permitan un óptimo desarrollo de la clase teniendo en cuenta las tecnologías de la información y de la comunicación, puesto que contribuirán a contextualizar y vivenciar de manera remota la temática que se quiera abordar.
2. Identificar, recuperar saberes y conocimientos previos que tiene cada alumno con relación a los nuevos contenidos de aprendizaje, esto permitirá que la construcción de conceptos se realicé con una carga de significado partiendo de sus presaberes y vivencias previas.
3. Establecer un vínculo entre lo que el alumno ya conoce y los nuevos contenidos, dado a que le facilitará comprender los conceptos nuevos articulados a su contexto. Es decir, la teoría y la praxis no estrían separadas, sino que la construcción del concepto tendría una carga de significado que parte de la articulación vivencial y de contexto.
4. Probar un conflicto cognitivo y promover la actividad mental para que se establezcan relaciones entre los nuevos contenidos y los conocimientos previos.
5. Realizar un trabajo de equipo que promueva a la resolución de problemas desde el trabajo cooperativo y colaborativo, donde se espera que cada estudiante asuma su

responsabilidad frente a la construcción y solución de problemas, partiendo del encuentro respetuoso de lluvia de ideas por los pares y concretar la posible solución.

Desarrollo

Una vez realizada la retroalimentación de los conocimientos previos, se da inicio a la etapa de desarrollo, haciendo la introducción de nuevos conceptos mediante actividades, aquí el proceso de aprendizaje depende de la capacidad o habilidad del docente a la hora de introducir un nuevo concepto pero es el alumno quien hará el desarrollo de la temática a través de diversas estrategias que le facilite el docente, uno de los puntos clave para este momento de la secuencia didáctica es que cuando los contenidos sean complejos el profesor debe implementar estrategias metodológicas y didácticas que le permitan al estudiante poder superar tal nivel de complejidad Rodríguez, (2014). Por esto, es pertinente la búsqueda de información y la explicación de las actividades., que permitan el desarrollo de la clase como las siguientes:

1. Partir de una contextualización en la que el docente de un acercamiento al concepto que va a abarcar, entablando un diálogo con el fin de relacionar conceptos previos que tienen los estudiantes con relación al concepto propuesto para trabajar en clase.
2. Elaborar el concepto nuevo a partir de presaberes, aclaración de dudas, y aportes bien estructurados por conocimientos de los estudiantes, para cargar de sentido y significado la construcción del nuevo aprendizaje.
3. El estudiante debe demostrar la función del concepto desde aportes generales y las conclusiones obtenidas del trabajo realizado.
4. Comparar los conocimientos previos con los nuevos, es decir realizar un contraste entre los aprendizajes construidos para esclarecer sus semejanzas y diferencias.

5. Incluir nuevas estrategias, que le permitan recurrir a métodos que conecten sus conocimientos para dar respuesta a los problemas que se le planteen.

Cierre

La parte de la validación es el complemento de la actividad inicial y de los aprendizajes esperados, en esta etapa final se observa la determinación de los criterios de desempeño, las evidencias a través matrices o rúbricas.

- En el apartado de cierre culmina con la valoración de los desempeños posibles que dan cuenta del fortalecimiento de las competencias. Las evidencias son el reflejo de la planificación, también son la creatividad y la innovación, así como la intervención que tenga en los aprendizajes esperados que determinan el balance de logros y oportunidades de mejorar retroalimentadas con actividades de evaluación las cuales dan cuenta de la comprensión del concepto construido. Para ello, se plantea el desarrollo de las siguientes actividades:
- Discusión del grupo y los diferentes puntos de vista, lo que dará cuenta de la diversidad de formas de concebir un nuevo concepto.
- Elabora síntesis con relación al aprendizaje esperado, partiendo de una retroalimentación que permite retomar preguntas o dudas de los alumnos.
- Estimar el nivel de eficacia de la planificación en tanto que permite llevar un esquema, que puede variar según el contexto, para el desarrollo eficaz de la clase.

7.Metodología

La dinámica que guió el desarrollo de la intervención en el aula se plantea de la siguiente manera: en primer lugar, se hizo una búsqueda y clasificación de artículos académicos relacionados con la demostración y entrevista realizada a profesores de la universidad del cauca donde se identificaron problemáticas relacionadas con el curso conjuntos numéricos que posibilitaron identificar las dificultades que se le presentan a los estudiantes al interpretar el desarrollo de una demostración.

En un segundo lugar, se incentivó a los estudiantes a tener el *control* ante la demostración de una proposición, haciendo uso del método planteado por Schoenfeld que pretende que los estudiantes por medio de una serie actividades como: tener claridad acerca de lo que trata el problema, resolver problemas grupos, tomar caminos erróneos y decidir en qué momento se debe abandonar, considerar distintas formas posibles de solución y escoger una. Lo anterior, contribuye a determinar en qué momento el estudiante debe retroceder y abandonar un camino erróneo e intentar otra forma para demostrar una proposición.

En el último lugar, se evidenció que es importante resaltar a los estudiantes el papel que juega la demostración en la actividad matemática, puesto que, por lo general los estudiantes ven la demostración como algo innecesario porque admiten o dan por hecho que los teoremas son verdaderos sin dar lugar a su respectiva argumentación; además se les dificulta entender la justificación de una demostración.

Se estableció en cada uno de los momentos mencionados demostraciones referentes a teoremas centrales del curso, proposiciones y ejercicios propuestos por el docente a cargo del curso, en ese mismo sentido se hizo uso de la teoría abarcada en el curso: definiciones, axiomas y teoremas.

Cada demostración se desarrolló teniendo en cuenta el método planteado por Allan Schoenfeld y las sesiones de clase fueron desarrolladas mediante secuencias didácticas, donde se hizo un constante seguimiento a los diferentes procesos de aprendizaje que mostraron los estudiantes en cada sesión y a su vez se pudo hacer un análisis de los avances o retrocesos que tuvieron los estudiantes en cada demostración.

Las temáticas se desarrollaron en espacios de apoyo, las cuales se distribuyeron en 8 semanas. El espacio de estudio se ofreció los días martes de 9pm- 11pm, el día jueves de 9pm – 11pm y el día viernes de 2pm – 3 pm. De esta manera se trabajó de 4 a 6 horas por semana con los estudiantes del curso Conjuntos Numéricos.

A continuación, se mostrará la estructura de una guía en la cual se implementa tanto el método de solución de problemas como una secuencia didáctica. Es de resaltar, que la única guía que se implementó en el espacio de asesoría fue la primera.

ANEXO # 1: PLANTILLA DE GUÍA - TITULO DE LA GUÍA

Universidad del Cauca

Licenciatura en Matemáticas

Guía 1

Teoría axiomática de Conjuntos

(Introducción)

Por: Alexis Santiago Martínez Silva

Frase inspiradora o pregunta que de sentido al esfuerzo que se hará en el desarrollo de una Demostración

Propósito de la guía (objetivo)

Inicio, se tendrá en cuenta todo lo relacionado con actividades que ayuden al estudiante a tener presentes los conceptos, axiomas, definiciones y demás elementos formales matemáticos que le puedan ser de utilidad antes de empezar una demostración

Desarrollo: en esta etapa se tendrán en cuenta los diseños, planes o estrategias que tenga el estudiante para empezar una demostración, además se tendrá en cuenta la heurística de resolución de problemas de Alan Schoenfeld y en algunos casos se darán a conocer a los estudiantes demostraciones y se trabajará a partir de su análisis

Podrán conformar grupos, para hacer un proceso de aprendizaje cooperativo, en el aprendizaje y desarrollo de una demostración.

Cierre: finalmente se pondrán algunos problemas relacionados con la teoría vista en el desarrollo de la guía.

Observaciones, al final de cada guía se harán un par de observaciones y críticas constructivas las cuales serán compartidas con los estudiantes, con el propósito de que la retroalimentación sea tenida en cuenta para futuras demostraciones.

8. Recuento histórico y análisis

El diseño de las secuencias didácticas y sus correspondientes guías se apoyó en el marco teórico de esta sistematización, en la búsqueda de artículos académicos como:(Penagos et al., 2021), (Valbuena Duarte et al., 2018), entre otros relacionados con el tema y una entrevista realizada a cuatro docentes del Departamento de Matemáticas donde se indagó sobre los siguientes aspectos.

1: ¿Cuál cree usted que es la forma más adecuada para presentar un Teorema?

2: ¿Qué estrategias utiliza para presentar un teorema?

3: ¿Cómo cree usted que se puede explicar un teorema?

4: ¿Qué recomendaciones le daría usted a un estudiante, que se enfrenta a realizar su propia demostración?

5: ¿Cree usted que se puede hablar de la enseñanza de la demostración?

6: ¿Cree usted que hay una diferencia entre hacer una demostración en clase y enseñar una demostración?

7: ¿Cuál cree usted que es la forma más adecuada para explicar una demostración?

Los resultados de la entrevista realizada se tuvieron en cuenta para la intervención en el aula y en ese sentido poder hacer del aula un espacio ameno y colaborativo, donde el estudiante sea partícipe de las construcciones pertenecientes a cada demostración y pueda observar toda la heurística que se debe hacer para poder desarrollar la argumentación, la cual da forma a una demostración matemática. A continuación, se describirán las respuestas obtenidas:

En las tres primeras y séptima pregunta, se encuentra un común denominador , dado que van en el mismo sentido, en las respuestas a las preguntas, se considera que se debe en primer lugar hacer una contextualización del teorema o proposición a demostrar; es decir, considerar algunas de sus implicaciones y relaciones con resultados anteriores; además, ir mostrando a los estudiantes las heurísticas que se usan para lograr que sea partícipe de la construcción; en segundo lugar, se recomienda que a partir de la teoría se vaya construyendo la demostración de un teorema sin necesidad de enunciar la palabra demostración, ya que por lo general causa un una reacción sicológica negativa y esto genera un obstáculo de aprendizaje debido a la carga conceptual y rigor matemático que implica desarrollar una demostración.

Respecto a la pregunta cuatro, los profesores consideran que el estudiante debe tener muy clara la teoría y conceptos que estén presentes en el teorema, también debe entender muy bien lo que le cuenta el teorema y lo que le garantiza, ya cuando se tenga una buena idea empezar a establecer conexiones con lo que se haya visto anteriormente en el curso, o en otros cursos donde se hayan usado los mismos términos que se usan ahí, luego ya empezar lo que sería su propia demostración, si no se encuentra un camino, empezar a buscar apoyo en demostraciones similares o que estén ligeramente modificadas.

Respecto a la pregunta cinco, se llega a la conclusión de que no es conveniente hablar de la enseñanza de la demostración, dado que para hacer una demostración se necesita establecer conexiones lógicas entre conceptos y elementos que estén en la teoría estudiada en el curso, sumado a eso la argumentación realizada en una demostración debe tener una estructura lógica y coherente donde en muchas líneas se ve presente la intuición; no obstante se pueden emplear metodologías en el aula para que los estudiantes puedan empezar a generar habilidades para la demostración.

Finalmente, en lo que concierne a la pregunta 6, indudablemente son varios los factores que no permiten hacer un buen desarrollo de cada demostración o explicación del teorema; es más, a veces solo se presenta el teorema y su demostración queda relegada, puesto que el tiempo en el aula es muy corto y los contenidos del curso son extensos, en cambio si se quiere explicar un teorema por fuera del aula de clases se podrían implementar diferentes metodologías de enseñanza para poder que los estudiantes además de convencerse de lo que cuenta y garantiza el teorema, sean partícipes de su demostración.

8.1 Resultados y análisis de la encuesta realizada

En esta sesión se hará un recuento histórico y análisis, resaltando momentos importantes presentes en las demostraciones desarrolladas, con la intención de hacer un análisis donde se observe, desde la teoría propuesta por Allan Schoenfeld para la solución de problemas, en qué momento los estudiantes presentaron dificultades o mostraron un apropiamiento de dicho método para solucionar problemas, también resaltar en que momentos los estudiantes lograron tener el control de una demostración.

En el inicio de la intervención se puso en acción una encuesta donde se plantearon algunas preguntas en torno a las concepciones que tienen los y las estudiantes frente a las matemáticas, dichas preguntas fueron:

- ¿Cuál fue la motivación para estudiar matemáticas?
- ¿Qué concepción tenían de las matemáticas antes de entrar a la carrera?
- ¿Qué concepción tienen ahora de las matemáticas?
- ¿Cómo las matemáticas son útiles para la vida cotidiana?
- ¿Creen que las matemáticas ayudan al mundo y a la comodidad del ser humano?
- ¿Es posible que las matemáticas se relacionen con otras áreas de estudio?
- ¿Cuál matemático de la historia los ha impactado?
- ¿Qué ramas o líneas de las matemáticas has escuchado?
- ¿Cómo la teoría de conjuntos se relaciona con las demás ramas de la matemática?
- ¿Cuál es el objetivo del curso conjuntos numéricos?

El desarrollo de esta encuesta fue muy enriquecedor tanto para los estudiantes como para quien elaboró esta sistematización; se aclararon dudas respecto a la intervención en el aula dado que en un primer momento hubo una confusión y se afirmó que el espacio de intervención en el aula no era un espacio de asesorías, lo cual fue una mala interpretación, en un segundo momento se hizo una modificación a la afirmación del primer momento, pues lo que se quería dejar claro es que el espacio de estudio sí sería un espacio de asesoría , pero no se iban a invertir las horas de intervención para resolver tareas asignadas por los docentes a cargo de los cursos.

Por otro lado, se expuso el método de solución de problemas planteado por Allan Schoenfeld, el cual fue muy motivador para los estudiantes, ya que nunca habían escuchado de un método para resolver problemas matemáticos, en este caso demostrar proposiciones.

La anterior encuesta se propuso con la intención de recolectar información acerca de las concepciones que tienen los estudiantes de las matemáticas y en particular del curso de interés;

esta misma encuesta se propuso al terminar la etapa de intervención, con la intensión de comparar las nuevas expectativas o concepciones que tiene los estudiantes después de haber avanzado en el curso conjuntos numéricos.

Las respuestas proporcionadas por los estudiantes fueron muy parecidas, consideraban que las matemáticas son la base de todas las ciencias; la motivación para estudiar matemáticas había sido un profesor o profesora de matemáticas quienes le habían hecho enamorarse de ellas; respecto a las ramas de las matemáticas las desconocían por completo en un primer momento, al finalizar la intervención ya habían consultado y lograron distinguir algunas ramas de las matemáticas.

También se desconocía en un principio el objetivo del curso, lo que los conllevo llevo a indagar acerca del antes mencionado, entendiendo que el curso giraría en torno a dos conceptos importantes en matemáticas: relación y número en un ambiente lógico deductivo. Cabe resaltar que es de suma importancia que el objetivo del curso debe ser socializado con los y las estudiantes al empezar el curso, en tanto que orienta sobre la intención del curso y su desarrollo, permitiendo facilitar, potenciar y motivar al estudiante.

Respecto a las respuestas de la pregunta: ¿Cuál fue la motivación para estudiar matemáticas? los estudiantes coincidieron en que la motivación para iniciar sus estudios en el programa de Licenciatura en Matemáticas, había sido su profesor del colegio, quien con su forma de enseñar las matemáticas los había impactado. Leer estas respuestas puso en evidencia el importante papel que juega el profesor en los estudiantes y fue un incentivo para redoblar los esfuerzos y buscar más herramientas didácticas, formas de explicar una demostración e incluso proponer estrategias para empezar a generar habilidades para la demostración de una proposición.

Es necesario resaltar que es de suma importancia por parte del profesor motivar al estuante antes de iniciar un proceso de enseñanza-aprendizaje, dado que está ligado con la disposición del alumno y su interés en aprender, además la motivación contribuye a desarrollar sus capacidades, superar sus limitaciones para que en este mismo sentido el estudiante haga sus tareas por satisfacción propia, mas no por una calificación.

Por lo antes mencionado, como futuros docentes deben innovar en el aula con nuevas estrategias metodológicas dirigidas a la mayor población estudiantil, para así mismo poder transmitir todos sus conocimientos y dejar expuesta la belleza de la matemática y por fin quitar la barrera que hace pensar a algunas personas que las matemáticas no son para toda clase de personas, o que en muchos casos no logran ver su gran potencial, ni su contribución en el desarrollo de la humanidad.

Es necesario resaltar que, algunas reacciones y cuestionamientos que surgieron en esta encuesta por parte de los estudiantes fueron los siguientes:

- ¿por qué el profesor va pasando tan rápido de temas?
- ¿por qué asume que sabemos notaciones o conceptos los cuales no son claros?

El primer cuestionamiento se explicó desde un factor identificado en una de las problemáticas descritas en el inicio de este documento, el factor tiempo.

Como es de saber el tiempo asignado para el desarrollo de un curso actúa como un factor limitante que impide y elimina muchos de los intentos de desarrollar el curso con estrategias pedagógicas como: un repaso de conceptos previos, los cuales serán la base para entender conceptos posteriores; videos ilustrativos o ejemplificadores de la teoría axiomática, exposiciones grupales o evaluaciones diferentes a la tradicional. Desafortunadamente por cuestiones de tiempo, el docente no puede dedicar algunas horas para hacer todo un proceso pedagógico que involucre las anteriores estrategias que se podrían implementar en el aula, las cuales brindarían a los estudiantes herramientas para mejorar su aprendizaje. Por lo tanto, la opción que le queda al profesor es, desarrollar el curso de forma tradicional, lo cual obliga al estudiante a remitirse al libro guía para intentar solventar la mayoría de dificultades que se le presentan.

El segundo cuestionamiento no fue posible reflexionarlo, no obstante, en algunos momentos los profesores no son específicos con la simbología que se usará en el desarrollo del curso, además pasan por alto que los y las estudiantes en cursos anteriores podrían haber usado otra simbología para referirse a un mismo elemento teórico, quedando finalmente los estudiantes con una gran confusión la cual fácilmente conlleva a un obstáculo en su aprendizaje.

8.2 Resultados y análisis de la Guía # 1 Teoría axiomática de conjuntos (introducción)

En la primera guía llamada Teoría Axiomática de Conjuntos (introducción) se espera que, al recordar algunas propiedades, axiomas y definiciones vistas en clase, se pueda leer y entender una proposición donde se haga uso de los primeros axiomas de la teoría conjuntos, para finalmente implementar el método de solución de problemas planteado por Allan Schoenfeld.

En la guía (ver anexo 2) se escribieron algunas demostraciones tomadas del libro guía las cuales sirvieron de insumo para el desarrollo de algunas demostración, por otra parte , en las asesorías se desarrollaron algunas demostraciones de proposiciones relacionadas con operaciones entre conjuntos, las cuales fueron recomendadas por parte del docente a cargo del curso, previamente a la demostración se recordaron algunas definiciones y axiomas que estaban de forma explícita en dichas proposiciones a demostrar; los estudiantes manifestaron que habían olvidado algunos métodos de demostración como la reducción al absurdo y por contrarecíproco, tampoco conocían una prueba clásica de unicidad y de existencia. Por esto fue necesario recordarlo como sigue:

- Método de demostración reducción al absurdo: se debe probar $H \rightarrow T$, lo que se hace en este método de demostración es negar $H \rightarrow T$ y usar su negación $H \wedge \sim T$ como nuestra nueva hipótesis para final mente llegar a una contracción de la forma $r \wedge \sim r$ en general lo que se hace es usar la tautología $(H \rightarrow T) \leftrightarrow (H \wedge \sim T \rightarrow r \wedge \sim r)$ .El anterior es un método lógico de demostración muy empleado en matemáticas y que consiste en demostrar que una proposición matemática es verdadera probando que si no lo fuera conduciría a una contradicción.
- Para recordar cómo se hace una demostración por el método de contrarecíproco se tomó como ayuda el siguiente video: https://www.youtube.com/watch?v=u5Fi3fHWscc&list=PLCY1BPxILEJUN4VkucVxpJ24Ws2i9GpWf&index=5
- Para las pruebas de existencia y unicidad fue necesario tomar como insumo el siguiente video, el cual nos expone y ejemplifica una forma de cómo se podrían hacer las pruebas ya mencionadas, a continuación, se encuentra el link del video: https://www.youtube.com/watch?v=xnClXJHLwvo

Una vez recordados algunos axiomas y métodos de demostración, se empezó a implementar el método para solucionar problemas de Allan Schoenfeld, el cual les fue de gran ayuda en cuanto a cómo entender la proposición, saber con qué recursos se cuentan, y empezar a ejecutar cada fase que se propone como heurísticas para la solución de un problema

Algunos estudiantes presentaron dificultades al momento de pasar de la fase de análisis a la fase de realización, esto sucede porque a veces no es suficiente ver demostraciones de proposiciones similares a la que se quiere demostrar, pues para iniciar una demostración no solamente entran en juego los elementos teóricos explícitos en la proposición sino también la intuición la cual no es estimulada en el proceso de enseñanza-aprendizaje, afortunadamente el método de Schoenfeld brinda caminos en zigzag y marchas hacia adelante o hacia atrás para poder replantear la estrategia pensada y empezar la demostración de la proposición. A continuación, se enunciará una proposición a la cual nos enfrentamos con los y las estudiantes

- $A \subseteq B$ $Si\ y\ sólo\ si$ $A \cap B = A$ $Si\ y\ sólo\ si$ $A \cup B = B$ $Si\ y\ sólo\ si$ $A - B = \emptyset$

Durante todo el desarrollo de la demostración, se implementaron heurísticas pertenecientes al método de solución de problemas de Allan Schoenfeld, además se tuvo en cuenta las herramientas proporcionadas que corresponden a las secuencias didácticas, es por ello que en primer lugar se indagó acerca de los conceptos, axiomas o teoremas con los que contaban los estudiantes, los cuales son descritos como recursos en el método de solución de problemas.

Posteriormente se empezó a hacer una interpretación de la proposición, con el fin de dar inicio a la elaboración de un plan para empezar la prueba, donde se tuvo en cuenta cada componente de la proposición además ver como se podría probar.

Varios estudiantes tenían confusiones y dudas acerca de cómo se podía empezar la prueba, también en como probar una igualdad entre conjuntos, al parecer habían olvidado muchas herramientas de demostración vistas en el curso de lógica y conjuntos; después de hacer un pequeño recorrido y dar algunos consejos para empezar la prueba, con facilidad los estudiantes recordaron muchas herramientas que les había proporcionado su curso de lógica y conjuntos, lo cual les dio más seguridad al momento de empezar la prueba.

Se debe resaltar que los estudiantes avanzaron lentamente en la prueba, se hicieron grupos de trabajo, donde interactuaban y compartían ideas las cuales fueron formando un plan para el desarrollo de la prueba, es necesario mencionar que el trabajo cooperativo optimiza las horas de trabajo, mejora la comunicación, evitando una gran cantidad de errores y en ese mismo sentido se enriquece la resolución de problemas, puesto que se cuenta con distintos puntos de vista los cuales dan forma e inicio a la prueba, haciendo más ameno el espacio de trabajo.

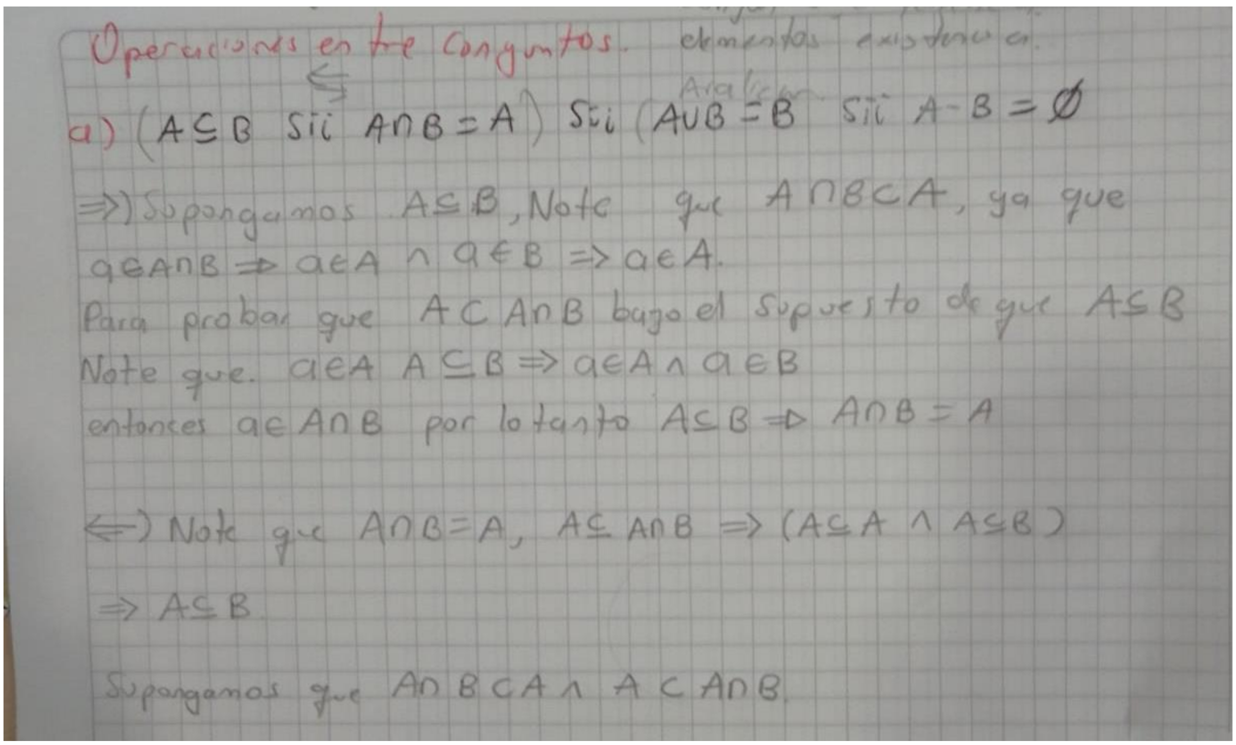
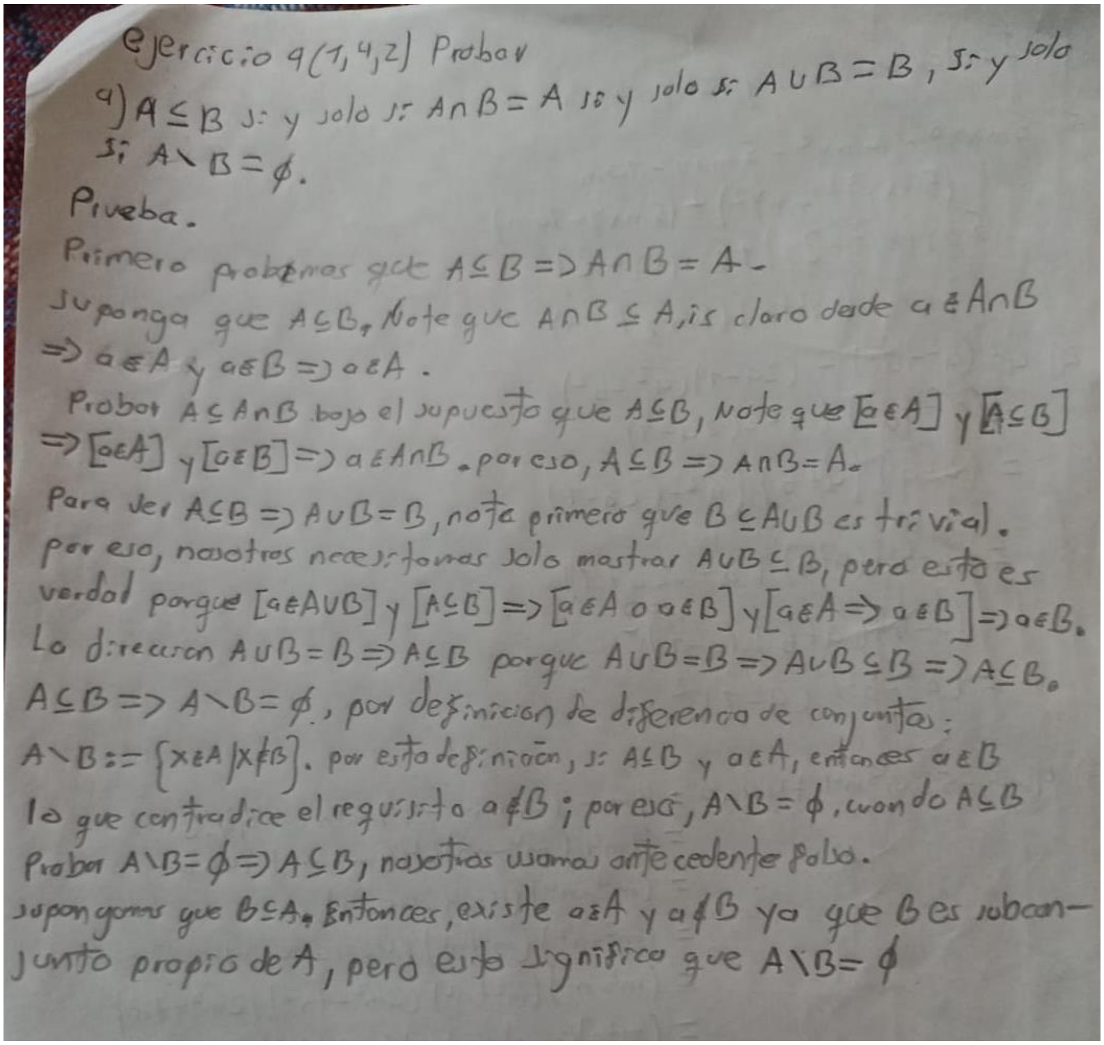


Ilustración 1

En la anterior imagen se puede ver cómo hay varias dificultades al momento de empezar la prueba, una de ellas es $A \subseteq B \rightarrow a \in A \wedge a \in B$, haciendo uso de los caminos en zig zag marchas hacia adelante o hacia atrás como propone Allan Schoenfeld, se puede replantear la idea que se pensaba usar para el desarrollo de la prueba, finalmente trabajando en equipo se logró finalizar la prueba, la cual sirvió de insumo para probar las demás proposiciones pertenecientes a operaciones entre conjuntos.

A continuación, se muestra una prueba que fue elaborada por los estudiantes teniendo en cuenta algunas pautas dadas en el desarrollo de la prueba.



ejercicio 4(1,4,2) Probar

4) $A \subseteq B$ si y solo si $A \cap B = A$ si y solo si $A \cup B = B$, si y solo si $A \setminus B = \phi$.

Prueba.

Primero probamos que $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$.

Suponga que $A \subseteq B$, Note que $A \cap B \subseteq A$, is claro dado $a \in A \cap B \Rightarrow a \in A$ y $a \in B \Rightarrow a \in A$.

Probar $A \subseteq A \cap B$ bajo el supuesto que $A \subseteq B$, Note que $[a \in A]$ y $[A \subseteq B] \Rightarrow [a \in A]$ y $[a \in B] \Rightarrow a \in A \cap B$. por eso, $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$.

Para ver $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$, note primero que $B \subseteq A \cup B$ es trivial. por eso, nosotros necesitamos solo mostrar $A \cup B \subseteq B$, pero esto es verdad porque $[a \in A \cup B]$ y $[A \subseteq B] \Rightarrow [a \in A \text{ o } a \in B]$ y $[a \in A \Rightarrow a \in B] \Rightarrow a \in B$.

La direccion $A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$ porque $A \cup B = B \Rightarrow A \cup B \subseteq B \Rightarrow A \subseteq B$.

$A \subseteq B \Rightarrow A \setminus B = \phi$, por definicion de diferencia de conjuntos: $A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$. por esta definición, si $A \subseteq B$ y $a \in A$, entonces $a \in B$ lo que contradice el requisito $a \notin B$; por eso, $A \setminus B = \phi$, cuando $A \subseteq B$

Probar $A \setminus B = \phi \Rightarrow A \subseteq B$, nosotros usamos antecedente falso.

supongamos que $B \subseteq A$. Entonces, existe $a \in A$ y $a \notin B$ ya que B es subconjunto propio de A, pero esto significa que $A \setminus B = \phi$

Ilustración 2

Cabe resaltar que el desarrollo de esta guía se trabajó con estudiantes de los dos cursos de conjuntos numéricos, por comodidad en adelante se denominarán el grupo 1 y el grupo 2 respectivamente. Con el grupo 1 se siguió trabajando las 6 proposiciones propuestas por el docente, los estudiantes dedicaron 3 sesiones a demostrar las siguientes proposiciones:

1. $A \subseteq B \cap C$ *si y sólo si* $A \subseteq B$ *Y* $A \subseteq C$.

2. Existe un único conjunto que no tiene elementos.

Al inicio de las sesiones dedicaron unos minutos a entender cada proposición. Una vez entendida empezaron a sacar en una hoja aparte todos los conceptos y definiciones que estaban involucrados en la proposición, para posteriormente ser usado en el desarrollo de la prueba, seguidamente empezaron a reescribir la proposición para poder que se entendiera en la forma más natural posible.

Respecto a la proposición 2, se presentaron varias dificultades, habían olvidado algunos elementos de la lógica como la implicación; elemento fundamental para poder dar luces al inicio de la prueba, fue necesario hacer la tabla de verdad de la implicación para que ellos estuvieran realmente convencidos de que lo que se hacía en la prueba era válido, fueron varias las veces en que los estudiantes se vieron obligados a retroceder en cuanto al desarrollo de la prueba, pues muchas veces se les olvidaba a donde tenían que llegar para poder dar por terminada la prueba y someterla a revisión.

Por otro lado, los estudiantes del grupo 2 empezaron a trabajar con la siguiente proposición

- $A \subseteq B\ Si\ y\ sólo\ si\ A \cap B = A\ Si\ y\ sólo\ si\ A \cup B = B\ Si\ y\ sólo\ si\ A - B = \emptyset$

Antes de que empezaran la prueba, se habló acerca del método planteado por Schoenfeld para la solución de problemas; se mencionaron las consideraciones que se deberían tener en cuenta para la solución de un problema según lo planteado por Allan Schoenfeld, como también las heurísticas propuestas en dicho método; a diferencia del primer grupo este grupo tenía más dudas acerca de cómo entender la proposición y empezar a hacer la prueba.

Una vez explicada la proposición, se dio una idea para empezar la prueba y fue así como los estudiantes empezaron a desarrollar la prueba; algunas de las dificultades presentadas por los estudiantes es empezar una prueba y además como poder hacer uso la hipótesis.

El grupo 2 de estudiantes empezó a trabajar junto al grupo 1 para poder dar solución a la proposición, dado que los estudiantes del grupo 1 ya la habían hecho, uno de ellos tomó el control y empezó a explicar y a guiar a los estudiantes del grupo 2, a continuación, se muestra un primer intento de la demostración por parte de los estudiantes del grupo 2, donde claramente se cometen algunos errores en el desarrollo de la demostración.

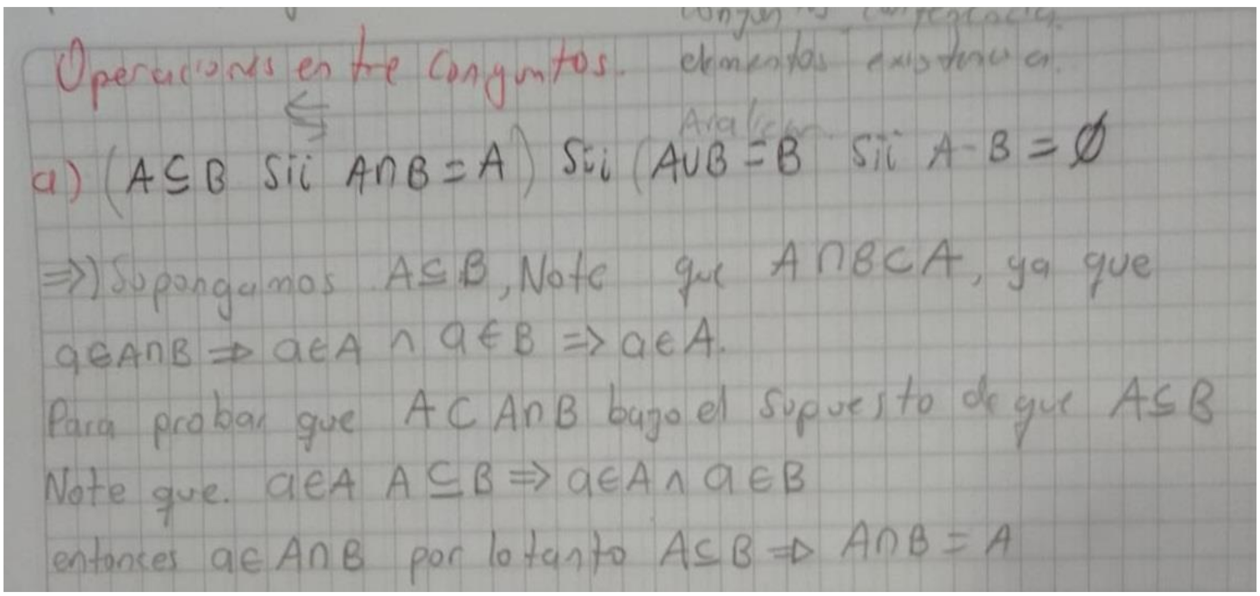
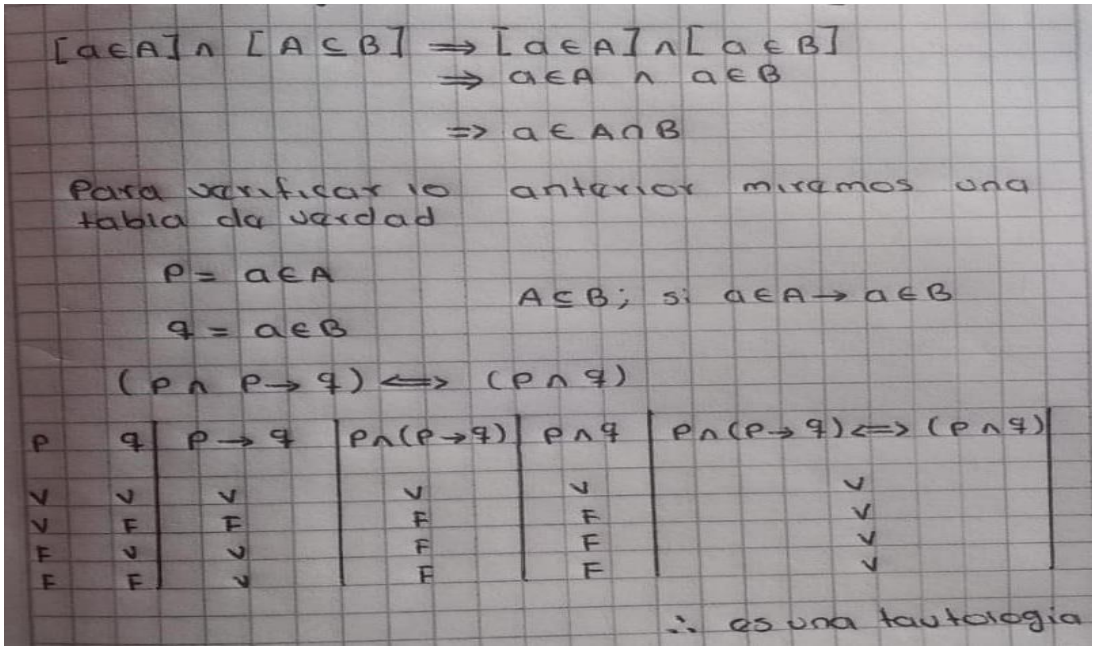


Ilustración 3

En la anterior imagen se muestra como un estudiante intenta explicar una parte de la demostración de la proposición 1, dado que surgió la siguiente pregunta: ¿cómo se podía justificar las siguientes implicaciones lógicas?

- $[a \in A] \wedge [A \subseteq B] \rightarrow [a \in A] \wedge [a \in B] \rightarrow a \in (A \cap B)$

Para justificar lo anterior, se propuso observar la siguiente tabla de verdad realizada por un estudiante.



$[a\in A] \wedge [A \subseteq B] \Rightarrow [a \in A] \wedge [a \in B]$

$\Rightarrow a\in A \wedge a \in B$

$\Rightarrow a \in A\cap B$

Para verificar lo anterior miremos una tabla da verdad

$p = a\in A$

$q = a\in B$

$A\subseteq B$; si $a\in A \rightarrow a\in B$

$(p \wedge p\rightarrow q) \Longleftrightarrow (p \wedge q)$

p	q	$p\rightarrow q$	$p\wedge(p\rightarrow q)$	$p\wedge q$	$p\wedge(p\rightarrow q) \Longleftrightarrow (p\wedge q)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	F	F	V
F	F	V	F	F	V

$\therefore$ es una tautologia

Ilustración 4

Posteriormente se propuso demostrar la proposición 1 al grupo de estudiantes 1, Al principio los estudiantes estaban teniendo dificultades como: interpretación, uso de hipótesis y la no comprensión de axiomas involucrados en el problema a resolver.

Dadas unas ideas para poder empezar la prueba, los estudiantes avanzaron un poco, entre los chicos resaltaba uno quien preguntaba constantemente y era el que más motivado estaba por hacer la prueba completa. Había dificultad para definir el conjunto cuya existencia se garantizaba por el axioma esquema de comprensión; trabajamos con dicho chico y finalmente logró entender la prueba, una vez entendió la prueba él fue el encargado de compartir la prueba con sus compañeros, quienes finalmente no presentaron dificultades para entender la prueba.

Al parecer entre los estudiantes existe una forma de comunicación más dinámica, la cual hace que entre ellos puedan entenderse y avanzar de una forma más rápida

Durante el inicio desarrollo y cierre de la sesión se pudo observar que los estudiantes recorrieron cada fase y factor mencionado en el método de solución de problemas planteado por Schoenfeld, por ejemplo cuando intentaban empezar la prueba de la segunda proposición, se vieron obligados a saber con qué recursos contaban, es decir hicieron un análisis y empezaron a sacar en hojas los conceptos y definiciones que debían tener presente para la prueba; cuando se encontraban en el desarrollo de la prueba, en numerosas veces tocó hacer marchas hacia atrás dado que por lo general se cometían errores

En el mismo sentido los estudiantes al llegar a una conclusión chequeaban que las hipótesis hubieran sido usadas de forma correcta y que toda la argumentación perteneciente a la prueba tuviera sentido, para finalmente compartir la prueba con otros compañeros. Cabe resaltar que el trabajo en grupo es fundamental cuando se quiere mejorar el aprendizaje, dado que en el momento donde interactúan los estudiantes sus aportes e ideas son cada vez mejores y en ese sentido es mucho más fácil adquirir habilidades y entender el desarrollo de una demostración, por otro lado, el papel que juega el docente es mucho más exigente dado que depende de él que los estudiantes puedan avanzar o retroceder en los momentos que se pierda el horizonte de la demostración.

Respecto al grupo 1, su demostración tuvo muy pocos momentos donde necesitaban ayuda para avanzar o para verificar que habían hecho bien un procedimiento, gracias a que ya se habían enfrentado a una proposición donde deberían probar propiedades que involucraban operaciones entre conjuntos, es por ello que ya reconocían la forma de llevar a cabo la prueba.

Una vez terminada la sesión ambos grupos resaltan la importancia de tener en cuenta pautas como: entender bien el problema, saber que elementos teóricos están en juego, elaborar un plan, hacer un diseño, explorar proposiciones similares que den alguna idea de cómo proceder y finalmente revisar si la prueba está bien elaborada lo cual concuerda mucho con el método de solución de problemas planteado por Schoenfeld.

Cabe resaltar que, al momento de terminar la demostración, fue indispensable entrar a la fase de verificación propuesta por Schoenfeld, pues algunos estudiantes no estaban del todo convencidos de la demostración elaborada en el tablero. Una vez revisada la demostración teniendo en cuenta la fase de verificación, los estudiantes se convencieron de que habían realizado una buena demostración.

8.3 Resultados y análisis de la Guía # 2 Relaciones y funciones

Esta guía (ver anexo 3) tuvo como objetivo hacer una distinción entre los conceptos de relación y función, además hacer un recorrido teórico que permita a los y las estudiantes hacer una mejor interpretación de la teoría mediante pruebas de proposiciones donde se aplicó el método de solución de problemas propuesto por Schoenfeld.

La guía hace un recorrido teórico para afianzar los recursos teóricos con los que los estudiantes cuentan y además dar explicación a algunos inconvenientes con los que se encuentren los estudiantes al momento de estudiar la teoría. En esa dirección, se propuso abordar los siguientes ejercicios:

- $Sea\ A = \{ 1, 2, 3, 4 \}\ y \quad R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (3,3), (3,2\ ), (4,4)\}$ ¿La relación R reflexiva? Escribir la matriz de la relación.

- Considere en el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$ la relación "menor o igual que". Pruebe que la relación es reflexiva, antisimétrica y transitiva.
- Considere en el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$ la relación "menor que". Pruebe que la relación es asimétrica y transitiva.
- En el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$ considere la relación R definida como

(x R y)si y sólo si (x R y) es par ó (impar).

Determine si la anterior relación cumple la propiedad: reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva.

- Si $ranf \ \subseteq domg\ entonces\ dom(g\ o\ f) = domf$.

Esta guía se desarrolló con los estudiantes del grupo 1. El primer inconveniente que manifestaron los estudiantes estaba relacionado con la matriz de la relación, la explicación por parte del profesor había sido muy rápida y no habían entendido cómo construir dicha matriz.

El segundo inconveniente se dio por la confusión que presentaron los estudiantes al momento de probar si la relación R definida sobre el conjunto A era reflexiva. Ante dicha confusión se resaltó que una relación se define para elementos de un conjunto, es decir: Si $(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \in \mathrm{R}$ diremos que a está relacionado con b y lo notaremos por a $R\ b$; en ese mismo sentido se sugirió tener en cuenta que para probar si una relación es reflexiva, se debe hacer uso de la definición de reflexividad que consiste: Una relación binaria R sobre un conjunto A se dice que es reflexiva, cuando cada elemento de A está relacionado consigo mismo. Es decir, R es reflexiva sobre el conjunto A. Sí, y solo sí para cada elemento del conjunto A, está relacionado con el mismo.

Ahora bien, se presentaron 3 casos donde para probar la reflexividad, a los estudiantes se les dificultaba pasar de la definición de una relación a la definición de una relación reflexiva, pues debían verificar que cada elemento del conjunto estaba relacionado con el mismo (a R a).

Haciendo uso de los recursos, se pudo probar si la relación era reflexiva, luego se escribió y explicó la matriz asociada a la relación de la cual se extrajo la característica que identifica a la reflexividad de cualquier relación, la cual cumple que: la diagonal principal de la matriz asociada siempre estará compuesta por el número 1.

A lo que concierne al desarrollo de la prueba de las siguientes proposiciones

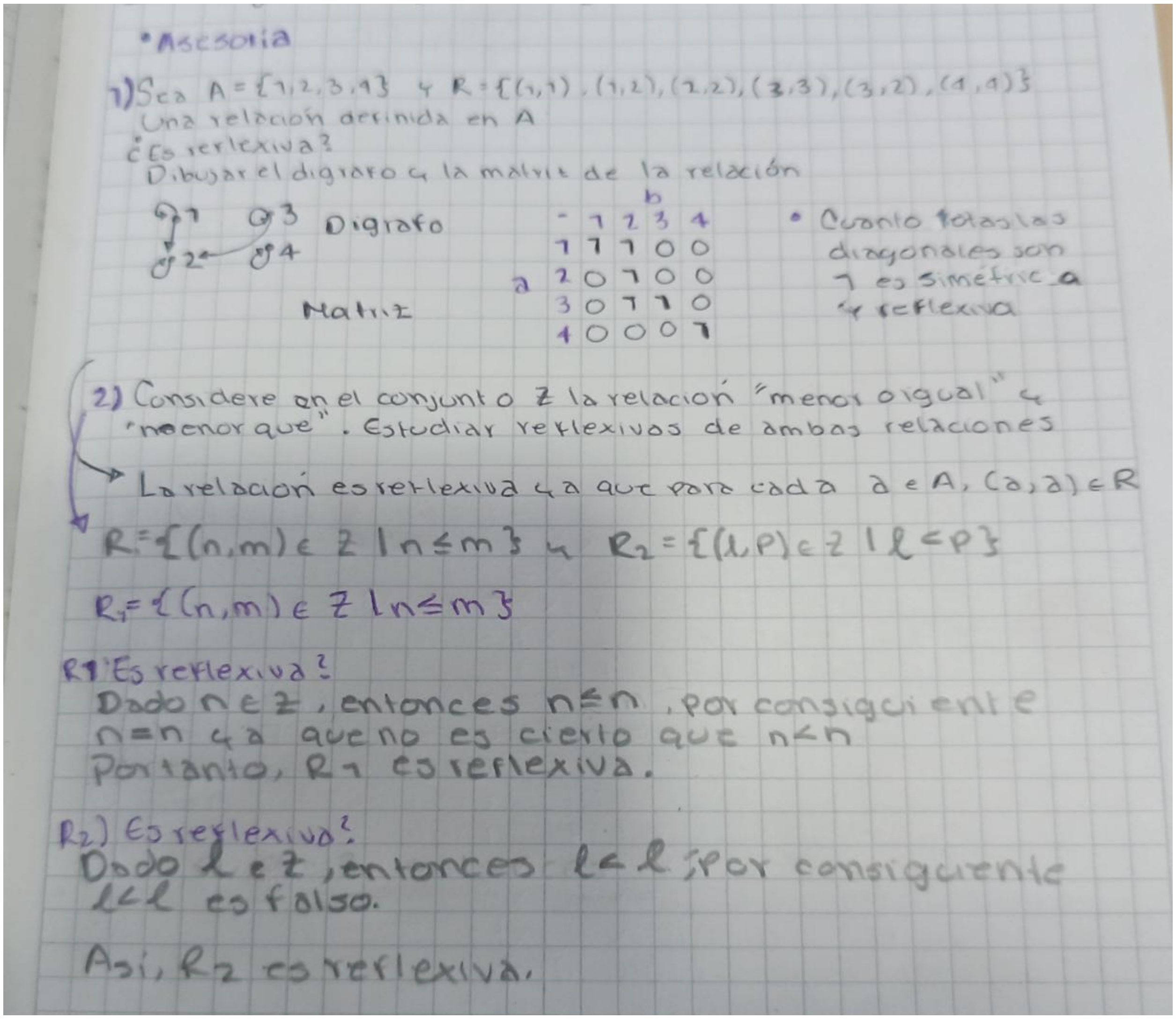
- considere en el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$ la relación “menor o igual que” pruebe que la relación es reflexiva, antisimétrica y transitiva.
- Considere en el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$ la relación “menor que” pruebe que la relación es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

los estudiantes, presentaron dificultades al momento de probar la reflexividad de las relaciones “menor que” y “menor o igual que”, dado que en el momento que los estudiantes empiezan a probar la reflexividad hay una confusión porque para probar la reflexividad, se debe considerar cada elemento del conjunto y verificar si dicho elemento está relacionado con el mismo.

En ese mismo sentido, es sabido que en el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$ cualquier número $a = a$ .Luego, por la relación “menor o igual que” definida sobre el conjunto $\mathbb{Z}$, al considerar dos elementos arbitrarios $a\ y\ b$ se obtienen dos condiciones: $a = b$ ó $a < b$ de lo cual se deduce que la relación “menor o igual que” sobre el conjunto $\mathbb{Z}$ efectivamente es una relación, puesto que se cumple que $a = b$.

Al momento de probar la reflexividad de la relación “menor que ” definida sobre el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$, los estudiantes consideran un elemento arbitrario a de $\mathbb{Z}$. Una vez realizado esto, los estudiantes trabajan con dicho elemento mediante la relación establecida “menor que ” deduciendo que $a < a$. y concluyen que la anterior deducción es falsa, pese a que sabían que $a < a$ no se daba en el conjunto sobre el que se definía la relación. Esto es, que ningún elemento en el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$ es menor que el mismo. Continuando con la prueba, los estudiantes concluyen que la relación es reflexiva (verdadera) incurriendo nuevamente en un error. Finalmente se explicó el por qué su razonamiento estaba erróneo, señalando que en el conjunto donde se estaba definiendo la relación, ningún elemento cumplía dicha condición $a < a$ y que por tal motivo al relación no era reflexiva. Señalando el momento en que se había perdido el control de la prueba y se habían olvidado las propiedades del conjunto sobre el que está definida la relación.

En esta guía dos estudiantes piden permiso para salir al tablero a hacer las pruebas, una vez realizadas comparten la prueba con los demás estudiantes, esto hace parte de la socialización de los resultados obtenidos. Es de recordar que las pruebas desarrolladas en cada sesión se hacen en grupos, para que entre ellos puedan explicarse el porqué de cada paso, claro está que cada prueba tiene su acompañamiento. En la imagen siguiente se puede observar como un estudiante prueba la reflexividad de la relación “menor que” definida en los enteros, pero su conclusión no es coherente con el desarrollo de la demostración.



•Asesoría

1) Sea $A = \{1,2,3,4\}$ y $R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (3,3), (3,2), (4,4)\}$
Una relación definida en A
¿Es reflexiva?
Dibujar el digrafo y la matriz de la relación

Digrafo

Matriz

$$\begin{array}{c|cccc} & & & b & \\ - & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ a\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

• Cuando todas las diagonales son 1 es simétrica y reflexiva

2) Considere en el conjunto Z la relación "menor o igual" y "no menor que". Estudiar reflexivas de ambas relaciones

La relación es reflexiva ya que para cada $a \in A$, $(a,a) \in R$

$R = \{(n,m) \in Z \mid n \leq m\}$ y $R_2 = \{(l,p) \in Z \mid l < p\}$

$R_1 = \{(n,m) \in Z \mid n \leq m\}$

R1 ¿Es reflexiva?
Dado $n \in Z$, entonces $n \leq n$, por consiguiente $n = n$ ya que no es cierto que $n < n$
Por tanto, R_1 es reflexiva.

R_2) ¿Es reflexiva?
Dado $l \in Z$, entonces $l < l$; por consiguiente $l < l$ es falso.

Así, R_2 es reflexiva.

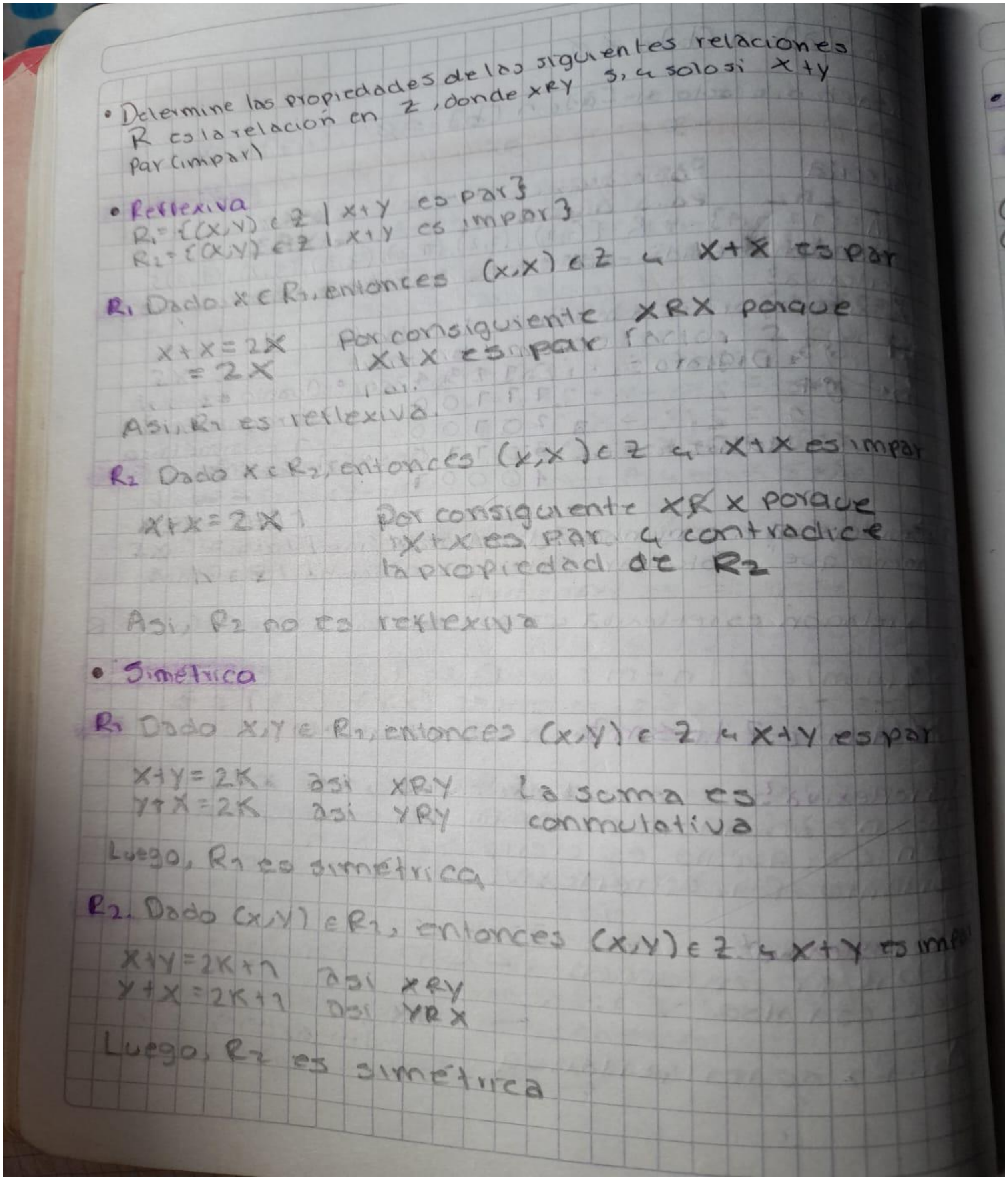
Ilustración 5

Respecto a la prueba de la siguiente proposición: en el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$ considere la relación R definida como: x R y sí y sólo si $(x + y)$ es par ó (impar). Determine si la anterior relación cumple la propiedad: reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva. Los estudiantes presentaron dificultades en la interpretación de la proposición, pues la condición para que dos elementos estuvieran relacionados era que el resultado de la suma $(x + y)$ fuese par (impar), al leer el impar entre paréntesis les causaba mucha confusión y no sabían con claridad que debían probar, pues lo que se pretendía era que se estudiaran dos casos en una relación, un caso $(x + y)$ es par y el otro $(x + y)$ es impar, es decir se debían verificar ambas relaciones por separado.

Un caso digno de analizar sucedió cuando los estudiantes debía probar que la relación definida sobre el conjunto anterior era reflexiva, para el caso $(x + y)$ la cual debe dar como resultado par, pues al considerar a un elemento x arbitrario del conjunto y hacer la suma de $(x + x)$ para verificar que la suma fuera par, los estudiantes escribían $x + x = 2K$ con $K \in \mathbb{Z}$, lo cual causo mucha confusión pues notoriamente tenían un procedimiento mal aprendido, lo cual se plantea en el método de solucionar problemas como *recursos defectuosos*, los chichos venían acostumbrados a que cuando se quiere hacer la representaciones andar de un numero par, sin tener en cuenta que la suma $x + x = 2x$ que tiene como resultado $2x$, también se obtiene un numero par.

Como es planteado por Schoenfeld, los recursos defectuosos que tienen los estudiantes deben ser tratados por parte del docente, en esta sesión fue notorio un recurso defectuoso, al momento de hacer la representación de número par. Al identificarlo fue necesario hacer una pausa en el desarrollo de la prueba para explicar el por qué lo que se estaba haciendo estaba mal, finalmente el recurso defectuoso fue solventado

Cuando se quiso probar la transitividad, se había tenido en cuenta la hipótesis: es decir "xRy" y "yRz" sin embargo no lograron deducir "xRz" al momento tener la hipótesis se perdió el horizonte de la prueba, por eso fue necesario hacer marchas hacia atrás y volver a leer la definición de una relación transitiva. A continuación se adjunta la prueba realizada por los estudiantes.



• Determine las propiedades de las siguientes relaciones R es la relación en Z, donde xRy si, y solo si $x+y$ par (impar)

• Reflexiva

$R_1 = \{(x,y) \in Z \mid x+y$ es par$\}$

$R_2 = \{(x,y) \in Z \mid x+y$ es impar$\}$

R_1 Dado $x \in R_1$, entonces $(x,x) \in Z$ y $x+x$ es par

$x+x=2x$ Por consiguiente xRx porque

$=2x$ $x+x$ es par

Así, R_1 es reflexiva.

R_2 Dado $x \in R_2$, entonces $(x,x) \in Z$ y $x+x$ es impar

$x+x=2x$ Por consiguiente $x \not R x$ porque $x+x$ es par y contradice la propiedad de R_2

Así, R_2 no es reflexiva

• Simétrica

R_1 Dado $x,y \in R_1$, entonces $(x,y) \in Z$ y $x+y$ es par

$x+y=2K$ así xRy La suma es

$y+x=2K$ así yRy conmutativa

Luego, R_1 es simétrica

R_2. Dado $(x,y) \in R_1$, entonces $(x,y) \in Z$ y $x+y$ es impar

$x+y=2K+1$ así xRy

$y+x=2K+1$ así yRx

Luego, R_2 es simétrica

Ilustración 6

.

Por otra parte, también se estudiaron proposiciones pertenecientes a relaciones y funciones; se proponía probar si una relación era función, hallar composición de funciones y probar si una función era invertible.

La primera proposición a probar fue tomada del libro (Hernández, 2003) en este proceso no se presentó mayor inconveniente por los estudiantes, solo fue necesario recordar algunos elementos teóricos y fácilmente pudieron avanzar en el desarrollo de la prueba. Pero no por ser una prueba que presentó menores inconvenientes, significa que su prueba fue rápida, por el contrario, se tardaron bastante tiempo en terminar la prueba, puesto que una estudiante no le quedaba del todo claro, como se hacía la composición de la función consigo misma y fue necesario revisarla por lo menos dos veces. Finalmente, todos llegaron a estar de acuerdo con la prueba.

A continuación se adjunta la ilustración 6 que fue tomada del libro (Hernandez, 2003), resaltando que uno de los primeros inconvenientes fue interpretar lo que se quería demostrar; algunos autores omiten la importancia de plantear una pregunta de forma específica, que dé inicio a pensar en las formas de dar una respuesta, lo cual conduce a hacer malas interpretaciones como cuando se quería estudiar la demostración de la proposición , es por eso que el docente a cargo del curso debe dar importancia a hacer su propia transposición didáctica y en ese mismo sentido analizar la forma de cómo hace dicha transposición el texto guía.

Ejemplo 4.38 Sea $f = \left\{\left(x, \frac{1}{x^2}\right) : x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}\right\}$. f es una función. En efecto, si $(a,b) \in f$ y $(a,c) \in f$, entonces $b = \frac{1}{a^2}$ y $c = \frac{1}{a^2}$; así, $b = c$. La notación usual para esta función es $f(x) = \frac{1}{x^2}$. f es una función desde el conjunto de los números reales, pero no en el conjunto de los números reales pues $0 \notin dom\, f$. Esta es una función en $A = \mathbf{R} \setminus \{0\} = dom\, f$ y hacia el conjunto de los números reales. Si $C = \{x \in \mathbf{R} : 0 \leq x \leq 1\}$, entonces $f(C) = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 1\}$ y $f^{-1}(C) = \{x \in \mathbf{R} : x \leq -1 \ \vee \ x \geq 1\}$. La composición $f \circ f$ es la relación:

$$\begin{aligned} f \circ f &= \{(x,z) : \exists y \text{ para el cual } (x,y) \in f,\ (y,z) \in f\} \\ &= \left\{(x,z) : \exists y \text{ para el cual } x \neq 0,\ y = \tfrac{1}{x^2},\ z = \tfrac{1}{y^2}\right\} \\ &= \left\{(x,z) : x \neq 0,\ z = x^4\right\}; \end{aligned}$$

así, $f \circ f(x) = x^4$. Note que $f \circ f$ es una función; esto no es un accidente.

Ilustración 7

La segunda y tercera proposición a demostrar fueron las siguientes:

- Considere la siguiente relación en $\mathbb{R}$, $g = \left\{\left(x, \frac{1}{x} + x^2\right) \mid x \in \mathbb{R} - \{0\}\right\}$ ¿ g es función ?
- Considere la siguiente relación en $\mathbb{R}$, $f = \{(x, 2^x) \mid x \in \mathbb{R} - \{0\}\}$ ¿ f es función ?

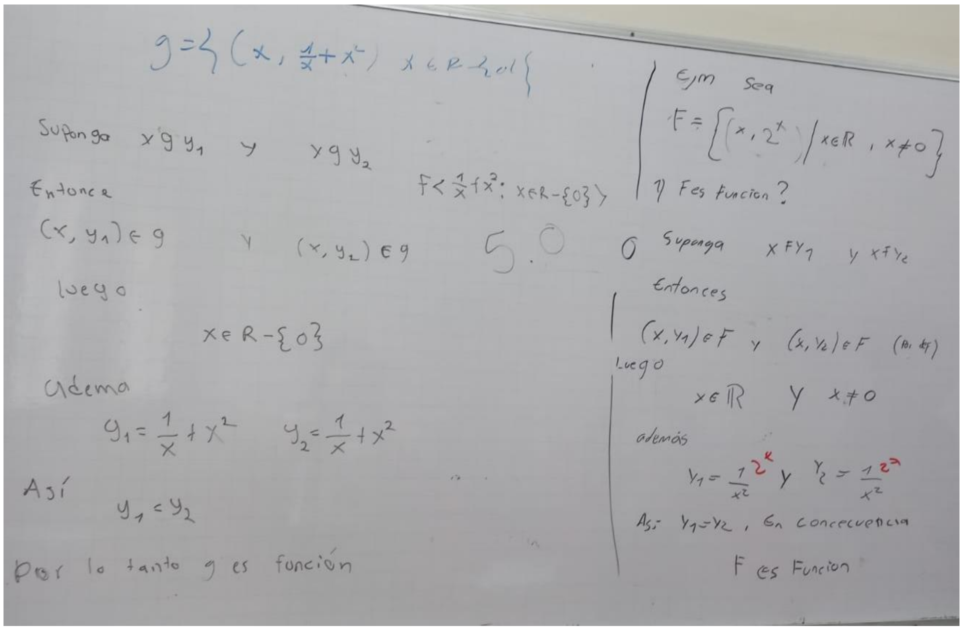


Ilustración 8

Lo escrito en el tablero fue la prueba realizada por dos estudiantes del curso conjuntos numéricos, que con ayuda de los demás compañeros pudieron llegar a verificar que ambas relaciones eran funciones.

Al trabajar con pruebas correspondientes a relaciones y funciones, se abre la posibilidad de hacer más notorio lo plantado en el método de solución de problemas de Schoenfeld, pues menciona que una de las heurísticas para tener en cuenta al momento de desarrollar una prueba, es la parte de asociar una gráfica a la prueba. fue necesario en varias ocasiones hacer diagramas, los cuales representan en cierta parte un comportamiento de una función, en ese mismo sentido se puede apreciar los elementos en el conjunto de llegada, además es insumo para analizar cuáles son los conjuntos de llegada y de partida de una función inversa.

En el desarrollo de esta guía se hizo énfasis en un teorema, el cual será abarcado en la siguiente página, que trata del dominio de la composición de dos funciones, también se revisó el corolario 4.40. que sigue del antes mencionado teorema y su respectiva prueba propuesta en (Hrbacek & Jech, 1999). A demás trabajamos con funciones, donde se desarrollaron tareas como: hallar composición de funciones, probar que las relaciones son invertibles y analizar si dos funcione son compatibles.

Al momento de revisar el teorema 4.39 del libro guía, que abarca el dominio de la composición de funciones, surgieron dudas cerca de: como podría interpretar este teorema de una forma gráfica; es más, fue necesario hacer un esquema que representara la composición de funciones, dicha gráfica fue fundamental para entender el teorema.

Ahora bien, una vez entendido el teorema que relaciona el dominio de la composición de dos funciones, se interpretó el corolario posterior al teorema principal, donde nuevamente la gráfica empleada para entender que era una composición de funciones fue transversal para poder empezar a hacer un plan para realizar la prueba del corolario.

Para la prueba del corolario, se hizo un trabajo cooperativo con los estudiantes que asistieron a la asesoría, es por ello que los estudiantes tomaron sus diferentes posturas frente a la prueba, donde resaltaba el interés en entender y ser partícipes de la argumentación, pues es de resaltar que las demostraciones en matemáticas se muestran de una forma depurada en los textos guía, es por ello que se hicieron varias paradas donde se debía reflexionar y entender la justificación línea a línea de la prueba.

Teorema 4.39 *Sean f y g funciones. Entonces $g \circ f$ es una función. $g \circ f$ está definida en x si y sólo si f está definida en x y g está definida en $f(x)$, es decir, $\mathrm{dom}\, g \circ f = \mathrm{dom}\, f \cap f^{-1}(\mathrm{dom}\ g)$.*

Ilustración 9

Corolario 4.40 *Si $\mathrm{ran}\, f \subseteq \mathrm{dom}\, g$, entonces $\mathrm{dom}\, g \circ f = \mathrm{dom}\, f$.*

Ilustración 10

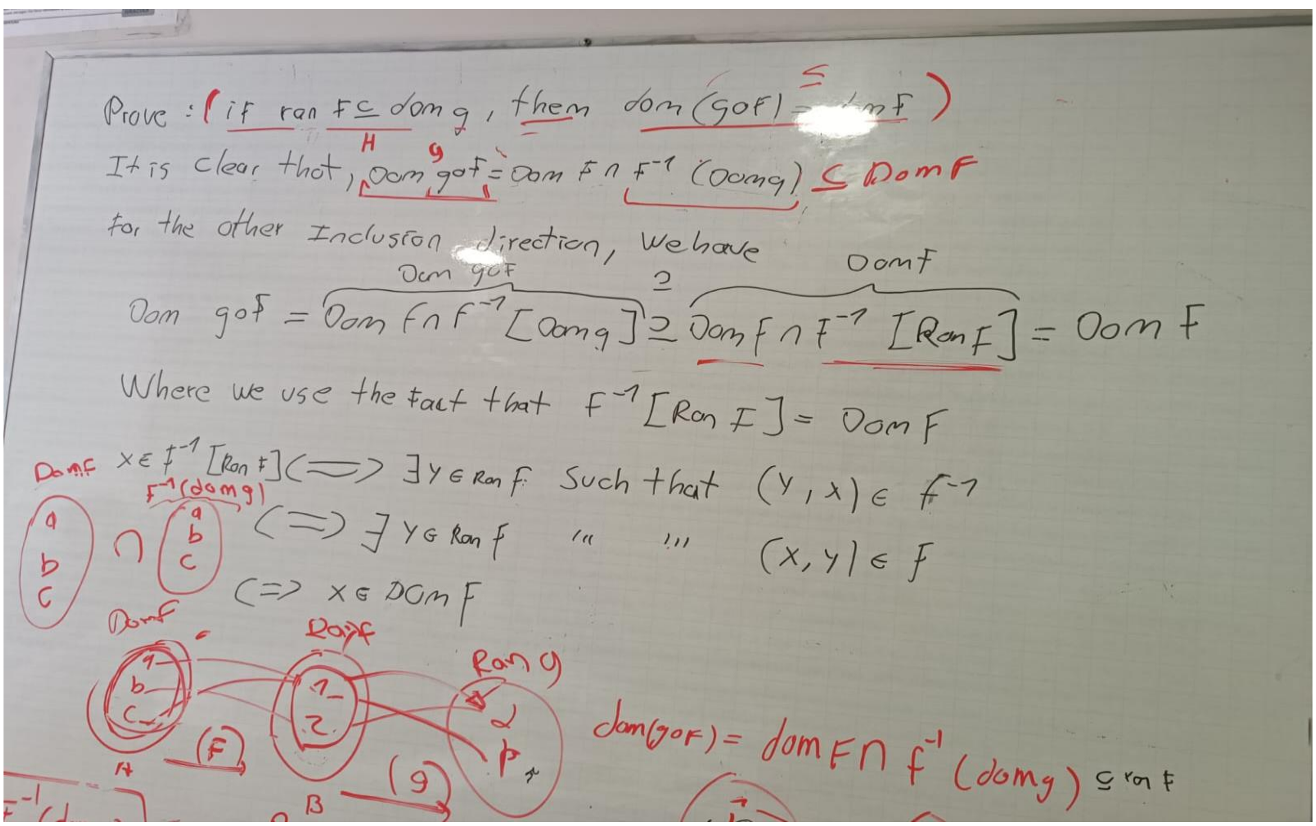
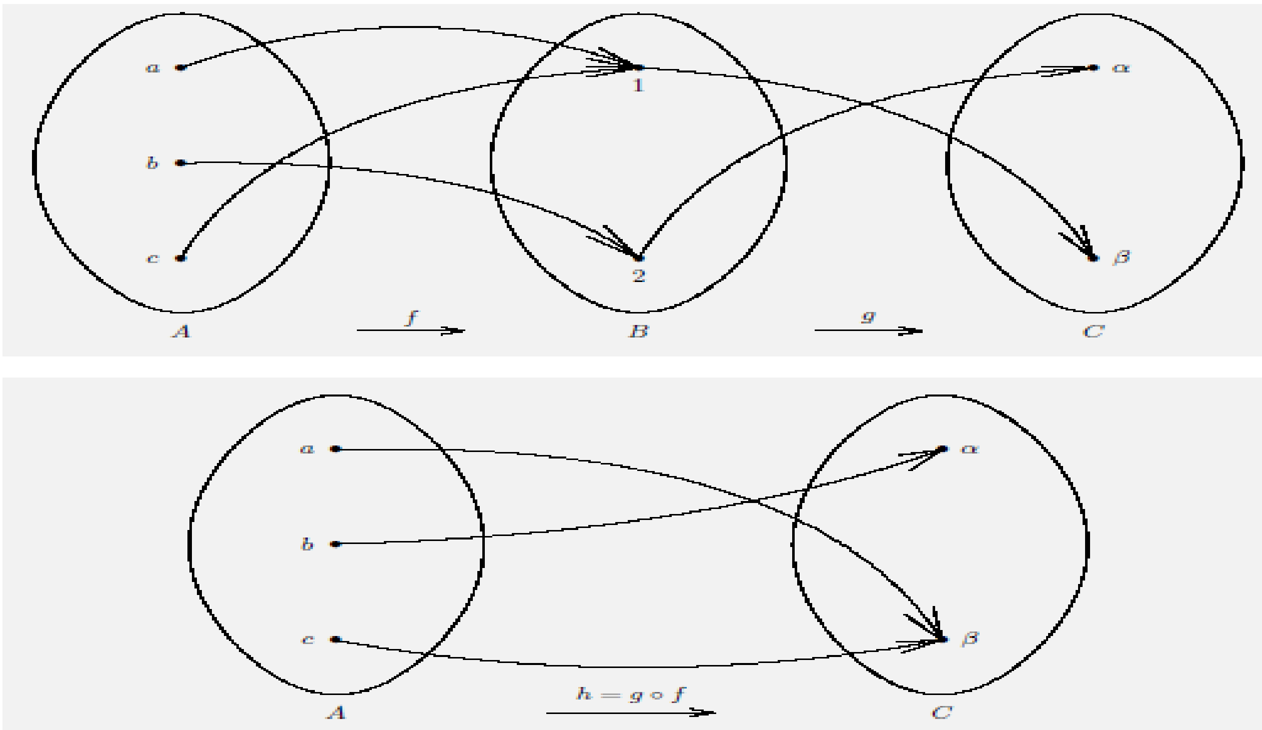


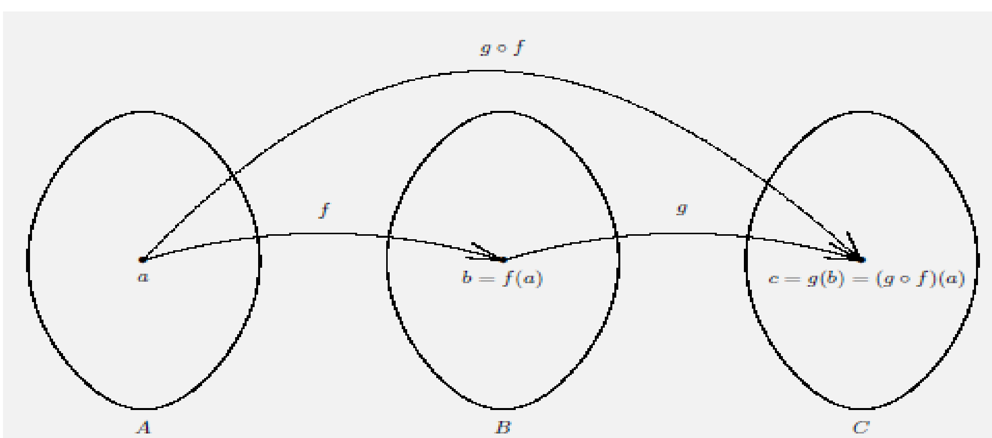
Ilustración 11

El siguiente esquema se usó para la interpretación de la composición de dos funciones



Composición de Funciones

Ilustración 12



Cálculo de $(g \circ f)(a)$

Ilustración 13

A continuación, se mostrarán algunos ejercicios propuestos y una parte de la prueba realizada por parte de un estudiante perteneciente al curso conjuntos numéricos.

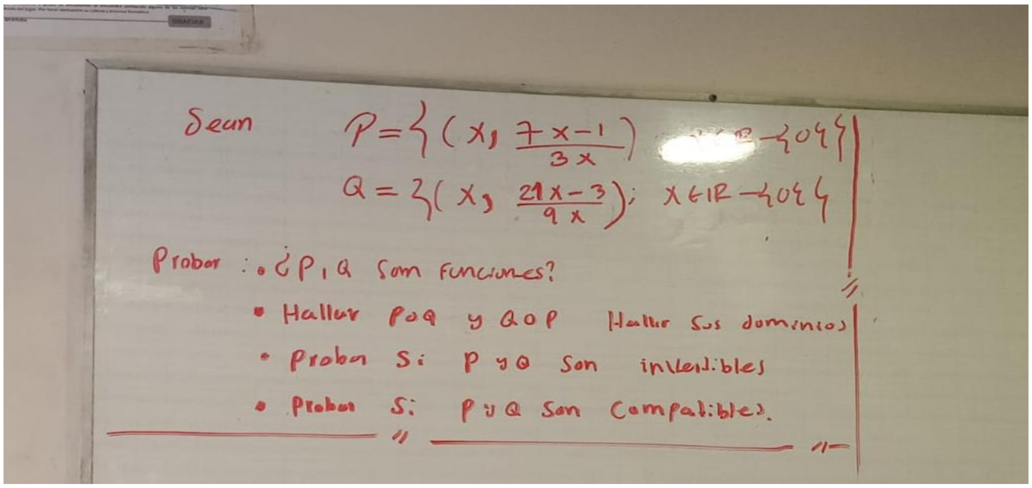


Ilustración 15

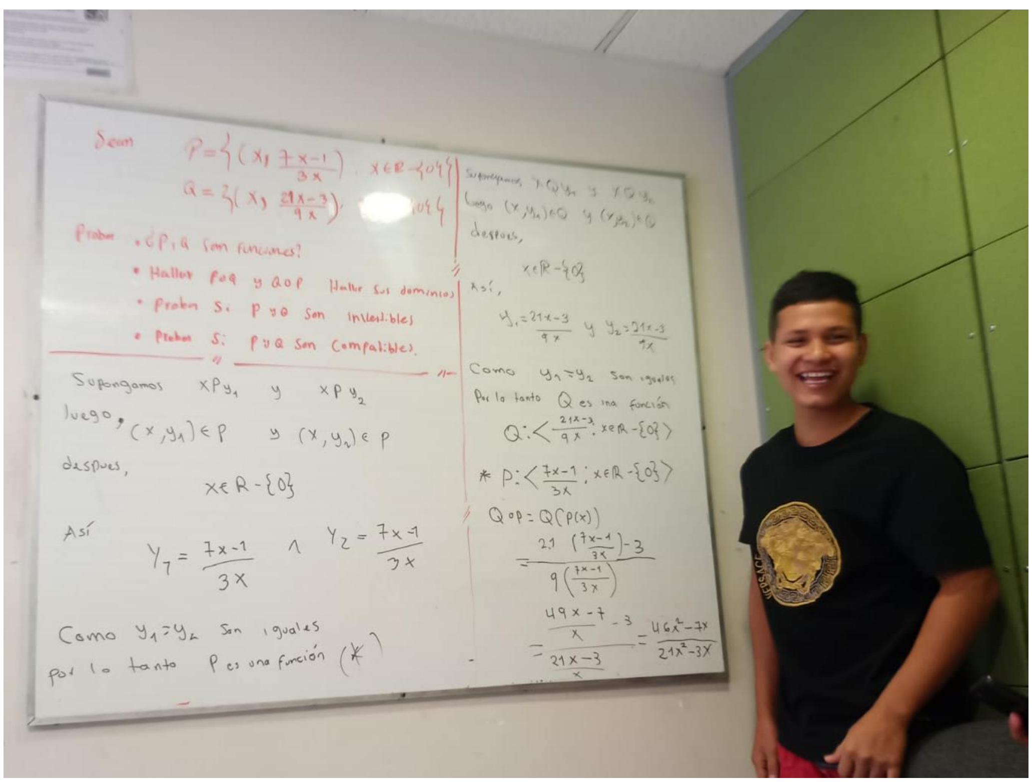


Ilustración 14

Las proposiciones que se desarrollaron por parte del estudiante perteneciente al curso conjuntos numéricos fueron de gran ayuda para algunos estudiantes que asistían por primera y segunda vez al espacio de asesoria, el estudiante quien hizo la prueba fue quien explicó a sus compañeros como proceder a probar cada ítem. En un momento necesitó ayuda para aclarar por qué se podían hacer algunas afirmaciones, insistiendo en que la parte teórica era la que brindaba las herramientas necesarias para hacer deducciones.

En el desarrollo de esta guía tambien se trabajaron algunas consultas de los estudiantes dado que en clases anteriores el docente a cargo del curso les habia propuesto algunas tareas relacionadas con funciones y algunas de sus propiedades. Fue así, como se empezó a abarcar la siguiente proposicion y su respectiva demostración.

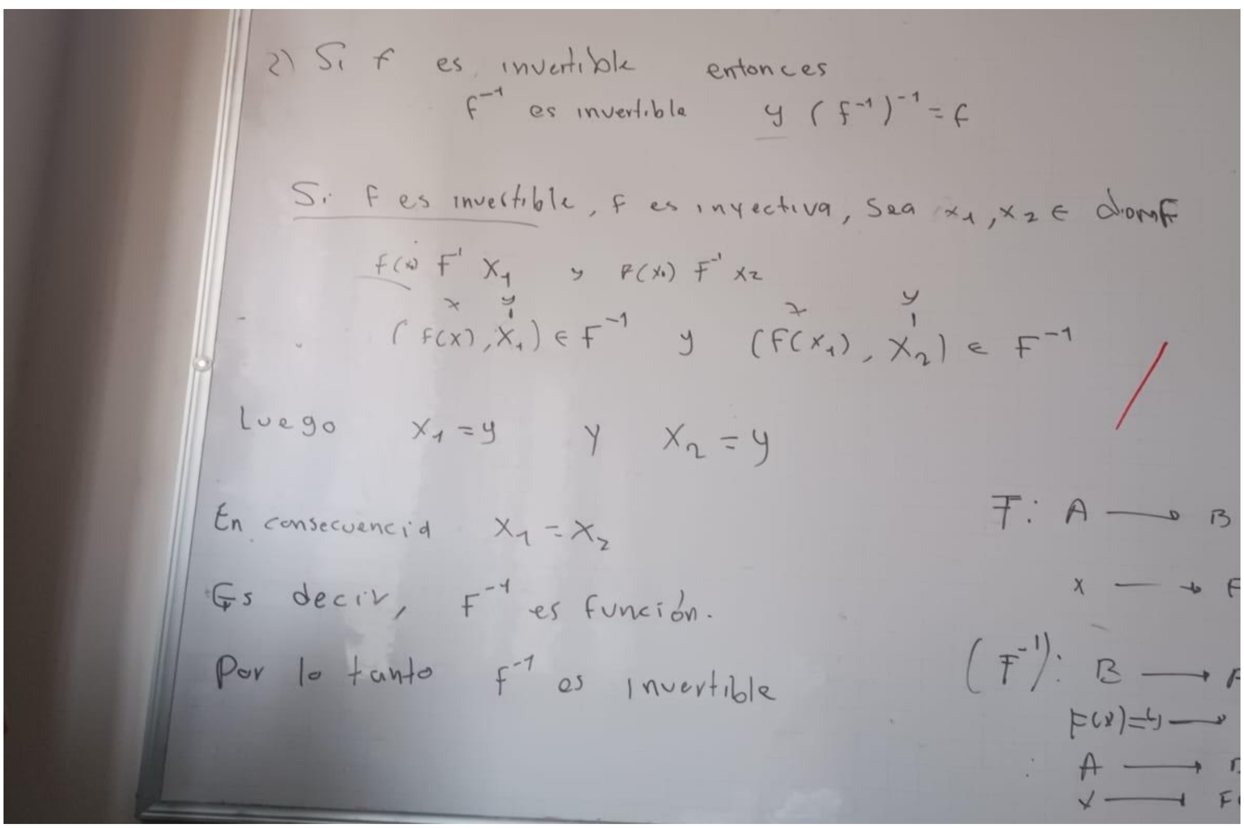


Ilustración 16

Para empezar a abarcar esta prueba, fue necesario hacer uso de los recursos teóricos con los que contaban los estudiantes, para posteriormente poder volver a leer el enunciado de la proposición y hacer una mejor interpretación.

Luego, un estudiante del curso empezó a hacer la prueba, en su desarrollo se dio cuenta que tenía algunas ideas confusas, cuando los demás estudiantes se percataron de dicha situación empezaron a guiarlo para que pudiera empezar a desarrollar la prueba. Fue gracias al trabajo cooperativo que se logró avanzar en la prueba.

Seguidamente, se quería probar la segunda condición en la proposición, fue aquí donde se encontró un inconveniente porque la idea que tenían los estudiantes para iniciar la prueba había surgido a raíz de la visualización de una gráfica de conjuntos, pero no era suficiente para dar por terminada la prueba, por eso, fue necesario volver a la definición de relación. Al realizar la revisión teórica surgió una idea que se relacionaba con la idea inicial, pero en términos de relaciones, lo cual dio lugar a la terminación de la prueba.

De la anterior situación se resalta como la lógica y la intuición juegan un papel importante en la actividad matemática, al momento de enfrentarse a una prueba. Por un lado, la lógica nos permite desglosar una idea en operaciones básicas y poderla plasmar e ir desarrollando la prueba. Por otro lado, se cuenta con la intuición, la cual es una facultad que permite ver de lejos a donde debemos llegar en una prueba, convirtiéndose en la facultad que permite optar por el camino más corto. Respecto a la lógica y la intuición Poincaré (1964) afirma que

"El análisis puro pone a nuestra disposición una multitud de procedimientos cuya infalibilidad garantiza; se abre a nosotros de mil maneras diferentes que podemos emprender con toda confianza; estamos seguros de

> *satisfacerlas sin que haya ningún obstáculo, pero, de todas estas formas, ¿cuál de ellas nos llevará más rápidamente a nuestra meta? ¿Quién nos dirá cuál elegir? Necesitamos una facultad que nos haga ver el final desde lejos, y la intuición es esta facultad. Es necesario explorar para la elección de la ruta; ello no es menos importante que la tarea de quien, tras su rastro, desea saber por qué tal ruta fue la elegida"* (Págs. 15-16).

Finalmente, se culminó la prueba y los estudiantes con esta última asesoría antes del primer parcial ya se sentían preparados, no obstante, llegaron algunos estudiantes nuevos, y las dudas que tenían eran respecto a definiciones y a pruebas que el docente había realizado en el aula, los estudiantes que siempre habían asistido a las asesorías fueron los encargados de explicar dichas pruebas, pues como era de esperar ya se habían leído, interpretado y entendido, lo cual les facilitó solventar las dudas que tenían sus compañeros, en el desarrollo de las asesorías, se verifico durante el desarrollo de las asesoría, que los estudiantes se habían convencido que una forma de saber que se había entendido un concepto y la forma de proceder ante una prueba era poder explicarle a otra persona el procedimiento.

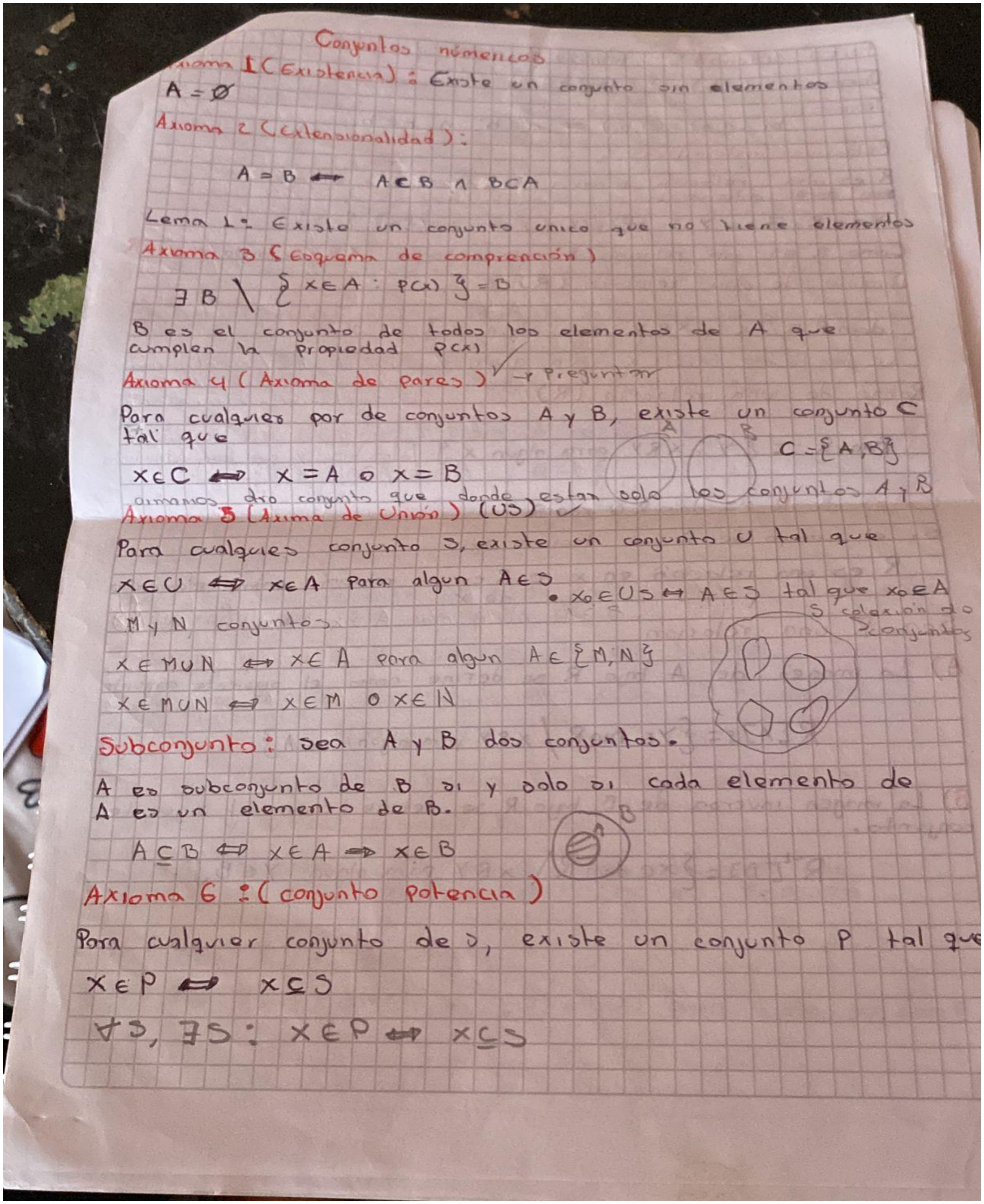
8.4 Resultados y análisis de la Guía # 3 Relaciones de equivalencia y orden

El objetivo de esta guía (ver anexo 4) está relacionado con identificar y proponer una solución a la mayoría de las diferentes problemáticas que los estudiantes se encuentren en el desarrollo de la teoría perteneciente a relaciones de equivalencia y orden, cabe resaltar que para logar lo anterior se hicieron pruebas de proposiciones donde se aplicará el método de solución de problemas propuesto por Allan Schoenfeld.

Al inicio de la guía se habló de los temas que se iban a abarcar como también de su influencia en la teoría de conjuntos, como es de esperar los y las estudiantes ya tenían en hojas de cuadernillo los temas centrales que se habían abarcado hasta el momento en las clases orientadas por parte del profesor a cargo del curso, lo cual nos ahorró tiempo.

Se puede ver como los estudiantes empiezan a volver hábito lo propuesto por Allan Schoenfeld en la parte de los recursos, pues el autor menciona que el profesor debe saber con qué recursos cuenta el estudiante; en este caso los recursos vendrían formando parte de todos los conceptos teóricos, algebraicos y herramientas lógicas con las que cuenta el estudiante para enfrentarse a la demostración de una proposición

Schoenfeld, también menciona que los estudiantes deben saber con qué recursos teóricos cuentan, es por ello que los mismos estudiantes empiezan usar la estrategia de sacar en hojas de cuadernillo los conceptos teóricos, como también algunas demostraciones realizadas en clase por el docente; lo anterior es para ellos mismos darse cuenta cómo es que al momento de ir construyendo una demostración la parte teórica nos es de gran ayuda para aclarar algunos pasos que en algunas ocasiones no son del todo claros o que es necesario volver a interpretar un concepto o teorema que se esté usando en el desarrollo de la prueba. A continuación, se adjunta una imagen con los apuntes tomados por los estudiantes.



Conjuntos numéricos

Axioma 1 (Existencia): Existe un conjunto sin elementos

$A = \varnothing$

Axioma 2 (Extensionalidad):

$A = B \leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

Lema 1: Existe un conjunto unico que no tiene elementos

Axioma 3 (Esquema de comprención)

$\exists B \setminus \{ x \in A : P(x) \} = B$

B es el conjunto de todos los elementos de A que cumplen la propiedad P(x)

Axioma 4 (Axioma de pares) → Preguntar

Para cualquier par de conjuntos A y B, existe un conjunto C tal que

$C = \{A, B\}$

$x \in C \Leftrightarrow x = A \text{ o } x = B$

armamos otro conjunto que donde estan solo los conjuntos A y B

Axioma 5 (Axima de Unión) (US)

Para cualquier conjunto S, existe un conjunto U tal que

$x \in U \Leftrightarrow x \in A$ para algun $A \in S$

• $x_0 \in US \Leftrightarrow A \in S$ tal que $x_0 \in A$

S colección de conjuntos

M y N conjuntos

$x \in M \cup N \Leftrightarrow x \in A$ para algun $A \in \{M, N\}$

$x \in M \cup N \Leftrightarrow x \in M$ o $x \in N$

Subconjunto: sea A y B dos conjuntos.

A es subconjunto de B si y solo si cada elemento de A es un elemento de B.

$A \subseteq B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B$

Axioma 6 : (conjunto potencia)

Para cualquier conjunto de S, existe un conjunto P tal que

$x \in P \Leftrightarrow x \subseteq S$

$\forall S, \exists S : x \in P \Leftrightarrow x \subseteq S$

Ilustración 17

Seguidamente se hizo una lectura de los temas centrales, que tenían los estudiantes en sus hojas, esto para verificar que habían copiado bien la definición, teoremas y demás elementos teóricos. La intención era saber cuáles eran los inconvenientes que presentaban los estudiantes con relación a sus interpretaciones de definición, teorema o lema, frente a eso encontramos que los estudiantes habían copiado mal la definición de clase de equivalencia, por eso fue necesario hacer la respectiva corrección.

A continuación, se adjunta la proposición a demostrar, el desarrollo de la demostración fue llevada a cabo en gran parte por los estudiantes, claro está que en numerosos momentos fue necesaria la intervención por parte del practicante y el acompañamiento dado antes, durante y después de empezar la demostración.

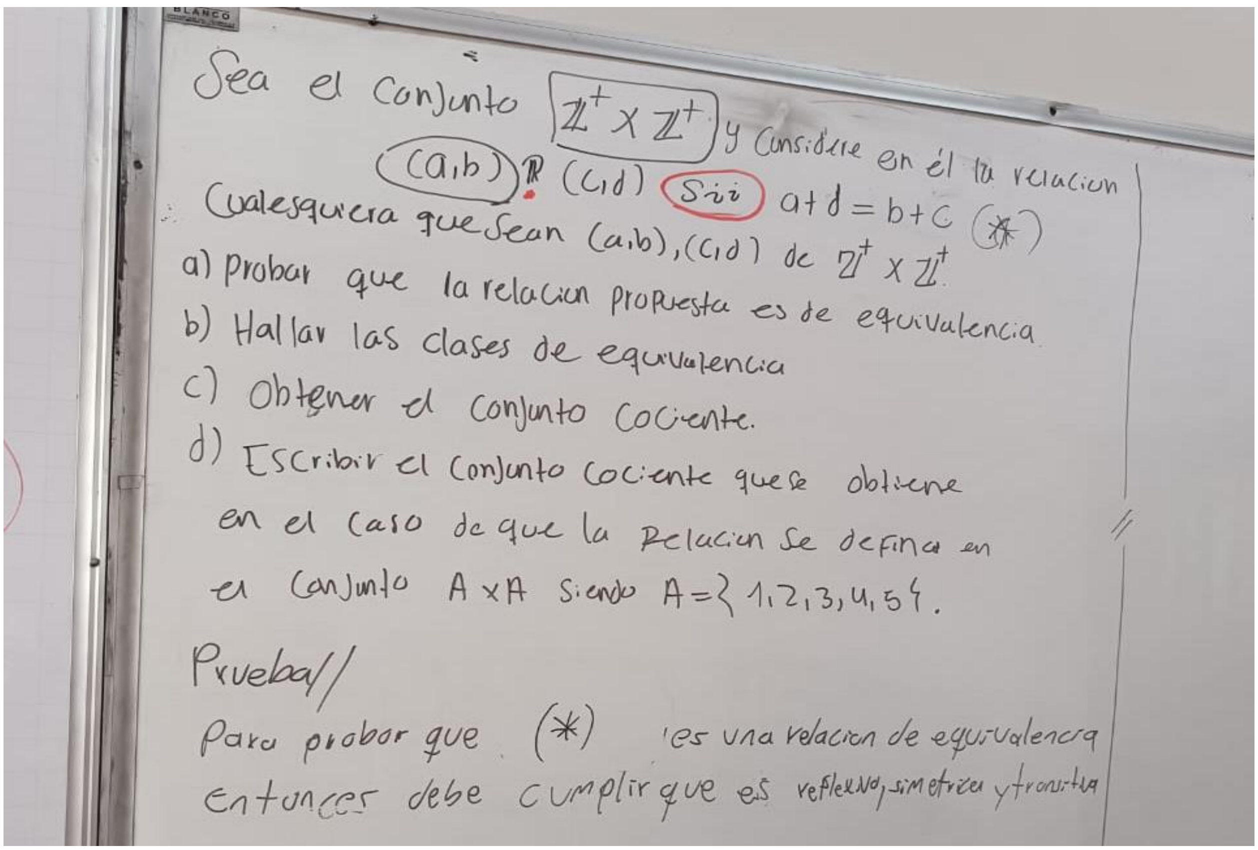


Ilustración 18

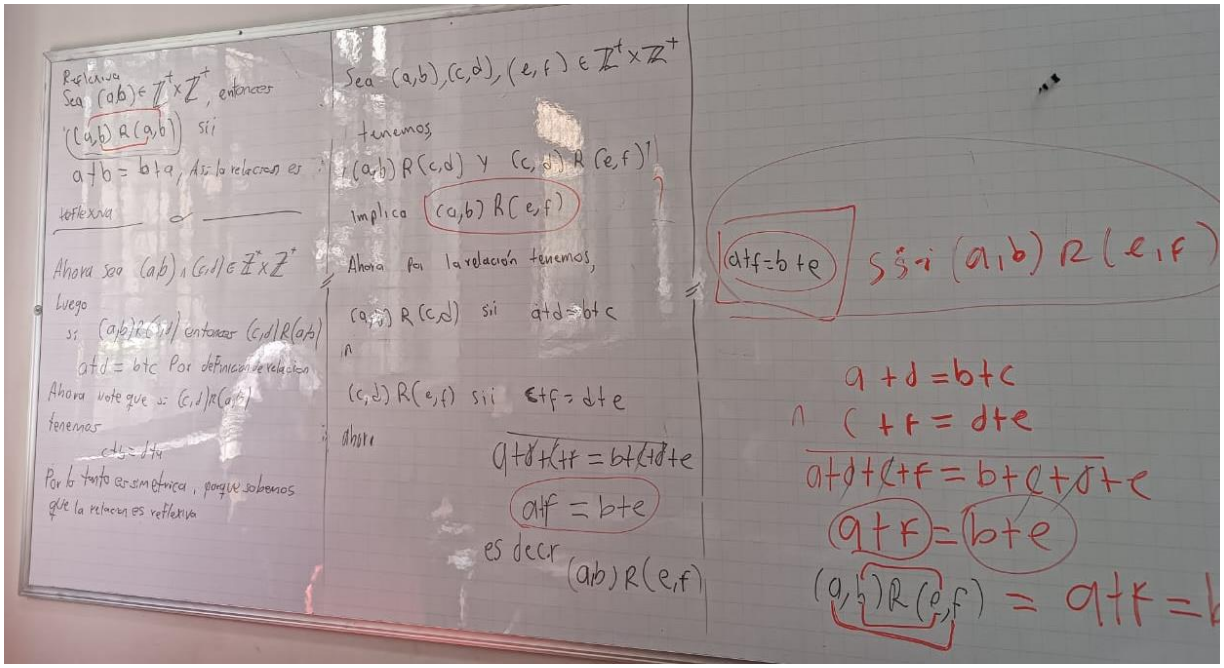


Ilustración 19

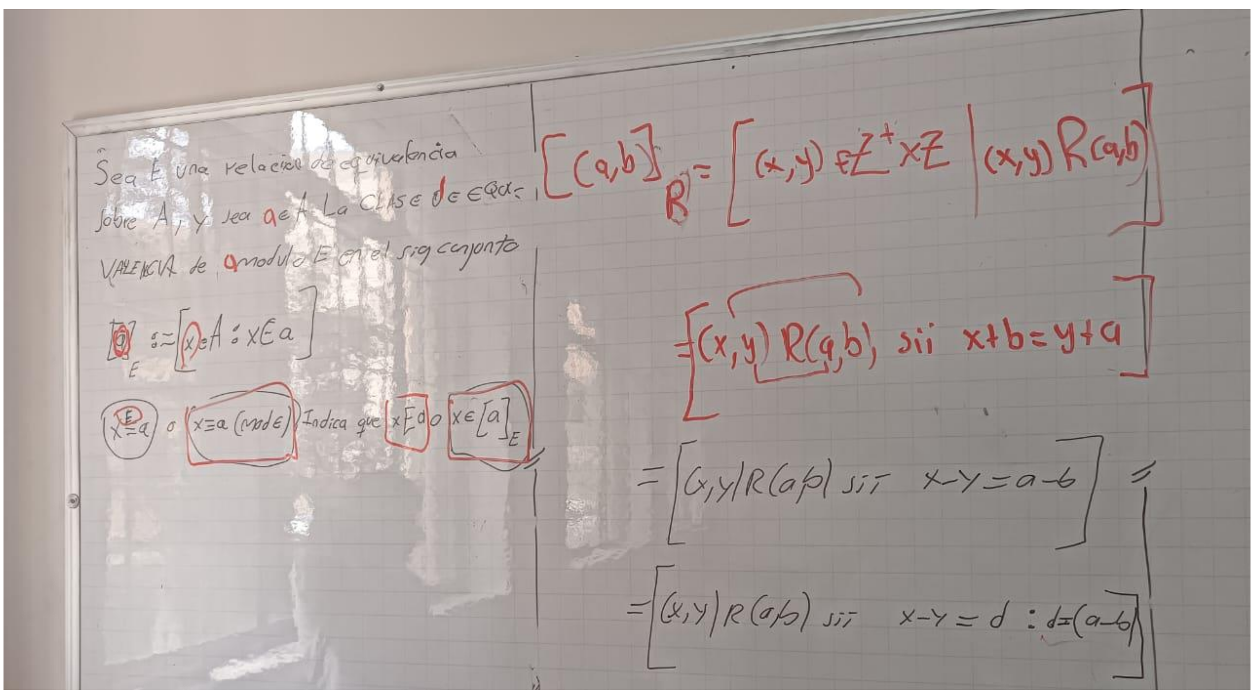


Ilustración 20

Los estudiantes presentan un dificultan cuando hay cambios de representación del elemento de un conjunto, esto sucedió cuando se empezó a probar que la relación dada era de equivalencia, pues se debe probar que la relación debe cumplir tres requisitos: debe ser reflexiva, simétrica y transitiva. Para probar cada uno de los requisitos es pertinente resaltar las siguientes definiciones:

Reflexividad

Una relación binaria R sobre un conjunto A se dice que es reflexiva, cuando cada elemento de A está relacionado consigo mismo.

Es decir,

R es reflexiva si y sólo si para todo a $(a \in A \Rightarrow a\ R\ a)$

Cuando los estudiantes empezaron a probar que la relación era reflexiva, no les era fácil ver que un elemento de la relación que se deseaba probar era una pareja ordenada (a, b) llevándolos a un estado de confusión, pues al ver la definición de reflexividad, iniciaron tomando como elemento del conjunto a $a\ R\ a$ o incluso como después de hacer una observación acerca del conjunto que se estaba considerando, intentaron trabajar con la pareja (a, a) lo cual era la misma consideración inicial y por tanto no servía para nuestra prueba, pues el elemento que debíamos tomar era de la forma $((a, b), (a, b))$.

Se identificaron dos causas de la anterior dificultad presentada por los estudiantes. La primera puede ser vista desde la falta de interpretar un concepto, es notable cómo los estudiantes no identifican como son los elementos del conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sobre el que se está trabajando y no le es fácil ver en qué términos quedan las definiciones si se cambia el conjunto donde se define dicha relación. Y la segunda viene dada por un problema con la notación que induce al estuante a un error por lo tanto el estudiante debió hacer la diferencia entre (a, a) puede ser un elemento de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ o que $a\ R\ a$.

Al momento de empezar a probar la simetría, ya no se presentó el mismo inconveniente con la escogencia de dos elementos del conjunto, pero se concluyó lo siguiente: “por lo tanto es simétrica, ya que la relación es reflexiva”

Fue necesario resaltar que la afirmación anterior no era a lo que se deseaba llegar, y que tampoco una relación reflexiva implicaría que fuera simétrica; podemos ver cómo las heurísticas planteadas por Allan Schoenfeld son realmente necesarias, dado que siempre entraremos en una fase de verificación, donde miraremos si llegamos mediante razonamientos lógicos a nuestra tesis, lo cual no se obtuvo en esta prueba de simetría

Un error cometido y que no fue resaltado por parte de quien elabora esta sistematización, fue que en el momento en que se sacan las clases de equivalencia, lo que se encuentra es un conjunto, donde sus elementos deben ir encerrados por corchetes, y en este caso no fueron usados corchetes.

Cabe resaltar que en esta demostración fue necesario hacer un análisis minucioso, al cual se le dedicaron dos sesiones para poder reflexionar y entender la demostración, el anterior análisis se hizo de esa manera porque pertenecía a un tema central del curso. Además, las proposiciones que se dejaban de tarea tenían la misma estructura, entonces para poder avanzar más rápido cuando nos enfrentarnos a otra proposición de este tipo, ya podíamos avanzar más rápido; para finalizar, en un espacio extra los y las estudiantes solicitaron una nueva explicación de esta prueba, donde satisfactoriamente los asistentes aclararon todas sus dudas y se sentían preparados para el segundo parcial del curso.

Proposición.

En el conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ se considera la relación

$$a\, \mathcal{R}\, b\ si, y\ sólo\ si\ a - b \text{ es múltiplo de 3}$$

Probar que la relación es de equivalencia, hallar las clases de equivalencia y el conjunto cociente

Gracias al esfuerzo y el interés por los estudiantes al querer entender bien la proposición trabajada en el inicio de la guía, la prueba de la proposición fue mucho más fácil de abarcar. El único inconveniente ocurrió cuando se hallaron las clases de equivalencia, dado que no habían tenido en cuenta el lema que determina que la unión de las clases de equivalencia es igual a el conjunto inicial, y que la intersección entre las clases de equivalencia es vacía, al reflexionar sobre el anterior lema se dieron cuenta que existían únicamente tres clases de equivalencia, descartando finalmente otras clases equivalencia pensadas.

A continuación, se adjunta una imagen del anterior caso:

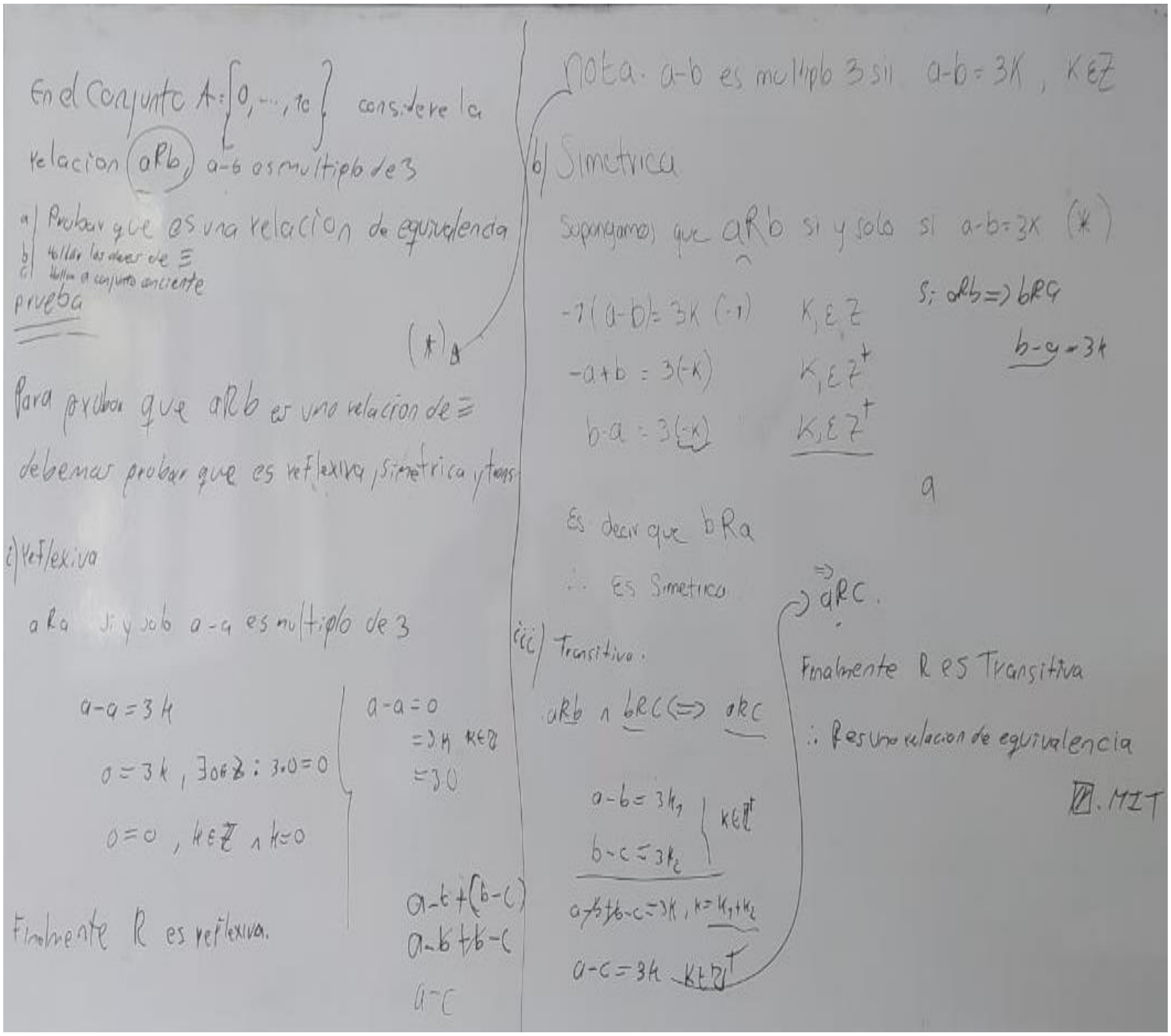


Ilustración 21

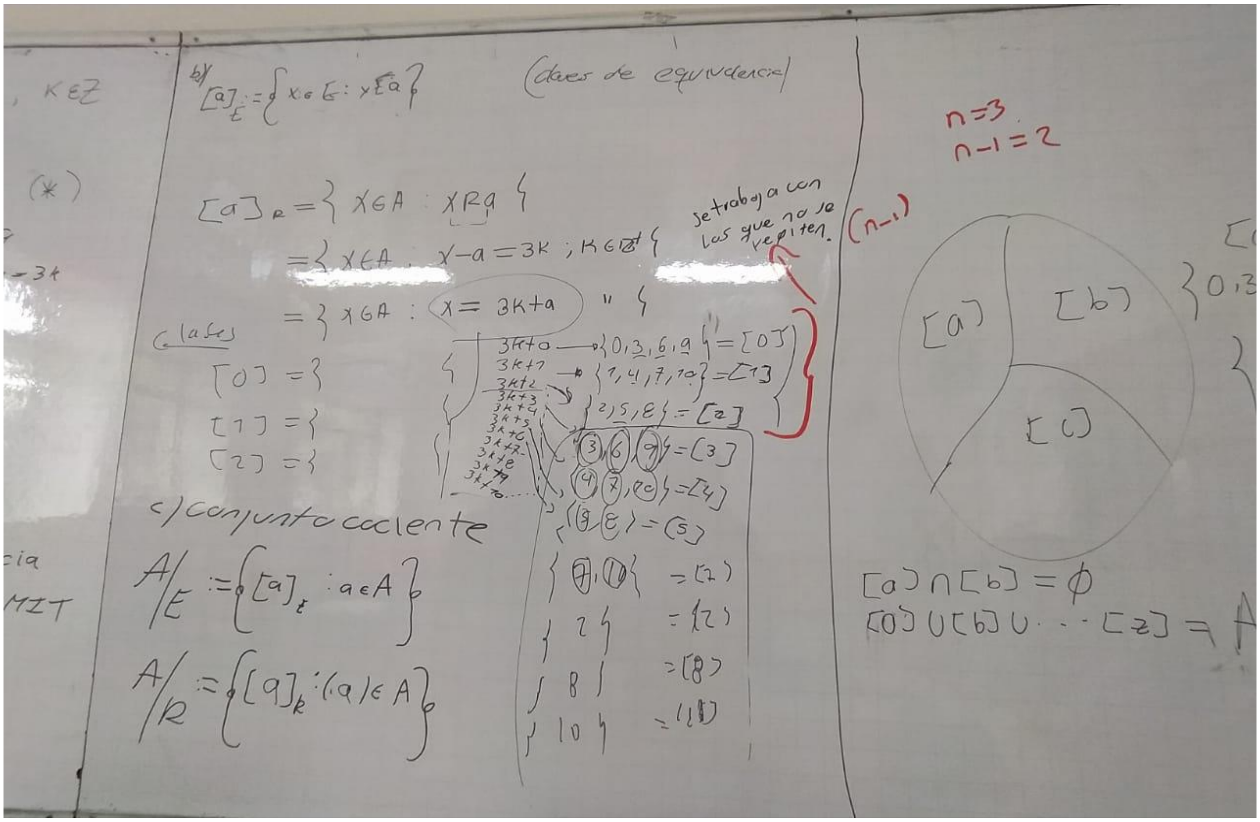


Ilustración 22

En esta tercera guía los estudiantes lograron superar la mayoría de inconvenientes que se les presentó en el momento de realizar la prueba, pues gracias a la implementación del método planteado por Allan Schoenfeld se logró superar la mayoría de obstáculos presentes, a su vez identificaron la importancia de que exista una relación de equivalencia en un conjunto, en tanto que al inicio de esta última guía lo estudiantes no sabían dar respuesta a los siguientes interrogantes: de dónde salían las clases de equivalencia, por qué se puede hacer el conjunto cociente y cómo se cumplían todas las propiedades pertenecientes a relaciones de equivalencia en un conjunto y sus implicaciones.

Conclusiones

1. Los resultados de esta sistematización ponen en evidencia que el método para la solución de problemas planteado por Allan Schoenfeld acompañado de secuencias didácticas contribuye de forma significativa a los futuros docentes que quieran cambiar el modelo tradicional de enseñanza y poner en el aula herramientas didácticas que tengan en cuenta la comunicación, la opinión y el proceso de enseñanza – aprendizaje con los y las estudiantes.
2. Con la implementación y desarrollo de las guías se pudo evidenciar un número de dificultades presentadas por los estudiantes al momento de enfrentarse a una prueba o incluso al momento de empezar a estudiar e intentar interpretar conceptos pertenecientes a la teoría de conjuntos. Cabe resaltar que muchas de las dificultades presentadas fueron solventadas con el método propuesto por Allan Schoenfeld y el constante acompañamiento por parte del practicante.
3. Es de gran importancia resaltar que la motivación juega un papel muy importante dentro del aula, dado que otorga al estudiante confianza en él mismo y a su vez genera una mejor comunicación con el docente; el cual puede hacer un mejor uso del método para la solución de problemas planteado por Allan Schoenfeld, haciendo que el estudiante pueda solventar dificultades en el desarrollo de una prueba y finalmente las pueda convertir en habilidades que le sean útiles al momento de enfrentarse a otra prueba.
4. En el trabajo de inmersión en el aula, se logró mejorar la forma de proceder ante la prueba de una proposición, gracias a que se tuvo en cuenta cada uno de los recursos propuestos en el método propuesto por Allan Schoenfeld para la solución de

problemas, lo cual llevó a los y las estudiantes a tener en cuenta algunos aspectos como: el contexto en el que se enuncia una proposición, dar importancia al enunciado, relacionar elementos teóricos involucrados con la proposición, estar dispuestos a cambiar el plan que se ha diseñado para llevar a cabo el desarrollo de la prueba. Lo antes mencionado, contribuye a que el estudiante tenga un mejor control al momento de llevar a cabo el desarrollo de una prueba.

5. Se recomienda a los y las estudiantes interesados en desarrollar su práctica docente en la Universidad del Cauca, tener en cuenta que el grado de dificultad es mayor, dado que los conceptos que se desarrollan durante la intervención requieren un tratamiento pedagógico y didáctico, que conserve el rigor y formalidad de las matemáticas. Además, se deben tener en cuenta que la población es diversa, lo que implica implementar estrategias didácticas para poder hacer del proceso de intervención, un espacio ameno y colaborativo. Finalmente, las experiencias que quedan al enfrentar a este tipo de población son enriquecedoras y motivadoras en el proceso de enseñanza.

Referencias

Balacheff, N. (2010). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Hal open Science

Barragán, R. & Gómez Moreno, W. (2011). *Las funciones de la imagen visual en el aula*. UIS Humanidades,

Hernánadez, Fernando.(2003). *Teoráa de conjutos, una introducción*.UNAM

Laguzzi, G., & Simón, J. (2018). Modos de organizar las clases: las secuencias didácticas Ministra de educación e innovación. *Secuencias Didacticas*, *2*, 1–20.Archivo digital. https://educrea.cl/wp-content/uploads/2019/12/modos_de_organizar_las_clases.pdf

Oicata Ojeda, L. A., & Castro Miguez, L. A. (2013). *Secuencias Didácticas en Matemáticas Educación Básica Primaria Matemáticas - Primaria*. http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-329722_archivo_pdf_matematicas_primaria.pdf

Penagos, M., Julio, R., Lamoneda, S., & Mariño, L. F. (2021). Caracterizando relaciones entre demostración en álgebra abstracta..

Rodríguez Reyes, V. M. (2014). La formación situada y los principios pedagógicos de la planificación: la secuencia didáctica. *Ra Ximhai*, *10*, 445–456.

Hernández, F. (2003). *Teoría de Cojuntos*

Hrbacek, K., & Jech, T. (1999). *ntroduction to set Theory*. Board.

Ojeda, L. A., & Miguez, L. A. (2013). *Secuencias Didácticas en matemáticas educación básica primaria.* Bogotá: labor .

Poincaré, H. (1964). En H. Poincaré, *El valor de la ciencia* (págs. 15-16). Espasa.

Universidad del Cauca. (2017).descripción del curso conjuntos numéricos http://facultades.unicauca.edu.co/educacion/sites/all/modules/custom/microcurriculos/micro/print.php?mid=MAT252

Villiers, M. (1993). El Papel y la funcion de la demostración en matemáticas. *Epsilon*, 30

Hernandez. (2003). *Teoría de conjuntos.*

Hrbacek, K., & Jech, T. (1999). *Introduction to set theory.* Board.

Ojeda, L. A., & Miguez, L. A. (2013). *Secuencias Didácticas en matemáticas educación básica primaria.* Bogotá: labor .

Poincaré, H. (1964). Espasa.

Universidad del Cauca. (2017). Obtenido de https://www.unicauca.edu.co/versionP/oferta-academica/programas-de-pregrado/licenciatura-en-matematicas#:~:text=El%20Programa%20de%20Licenciatura%20en%20Matem%C3%A1ticas%20tiene%20como%20misi%C3%B3n%20proporcionar,cultural%20en%20el%20que%20se

Villiers, M. (1993). El Papel y la funcion de la demostración en matemáticas. *Epsilon*, 30.

Anexo #1 Encuesta Introductoria

Licenciatura en Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Por: Alexis Santiago Martínez Silva

Universidad del Cauca

ANEXO # :ENCUESTA - CONCEPCIÓN DE LAS MATEMÁTICAS

"Las matemáticas no conocen razas o límites geográficos. Para las matemáticas, el mundo cultural es un país". – (David Hilbert)

Antes de empezar una aventura matemática, la cual requiere entusiasmo y esfuerzo para recoger frutos, me gustaría conocer algunos pensamientos u opiniones que ustedes tengan de las matemáticas, es por ello que se indagará respecto a algunos tópicos que puedan dar claridad y sentido al mundo de las matemáticas, para finalmente poder disfrutar de su belleza infinita.

¿Cuál fue la motivación para estudiar matemáticas?

¿Qué concepción tenían de las matemáticas antes de entrar a la carrera?

¿Qué concepción tienen ahora de las matemáticas?

¿Cómo las matemáticas son útiles para la vida cotidiana?

¿Creen que las matemáticas ayudan al mundo y a la comodidad del ser humano?

¿Es posible que las matemáticas se relacionen con otras áreas de estudio?

¿Cuál matemático de la historia los ha impactado?

Ahora intentemos dar respuesta a algunas preguntas acerca de la teoría de conjuntos

¿Qué estudia la teoría de conjuntos?

¿Qué ramas de la matemática has escuchado?

¿Cómo la teoría de conjuntos se relaciona con las demás ramas de la matemática?

¿Cuál es la base de la matemática moderna?

¿Cuál es el objetivo del curso conjuntos numéricos?

Ahora en grupos intentemos dar respuesta a las anteriores preguntas, intentando en lo posible llegar a un acuerdo.

Consulta: a continuación, se dejarán algunas consultas con la intención de ir dirigiéndonos al curso de interés

¿Qué estudia la teoría de conjuntos?

¿Quién fue Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor y cuáles fueron sus aportes a la teoría de conjuntos?

Anexo #2: GUÍA 1 - Teoría aximatica de conjuntos (Introducción)

Licenciatura en Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Por: Alexis Santiago Martínez Silva

Universidad
del Cauca

"Las matemáticas son la creación más bella y poderosa del espíritu humano."

Stefan Banach

Propósito de la guía (objetivo): recordar algunas propiedades, axiomas y definiciones vistas hasta ahora en clases, en ese mismo sentido poder leer y entender el enunciado de un problema donde se haga uso de la teoría axiomática de conjuntos, para finalmente poder mostrar las heurísticas que se utilizan en el desarrollo de una prueba.

Inicio

Iniciaremos la sesión haciendo una breve descripción y recolección de opiniones acerca de los temas vistos en clase, con el fin de afianzar la teoría axiomática de conjuntos ya vista, mediante videos, mesa redonda, gráficos o ejemplos. Cualquier idea será válida y tenida en cuenta para futuras demostraciones o reflexiones.

Algunos elementos de la teoría de conjuntos para tener en cuenta:

Axioma de existencia: Existe un conjunto que no tiene elementos.

Axioma de extensión: Si todo elemento de X es un elemento de Y, y todo elemento de Y es un elemento de X, entonces X = Y.

Axioma esquema de comprensión: Sea P(x) una propiedad de x. Para cualquier conjunto A hay un conjunto B tal que x ∈ B si, y sólo si x ∈ A y.$P(X)$

Definición. A es un subconjunto de B si cualquier elemento de A pertenece a B. En otras palabras, A es un subconjunto de B si, para todo x, x ∈ A implica que x ∈ B. Escribiremos A ⊆ B o B ⊇ A para denotar que A es subconjunto de B.

En el cierre de esta primera etapa se aclararán dudas acerca conceptos, definiciones, axiomas, y se darán ejemplos para poder afianzar o aclarar la noción o idea que de ello se tenga.

Actividad 1. construiremos un "conjunto" en el que será más difícil ponerse de acuerdo en un criterio que permita definir bien el conjunto.

Se cuenta que en un lejano poblado de un antiguo emirato había un barbero llamado As-Samet, ducho en afeitar cabezas y barbas, maestro en escamondar sanguijuelas. Un día el Emir, dándose cuenta de la escasez de barberos en el Emirato, dio órdenes de que todos los barberos del Emirato sólo afeitaran a aquellas personas que no pudieran hacerlo por sí mismas (todas las personas en este pueblo tienen que ser afeitadas, ya sea por el barbero o por ellas mismas). Un cierto día el barbero fue llamado a afeitar al Emir y le contó a éste su problema.

– En mi pueblo soy el único barbero. Si me afeito, entonces puedo afeitarme por mí mismo y, por lo tanto, no debería afeitarme el barbero de mi pueblo ¡que soy yo! Pero si no me afeito, lo debe hacer un barbero por mí ¡pero no hay allí más barbero que yo! El Emir pensó que tales razonamientos eran muy profundos.

Consideremos como $P(X)$ la propiedad “el habitante x del pueblo no se afeita a si mismo (y, por tanto, es afeitado por el barbero)”. Sea b el barbero. La cuestión es: ¿b tiene o no la propiedad?, es decir, ¿ $P(b)$se verifica o no? Si b tiene la propiedad, entonces b no se afeita a sí mismo y es afeitado por el barbero. Pero b es el barbero, así que se afeita a sí mismo. Esto significa que b no tiene la propiedad. Si b no tiene la propiedad, entonces b se afeita a sí mismo y, por lo tanto, no es afeitado por el barbero. Como b es el barbero, entonces b no se afeita a sí mismo, así que tiene la propiedad. En conclusión, no sabemos si b tiene o no la propiedad, pues la propiedad $P(b)$es cierta y falsa a la vez, es una paradoja, frecuentemente conocida como la paradoja del barbero (Hrbacek & Jech, 1999).

Actividad 2. Hagamos una lluvia de ideas para dar luz a una prueba de la siguiente proposición

Proposición: *Hay un Único conjunto que no tiene elementos*

Prueba: Asumamos que A y B no tiene elementos. Entonces todo elemento de A es un elemento de B (puesto que A no tiene elementos la proposición “$a \in A \Rightarrow a \in B$” es automáticamente cierta). Similarmente, todo elemento de B es un elemento de A. Por el Axioma de Extensión concluimos que A = B. ■

Desarrollo: a continuación, se presenta un ejercicio el cual será abarcado mediante el método de resolución de problemas planteado por Allan Schoenfeld y el trabajo cooperativo que realicen los estudiantes.

Pruebe que

$$A \subseteq B \text{ si y sólo si } A \cap B = A \text{ si y sólo si } A \cup B = B \text{ si y sólo si } A - B = \emptyset$$

Parada 1. Iniciaremos haciendo un breve recorrido de conceptos de los cuales se espera que el estudiante ya haya estudiado, es decir pondremos en juego todos los recursos como definiciones, teoremas, axiomas, … etc. que el estudiante posea para poder empezar a entender la proposición

Parada 2. Ahora tendremos en cuenta lo que denomina Schoenfeld Heurísticas, con las cuales se pretende que el estudiante pueda y sepa en donde usar cada una de ellas, es así como empezaríamos a hacer un análisis al problema, esto con el fin de ir interpretándolo cada vez mejor.

Seguidamente, pasamos a la fase de exploración, donde mediante la búsqueda de problemas ligeramente modificados, o que tengan algo en común, podamos tener una idea de cómo ir elaborando un plan para probar la proposición.

Una vez tenida una buena idea de cómo atacar la proposición, podemos ejecutar el plan que se tiene hasta el momento, una vez llevado a cabo el plan, podemos pasar a la fase final de verificación donde se pondrá a prueba la respuesta obtenida, es decir ver si resiste ensayos y examinar si cumple los criterios a nivel especifico y general.

Cabe resaltar que podemos hacer marchas hacia adelante o hacia atrás en las mencionadas fases ya que las pruebas por lo general no salen en un primer intento

Parada 3:

En el caso en que se tenga una idea y se halla empezado a ejecutar el plan para el desarrollo de la demostración, es necesario saber en qué momento el plan elaborado nos lleva o no por un buen camino, es por ello que se debe tener clara la teoría, pues si al aplicarla no conseguimos llegar a lo que se desea, se debe tomar el control de la situación y empezar a intentar de nuevo la demostración.

A continuación, se mostrará una prueba, de la cual podríamos hacer uso en algún momento

//Primero probemos que $A \subseteq B$ si, y sólo si $A\cap B = A$. Supongamos que $A \subseteq B$, note que $A \cap B \subseteq A$, está claro ya que $a \in A \cap B \Rightarrow a \in A$ y $a \in B \Rightarrow a \in A$.

Para probar que $A \subseteq A\cap B$ bajo el supuesto que $A \subseteq B$, note que

$[a\in A] \wedge [A\subseteq B] \Rightarrow [a\in A] \wedge [a \in B] \Rightarrow a \in A\cap B$ por lo tanto $A \subseteq B \Rightarrow A\cap B = A$.

Para ver que $A\cap B = A \Rightarrow A \subseteq B$, note que $A = A\cap B \Rightarrow A \subseteq A\cap B \Rightarrow [A\subseteq A] \wedge [A\subseteq B] \Rightarrow A\subseteq B$.

Para ver que $A\subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$ *miremos que* $B \subseteq A \cup B$ *se cumple. Por lo tanto, solo tenemos que mostrar que* $A \cup B \subseteq B$, *pero esto es cierto por que*

$[a \in A \cup B] \wedge [A\subseteq B] \Rightarrow [a\in A \vee a \in B] \wedge [a \in A \Rightarrow a \in B] \Rightarrow a \in B$

La dirección $A \cup B = B \Rightarrow A\subseteq B$ se mantiene porque $A \cup B = B \Rightarrow A \cup B \subseteq B \Rightarrow A \subseteq B$

$A \subseteq B \Rightarrow A- B = \emptyset$ se cumple por definición de diferencia de conjuntos $A - B: = \{x \in A \mid x \notin B\}$ por esta definición, si $A \subseteq B$ y $a\in A$, entonces $a \in B$, lo que contradice la condición $a \notin B$, por lo tanto

$A - B = \emptyset$ cuando $A \subseteq B$. Para probar $A - B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B$ neguemos el antecedente, supongamos que

$B \subsetneq A$, entonces existen $a \in A$ y $a \notin B$ ya que B es un subconjunto propio de A, lo que significa que

$A - B \neq \emptyset$ ■

Cierre: A continuación, se propondrán algunas proposiciones, donde en una próxima sección se puedan revisar algunas ideas de su prueba y en ese mismo sentido poder discutir algunas opiniones que surjan frente a las heurísticas usadas. Además, podremos discutir acerca de una de sus soluciones.

Pruebe que $A \subseteq B\cap C$ si y sólo si $A \subseteq B$ y $A \subseteq C$

Pruebe que $A\text{-}B = (A \cup B) - B = A - (A \cap B)$

Pruebe que $(B \cup C) \subseteq A$ si y sólo si $B \subseteq A$ Y $C \subseteq A$

Pruebe que $A \cap B = A - (A - B)$

Pruebe que $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

Pruebe que $A = B$ si y sólo si $A \,\Delta\, B = \emptyset$

Observaciones, al final de cada guía se harán un par de observaciones y críticas constructivas las cuales serán compartidas con los estudiantes, con el ánimo de que lo compartido sea tenido en cuenta para futuras demostraciones.

Anexo#3: Guía 2 - Relaciones y Funciones

Licenciatura en Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Por: Alexis Santiago Martínez Silva

Universidad del Cauca

"En matemáticas, el arte de proponer una pregunta debe tener mayor valor que resolverla."

Georg Cantor

Propósito de la guía (objetivo): esta guía tiene como objetivo hacer una distinción entre los conceptos relación y función, además hacer un recorrido teórico que permita a los y las estudiantes hacer una mejor interpretación de la teoría, cabe resaltar que para logar lo anterior se harán demostraciones de proposiciones donde se aplicará el método de solución de problemas propuesto por Allan Schoenfeld.

Inicio

Iniciaremos la sesión haciendo una breve descripción y recolección de opiniones acerca de los temas vistos en clase, con el fin de afianzar la teoría de relaciones y funciones, mediante videos, mesa redonda, gráficos o ejemplo. Además, se recordarán algunas demostraciones realizadas en la guía N°1, lo anterior para tener en cuenta algunas formas de proceder ante la prueba de una proposición, cabe resaltar que cualquier idea dentro del aula será válida y tenida en cuenta para futuras demostraciones o reflexiones en el aula.

A continuación, enunciaremos algunos elementos de la teoría de conjuntos previamente vista en clase, la cual será tenida en cuenta para realizar demostraciones

Relaciones

Empleando parejas ordenadas, intuitivamente podemos pensar que una relación (binaria) R es una proposición tal que, para cada par ordenado (a, b), uno puede determinar cuándo a está en relación R con b o cuándo no lo está. Parece factible que toda relación debe determinar de manera única al conjunto de aquellas parejas ordenadas en las cuales la primera coordenada mantiene esta relación con la segunda. Si conocemos la relación, conocemos el conjunto y, mejor aún, si conocemos el conjunto, conocemos la relación. En otras palabras, las relaciones pueden ser representadas como el conjunto de todos los pares ordenados de objetos mutuamente relacionados. Por ejemplo, el conjunto de todos los pares ordenados consistente de un número real y su raíz puede ser llamado la relación raíz cuadrada. Nótese aquí la importancia de considerar pares ordenados y no sólo pares no ordenados.

Quizá no sepamos lo que es una relación, pero sabemos lo que es un conjunto y las consideraciones precedentes establecen una estrecha conexión entre relaciones y conjuntos. El estudio preciso de las relaciones en la teoría de conjuntos saca provecho de esta conexión heurística; lo más fácil de hacer es definir una relación como el conjunto de parejas ordenadas que determina.

Definición: Se define el par ordenado de elementos de a y b como:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Si $a \neq b$ (a, b) tiene dos elementos, un conjunto unitario $\{a\}$ y un par no ordenado $\{a, b\}$. Encontramos la primera coordenada mirando el elemento de $\{a\}$ la segunda coordenada es entonces el otro elemento de $\{a, b\}$. Si $a = b$ entonces $\{a, a\} = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}\}$ tiene un único elemento, en cualquier caso parece obvio que ambas coordenadas pueden ser únicamente "leídas" del conjunto (a, b) precisemos esta afirmación en el siguiente teorema

Teorema

$$\{a, b\} = \{a', b'\}\ si\ y\ sólo\ si\ a = a'\ y\ b = b'$$

Definición

Un conjunto R es una relación binaria si todos sus elementos son pares ordenados si$(x, y) \in R$, escribimos xRy.

Definición

Sea R una relación binaria

a) El conjunto de todos los x que están en la relación R con algún y, se llama el dominio de R y se denota por $domR = \{x|\ existe\ y\ tal\ que\ \ xRy\}$, $domR$ es el conjunto de todas las primeras coordenadas de parejas ordenadas en R

b) El conjunto de tolos los y tal que para algún x en la relación R con y es llamado el $ranR$, denotado por $ranR = \{y|\ existe\ x\ tal\ que\ xRy\}$, $ranR$ es el conjunto de todos los segundas coordenadas de pares ordenados en R

c) El conjunto $domR\ \cup ranR$ es llamado el campo de R y es denotado por $fiel\ R$

d) Si $fiel\ R \subseteq X$, decimos que R es una relación en X o que Res una relación entre elementos de X

Definición

Sea R y S una relación binaria, la composición de R y S es la relación

$$R\ O\ S = \{(x, z)|\ existe\ y\ para\ el\ cual\ (x, y) \in\ R\ y\ (y, z) \in S\}$$

Definición

La relación de pertenecía en un conjunto A es definida como

$$\in_A = \{(a, b) \mid a \in A, \wedge\ b \in A \wedge\ a \in b\}$$

La relación de identidad del conjunto A es definida como

$$Id_A = \{(a, b) \mid a \in A, \wedge\ b \in A \wedge a = b\}$$

Definición

Sean A y B conjuntos, el conjunto de todos los pares ordenados cuya primera coordenada pertenece a A y cuya segunda coordenada pertenece a B se llama producto cartesiano de A y B, y se denota AXB en otras palabras

$$AXB = \{(a, b) \mid a \in A\ y\ b \in B\}$$

Definición

Una relación f es llamada función si $(a, b) \in f$ y $(a, c) \in f$ implica que $b = c$ para cualesquiera.a , $b\ y\ c$.

En otras palabras, una relación f es una función si y sólo si para todo $a \in domf$ existe exactamente un b tal que $(a, b) \in f$. Este único b es llamado valor de f en a y es ususalmente denotado por $f(a)$ si f es una función con $domf\ = A\ y\ ranf\ \subseteq B$ entonces

$$f\ = \{(a, f(a))\ tal\ que\ a \in A\ \}$$

Teorema

Sean $f\ y\ g$ funciones entonces $g\ o\ f$ es una función. $g\ o\ f$ está definida en $x$si y sólo si f está definida en x y g está definida en $f(x)$, es decir $domg\ o\ f\ = domf\ \cap f^{-1}(domg)$

Corolario

$$\text{Si } ranf \subseteq domg \ entonces \ domg \ o \ f = domf$$

Lo que se logró hacer con este reencuentro teórico fue impulsar a los y las estudiantes a entrarse en el mundo de las relaciones y funciones, las cuales son de suma importancia en el curso conjuntos numéricos. En el cierre de esta primera etapa se aclararán en la mayor parte dudas acerca de conceptos, definiciones, axiomas, y se darán ejemplos para poder afianzar o aclarar la noción o idea que de ello se tenga.

Ejemplo Sea $f = \left\{\left(x, \frac{1}{x^2}\right) : x \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}\right\}$. ¿$f$ es una función?. En efecto, si $(a, b) \in f$ y $(a, c) \in f$, entonces $b = \frac{1}{a^2}$ y $c = \frac{1}{a^2}$; así, $b = c$. La notación usual para esta función es $f(x) = \frac{1}{x^2}$. f es una función desde el conjunto de los números reales, pero no en el conjunto de los números reales pues $0 \notin domf$. Esta es una función en $A = \boldsymbol{R} \setminus \{0\} = dom\ f$ y hacia el conjunto de los números reales. Si $C = \{x \in \mathbf{R} : 0 \leq x \leq 1\}$, entonces

$f(C) = \{x \in \mathbf{R}: x \geq 1\}$ y $f^{-1}(C) = \{x \in \mathbf{R}: x \leq -1 \vee x \geq 1\}$. La composición f o f es la relación:

$$f \ o \ f = \{(x, z): \exists \text{ y para el cual } (x, y) \in f, (y, z) \in f\}$$

$$= \left\{(x, z): \exists \text{ y para el cual } x \neq 0, y = \frac{1}{x^2}, z = \frac{1}{y^2}\right\}$$

$$= \{(x, z): x \neq 0, z = x^4\};$$

así, $f \ o \ f(x) = x^4$. Note que $f \ o \ f$ es una función.

Desarrollo

a continuación, se presenta un ejercicio el cual será abarcado mediante el método de resolución de problemas planteado por Allan Schoenfeld y el trabajo cooperativo que realicen los estudiantes.

Actividad 1

En Esta actividad se pondrá en juego elementos teóricos pertenecientes al concepto relación, para posteriormente realizar pruebas y verificar si una relación es: reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva. En ese mismo sentido, se propuso probar las siguientes 5 proposiciones:

- $sea\ A = \{ 1, 2, 3, 4 \}\ y \quad R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (3,2), (4, 4)\}$ ¿Es reflexiva? Escribir la matriz de la relación.
- considere en el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$ las relaciones "menor o igual que" pruebe que la relación es reflexiva, antisimétrica y transitiva.
- Considera la relación "menor que" en el delos enteros $\mathbb{Z}$ pruebe que la relación es asimétrica y transitiva
- Ene l conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$ considere la relación R definida como

x R y si y sólo si (x + y) es par ó (impar)

Determine si la anterior relación cumple las siguientes propiedades: reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva

- Si $ranf \ \subseteq domg\ entonces\ domg\ o\ f\ = domf$

Para la demostración de estas tres proposiciones, procederemos considerando los 3 factores que como lo plantea Schoenfeld se deben tener en cuenta para la solución de un problema, es por ello que para hacer notorio cada factor se harán 3 paradas la cuales darán sentido a cada factor propuesto, los factores propuestos son: recursos, heurísticas y control

Parada 1. (recursos)

Iniciaremos haciendo un breve recorrido de conceptos de los cuales se espera que el estudiante ya haya por lo menos visto en clase, es decir pondremos en juego todos los recursos que el estudiante posea para poder empezar a entender la proposición y empezar a tener en cuenta la teoría inmersa en ella, es por ello que se tendrán en cuenta recursos como: definiciones, teoremas, axiomas, … etc.

Parada 2. (heurísticas)

Ahora tendremos en cuenta lo que denomina Schoenfeld Heurísticas, con las cuales se pretende que el estudiante pueda y sepa en donde usar cada una de ellas, es así como empezaríamos a ahondar en cada una de las cinco fases propuestas en las heurísticas planteadas por Schoenfeld

Fase1. (Análisis) Lo que se propone es hacer un análisis al problema, esto con el fin de ir interpretándolo cada vez mejor, es por ello que en esta primera fase se dedicaran unos minutos para entender la proposición y que en ese mismo sentido se puedan hacer preguntas referentes a las notaciones o conceptos involucrados en la proposición.

Fase 2. (Diseño) en esta fase lo que se quiere es controlar el proceso que se va a llevar a cabo para resolver el problema, por medio de la creación de un plan, sobre el modo en que se va a proceder y asegurarse que los cálculos que se van a desarrollar no se ejecuten de modo prematuro, en esta fase no se sugieren heurísticas específicas.

Fase 3. (exploración). Seguidamente, pasamos a la fase de exploración, donde proponen heurísticas como: la búsqueda de proposiciones ligeramente modificadas, buscar proposiciones que tengan algo en común con la proposición a demostrar, con la intención de lograr tener una idea de cómo ir elaborando un plan para demostrar la proposición

Fase 4. (Realización) Una vez tenida una buena idea de cómo atacar la proposición, podemos ejecutar el plan que se tiene hasta el momento, donde debemos asegurarnos de usar bien la hipótesis y llegar por medio de la argumentación a lo que se pide probar.

Fase 5 (verificación) ahora en la fase final de verificación es donde se pondrá a prueba la demostración construida, es decir ver si la demostración realizada resiste ensayos y examinar si cumple los criterios a nivel especifico y general.

Cabe resaltar que podemos hacer marchas hacia adelante o hacia atrás en las mencionadas fases ya que las pruebas por lo general no salen en un primer intento.

Parada 3 (Control

En el caso en que se tenga una idea y se halla empezado a ejecutar el plan para el desarrollo de la demostración, es necesario saber en qué momento el plan elaborado nos lleva o no por un buen camino, es por ello que se debe tener clara la teoría, pues si al aplicarla no conseguimos llegar a lo que se desea, se debe tomar el control de la situación y empezar a intentar de nuevo la demostración.

A continuación, se propondrá una forma de realizar la demostración de las siguientes proposiciones

- considere en el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$ las relaciones “menor o igual que” pruebe que la relación es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

- Considera la relación “menor que” en el delos enteros $\mathbb{Z}$ pruebe que la relación es asimétrica y transitiva

Prueba:

Sean a y b dos enteros cualesquiera. Entonces,

$$a \leq b \leftrightarrow b - a \ \geq 0$$

o lo que es igual

$$a \leq b \leftrightarrow b - a \ \in Z_0^+$$

Es decir,

$$a \leq b \leftrightarrow \exists\, k \ \in Z_0^+ \ : \ b - a \ = k$$

Veamos si esta relación cumple las condiciones exigidas.

Reflexividad. En efecto, sea a elegido arbitrariamente en el conjunto de los enteros. Entonces,

$$a = a \to a - a = 0; 0 \ \in Z_0^+ \ \to a \leq a$$

Antisimétría. Sean a y b dos enteros cualesquiera. Entonces,

$$\left.\begin{matrix} a \leq b \ \leftrightarrow \ \exists\, k_1 \ \in Z_0^+ \ : \ b - a \ = k_1 \\ y \\ b \leq a \ \leftrightarrow \ \exists\, k_2 \ \in Z_0^+ \ : \ a - b \ = k_2 \end{matrix}\right\} \ \to \ k_1 \ = -k_2\,, con\; k_1\, y\; k_1 \ en\; Z_0^+ \ \to \ k_1 \ = k_1 \ = 0$$

Por lo tanto,

$$b - a = 0 \; y \; a - b = 0$$

Es decir,

$$a = b$$

y, consecutivamente, la relación “menor o igual que” es antisimétrica.

Transitividad. En efecto, si a, b y c son tres números enteros cualesquiera. Entonces,

$$\left.\begin{array}{c} a \leq b \leftrightarrow \exists\, k_1 \in Z_0^+ : b - a = k_1 \\ y \\ b \leq c \leftrightarrow \exists\, k_2 \in Z_0^+ : c - a = k_2 \end{array}\right\} \rightarrow b - a + c - b = k_1 + k_2 \ con\ k_1\, y\, k_1\ en\ Z_0^+$$

$$\rightarrow c - a = k, k = k_1 + k_2 \in Z_0^+$$

$$\rightarrow a \leq c$$

Es decir, la relación es transitiva.

Por lo tanto, la relación “menor o igual que” es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Prueba:

Sean a y b dos enteros cualesquiera. Entonces,

$$a < b \leftrightarrow b - a > 0$$

o lo que es igual

$$a < b \leftrightarrow b - a \in z^+$$

Es decir,

$$a < b \leftrightarrow \exists\, k \in z^+ : b - a = k$$

Veamos si esta relación cumple las condiciones exigidas.

Asimetría. En efecto, si a y b son dos números enteros cualesquiera.

$$a < b \longleftrightarrow \exists\, k \in z^+ : b - a = k$$

$$\leftrightarrow \exists\, k \in z^+ :\ a - b = -k$$

$$\leftrightarrow a - b \notin z^+$$

$$\leftrightarrow a - b \neq k;\ \forall k \in z^+$$

$$\leftrightarrow b < a$$

Por lo tanto, la relación propuesta es asimétrica.

Transitividad. En efecto, si $a, b\ y\ c$ son tres números enteros cualesquiera. Entonces,

$$\left.\begin{array}{c} a < b \leftrightarrow \exists\, k_1 \in z^+ :\ b - a = k_1 \\ y \\ b < c \leftrightarrow \exists\, k_2 \in z^+ :\ c - a = k_2 \end{array}\right\} \rightarrow b - a + c - b = k_1 + k_2\ con\ k_1\ y\ k_1\ en\ z^+$$

$$\rightarrow c - a = k, k = k_1 + k_2 \in z^+$$

$$\rightarrow a < c$$

Es decir, la relación es transitiva

Por lo tanto, la relación "menor que" cumple las propiedades enunciadas.

Cierre: A continuación, se propondrán algunas proposiciones, donde en una próxima sección se puedan revisar algunas ideas de su prueba y en ese mismo sentido poder discutir algunas opiniones que surjan frente a las heurísticas usadas. Además, podremos discutir acerca de una de sus soluciones.

Proposición 1. Considere la siguiente relación $\boldsymbol{g} = \left\{ \left(x,\ \frac{1}{x} + x^2\right) tal\ que\ x \in \mathbb{R} - \{0\} \right\}$ pruebe si es o no función.

Proposición 2. Considere la siguiente relación $\boldsymbol{g} = \left\{ (x,\ 2^{X}) tal\ que\ x \in \mathbb{R} - \{0\} \right\}$ pruebe si es o no función.

Anexo #4: Guía 3 - Relaciones de equivalencia y Orden

Licenciatura en Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Por: Alexis Santiago Martínez Silva

Universidad del Cauca

"Las matemáticas consisten en probar lo más obvio de la manera menos obvia."

George Pólya

Propósito de la guía (objetivo): el objetivo de esta guía está relacionado con identificar y proponer una solución a la mayoría de las diferentes problemáticas que los estudiantes se encuentren en el desarrollo de la teoría pereciente a relaciones de equivalencia y orden, cabe resaltar que para logar lo anterior se harán demostraciones de proposiciones donde se aplicara el método de solución de problemas propuesto por Allan Schoenfeld.

Inicio

Iniciaremos la sesión haciendo una breve descripción y recolección de opiniones acerca de los temas vistos en clase, con el fin de afianzar la teoría perteneciente a relaciones de equivalencia y orden, mediante videos, mesa redonda, gráficos o ejemplos, además se recordaran algunas demostraciones realizadas en las guías anteriores, lo anterior para recordar algunas formas de proceder ante la demostración de una proposición, cabe resaltar que cualquier idea dentro del aula será válida y tenida en cuenta para futuras demostraciones o reflexiones en el aula.

A continuación, enunciaremos algunos elementos de la teoría de conjuntos previamente vista en clase, la cual será tenida en cuenta para realizar demostraciones.

Relaciones de equivalencia

En esta sección abordaremos dos importantes conceptos. Las nociones de relación de Equivalencia, de clases de equivalencia y orden, que fueron primeramente estudiadas en su plena generalidad por Frege

Definición

Sea R una relación en A.

(a) R es llamada *reflexiva* en A, si para todo $a \in A$, aRa

(b) Res llamada *simétrica* en A, si para todo $a, b \in A$, aRb implica bRa

(c) R es llamada *transitiva* en A, si para todo $a, b, c \in A$, aRb y bRc implica aRc.

Definición

Una relación R se llama de equivalencia en A, si es reflexiva simétrica y transitiva en A.

Generalmente una relación de equivalencia en A se denota por E, º, $\cong$,$\approx$, o $\sim$. Cuando dos elementos $a, b \in A$ satisfacen aEb se dice que a es E- equivalente a b o que a es equivalente a b módulo E. Observe que si E es una relación de equivalencia en A entonces el dominio de E es igual a A; en efecto, la reflexividad implica que para cualquier $a \in A$, $(a, a) \in E$, es decir, $a \in domE$. Por otro lado, como E es una relación en A, entonces $E \subseteq A \times A$, por lo que $domE \subseteq A$. Por lo tanto, $domE = A$.

Definición

Sea E una equivalencia en A y sea $a \in A$. La clase de equivalencia de a módulo E es el conjunto

$$[a] = \{x \in A : xEa\}.$$

Obsérvese que efectivamente lo que hemos llamado clase de equivalencia de a, es un conjunto. Por el peso de la tradición histórica llamamos clase a $[a]$, aquí el término *clase* es diferente al usado en la Convención 2.5. Es conveniente también notar que para todo $a \in A$, $[a] \neq \emptyset$, pues al menos $a \in [a]$.

Cuando se trabaja con varias relaciones en un mismo conjunto A, es preferible emplear la notación E_a para denotar la clase de equivalencia de a módulo E

Lema Sean E una equivalencia en A y a, $b \in A$.

(a) a es equivalente a b módulo E si y sólo si $[a] = [b]$.

(b) a no es equivalente a b módulo E si y sólo si $[a] \cap [b] = \emptyset$.

Demostración:

(a) Supóngase que aEb. Sea $x \in [a]$, entonces xEa. y aEb.. Por la transitividad de E, xEb., lo que significa $x \in [b]$. Similarmente $x \in [b]$ implica $x \in [a]$. Así, $[a] = [b]$.

(b) Supongamos que no ocurre aEb, y que existe $x \in [a] \cap [b]$. Entonces xEa y xEb, y en virtud de la reflexividad y transitividad de E, aEb.. Esto contradice el supuesto.

Por último, supongamos que $[a] \cap [b] = \emptyset$. Si ocurriera aEb., entonces $a \in [b]$. Pero $a \in [a]$, lo que contradice la relación $[a] \cap [b]= \emptyset$. ■

Definición

Una familia de conjuntos F no vacíos se llama *partición de A* si:

(a) Los conjuntos que forman F son ajenos dos a dos, es decir, C, $D \in F$ y $C \neq D$ implica

C ∩ D = Ø

(b) La unión de F es A, es decir, $A = \cup F$.

Definición

Sea E una relación de equivalencia en A. La familia de todas las clases de equivalencia módulo E es denotada por A/E y

$$A/E = \{[a]: a \in A\}.$$

Usualmente a A/E se le llama conjunto cociente de A por la relación E.

Orden parcial y total

Una relación de orden se dice que es total cunado los elementos del conjunto sobre el que está definida son comparables por dicha relación. En caso contrario, es decir, si existen elementos no comparables, diremos que la relación definida es de orden parcial. Así pues, dada la relación de orden $\preccurlyeq$, diremos

$$\preccurlyeq \text{ es de orden total} \leftrightarrow \forall\, a, b \in A\ (a \preccurlyeq b \vee b \preccurlyeq a$$

$$\preccurlyeq \text{ es de orden parcial} \leftrightarrow \exists\, a, b \in A: (a \not\preccurlyeq b \wedge b \not\preccurlyeq a$$

Lo que se logró hacer con este reencuentro teórico fue impulsar a los y las estudiantes a entrarse en el mundo de las relaciones y funciones, las cuales son de suma importancia en el curso conjuntos numéricos. En el cierre de esta primera etapa se aclararán en la mayor parte dudas acerca de conceptos, definiciones, axiomas, y se darán ejemplos para poder afianzar o aclarar la noción o idea que de ello se tenga.

Desarrollo

a continuación, se presenta un ejercicio el cual será abarcado mediante el método de resolución de problemas planteado por Allan Schoenfeld y el trabajo cooperativo que realicen los estudiantes.

Actividad 1

En Esta actividad se pondrá en juego elementos teóricos pertenecientes a relación de equivalencia y orden, para posteriormente realizar pruebas y verificar si una relación es: reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva. En ese mismo sentido, se propuso probar las siguientes 4 proposiciones:

Proposición.

Sea $A = \{1, 2, 3, 4,\}$ y $\mathcal{R} = \{(1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (2,2),\ (3,4),\ (4,3),\ (3,3),\ (4,4)\}$
Ver si $\mathcal{R}$ es de equivalencia.

Proposición.

Determine el conjunto cociente $A/\mathcal{R}$ siendo $\mathcal{R}$ la relación de la proposición anterior

Proposición.

Sea el conjunto $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ y considere en él la relación

$$(a, b)\mathcal{R}(\mathrm{c}, \mathrm{d}) \leftrightarrow a + d = b + c$$

Cualesquiera que sean (a, b) y (c, d) de $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$

(a) Probar que la relación propuesta es de equivalencia.

(b) Hallar las clases de equivalencia.

(c) Obtener el conjunto cociente.

(d) Escribir el conjunto cociente que se obtiene en el caso de que la relación se defina en el conjunto $A \times\ A\ siendo\ A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Proposición.

En el conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ se considera la relación

$$a\ \mathcal{R}\ b\ si, y\ sólo\ si\ a - b\ \text{ es múltiplo de 3}$$

Probar que es de equivalencia, hallar las clases de equivalencia y el conjunto cociente

Proposición.

Sobre el conjunto $\mathbb{Z}^+ \times\ \mathbb{Z}^+$ se define la relación,

$$(a, b)\mathcal{R}(\mathrm{c}, \mathrm{d}) \leftrightarrow ab = bc$$

(a) Probar que la relación propuesta es de equivalencia.

(b) Hallar las clases de equivalencia.

(c) Obtener el conjunto cociente.

Proposición.

Probar que la relación de orden "menor o igual" definida en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros es total.

Para la demostración de las anteriores proposiciones, procederemos considerando los 3 factores que como lo plantea Schoenfeld se deben tener en cuenta para la solución de un problema, es por ello que para hacer notorio cada factor se harán 3 paradas la cuales darán sentido a cada factor propuesto, los factores propuestos son: recursos, heurísticas y control

Parada 1. (recursos)

Iniciaremos haciendo un breve recorrido de conceptos de los cuales se espera que el estudiante ya haya por lo menos visto en clase, es decir pondremos en juego todos los recursos que el estudiante posea para poder empezar a entender la proposición y empezar a tener en cuenta la teoría inmersa en ella, es por ello que se tendrán en cuenta recursos como: definiciones, teoremas, axiomas, … etc.

Parada 2. (heurísticas)

Ahora tendremos en cuenta lo que denomina Schoenfeld Heurísticas, con las cuales se pretende que el estudiante pueda y sepa en donde usar cada una de ellas, es así como empezaríamos a ahondar en cada una de las cinco fases propuestas en las heurísticas planteadas por Schoenfeld

Fase 1. (Análisis) Lo que se propone es hacer un análisis al problema, esto con el fin de ir interpretándolo cada vez mejor, es por ello que en esta primera fase se dedicaran unos minutos para entender la proposición y que en ese mismo sentido se puedan hacer preguntas referentes a las notaciones o conceptos involucrados en la proposición.

Fase 2. (Diseño) en esta fase lo que se quiere es controlar el proceso que se va a llevar a cabo para resolver el problema, por medio de la creación de un plan, sobre el modo en que se va a proceder y asegurarse que los cálculos que se van a desarrollar no se ejecuten de modo prematuro, en esta fase no se sugieren heurísticas específicas.

Fase 3. (exploración). Seguidamente, pasamos a la fase de exploración, donde mediante la búsqueda de proposiciones ligeramente modificados, o que tengan algo en común, con la proposición a demostrar, se logre tener una idea de cómo ir elaborando un plan para demostrar la proposición.

Fase 4. (Realización) Una vez tenida una buena idea de cómo atacar la proposición, podemos ejecutar el plan que se tiene hasta el momento, una vez llevado a cabo el plan,

Fase 5 (verificación) ahora en la fase final de verificación es donde se pondrá a prueba la demostración construida, es decir ver si la demostración realizada resiste ensayos y examinar si cumple los criterios a nivel especifico y general.

Cabe resaltar que podemos hacer marchas hacia adelante o hacia atrás en las mencionadas fases ya que las pruebas por lo general no salen en un primer intento.

Parada 3 (Control):

En el caso en que se tenga una idea y se halla empezado a ejecutar el plan para el desarrollo de la demostración, es necesario saber en qué momento el plan elaborado nos lleva o no por un buen camino, es por ello que se debe tener clara la teoría, pues si al aplicarla no conseguimos llegar a lo que se desea, se debe tomar el control de la situación y empezar a intentar de nuevo la demostración.

A continuación, se propondrá una forma de realizar la demostración de la siguiente proposición

Proposición.

Probar que la relación de orden "menor o igual" definida en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros es total.

Prueba:

En efecto, sean $a\ y\ b$ dos enteros cualesquiera, veamos que$a \leq b\ o\ b \leq a$, es decir todo los números enteros son comparables por la relación.

Como $a\ y\ b$ están arbitrariamente elegidos, puede ocurrir que sean iguales o distintos. Pues bien

$$a = b \ \vee \ a \neq \mathrm{b} \leftrightarrow \mathrm{a} = \mathrm{b} \ \vee \ b - a \neq 0$$

$$\leftrightarrow \mathrm{a} = \mathrm{b} \ \vee \ b - a \in z^{+} - \{0\}$$

$$\leftrightarrow \mathrm{a} = \mathrm{b} \ \vee \ b - a \in z^{-} \cup z^{+}$$

$$\leftrightarrow \mathrm{a} = \mathrm{b} \ \vee \begin{cases} \exists k \in z^{-} : b - a = k \\ \vee \\ \exists k \in z^{+} : b - a = k \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \mathrm{a} = \mathrm{b} \ \vee \begin{cases} a - b = -k, con - k \in z^{+} \\ \vee \\ b - a = k, con\ k \in z^{+} \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \mathrm{a} = \mathrm{b} \ \vee \begin{cases} b < a \\ \vee \\ a < b \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{a} = \mathrm{b} \ \vee b < a \\ \vee \\ \mathrm{a} = \mathrm{b} \ \vee a < b \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \mathrm{a} = \mathrm{b} \ \vee \begin{cases} b \leq a \\ \vee \\ a \leq b \end{cases}$$

Por lo tanto, la relación de orden “menor o igual” definida en el conjunto de los números enteros es total. **Cierre:** A continuación, se propondrán algunas proposiciones, donde en una próxima sección se puedan revisar algunas ideas de su prueba y en ese mismo sentido poder discutir algunas opiniones que surjan frente a las heurísticas usadas. Además, podremos discutir acerca de una de sus soluciones.