Ecuaciones Parabólicas Degeneradas Semilineales: Aplicación a la Dinámica de un Fluido en un Medio Poroso

Miguel Angel Pinzón Candil

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Matemáticas
Popayán, Cauca

2023

Ecuaciones Parabólicas Degeneradas Semilineales: Aplicación a la Dinámica de un Fluido en un Medio Poroso

Miguel Angel Pinzón Candil

trabajo de grado
Presentado como requisito parcial para optar al título Matemático

Director:
Dr. Christian Camilo Gómez Mosquera

Asesor:
Dr. Ramiro Miguel Acevedo Martínez

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Matemáticas
Popayán, Cauca

2023

Notas de aceptación

Director: **Dr. Christian Camilo Gómez**

Jurado: **Dr. Ricardo Córdoba Gómez**

Jurado: **Dr. Carlos Andrés Arias Torres**

Fecha de sustentación: 16 de junio de 2023

Índice

Introducción

El modelamiento de fenómenos físicos y matemáticos en diversos campos, como la física, la ingeniería, la economía y la biología, se lleva acabo a través del planteamiento de distintos tipos de ecuaciones las cuales pueden ser ordinarias o parciales. La solución de estas ecuaciones es esencial para entender y predecir el comportamiento del sistema que se está modelando. En algunos casos, es posible garantizar la existencia y unicidad de la solución, lo que significa que hay una única solución posible para un conjunto dado de condiciones iniciales y parámetros. En otros casos, la solución puede no existir o pueden haber múltiples soluciones.

El enfoque principal de este trabajo es el estudio de las ecuaciones parabólicas semilineales las cuales corresponden a un tipo específico de ecuaciones diferenciales parciales. Para llevar acabo el estudio de estas ecuaciones es indispensable el uso de elementos de análisis matemático, análisis funcional y teoría de ecuaciones diferenciales parciales. Con esta motivación el documento se centra en el estudio de la teoría de ecuaciones parabólicas semilineales desarrollada por **R.E. Showalter** (ver [24] y [23]), la cual está enmarcada de forma abstracta dentro del ambiente de operadores multivaluados en espacios seminormados. No obstante, también estudiaremos tópicos de ecuaciones diferenciales parciales estacionarias enmarcada en la teoría de **Lax-Milgram** (Primales) y teoría de **Babuška–Brezzi** (Mixtos).

El objetivo de este trabajo es describir los resultados obtenidos para las ecuaciones parabólicas semilineales, describiendo cada concepto involucrado en dichas ecuaciones. Así, estudiamos las propiedades de un operador *acretivo* y *m-acretivo* para familiarizarnos con los condiciones necesarias y suficientes para que una ecuación selimineal tenga solución y dependa continuamente de los datos.

También, presentamos la teoría abstracta estudiada para problemas parabólicos degenerados mixtos [3]. Los autores **R. Acevedo, C. Gómez** y **B. López-Rodríguez** han demostrado existencia y unicidad de solución combinando las ecuaciones degeneradas y los problemas mixtos. La idea del documento es demostrar la existencia de solución de los problemas parabólicos degenerados mixtos usando la teoría de problemas semilineales. Para ello, se reescribe el problema evolutivo mixto y se contrastan las hipótesis abstractas del uno y el otro para garantizar solución. De esta manera, el problema presentado en [3] es un caso particular de ecuaciones semilineales.

Por último, se estudiará un problema de dinámica de fluidos que modela el movimiento de un fluido incompresible y su interacción entre dos medios. Más precisamente, el problema a estudiar es el llamado problema de **Darcy-Stokes**, también conocido como el problema de flujo de **Stokes** en medios porosos, y se refiere al flujo de un fluido viscoso incompresible a través de un medio poroso. Para el buen planteamiento del problema, se imponen ciertas condiciones de interfaz que permitan garantizar el buen planteamiento del problema mediante la teoría de las ecuaciones parabólicas degeneradas semilineales.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentarán los conceptos básicos del análisis funcional necesarios para el desarrollo de este trabajo. Además, se introducirá el concepto de problemas mixtos estacionarios, junto con algunos resultados importantes de dicha temática. Finalmente, se presentarán los problemas evolutivos, ecuaciones parabólicas y parabólicas degeneradas mixtas.

Los conceptos y demostraciones presentados en este capítulo se pueden encontrar en los textos [32], [28], [24] y [23].

1.1 Espacios normados

Definición 1.1. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una norma en X es una función $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades válidas para todo $x, y \in X$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) $\|x\| \geq 0$,

2) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0_X$,

3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$,

4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Si $\|\cdot\|$ es una norma en X, decimos que $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado o simplemente espacio normado.

Proposición 1.1. *Sea X un espacio vectorial y $\|\cdot\|$ una norma en X. Entonces la función $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida de la siguiente manera es una métrica en X:*

$$d(x, y) := \|x - y\| \,, \quad \forall x, y \in X.$$

Definición 1.2. Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se dice espacio de Banach si es completo bajo la métrica asociada a la norma.

Teorema 1.1. *Cualquier espacio normado de dimensión finita es un espacio de Banach.*

Definición 1.3. Sea X un espacio vectorial real. Un producto interior en X es una función $(\cdot, \cdot) : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $x, y, z \in X$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

(a) $(x, x) \geq 0$.

(b) $(x, x) = 0$ si y sólo si $x = 0$.

(c) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha (x, z) + \beta (y, z)$.

(d) $(x, y) = (y, x)$.

Definición 1.4. Un espacio vectorial X con un producto interior $(\cdot, \cdot)$ es llamado espacio con producto interior.

Lema 1.1. *Sea X un espacio con producto interior y sean $x, y \in X$. Entonces:*

(a) $|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)\,, \quad \forall x,\ y \in X,$

(b) La función $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\|x\| = (x, x)^{1/2}$, es una norma en X.

Definición 1.5. Un espacio con producto interior el cual es completo con respecto a la métrica asociada a la norma inducida por el producto interior es llamado espacio de Hilbert.

Definición 1.6. Sea X un espacio con producto interior y A un subconjunto de X. El complemento ortogonal de A es el conjunto

$$A^{\perp} := \{x \in X : (x, a) = 0,\ \forall a \in A\}.$$

Así, el conjunto $A^{\perp}$ consiste de los vectores de X los cuales son ortogonales a todos los vectores de A.

Lema 1.2. *Sea Y un subespacio lineal de un espacio con producto interior X. Entonces*

$$x \in Y^{\perp} \Longleftrightarrow \|x - y\| \geq \|x\|\,, \quad \forall y \in Y.$$

Teorema 1.2. *Sea Y un subespacio lineal cerrado de un espacio de Hilbert H. Etonces, para todo $x \in H$ existe un único $y \in Y$ y $z \in Y^{\perp}$ tal que $x = y + z$ y también $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$.*

Corolario 1.1. *Para cualquier subespacio lineal Y de un espacio de Hilbert H se cumple $Y^{\perp\perp} = \overline{Y}$.*

Definición 1.7. Una seminorma en el espacio vectorial X definido sobre $\mathbb{R}$, es una función $p : X \to \mathbb{R}$ para la cual $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ y $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $x, y \in X$. El par (X, p) se llama un espacio seminormado.

1.2 Operadores y funcionales

Definición 1.8. Un operador es una función $T : X \longrightarrow Y$ donde X, Y son espacios vectoriales. Además, decimos que T es un operador lineal si para todo $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y).$$

Definición 1.9. Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador. Entonces se define el dominio, imagen y kernel (núcleo) de T respectivamente por

$$\begin{aligned} D(T) &:= \{x \in X : T(x) \in Y\} \\ Im(T) &:= \{T(x) \in Y : x \in X\} \\ Ker(T) &:= \{x \in D(T) : T(x) = 0\}. \end{aligned}$$

Definición 1.10. Sean $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal. Se dice que T es acotado si existe $M > 0$ tal que

$$\|T(x)\|_Y \leq M \|x\|_X, \qquad \forall x \in X.$$

Además, si $T : X \longrightarrow Y$ es un operador acotado se define la norma de T, denotada por $\|T\|$ como

$$\|T\| := \sup \left\{ \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} : x \in X,\ x \neq 0_X \right\} = \sup \{\|T(x)\|_Y : x \in X,\ \|x\|_X = 1\}.$$

Observación 1.1. *Nótese que si $T : X \longrightarrow Y$ es un operador acotado, se cumple que*

$$\frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} \leq \|T\| \qquad \forall x \in X \setminus \{0_X\},$$

y en consecuencia,

$$\|T(x)\|_Y \leq \|T\| \, \|x\|_X \qquad , \forall x \in X.$$

El conjunto de todos los operadores lineales y acotados que van desde X a Y es un espacio normado y se denota por $\mathcal{B}(X, Y)$.

Lema 1.3. *Sean X, Y espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) T es uniformemente continua,

(b) T es continua,

(c) T es continua en 0,

(d) Existe un número real positivo k tal que $\|T(x)\| \leq k$ siempre que $x \in X$ y $\|x\| \leq 1$,

(e) Existe un número real positivo k tal que $\|T(x)\| \leq k \|x\|$ para todo $x \in X$.

Teorema 1.3. *Sea X un espacio normado de dimensión finita. Para cualquier espacio normado Y, el operador lineal $T : X \longrightarrow Y$ es continuo.*

Lema 1.4. *Si X y Y son espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ es un operador lineal continuo, entonces $Ker(T)$ es cerrado.*

Definición 1.11. Un funcional es una operador $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$, donde X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Definición 1.12. Sea X un espacio vectorial. Definimos el dual algebraico de X, denotado por X^* como

$$X^* := \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ es lineal}\}.$$

Definición 1.13. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Definimos el espacio dual topológico de X (ó simplemente llamado dual de X), denotado por X' como

$$X' := \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ es lineal y acotado }\}.$$

Además,

$$\|f\|_{X'} := \sup \left\{ \frac{|f(x)|}{\|x\|_X} : x \in X,\ x \neq 0_X \right\} = \sup \{|f(x)| : x \in X,\ \|x\|_X = 1\}$$

es una norma en X'.

Teorema 1.4. *Sea H un espacio de Hilbert y $f \in H'$. Entonces existe un único elemento $x \in H$ tal que*

$$f(u) = (x, u)_H, \quad \forall u \in H. \tag{1.1}$$

Demostración. Ver, por ejemplo, [23, Capítulo I, Corolario 2.3].

En lugar de $f(u)$ usaremos la notación $\langle f, u \rangle$ la cual denota el producto de dualidad.

Observación 1.2. *El elemento $x \in H$ que satisface* (1.1) *se denomina representante de Riesz de f y se denota por $\mathcal{R}(f)$. La aplicación $\mathcal{R}$ es llamada isomorfismo de Riesz.*

Definición 1.14. Sean X, Y espacios vectoriales normados tales que $X \subseteq Y$. Se define el operador de inclusión de X en Y, como el operador lineal $i : X \to Y$ dado por

$$i(x) = x, \quad \forall x \in X.$$

Decimos que la inclusión $X \subseteq Y$ es continua si el operador i es continuo, es decir si existe $C > 0$ tal que

$$\|x\|_Y \leq C \|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

Además, diremos que la inclusión $X \subseteq Y$ es densa si X es denso en Y con respecto a la norma $\|\cdot\|_Y$. Es decir, si para todo $y \in Y$ y $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que

$$\|x - y\|_Y < \varepsilon.$$

Definición 1.15. Un espacio normado X se dice separable si contiene a un subconjunto numerable que es denso en X.

Definición 1.16. Sea X un espacio normado. La aplicación $J : X \longrightarrow X''$ definida por $J(x)(f) = f(x)$ para cada $f \in X'$, se denomina aplicación natural.

Definición 1.17. Un espacio normado X es reflexivo, si la aplicación natural correspondiente a X es sobreyectiva.

Definición 1.18. Decimos que $\ll X \subseteq Y \subseteq X' \gg$ es una terna de evolución, si:

1. X es un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$ separable y reflexivo.

2. Y es un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ separable.

3. La inclusión $X \subseteq Y$ es densa y continua.

Definición 1.19. Sean X un espacio normado, $V \subset X$ y $W \subset X'$. Se define el anulador de V y el anulador de W, denotados respectivamente V^0 y W^0, como

$$V^0 := \{f \in X' : \langle f, v\rangle = 0 \quad \forall v \in V\},$$
$$W^0 := \{v \in X : \langle f, v\rangle = 0 \quad \forall f \in W\}.$$

Observación 1.3. *Deseamos resaltar que la definición de anulador de un conjunto es diferente para subconjuntos de X que para subconjuntos de X'. De hecho, $V^0 \subset X'$ para $V \subset X$, mientras que $W^0 \subset X$ para $W \subset X'$.*

Teorema 1.5. *Sean X y Y espacios de Hilbert y $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, entonces existe un único operador $T^* \in \mathcal{B}(Y, X)$ tal que*

$$(T(x), y)_X = (x, T^*(y))_Y, \quad \forall x \in X, \ \forall y \in Y.$$

Al operador T^* se le llama operador adjunto de T.

Teorema 1.6. *Sean X, Y espacios de Hilbert complejos y $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Entonces se tienen las siguientes propiedades*

(a) $(T^*)^* = T$,

(b) $\|T^*\| = \|T\|$,

(c) La función $f : \mathcal{B}(X, Y) \longrightarrow \mathcal{B}(Y, X)$ definida por $f(R) = R^*$ es continua,

(d) $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

Corolario 1.2. *Sea X un espacio de Hilbert y sea $T \in \mathcal{B}(X)$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) T es invertible,

(b) Ker $T^* = \{0\}$ y existe $\alpha > 0$ tal que $\|T(x)\| \neq \alpha \|x\|$ para todo $x \in X$.

Definición 1.20. Si X es un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{B}(X)$. Entonces T es llamado autoadjunto si $T = T^*$.

Definición 1.21. Si X es un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{B}(X)$. Se dice que T es unitario si $TT^* = T^*T = I$ (I es el operador identidad).

Definición 1.22. Sean X, Y espacios normados y $T \in L(X, Y)$. Entonces se dice que T es una isometría, si $\|T(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in X$.

Teorema 1.7. *Sea X un espacio de Hilbert y T, $U \in \mathcal{B}(X)$.*

(a) $T^*T = I$ si y sólo si T es una isometría.

(b) U es unitario si y sólo si es una isometría de X sobre X.

1.3 Espacios funcionales

Los espacios funcionales son un concepto fundamental en el análisis matemático que nos permite estudiar y clasificar diferentes tipos de funciones en un contexto más amplio. En lugar de enfocarnos únicamente en funciones individuales, los espacios funcionales nos permiten considerar conjuntos completos de funciones que comparten ciertas propiedades comunes.

1.3.1 Espacio $L^p(\Omega)$

Definición 1.23. Sea $1 \leq p < \infty$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Definimos el espacio normado $L^p(\Omega)$ como el conjunto de funciones medibles f tales que

$$\|f\|_p := \Big(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p \, dx \Big)^{1/p} < \infty.$$

Observación 1.4. *Si f y g son funciones medibles, entonces αf y $f+g$ también lo son para cada $\alpha -$ escalar. Además, $|\alpha f(x)|^p = |\alpha|^p \, |f(x)|^p$. Por lo tanto*

$$\|\alpha f\|_p = \Big(\int\limits_{\Omega} |\alpha f(x)|^p \, dx \Big)^{1/p} = |\alpha| \, \Big(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p \, dx \Big)^{1/p} = |\alpha| \, \|f\|_p \, .$$

También, $|f(x)+g(x)|^p \leq 2^p \,\text{máx}\{|f(x)|^p \, , |g(x)^p|\}$. Luego $\|f+g\|_p$ es finita si $\|f\|_p$ y $\|g\|_p$ también lo son. Para demostrar la propiedad de la desigualdad triangular se hace uso de la desigualdad de Mikowski.

Definición 1.24. Sea $f : \Omega \longrightarrow [0, \infty]$ una función medible. El supremo esencial de f se define por

$$\text{ess sup } f := \text{ínf}\{c : |f(x)| \leq c \text{ p.c.t } x \in \Omega\}.$$

Definición 1.25. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces $L^\infty(\Omega)$ es el conjunto de todas las funciones medibles $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que ess sup $|f| < \infty$.

Observación 1.5. *$L^\infty(\Omega)$ es un espacio normado con norma $\|f\|_\infty :=$ ess sup $|f|$.*

Teorema 1.8. *$L^p(\Omega)$ es completo para $1 \leq p \leq \infty$.*

1.3.2 Espacio $C_0^\infty(\Omega)$

Definición 1.26. $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\{W_i\}_{i \in I}$ la colección de todos los abiertos W_i de $\mathbb{R}^n$ tales que $f(x) = 0$ para casi todo $x \in W_i$. Consideramos

$$W = \bigcup_{i \in I} W_i.$$

El soporte de f se denota por Supp$f := \Omega \setminus W$. Además, si f es continua Supp$f$ $= \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$.

Definición 1.27. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto no vacío, se define $C_0^\infty(\Omega)$ como el espacio de todas las funciones de valor real definidas sobre Ω que son infinitamente diferenciables y poseen soporte compacto en Ω.

Observación 1.6. *El espacio $C_0^\infty(\Omega)$ se denota por $\mathcal{D}(\Omega)$.*

Definición 1.28. Sean K y G subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, se dice que K está fuertemente incluido en G y lo denotamos con $K \subset\subset G$, si K es compacto, G es abierto y $K \subset G$.

Teorema 1.9. *$C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$.*

Teorema 1.10. *Para todo $K \subset\subset \Omega$ existe $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, $x \in \Omega$ y $\varphi(x) = 1$ para todo x en alguna vecindad de K.*

Observación 1.7. *$(C_0^\infty(\Omega))'$ es llamado el espacio de las distribuciones en Ω y es denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Definición 1.29. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $f \in L^2(\Omega)$, decimos que $w_i := \frac{\partial f}{\partial x_i}$ es la derivada débil de f con respeto a su correspondiente i-ésima componente, si se cumple que

$$-\int_\Omega f \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \int_\Omega w_i \phi \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

1.3.3 Espacio $W^{m,p}(\Omega)$

Definición 1.30. Sea G un conjunto abierto y acotado en $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$, con m un número natural. $W^{m,p}(\Omega)$ es el espacio vectorial que consiste de todas las funciones $u \in L^p(\Omega)$ para las cuales $\partial^\alpha u \in L^p(G)$ para todos los multi-índices $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ de enteros no negativos de orden $|\alpha| = \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \right) \leq m$ donde $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} ... \partial_n^{\alpha_n}$. El espacio tiene una norma dada por

$$\|u\|_{m,p} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \Big)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty. \tag{1.2}$$

y

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{1.3}$$

Para cada par (m, p) el espacio $W^{m,p}(\Omega)$ es llamado espacio de Sóbolev de orden m en $L^p(\Omega)$.

Proposición 1.2. *$W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.*

Corolario 1.3. *Si $1 \leq p < \infty$, entonces $W^{m,p}(\Omega)$ es separable.*

1.4 Integral de Bochner

La integral de Bochner busca de cierta manera ampliar los conceptos de la integral de Lebesgue, pues mientras en la integral de Lebesgue se trabaja con funciones de $E \subseteq \mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$, en la integral de Bochner se trabaja con funciones de dominio $E \subseteq \mathbb{R}^n$ y cuyo codominio es un espacio de Banach. Sin embargo, en este trabajo se estudiará un caso particular, el caso de funciones definidas en un intervalo acotado $I \subseteq \mathbb{R}$ con valores en $(X, \|\cdot\|_X)$.

1.4.1 Funciones Bochner integrables

Definición 1.31. Sean I un intervalo acotado de $\mathbb{R}$ y $(X, \|\cdot\|_X)$ un espaio de Banach sobre $\mathbb{R}$.

(a) Una función $f : I \longrightarrow X$ es llamada simple si existen puntos $a_1, a_2, ..., a_n \in X$ y subconjuntos Lebesgue medibles $E_1, E_2, ..., E_n$ de I tales que

$$I = \bigcup_{i=1}^{n} E_i, \qquad E_i \cap E_j = \emptyset \ si \ i \neq j$$

y

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}(t) a_i, \qquad \forall t \in I. \tag{1.4}$$

Si los conjuntos E_i son subintervalos de I entonces la función f es llamada función escalonada.

(b) La integral de Bochner sobre I de una función simple f se define por

$$\int_I f(t)dt := \sum_{i=1}^{n} m(E_i) a_i.$$

Si $E \subseteq I$ es un conjunto Lebesgue medible, entonces definimos la integral de Bochner de f sobre E como

$$\int_E f(t)dt := \sum_{i=1}^{n} m(E_i \cap E) a_i.$$

Observación 1.8. *La expresión χ_{E_i} denota la función característica en E_i.*

Teorema 1.11. *Sean $E \subseteq I$ un conjunto Lebesgue medible y $f : I \longrightarrow X, \ g : I \longrightarrow X$ funciones simples. Si*

$$f(t) = g(t), \ \text{p.c.t} \ \ t \in E,$$

entonces

$$\int_E f(t)dt = \int_E g(t)dt.$$

Definición 1.32. Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio de Banach. Una función $f : I \longrightarrow X$ es llamada Bochner medible si existe una sucesión de funciones simples $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(t) - f(t)\|_X = 0, \quad \text{p.c.t} \ \ t \in I. \tag{1.5}$$

Si adicionalmente, $\|f_n - f\|_X$ es Lebesgue integrable para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \|f_n(t) - f(t)\|_X \, dt = 0, \tag{1.6}$$

entonces f es llamada **Bochner integrable**.

Definición 1.33. Sean $E \subseteq I$ un conjunto Lebesgue medible y $f : I \longrightarrow X$ una función Bochner integrable. Definimos la integral de Bochner de f sobre E, denotada por $\int_E f(t)dt$, como un elemento de X que satisface lo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \int_E f(t)dt - \int_I \chi_E(t) f_n(t)dt \right\|_X = 0 \tag{1.7}$$

donde $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones simples que cumplen la Definición (1.32).

Teorema 1.12. *Si la función $f : I \longrightarrow X$ es Bochner medible, entonces $\|f\|_X : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función Lebesgue medible.*

Teorema 1.13. *Sean $f : I \longrightarrow X$ y $g : I \longrightarrow X$ dos funciones Bochner integrables, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $E \subseteq I$ un conjunto Lebesgue medible. Entonces $\alpha f + g$ es Bochner integrable y*

$$\int_E (\alpha f(t) + g(t))dt = \alpha \int_E f(t)dt + \int_E g(t)dt. \tag{1.8}$$

Teorema 1.14. *Sea $f : I \longrightarrow X$ una función Bochner medible. Entonces f es Bochner integrable si y sólo si $\|f\|_X : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función Lebesgue integrable.*

Teorema 1.15. *Sean X, Y espacios de Banach y $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Si $f : I \longrightarrow X$ es Bochner integrable entonces $T \circ f : I \longrightarrow Y$ es Bochner integrable y*

$$\int_E T(f(t))dt = T\Big(\int_E f(t)dt\Big), \tag{1.9}$$

para cada $E \subseteq I$ Lebesgue medible.

1.5 Espacios funcionales para problemas evolutivos

En este apartado haremos una introducción a los espacios funcionales $L^p(0, T; X)$ y algunos de sus derivados. Donde T (variable temporal) es un número real positivo y X un espacio de Bannach. Estos espacios funcionales son fundamentales para el desarrollo de los problemas evolutivos en los cuales se considera a una variable temporal.

1.5.1 Espacio $L^p(0, T; X)$

Definición 1.34. Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$ y $0 < T < \infty$.

- Para $1 \leq p < \infty$, se define $L^p(0, T; X)$ como el conjunto de todas las funciones $u : (0, T) \longrightarrow X$ Boncher medibles tales que la función $\|u\|_X^p : (0, T) \longrightarrow \mathbb{R}$ es Lebesgue integrable, es decir

$$L^p(0, T; X) := \Big\{ u : (0, T) \longrightarrow X \ : \ u \text{ es Bochner medible y} \int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt < \infty \Big\}.$$

El conjunto $L^p(0,T;X)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y con la función $\|\cdot\|_{L^p(0,T;X)}:$ $L^p(0,T;X) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt\right)^{1/p}, \quad \forall u \in L^p(0,T;X) \tag{1.10}$$

conforman un espacio normado.

- Para $p = \infty$, el conjunto $L^\infty(0,T;X)$ consta de todas las funciones $u : (0,T) \longrightarrow X$ Boncher medibles que son esencialmente acotadas. es decir el conjunto de todas las funciones Bochner medibles para las cuales existe $M > 0$ tal que

  $$\|u(t)\|_X \leq M, \quad \text{p.c.t} \;\; t \in (0,T).$$

  A todos los números M que cumplen la propiedad anterior se les conoce como cotas esenciales de u. Además, la norma de una función en $L^\infty(0,T;X)$ está dada por el ínfimo de las cotas esenciales de la función.

Teorema 1.16. *Si X es un espacio de Banach, entonces $L^p(0,T;X)$ es también un espacio de Banach.*

Demostración. Ver, por ejemplo, [28, Teorema 3.6].

Corolario 1.4. *Si X es un espacio de Hilbert con producto interior $(\cdot,\cdot)_X$, entonces*

$$(u,v) = \int_0^T (u(t),v(t))_X dt$$

es un producto interior en $L^2(0,T;X)$ con el cual es también un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{R}$.

Definición 1.35. Sean Y, Z espacios de Banach, $u \in L^1(0,T;Y)$ y $w \in L^1(0,T;Z)$. Decimos que w es la n-ésima derivada generalizada de u en $(0,T)$ si w satisface

$$\int_0^T \phi^{(n)} u(t) dt = (-1)^n \int_0^T \phi(t) w(t) dt, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(0,T). \tag{1.11}$$

En tal caso denotamos $w := u^{(n)}$. Nos referiremos como derivada débil a la derivada generalizada de primer orden y se denotará por u'.

Observación 1.9. *La igualdad* (1.11) *tiene sentido en el contexto de la integral de Bochner.*

A partir del espacio $L^2(0,T;X)$ podemos definir el espacio normado $H^1(0,T;X)$ como el espacio de las funciones en $L^2(0,T;X)$ junto con su derivada generalizada, es decir

$$H^1(0,T;X) := \{u \in L^2(0,T;X) : u' \in L^2(0,T;X)\}, \tag{1.12}$$

con norma dada por

$$\|u\|_{H^1(0,T;X)} := \|u\|_{L^2(0,T;X)} + \|u'\|_{L^2(0,T;X)} \quad \forall u \in H^1(0,T;X).$$

Un caso mas general de este espacio es $W^{1,p}(0,T;X)$.

Definición 1.36. Sean $1 \leq p \leq \infty$ y $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio normado. El espacio $W^{1,p}(0,T;X)$ es conocido como espacio de Sóbolev y está definido por

$$W^{1,p}(0,T;X) := \{u \in L^p(0,T;X) : u' \in L^p(0,T;X)\}.$$

El espacio $W^{1,p}(0,T;X)$ es normado con norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)} := \|u\|_{L^p(0,T;X)} + \|u'\|_{L^p(0,T;X)}.$$

Es bien conocido que $W^{1,p}(0,T;X)$ es un espacio de Banach si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.

1.6 Problemas mixtos estacionarios

Los problemas mixtos o también conocidos como formulaciones variacionales mixtas, son en esencia un sistema de dos ecuaciones ecuaciones en las cuales aparece al menos una segunda variable que comúnmente es llamada multiplicador de Lagrange, dado que está relacionada con la imposición de alguna restricción a la variable principal. A continuación se precisa la estructura abstracta y se enuncia el teorema de existencia y unicidad para formulaciones mixtas.

1.6.1 Formulaciones mixtas clásicas (Teoría de Babuska-Brezzi)

Sean X y M espacios de Hilbert con normas $\|\cdot\|_X$ y $\|\cdot\|_M$ respectivamente. Además, consideremos $a : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ y $b : X \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ formas bilineales. Una formulación variacional es un problema que consiste en: Dados $f \in X'$ y $g \in M'$, hallar $(u,p) \in X \times M$ tal que

$$\begin{aligned} a(u,v) + b(v,p) &= \langle f, v\rangle \quad \forall v \in X, &(1.13)\\ b(u,q) &= \langle g, q\rangle \quad \forall q \in M, &(1.14)\end{aligned}$$

donde $\langle \cdot,\cdot\rangle$ denota el producto de dualidad. El teorema central que garantiza condiciones suficientes y necesarias para que la formulación variacional mixta (1.13)-(1.14) sea un problema bien planteado, es decir, que tenga una única solución que dependa continuamente de los datos f y g, se puede ver por ejemplo en [16, Teorema 2.3]. Dicho teorema se enuncia a continuación.

Teorema 1.17. *(Babuska-Brezzi). Sean X y M espacios de Hilbert. Denotemos por V el kernel de b en X, esto es:*

$$V = \{v \in X : b(v,\mu) = 0 \quad \forall \mu \in M\}.$$

Supongamos que

1. *Existe $\beta > 0$ tal que*

$$\sup_{v\in X} \frac{b(v,q)}{\|v\|_X} \geq \beta \|q\|_M, \quad \forall q \in M. \tag{1.15}$$

2. Existe $\alpha > 0$ tal que

$$a(v,v) \geq \alpha \left\| v \right\|_X^2, \quad \forall v \in V. \tag{1.16}$$

Entonces para cada $f \in X'$ y $g \in M'$ existe una única pareja $(u,p) \in X \times M$ que es solución del problema (1.13)-(1.14). *Además existe una constante C positiva tal que*

$$\left\| u \right\|_X + \left\| p \right\|_M \leq C \left(\left\| f \right\|_{X'} + \left\| g \right\|_{M'} \right).$$

Las normas $\left\| \cdot \right\|_{X'}$ y $\left\| \cdot \right\|_{M'}$ son las normas duales inducidas por $\left\| \cdot \right\|_X$ y $\left\| \cdot \right\|_M$ en los espacios duales de X y M respectivamente. La ecuación (1.15) se conoce como la condición de Babuska-Brezzi o condición ínf-sup. Además, cuando una forma bilineal cumple la condición (1.16), se dice que es V-elíptica.

Observación 1.10. *Si definimos el operador $\mathcal{A} : X \longrightarrow X^*$, así*

$$\langle \mathcal{A}u, w \rangle := a(u,v), \qquad \forall u, w \in X$$

y el operador $\mathcal{B} : X \longrightarrow M^*$ definido por

$$\langle \mathcal{B}u, p \rangle := b(u,p), \qquad \forall u \in X, \ \forall p \in M.$$

Entonces la formulación variacional será equivalente a hallar $(u,p) \in X \times M$ tal que

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B}^T \\ \mathcal{B} & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

para $f \in X'$ y $g \in M'$ dados.

1.7 Problemas evolutivos

En los problemas evolutivos se buscan soluciones dependientes del tiempo y una variable que por lo general es espacial. A continuación presentaremos una familia de problemas evolutivos denominada problemas degenerados en la cual se generaliza un problema parabólico. Enunciamos los espacios funcionales y los operadores relacionados. También, enunciamos el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones degeneradas.

1.7.1 Ecuaciones parabólicas degeneradas

Sean X e Y espacios de Hilbert reales. Consideremos el espacio de Banach $L^2(0,T;X)$ cuyo espacio dual es $L^2(0,T;X')$, con X' el espacio dual de X.

Supongamos que $X \subset Y \subset X'$ es una terna de evolución, es decir $X \subset Y$ con inclusión densa y continua. Esto permite identificar los elementos de Y como elementos que pertenecen al dual de X (tal y como lo indica la notación $X \subset Y \subset X'$), por lo cual Y es llamado espacio pivote (para más detalles, ver [26, Sección 23.4]). Bajo esta suposición, podemos considerar los siguientes espacios funcionales:

$$W(0,T;X,X') := \left\{ u \in L^2(0,T;X) : u' \in L^2(0,T;X') \right\}.$$

Aquí u' es la derivada generalizada de u.

Para cada $t \in [0,T]$ definamos los operadores lineales acotados y continuos $A(t) : X \to X'$ y $R(t) : Y \to Y'$ tales que la aplicación $t \to R(t)u(t)$ es absolutamente continua. El problema parabólico degenerado lineal consiste en: *Dados $f \in L^2(0,T;X')$ y $u_0 \in Y$, hallar $u \in L^2(0,T;X)$ tal que*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle R(t)u(t),v\rangle + \langle A(t)u(t),v\rangle &= \langle f(t),v\rangle \quad \forall v \in X \\ \langle R(0)u(0),v\rangle &= \langle R(0)u_0,v\rangle \quad \forall v \in Y. \end{aligned} \tag{1.17}$$

La igualdad en la primera ecuación de (1.17) es en el sentido distribucional, esto es, en el espacio $\mathcal{D}'(0,T)$.

A continuación, presentamos algunos conceptos que permitirán enunciar el resultado de existencia y unicidad para el Problema (1.17).

Definición 1.37. Sean X, Y espacios de Hilbert reales.

i) Una familia de operadores lineales $\{A(t) : X \to X' : t \in [0,T]\}$ es llamada regular si para cada $u, v \in X$ la función $t \to \langle A(t)u,v\rangle$ es absolutamente continua en $[0,T]$ y existe $k(\cdot) \in L^1(0,T)$ tal que para casi todo $t \in [0,T]$:

$$\left|\frac{d}{dt}\langle R(t)u,v\rangle\right| \le k(t)\,\|u\|_X\,\|v\|_X\,.$$

ii) Un operador lineal $B : X \to X'$ es llamado *monótono*, si

$$\langle B(t)v,v\rangle \ge 0, \quad \forall v \in X, \quad \forall t \in [0,T].$$

Esta subsección finaliza presentando el teorema de existencia y unicidad para problemas degenerados. Las condiciones necesarias para que el problema (1.17) tenga una única solución que depende continuamente de los datos, han sido ampliamente estudiadas en [23, Sección III.3, Proposiciones 3.2, 3.3], y se resumen en el siguiente resultado.

Teorema 1.18. *1.* ***Existencia.*** *Supongamos que $\{R(t) : Y \to Y' : t \in [0,T]\}$ es una familia regular de operadores autoadjuntos, tal que $R(0)$ es monótono y existen números $\lambda, c > 0$ tales que*

$$2\langle A(t)v,v\rangle + \lambda\langle R(t)v,v\rangle + \langle R'(t)v,v\rangle \ge c\,\|v\|^2, \quad \forall v \in X, \quad \forall t \in [0,T],$$

entonces existe una solución u del problema (1.17)*, la cual satisface*

$$\|u\|_{L^2(0,T;X)} \le C(\lambda,c)\left(\|f\|_{L^2(0,T;X')} + \langle R(0)u_0,u_0\rangle\right)^{1/2}.$$

Dada la desigualdad se puede deducir que u depende continuamente de los datos.

2. ***Unicidad.*** *Si $\{R(t) : Y \to Y' : t \in [0,T]\}$ es una familia de operadores monótonos,*

$$\{A(t) : X \to X' : t \in [0,T]\}$$

es una familia de operadores autoadjuntos y existen números $\lambda, c > 0$ tales que

$$\langle A(t)v,v\rangle + \lambda\langle R(t)v,v\rangle \ge c\,\|v\|_X^2 \quad \forall v \in X, \quad \forall t \in [0,T],$$

entonces existe una única solución u del problema (1.17)*.*

1.7.2 Problemas degenerados en forma mixta

Anteriormente presentamos la estructura que tienen los problemas mixtos estacionarios y los problemas parabólicos degenerados en su forma usual. En esta subsección se analizará un problema que combina estas dos formas. Sean X, Y y M espacios de Hilbert reales donde X e Y son separables, $b : X \times M \to \mathbb{R}$ una forma bilineal, V el kernel de b en X y W la clausura de V en Y. Además supongamos que para cada $t \in [0, T]$, los operadores $A(t) : X \to X'$ y $R(t) : Y \to Y'$ son lineales, continuos y la aplicación $t \to R(t)u(t)$ es absolutamente continua en W, donde $W = \overline{V}^{\|\cdot\|_Y}$ es la completación de V bajo la topología inducida por la norma de Y.

Una *ecuación parabólica mixta degenerada* tiene la siguiente forma: *Dados* $f \in L^2(0, T; X')$, $g \in H^1(0, T; M')$ *y* $u_0 \in Y$, *hallar* $u \in L^2(0, T; X)$ *y* $\lambda \in L^2(0, T; M)$ *tales que*

$$\frac{d}{dt}\{\langle R(t)u(t), v\rangle + b(v, \lambda(t))\} + \langle A(t)u(t), v\rangle = \langle f(t), v\rangle \quad \forall v \in X, \tag{1.18}$$

$$b(u(t), \mu) = \langle g(t), \mu\rangle \quad \forall \mu \in M, \tag{1.19}$$

$$\langle Ru(0), v\rangle = \langle Ru_0, v\rangle \quad \forall v \in Y. \tag{1.20}$$

La igualdad en (1.18) es en el sentido de las distribuciones $\mathcal{D}'(0, T)$, mientras que en (1.19) es para casi todo $t \in (0, T)$. La familia de problemas de la forma (1.18)-(1.20) fue estudiada en [3], donde se obtuvieron condiciones necesarias de existencia, unicidad y dependencia continua de los datos iniciales.

Capítulo 2

Problemas semilineales

En este capítulo introduciremos las *ecuaciones parabólicas degeneradas semilineales*, junto con el teorema que nos garantiza la existencia y unicidad de la solución para este tipo de ecuaciones. Dicho teorema es una herramienta muy fuerte que será usada para garantizar el buen planteamiento de problemas que se formularán más adelante. Sin embargo, es conveniente agregar algunas definiciones y conceptos que usaremos en este capítulo.

2.1 Notaciones y definiciones

Definición 2.1 (Pertenencia)**.** Según la teoría de conjuntos, un conjunto es una colección de elementos o la ausencia de estos. Decimos que un elemento X pertenece a un conjunto, si x es uno de los elementos que lo componen.

Para representar la pertenencia de un elemento en un conjunto se usa el símbolo $\in$. Entonces $X \in Y$ o $Y \ni X$, se lee como «X pertenece a Y» o «X es un elemento de Y».

A continuación introduciremos algunas notaciones necesarias para el desarrollo del documento. La definición de relación es fundamental para el desarrollo de este capítulo, esto es debido a que los *problemas parabólicos degenerados semilineales* se plantean sobre combinaciones lineales de relaciones. De ahora en adelante nos referiremos a estos problemas simplemente como *problemas semilineales*.

Definición 2.2. Sea X un espacio vectorial real, una *relación* o *gráfica* en X es un subconjunto de $X \times X$. Si $\mathcal{M}$ es una relación en X, definimos su dominio $D(\mathcal{M}) = \{x : [x, y] \in \mathcal{M}\}$, su rango $Rg(\mathcal{M}) = \{y : [x, y] \in \mathcal{M}\}$ y su inversa como $\mathcal{M}^{-1} = \{[y, x] : [x, y] \in \mathcal{M}\}$. Una relación puede ser interpretada como una función entre conjuntos de X con $\mathcal{M}(x) := \{y : [x, y] \in A\}$, así A es una función cuando $\mathcal{M}(x)$ es un único valor para cada $x \in X$. Es posible hacer combinaciones lineales con relaciones, las cuales tienen la siguiente forma

$$\lambda\mathcal{M} = \{[x, \lambda y] : [x, y] \in A\}$$
$$\mathcal{M} + \mathcal{N} = \{[x, y + z] : [x, y] \in \mathcal{M} \text{ y } [x, z] \in \mathcal{N}\}.$$

Así,

- $\mathcal{M} \ni x$ indica la pertenencia de x en $\mathcal{M}$.
- $[x, y] \in \mathcal{M}$ si y sólo $y \in \mathcal{M}(x)$.

- $Rg(\mathcal{M})$ es rango de la relación $\mathcal{M}$.
- $D(\mathcal{M})$ denota el dominio de la relación $\mathcal{M}$.
- Usaremos H para referirnos a un espacio de Hilbert real.
- $\mathbb{R}_\infty := (-\infty, +\infty]$.
- $\mathbb{R}^+ := [0, +\infty)$ y $\mathbb{R}^+_\infty := [0, +\infty]$.
- $(x, y)_X$ es el producto interior de x con y en el espacio X.
- $\langle f, x\rangle$ denota el producto de dualidad $(f(x))$.
- $\mathcal{R}_X$ es el isomorfismo de Riesz en el espacio X.

Definición 2.3. Sea H un espacio de Banach, una función f en H es llamada *afín* si tiene la forma

$$f(v) = c + u^*(v), \quad \forall v \in H,$$

donde $(u^*, c) \in H' \times \mathbb{R}$.

Definición 2.4. El *epigrafo* de $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}_\infty$ está definido por

$$\text{epi}(\varphi) := \{(u, a) \in V \times \mathbb{R} : \varphi(u) \leq a\}.$$

Definición 2.5. Sea X un espacio de Banach y $\varphi : X \to \mathbb{R}_\infty$, entonces φ es convexa si

$$\varphi(tu + (1-t)v) \leq t\varphi(u) + (1-t)\varphi(v), \quad \forall u, v \in X \text{ y } 0 \leq t \leq 1.$$

Decimos que φ es propia si $\varphi(u) < \infty$ para algún $u \in X$.

Definición 2.6. Sea $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}_\infty$ una función convexa y propia. El subdiferencial de φ en $u \in D(\varphi)$ es el conjunto de todos los funcionales $u^* \in V'$ tales que

$$u^*(v-u) \leq \varphi(v) - \varphi(u), \quad \forall v \in X.$$

El subdiferencial de φ en u es denotado por $\partial\varphi(u)$.

Definición 2.7. Una función $f : H \to \mathbb{R}$ es llamada semicontinua inferior en el punto $x_0 \in H$, si para cada $y < f(x_0)$ existe una vecindad U de x_0 tal que $f(x) > y$ para todo $x \in U$. De esta manera, f es semicontinua inferior en x_0 si y sólo si

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0).$$

Observación 2.1. *Recordemos la definición de límite inferior en un espacio normado*

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) := \sup_{\delta > 0} \Big(\inf\{f(x) : 0 < \|x - x_0\| < \delta\}\Big).$$

Entonces si $\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0)$ *para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$\inf\{f(x) : 0 < \|x - x_0\| < \delta\} > f(x_0) - \varepsilon,$$

luego si hacemos $y = f(x_0) - \varepsilon$ tenemos

$$f(x) > y, \quad \forall x : 0 < \|x - x_0\| < \delta,$$

lo cual muestra que f es semicontinua inferior en x_0. Para la implicación contraria se usa nuevamente la definición de límite inferior.

Definición 2.8. Sea una función $\varphi : H \to \mathbb{R}_\infty$ convexa, propia y semicontinua inferior, entonces $w \in H$ es un subgradiente de φ en $x_i \in H$ si

$$(w, x - x_i)_H \leq \varphi(x) - \varphi(x_i), \quad \forall x \in H.$$

El conjunto de todos los subgradientes de φ en x_i es denotado por $\partial_H \varphi(x_i)$.

Definición 2.9. Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio de Hilbert H, converge débilmente a $x \in H$ y se denota por $x_n \rightharpoonup x$, si $\lim_{n\to\infty}(x_n, y)_H = (x, y)_H$ para todo y en H. Más general, se dice que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es débilmente convergente a $x \in H$ si

$$\forall f \in H', \; f(x_n) \to f(x) \;\text{ cuando }\; x_n \to x.$$

Definición 2.10. Se define un subconjunto $K \subseteq H$ como débilmente cerrado si cualquier sucesión en K que converge débilmente, tiene su límite también en K.

Proposición 2.1. *Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada en un espacio de Hilbert H, entonces $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsuseción que converge débilmente.*

Demostración. Ver [23, Capítulo IV, Proposición 1.1].

Proposición 2.2. *Si K es un conjunto cerrado y convexo en un espacio de Hilbert, entonces K es débilmente cerrado.*

Demostración. Se demuestra que si $x \notin K$, entonces no existe una sucesión en K que converge débilmente a x. Sea $x_0 = P_K(x)$, la proyección de x en K. Sin pérdida de generalidad, asumamos que $x_0 = -x$, así $(x_0, x) = -(x_0, x_0) \leq 0$. Pero $x_0 \neq 0$ ya que en el caso contrario $x_0 = 0 = x \in K$ lo cual es una contradicción. Por tanto, $(x_0, x) < 0$.

Ahora mostraremos que $(z, x_0) \geq 0$ para todo $z \in K$. Por [23, Corolario 2.1], tenemos que

$$(x_0 - x, z - x_0) \geq 0, \quad \forall z \in K,$$

como $x_0 = -x$ entonces se cumple que $(x_0, z) \geq \|x_0\|^2 \geq 0$. Con esto probamos que para cualquier sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq K$, $\lim_{n\to\infty}(x_n, x_0) \geq 0 > (x, x_0)$. Esto es, no existe una sucesión que converge débilmente a $x \notin K$, por lo tanto, K es débilmente cerrado. □

Corolario 2.1. *Un conjunto convexo K es débilmente cerrado si y sólo si contiene todos los límites débiles de sucesiones en K.*

Demostración. Se comprueba con la propia definición de conjunto débilmente cerrado Definición 2.10. □

2.2 Operadores acretivos

En este capítulo introduciremos los operadores acretivos, sus propiedades son fundamentales para garantizar la existencia de soluciones de problemas semilineales que se abordarán posteriormente. Así, estamos interesados en sus propiedades que serán útiles en el desarrollo del trabajo.

Definición 2.11. Sea $D \subseteq H$ un subespacio de H y A un operador (no acotado) tal que $A : D \longrightarrow H$. Se dice que A es acretivo si $(Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2)_H \geq 0$, para cualesquiera $x_1, x_2 \in D(A)$. Además A es m-acretivo, si $Rg(A + I) = H$.

Observación 2.2.

i) Si el operador A es lineal, la definición anterior será equivalente a lo siguiente:

El operador $A : D \longrightarrow H$ es acretivo si

$$(Ax, x)_H \geq 0, \quad \forall x \in D,$$

y además es m-acretivo si, $Rg(A + I) = H$.

ii) En este capítulo, el operador A no necesariamente se limita a ser una función. De hecho, es más común que A se defina como una relación o, como se le conoce a veces, un operador multivaluado.

Lema 2.1. $(x, y)_H \geq 0$ *si y sólo si*

$$\|x\| \leq \|x + \alpha y\|, \quad \forall \alpha > 0.$$

Demostración. $\Rightarrow$) Asumamos que $(x, y)_H \geq 0$, entonces se cumplirá que $2\alpha(x, y)_H + \alpha^2 \|y\|^2 \geq 0$ para todo $\alpha > 0$, si sumamos $\|x\|^2$ a ambos lados de la desigualdad y agrupamos los términos de la derecha, obtenemos $\|x + \alpha y\|^2 \geq \|x\|^2$, así $\|x + \alpha y\| \geq \|x\|$ para todo $\alpha > 0$.

$\Leftarrow$) La desigualdad $\|x + \alpha y\| \geq \|x\|$ es equivalente a $\|x\|^2 + 2\alpha(x, y)_H + \alpha^2 \|y\|^2 \geq \|x\|^2$. Si operamos adecuadamente se obtiene que

$$(x, y)_h \geq -\frac{\alpha}{2} \|y\|^2, \quad \forall \alpha > 0,$$

de aquí se deduce $(x, y)_H \geq 0$. □

Definición 2.12. Se dice que un operador $\varphi : H \longrightarrow H$, es una contracción si

$$\|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)\| \leq \|x_2 - x_1\|, \quad \forall x_1, x_2 \in H.$$

Si la desigualdad es estricta, entonces φ es una contracción estricta.

Corolario 2.2. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) A es acretivo.

b) $\|x_1 - x_2\| \leq \|(x_1 + \alpha w_1) - (x_2 + \alpha w_2)\|$ *para todo* $[x_j, w_j] \in A,\ j = 1, 2$ *y* $\alpha > 0$.

c) $(I + \alpha A)^{-1}$ *es una contracción en* $Rg(I + \alpha A)$ *para todo* $\alpha > 0$.

Demostración. Por el Lema 2.1 es suficiente tomar $x = x_1 - x_2$ y $y = w_1 - w_2$ para obtener $a) \Leftrightarrow b)$.

c) $\Rightarrow$ a) Si $x \in D(A)$, entonces $x + \alpha A(x) \in Rg(I + \alpha A)$, así $\|(I + \alpha A)^{-1}(x + \alpha Ax)\| \leq \|x + \alpha Ax\|$ equivalente a $\|x\| \leq \|x + \alpha Ax\|$. Por Lema 2.1 podemos concluir que A es acretivo.

b) $\Rightarrow$ c). Hagamos $y_1 = x_1 + \alpha A(x_1) \in Rg(I + \alpha A)$ y $y_2 = x_2 + \alpha A(x_2) \in Rg(I + \alpha A)$ con $x_1, x_2 \in D(A)$. Reescribiendo la desigualdad se obtiene

$$\left\|(I + \alpha A)^{-1}(y_1) - (I + \alpha A)^{-1}(y_2)\right\| \leq \|y_1 - y_2\|.$$

Por lo tanto, $(I + \alpha A)^{-1}$ es una contracción en $Rg(I + \alpha A)$. $\square$

Lema 2.2. *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) A *es acretivo y* $Rg(I + \alpha A) = H$ *para algún* $\alpha > 0$.

(b) A *es m-acretivo.*

Demostración. Supongamos que se cumple (b), entonces por la Definición 2.11, A es acretivo y $Rg(I + A) = H$. Por lo tanto, se cumple (a).

Supongamos que se tiene (a). Sea $\beta > \alpha/2$ y $w \in H$, entonces definimos el operador $T : H \longrightarrow H$ como sigue

$$T(x) = (I + \alpha A)^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}w + \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)x\right), \quad \forall x \in H.$$

Por el Corolario 2.2, $(I + \alpha A)^{-1}$ de H en H, luego

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \left|1 - \frac{\alpha}{\beta}\right| \|x - y\|, \quad \forall x, y \in H.$$

Dado que $\beta > \alpha/2$, tendremos la desigualdad

$$\left|1 - \frac{\alpha}{\beta}\right| < 1.$$

Luego, T es una contracción estricta en H, entonces T tiene un punto fijo, $x = T(x)$, esto es

$$x = (I + \alpha A)^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}w + \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)x\right).$$

De aquí que

$$(I + \alpha A)(x) \ni \frac{\alpha}{\beta}w + \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)x,$$

con esto obtenemos $w \in x + \beta A(x)$ y se prueba que $\mathrm{Rg}(I + \beta A) = H$. Para probar que $Rg(I + A) = H$, es suficiente hacer el mismo procedimiento de forma recursiva hasta que $1 > \beta/2$, con esto podemos concluir que A es m-acretivo. $\square$

Definición 2.13. Se dice que el operador A es maximal acretivo, si B es acretivo y $A \subseteq B$ implica que $A = B$.

Proposición 2.3. *Sean $A : H \to H$ un operador m-acretivo, $\{[x_n, y_n]\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ y $x_n \rightharpoonup x$, $y_n \rightharpoonup y$ en H.*

(a) Entonces A es un maximal acretivo.

(b) Si $\liminf_{n\to\infty} (x_n, y_n) \leq (x, y)$, entonces $[x, y] \in A$.

(c) Si $\limsup_{n\to\infty} (x_n, y_n) \leq (x, y)$, entonces $\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x, y)$.

Demostración. Ver, [23, Capítulo IV, Proposición 1.6].

Definición 2.14. Sea $A : H \longrightarrow H$ un operador m-acretivo, definimos el correspondiente resolvente de A por $J_\alpha := (I + \alpha A)^{-1}$ para $\alpha > 0$.

Observación 2.3. *Por el Corolario 2.2 cada $J_\alpha(x)$ es una contracción. Si $y = J_\alpha$, entonces $\frac{1}{\alpha}(x - y) \in A(y)$, de esta manera*

$$\frac{1}{\alpha}(x - J_\alpha(x)) \in A(J_\alpha(x)), \quad x \in H \ , \ \alpha > 0.$$

Se puede reescribir $\frac{1}{\alpha}(x - J_\alpha(x))$ en la forma

$$\frac{1}{\beta}(\frac{\beta}{\alpha}x + (1 - \frac{\beta}{\alpha})J_\alpha(x)) \in A(J_\alpha(x)), \quad \beta > 0,$$

lo cual es equivalente a que

$$\frac{\beta}{\alpha}x + \big(1 - \frac{\beta}{\alpha}\big)J_\alpha(x)) \in (I + \beta A)(J_\alpha(x)).$$

Esto prueba la siguiente propiedad del resolvente

$$J_\alpha = J_\beta \circ \Big[\frac{\beta}{\alpha}I + \big(1 - \frac{\beta}{\alpha}\big)J_\alpha\Big], \quad \alpha,\ \beta > 0.$$

Definición 2.15. Sea A m-acretivo en H. Entonces la aproximación de Yosida del operador A se define como el operador

$$A_\alpha := \frac{1}{\alpha}(I - J_\alpha), \quad \alpha > 0.$$

Observación 2.4. *Por definición, $A_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}(x - J_\alpha(x))$, así que*

$$\alpha A_\alpha(x) = x - J_\alpha(x).$$

Luego,

$$x - \alpha A_\alpha(x) = J_\alpha(x) = (I + \alpha A)^{-1}(x),$$

por lo que $x \in \big(I + \alpha A\big)(x - \alpha A_\alpha(x))$*. De aquí se sigue que* $A_\alpha(x) \in A(x - \alpha A_\alpha(x)) = A(J_\alpha(x))$*. Además,* $y = A_\alpha(x)$ *si y sólo si* $y \in A(x - \alpha y)$*.*

Dado que A *es acretivo maximal, podemos probar que* $A(x)$ *es cerrado y convexo para cada* $x \in D(A)$*. Sea* $x \in D(A)$ *y* $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A(x)$ *tal que* $y_n \to y \in H$ *cuando* $n \to \infty$*.*

$$(y, x) = (y - y_n, x) + (y_n, x),$$

si hacemos paso al límite, el primer término de la suma desaparece y al ser A *acretivo nos resulta que* $(y, x) \geq 0$*. Debido a que* A *es maximal podemos concluir que* $y \in A(x)$*.*

Para probar que $A(x)$ *es convexo, tomamos* $[x, w_j] \in A$ *con* $j = 1, 2$ *y* x *en* $D(A)$*. Hacemos*

$$(w_1(1-t) + w_2 t,\ x) = (w_1, x)(1-t) + (w_2, x)(t) \geq 0,$$

con $t \in [0, 1]$*. Por tanto,* $A(x)$ *es convexo. Con esto podemos establecer la siguiente definición.*

Definición 2.16. El operador de sección minimal A^0 se define por

$$A^0 x := Pro_{A(x)}(0) = \{y : \|y\| \leq \|w\|, \quad \forall w \in A(x)\}.$$

Teorema 2.1. *Sea* A *un operador m-acretivo. Entonces se tienen las siguientes afirmaciones*

(a) Cada A_α *es acretivo y Lipschitz con constante* $\frac{1}{\alpha}$*,* $\quad \alpha > 0$*.*

(b) $(A_\alpha)_\beta = A_{\alpha+\beta}, \quad \alpha, \beta > 0$*.*

(c) Para cada $x \in D(A)$*,* $\|A_\alpha x\|$ *converge a* $\|A^0 x\|$ *por la derecha,* $\lim_{\alpha \to 0} A_\alpha x = A^0 x$ *y*

$$\left\|A_\alpha x - A^0 x\right\|^2 \leq \left\|A^0 x\right\|^2 - \|A_\alpha x\|^2, \quad \alpha > 0.$$

(d) Para cada $x \notin D(A)$*,* $\|A_\alpha x\|$ *es decreciente y no acotada cuando* $\alpha \to 0$*.*

Demostración.

(a). Sean $x_2, x_1 \in H$, entonces

$$\begin{aligned}(A_\alpha x_1 - A_\alpha x_2, x_1 - x_2) &= (A_\alpha x_1 - A_\alpha x_2, \alpha(A_\alpha x_1 - A_\alpha x_2)) + (J_\alpha x_1 - J_\alpha x_2) \\ &= \alpha \|A_\alpha x_1 - A_\alpha x_2\|^2 + (A_\alpha x_1 - A_\alpha x_2, J_\alpha x_1 - J_\alpha x_2),\end{aligned}$$

recordemos que A es acretivo y $A_\alpha(x) \in A(J_\alpha x)$, esto es, $[J_\alpha(x), A_\alpha(x)] \in A$, así $(A_\alpha x_1 - A_\alpha x_2, J_\alpha x_1 - J_\alpha x_2) \geq 0$, luego

$$(A_\alpha x_1 - A_\alpha x_2, x_1 - x_2) \geq \alpha \|A_\alpha x_1 - A_\alpha x_2\|^2 \geq 0.$$

Además, si aplicamos la desigualdad $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \|y\|$ para $x, y \in H$, obtenemos

$$\|x_2 - x_1\| \frac{1}{\alpha} \geq \|A_\alpha x_2 - A_\alpha x_1\|, \quad x_1, x_2 \in H.$$

(b). Usamos la caracterización $y = A_\alpha(x)$ si y sólo si $y \in A(x - \alpha y)$.

$$y = (A_\alpha)_\beta(x) \Leftrightarrow y \in A_\alpha(x - \beta y) \Leftrightarrow y \in A(x - (\alpha + \beta)y) \Leftrightarrow y \in A_{\alpha+\beta}(x).$$

(c). Sea $x \in D(A)$, entonces por ser A acretivo tenemos la desigualdad

$$0 \leq (Ax - A(J_\alpha x),\ x - J_\alpha x), \tag{2.1}$$

dado que $A^0 x \in Ax$ y $A_\alpha x \in A(J_\alpha x)$, en particular tenemos

$$0 \leq (A^0 x - A_\alpha x,\ x - J_\alpha x) = \alpha(A^0 x - A_\alpha x,\ A_\alpha x).$$

De aquí se sigue que $\|A_\alpha x\|^2 \leq (A^0 x, A_\alpha x)$ y $\|A_\alpha x\| \leq \|A^0 x\|$. Ahora en lugar de A tomamos a A_β, con $\beta > 0$ para obtener una desigualdad similar a (2.1) y seguido de esto aplicamos (b) para obtener

$$0 \leq (A_\beta x - A_{\alpha+\beta} x,\ A_{\beta+\alpha} x), \quad \forall x \in H,$$

con esto obtenemos $\|A_{\alpha+\beta} x\|^2 \leq (A_\beta x,\ A_{\alpha+\beta} x)$ y $\|A_{\alpha+\beta} x\| \leq \|A_\beta x\|$. Por tanto, $A_\alpha x$ es decreciente y además satisface

$$\|A_\alpha x - A_{\alpha+\beta} x\| \leq \|A_\alpha x\|^2 - \|A_{\alpha+\beta} x\|^2, \quad \alpha, \beta > 0,\ \forall x \in H. \tag{2.2}$$

Si $x \in D(A)$, entonces $\{A_\alpha x\}_\alpha$ es acotada ya que $\|A_\alpha x\| \leq \|A^0 x\|$. Luego por la desigualdad (2.2) la sucesión $\{A_\alpha x\}$ es Cauchy en H. Así existe $y \in H$ tal que $\lim_{\alpha \to 0} A_\alpha x = y$. Luego de la definición de A_α tenemos que $\lim_{\alpha \to 0} J_\alpha x = x$.

Además, de la Observación 2.4 se tiene $[J_\alpha x, A_\alpha x] \in A$ con esto podemos aplicar la Proposición 2.3 item (b) para obtener $y \in A(x)$. Luego $\|y\| = \lim_{\alpha \to 0} \|A_\alpha x\| \leq \|A^0 x\|$ y así $y = A^0 x$ por la definición de A^0.

(d). Supongamos $x \notin D(A)$. De la desigualdad $\|A_{\alpha+\beta} x\| \leq \|A_\beta x\|$ tenemos que $\|A_\alpha\|$ es decreciente y además de (2.2) podemos concluir que $\|A_\alpha\|$ no es acotada, pues en el caso contrario por lo mostrado en el item (c) existe $y \in H$ tal que $y \in A(x)$ y esto es una contradicción.

Lema 2.3. *Si A es m-acretivo y B es acretivo y Lipschitz en H, entonces $A + B$ es m-acretivo.*

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in D(A) \cap D(B)$. Entonces,

$$((A+B)(x_2) - (A+B)(x_1), x_2 - x_1) = (Bx_2 - Bx_1, x_2 - x_1) + (Ax_2 - Ax_1, x_2 - x_1) \geq 0.$$

Sea $k > 0$, para el cual $\|Bx_2 - Bx_1\| \leq k\,\|x_2 - x_1\|$. Definimos A_1 y B_1 como sigue

$$A_1 := \frac{1}{k+1} A \text{ y } B_1 := \frac{1}{k+1} B.$$

Dado $f \in H$ buscamos $u \in H$ para el cual $f \in u + A_1 u + B_1 u$. Por la Proposición 2.2 tenemos que la relación A_1 es m-acretiva, la relación B_1 es una contracción estricta dada la forma en la que se definió. De esta manera, la solución u está caracterizada por $u = \Big(I + A_1\Big)^{-1}(f - B_1u)$, es decir, el punto fijo de una contracción estricta en H. Por lo tanto, existe solución a la ecuación $f \in u + A_1u + B_1u$.

Con esto mostramos que $Rg(I + \frac{1}{k+1}(A + B)) = H$ y por Proposición 2.2 concluimos que $A + B$ es m-acretivo. □

Consideremos el par de operadores m-acretivos $A, B : H \to H$ y la ecuación

$$f \in u + Au + Bu. \tag{2.3}$$

Un método de penalización para aproximar la solución de (2.3) es trabajar el sistema

$$u_\alpha + Au_\alpha + \frac{1}{\alpha}(u_\alpha - v_\alpha) \ni f, \quad Bv_\alpha + \frac{1}{\alpha}(v_\alpha - u_\alpha) \ni 0,$$

en el cual $\frac{1}{\alpha}(u_\alpha - v_\alpha)$ es la estimación y se espera que $u_0 \to v_0$ cuando $\alpha \to 0$. Este sistema es equivalente a la ecuación

$$u_\alpha + Au_\alpha + B_\alpha u_\alpha \ni f. \tag{2.4}$$

De acuerdo con el Teorema 2.1 el operador B_α cumple las propiedades de ser acretivo y Lipschitz. Por consiguiente, gracias al Lema 2.3 se puede afirmar que existe una solución para la ecuación (2.4).

Proposición 2.4 (**Brezis-Crandall-Pazy**). *Sean A y B operadores m-acretivos en H. Si la secuencia $\{B_\alpha(u_\alpha)\}$ es acotada, entonces existe u tal que $f \in u + Au + Bu$ y $u_\alpha \to u$.*

Demostración. Ver [23, Capítulo IV, Proposición 2.1].

Lema 2.4. *si A y B son operadores m-acretivos en H y $D(A) \cap D(B) \neq \emptyset$, entonces $\{u_\alpha\}$ es acotada.*

Demostración. Ver [23, Capítulo IV, Lema 2.2].

Observación 2.5. *Si $\varphi : H \to R_\infty$ es una función propia, convexa y semicontinua inferior, entonces $\partial_H\varphi$ (el subgradiente) es una relación en $H \times H$ y es acretivo en el siguiente sentido: si $w_j \in \partial_H\varphi(x_j)$ para $j = 1, 2$, entonces $(w_1 - w_2, x_1 - x_2)_H \geq 0$. De la definición de subgradiente se tiene que*

$$(w_1,\ x_2 - x_1)_H \leq \varphi(x_2) - \varphi(x_1),$$

$$(w_2, x_1 - x_2)_H \leq \varphi(x_1) - \varphi(x_2).$$

Sumando estas desigualdades, se tiene la desigualdad

$$(w_2 - w_1, x_2 - x_1)_H \geq 0.$$

Además, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.5. *Sea H un espacio de Hilbert y $\varphi : H \to \mathbb{R}_\infty$ una función convexa, propia y semicontinua inferior. Entonces el rango de $I + \partial_H\varphi$ es todo H.*

Demostración. Tomamos $w_0 \in H$ fijo y definimos la función $\psi : H \to \mathbb{R}_\infty$ por

$$\psi(x) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\|x\|^2 - \langle w_0, x\rangle_H .$$

De [23, Capítulo IV, Lema 1.1] se tiene que φ está acotada inferiormente por una función *afín* (Definición 2.3) de la forma

$$\varphi(x) \geq (w, x - x_1) + \varphi(x_1),$$

donde $w, x_1 \in H$ son fijos, de aquí se sigue que ψ satisface la desigualdad

$$\psi(x) \geq (w, x - x_1) + \varphi(x_1) + \frac{1}{2}\|x\|^2 - (w_0, x), \quad \forall x \in H.$$

Entonces ψ satisface

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \psi(x) = +\infty.$$

Así, por [23, Capítulo IV, Proposición 1.4] la función ψ tiene un mínimo en algún $x_0 \in H$, esto es

$$0 \leq \psi(x) - \psi(x_0), \qquad \forall x \in H.$$

Lo anterior es equivalente a $0 \in \partial_H \psi(x_0)$.

$$\psi(x) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\|x\|^2 - (w_0, x)_H,$$
$$\psi(x_0) = \varphi(x_0) + \frac{1}{2}\|x_0\|^2 - (w_0, x_0)_H.$$

Usando el hecho de que $0 \in \partial_H \psi(x_0)$ y restando las ecuaciones obtenemos

$$(w_0, x - x_0)_H \leq \varphi(x) - \varphi(x_0) + \frac{1}{2}(\|x\|^2 - \|x_0\|^2), \qquad \forall x \in H.$$

Reemplazando x por $tx + (1-t)x_0$ y usando la convexidad de φ nos resulta

$$t(w_0, x - x_0)_H \leq t(\varphi(x) - \varphi(x_0)) + \frac{1}{2}\Big[t^2\big((x,x) + (x_0,x_0)\big) + 2t(1-t)(x_0, x) + t(t-2)(x_0, x_0)\big)\Big].$$

Luego, dividiendo por $t > 0$ y tomando el límite cuando $t \to 0^+$ nos queda

$$(w_0, x - x_0)_H \leq \varphi(x) - \varphi(x_0) + (x_0, x - x_0)_H, \qquad \forall x \in H,$$

Esto prueba que $w_0 - x_0 \in \partial_H \varphi(x_0)$ y con esto podemos concluir la demostración. $\square$

Con este resultado se muestra que $\partial_H \varphi$ es m-acretivo. Por Lema 2.3 podemos afirmar lo siguiente, para cualquier función $\varphi : H \to \mathbb{R}_\infty$ convexa, propia, semicontinua inferior y cada relación B m-acretiva en H siempre existirá una solución $u_\alpha \in H$ para la ecuación

$$u_\alpha + \partial\varphi(u_\alpha) + B_\alpha u_\alpha \ni f, \tag{2.5}$$

con $f \in H$ y $\alpha > 0$.

Proposición 2.6. (Brezis) *Sea B m-acretivo y $\varphi : H \to \mathbb{R}_\infty$ una función propia, convexa y semicontinua inferior. Suponga que existe $C > 0$ tal que*

$$\varphi((I + \alpha B)^{-1} u) \leq \varphi(u) + C\alpha, \quad \forall u \in H \text{ y algún } \alpha > 0. \tag{2.6}$$

Entonces $\partial\varphi + B$ es m-acretivo.

Demostración. Se puede encontrar en [23, Capítulo IV, Proposición 2.2].

Definición 2.17. Sea $A : H \to H$ un operador m-acretivo, se dice que A^{-1} es acotada si

$$\lim_{\|v\|\to\infty} \left\|A^0(v)\right\| = +\infty.$$

Observación 2.6. *Para el operador m-acretivo A se garantiza la sobreyectividad, es decir, $Rg(A) = H$ cuando A^{-1} es acotada, los detalles se pueden ver en* [23, Capítulo IV, Proposición 2.3].

Definición 2.18. La función $\varphi : H \to H'$ es coerciva si

$$\frac{\langle \varphi u, u\rangle}{\|u\|} \to \infty, \text{cuando } \|u\| \to \infty.$$

Proposición 2.7. (Brezis) *Sea $\varphi : H \to \mathbb{R}^+_\infty$ una función propia, convexa y semicontinua inferior definimos la relación $A := \partial\varphi$, entonces los siguientes resultados son equivalentes*

(a) $\lim_{\|u\|\to\infty} \left(\frac{\varphi(u)}{\|u\|}\right) = \infty.$

(b) Para cada $u_0 \in D(\varphi)$, $\displaystyle\lim_{\substack{\|u\|\to\infty \\ [u,v]\in A}} \frac{(v, u-u_0)}{\|u\|} = \infty.$

(c) Existe $u \in H$ tal que $\displaystyle\lim_{\substack{\|u\|\to\infty \\ u\in D(\varphi)}} \frac{(A^0 u, u-u_0)}{\|u\|} = \infty.$

(d) $\displaystyle\lim_{\substack{\|u\|\to\infty \\ u\in D(\varphi)}} \|A^0 u\| = \infty.$

(e) Si A^{-1} es acotado, entonces $Rg(A) = H$.

Demostración. Asumamos que se cumple (a) y sean $v, u \in H$ tales que $[u, v] \in A$, esto es $v \in A(u) = \partial\varphi(u)$. De la definición de $\partial\varphi$ se tiene la desigualdad

$$\varphi(u) \leq \varphi(u_0) + (v, u - u_0), \qquad u_0 \in H.$$

Si dividimos la desigualdad por $\|u\|$ y tomamos el límite cuando $\|u\| \to \infty$ obtenemos

$$\infty = \lim_{\|u\|\to\infty} \left(\frac{\varphi(u)}{\|u\|}\right) \leq \lim_{\substack{\|u\|\to\infty \\ [u,f]\in A}} \frac{(f, u - u_0)}{\|u\|} \leq \infty.$$

Así probamos que (a) implica (b). Recordemos que A^0u es el elemento $v \in A^0(u)$ que posee la menor norma, así pues (c) es un caso particular de (b).

Sea $u \in D(\varphi)$ y consideremos la desigualdad

$$\left|\left\langle A^0u, u-u_0\right\rangle\right| \leq \left\|A^0u\right\| \cdot \|u-u_0\| \leq \left\|A^0u\right\| (\|u\| + \|u_0\|).$$

Para la cual, dividiendo entre $\|u\|$ a ambos lados y tomando el límite en el infinito se obtiene

$$\lim_{\substack{\|u\|\to\infty \\ u\in D(\varphi)}} \frac{(A^0u, u-u_0)}{\|u\|} \leq \lim_{\substack{\|u\|\to\infty \\ u\in D(\varphi)}} \left\|A^0u\right\|,$$

con esta desigualdad se prueba fácilmente que (c) implica (d). De lo mencionado en la Observación 2.6 se puede deducir que (d) implica (e).

Para probar que (e) implica (a), tomamos $R > 0$ y por (e), para cada $\|z\| \leq R$ existe v tal que $A(v) \ni z$ y por ser A^{-1} acotado $\|v\| \leq M$. De la desigualdad

$$\varphi(u) - \varphi(v) \geq \langle z, u-v\rangle, \qquad u \in D(\varphi),$$

obtenemos

$$\langle z, u\rangle \leq \varphi(u) + MR \ \ \forall z \in H \text{ con } |z| \leq R.$$

Por lo tanto,

$$R\|u\| \leq \varphi(u) + MR \ \text{ y } \ \frac{\varphi(u)}{\|u\|} \geq R - \frac{MR}{\|u\|},$$

de esta manera, se muestra que

$$\liminf_{\|u\|\to\infty} \frac{\varphi(u)}{\|u\|} \geq R$$

para cada $R > 0$. Con esto probamos que (e) implica (a). $\square$

2.3 Ecuaciones evolutivas semilineales

En esta subsección se presentará el teorema principal de este trabajo, pero antes de esto se mencionarán algunos resultados conocidos de las *ecuaciones evolutivas*, los cuales son de ayuda para analizar el buen planteamiento de un *problema parabólico degenerado semilineal.*

Lema 2.5. *Sean $a(\cdot), b(\cdot) \in L^1(0,T)$ con $b(t) \geq 0$ p.c.t $0 \leq t \leq T$ y $v : [0,T] \to \mathbb{R}^+$ que satisface*

$$(1-\alpha)v' \leq a(t)v(t) + b(\cdot)v^{\alpha}(t), \quad p.c.t \ \ t \in [0,T],$$

con $0 \leq \alpha < 1$. Entonces

$$v^{1-\alpha}(t) \leq v^{1-\alpha}(0)e^{\int_0^t a(u)du} + \int_0^t e^{\int_s^t a(u)du} b(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Demostración. Dado que v es no negativo reemplazamos a $v(t)$ por $v(t)+\varepsilon$ con algún $\varepsilon>0$ y se obtiene la desigualdad

$$(1-\alpha)v'(t) \leq a(t)(v(t)+\varepsilon)+b(t)(v(t)+\varepsilon)^{\alpha}. \tag{2.7}$$

Dividiendo la desigualdad (2.7) entre $(v(t)+\varepsilon)^{\alpha}$, obtenemos

$$\frac{(1-\alpha)v'(t)}{(v(t)+\varepsilon)^{\boldsymbol{\alpha}}} \leq a(t)(v(t)+\varepsilon)^{1-\alpha}+b(t). \tag{2.8}$$

Ahora definimos $w(t)=e^{-\int_0^t a(u)du}(v(t)+\varepsilon)^{1-\alpha}$ y derivamos la función

$$\begin{aligned} w'(t) &= -e^{-\int_0^t a(u)du}a(t)(1+\varepsilon)^{1-\alpha}+(1-\alpha)(v(t)+\varepsilon)^{\alpha}e^{-\int_0^t a(u)du}v'(t) \\ &= e^{-\int_0^t a(u)du}\Big(-a(t)(v(t)+\varepsilon)^{1-\alpha}+(1-\alpha)(v(t)+\varepsilon)^{-\alpha}v'(t)\Big). \end{aligned}$$

De la desigualdad (2.8) nos resulta

$$w'(t) \leq e^{-\int_0^t a(u)du}b(t).$$

Así, al integrar en ambos lados de la desigualdad en el intervalo $[0,t]$, obtenemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \int_0^t w'(s)ds &\leq \int_0^t e^{\int_0^s a(u)du}b(s)ds, \\ w(t)-w(0) &\leq \int_0^t e^{\int_0^s a(u)du}b(s)ds. \end{aligned}$$

Reemplazando $w(t)$ por $e^{-\int_0^t a(u)du}(v(t)+\varepsilon)^{1-\alpha}$ y posteriormente tomando el límite cuando $\varepsilon\to 0$, se obtiene finalmente

$$v^{1-\alpha}(t) \leq v^{1-\alpha}(0)e^{\int_0^t a(u)du}+\int_0^t e^{\int_0^s a(u)du}b(s)ds, \quad 0\leq t\leq T.$$

□

Definición 2.19. Sea X un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$ y $f:\mathbb{R}\to X$, la derivada de f por derecha se define como el límite

$$f'_+(x)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

si el límite existe, entonces se dice que f es diferenciable por derecha en x.

Definición 2.20. Una función $f : [0,T] \longrightarrow X$ es *absolutamente continua* si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada secuencia de intervalos disjuntos en $[0,T]$

$$\sum_{n}^{\infty}(b_n - a_n) < \delta \Longrightarrow \sum_{n}^{\infty} \|f(b_n) - f(a_n)\|_X < \varepsilon,$$

donde $\|\cdot\|_X$ es la norma en X.

Sean H un espacio de Hilbert y A una relación m-acretiva en H con $u_0 \in D(A)$ y además una función $f : [0,T] \to H$. Una solución de un problema evolutivo es una función $u : [0,T] \to H$ tal que $u(0) = u_0$ y satisface

$$\frac{du}{dt}(t) + A(u(t)) \ni \omega u(t) + f(t) \quad \text{p.c.t } t \in [0,T],\ \omega \in \mathbb{R}, \tag{2.9}$$

donde $\frac{du}{dt}$ denota la derivada débil de u.

El siguiente teorema nos da las condiciones suficientes para garantizar la existencia y unicidad de la solución al problema (2.9).

Teorema 2.2. (Kato) *Sea A m-acretivo en un espacio de Hilbert H y $\omega \geq 0$. Para cada $u_0 \in D(A)$ (ver Definición 2.2) y cada función $f : [0,T] \to H$ absolutamente continua, existe una única función absolutamente continua $u : [0,T] \to H$, tal que $u(0) = u_0$ y satisface (2.9) para casi todo $t > 0$. También, u es Lipschitz continua y diferenciable por derecha con $u(t) \in D(A)$ para $t \geq 0$.*

Demostración. Ver, por ejemplo [23, Capítulo IV, Teorema 4.1].

Definición 2.21. Sea X un espacio de Banach reflexivo, consideramos un operador $\mathcal{N} : X \to X'$. Decimos que $\mathcal{N}$ es monótono si $\langle \mathcal{N}(u) - \mathcal{N}(v), u - v\rangle \geq 0$ para todo par de elementos $u, v \in X$. $\mathcal{N}$ es *hemicontinua* si para cada $u, v \in X$, la función de valores reales $t \to \langle \mathcal{N}(u + tv), v\rangle$ es continua.

Observación 2.7. *Asumamos que X es un espacio de Banach separable y reflexivo, el cual está contenido en un espacio de Hilbert H, cuya inclusión es densa y continua. Si identificamos a H con su dual H' mediante la aplicación de Riesz y además identificamos a H con un subespacio de X' de la forma*

$$f(v) = (f, v)_H, \quad f \in H,\ \forall\ v \in X.$$

Supongamos que $\mathcal{N} : X \longrightarrow X'$ es monótono y hemicontinuo, luego podemos el operador A en H con dominio $D(A) = \{u \in X : A(u) \in H\}$ tal que evaluado en $u \in D(A)$ se define como $A(u) := \mathcal{N}u$. Dado que

$$(Au - Av, u - v)_H = \langle \mathcal{N}u - \mathcal{N}v, u - v\rangle, \quad \forall u, v \in D(A),$$

y $\mathcal{N}$ es monótono, entonces se sigue que A es acretivo en H.

Definición 2.22. $\mathcal{N} : H \to H'$ es estrictamente monótono en H si $\langle \mathcal{N}u - \mathcal{N}v, u - v\rangle > 0$ para todo $u \neq v$ en H. Se dice que $\mathcal{N}$ es fuertemente monótono si existe $C > 0$ para el cual

$$\langle \mathcal{N}u - \mathcal{N}v, u - v\rangle \geq C\,\|u - v\|_H^2, \quad u, v \in H. \tag{2.10}$$

Observación 2.8. *Si el operador $\mathcal{N}$ es lineal tomamos $v = 0$ y $u \in H$ en la desigualdad (2.10) y obtenemos*

$$\lim_{\|u\|\to\infty} \frac{\langle \mathcal{N}u, u\rangle}{\|u\|} \geq \lim_{\|u\|\to\infty} C\,\|u\| = \infty,$$

lo cual nos implica la coercividad (ver Definición 2.18) del operador.

Definición 2.23. Sea E es un espacio vectorial. Un operador $\mathcal{N} : E \longrightarrow E^*$ se dice simétrico si $\langle \mathcal{N}u, v\rangle = \langle \mathcal{N}v, u\rangle$ para cada u, v en E.

Dado E un espacio vectorial, denotamos su dual algebraico por E^* y sea $\mathcal{N} : E \to E^*$ un operador simétrico y no negativo, es decir, $\mathcal{N}$ es monótono. El operador $\mathcal{N}$ induce el semiproducto punto

$$b(x, y) := \langle \mathcal{N}x, y\rangle \quad \forall x, y \in E,$$

en E y este a su vez induce una seminorma, la cual está dada por

$$|x|_b := \langle \mathcal{N}x, x\rangle^{1/2} \quad \forall x \in E.$$

Denotamos el correspondiente espacio seminormado por E_b. Por [24, Teorema 3.5] el espacio dual asociado E_b' es un espacio de Banach.

Observación 2.9. *Podemos demostrar que el operador $\mathcal{N}$ induce una seminorma en E. En primer lugar, mostramos que $|\langle \mathcal{N}v, u\rangle|^2 \leq \langle \mathcal{N}v, v\rangle\langle \mathcal{N}u, u\rangle$, utilizando un procedimiento similar al que se utiliza para demostrar la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Utilizamos este resultado para llegar a la desigualdad $|u + v|_b \leq |u|_b + |v|_b$. Además, se cumple que $|\alpha u|_b = |\alpha||u|_b$ para cualquier α real y u en E. Por lo tanto, $|\cdot|_b$ es una seminorma en E y se denota por E_b al espacio seminormado correspondiente.*

2.3.1 Teorema principal

Dado E un espacio vectorial y $\mathcal{N} : E \longrightarrow E^*$ un operador lineal, simétrico y monótono en E. Sea E_b el espacio seminormado con la seminorma que induce $\mathcal{N}$ dada por

$$|x|_b = \langle \mathcal{N}x, x\rangle^{1/2} \quad \forall x \in E.$$

Además, sea $\mathcal{M} \subset E \times E_b'$ una relación con dominio $\mathcal{D} = \{x \in E : \mathcal{M}(x) \neq \emptyset\}$. Un problema semilineal consiste en:

Problema 2.1. Encontrar $u : [0, T] \longrightarrow E$ para el cual $\mathcal{N}u \in C([0, T]; E_b')$ y $\mathcal{N}u(\cdot)$ es absolutamente continua en cada intervalo $[\delta, T]$ con $0 < \delta < T$. La función u debe satisfacer

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{N}u(t)) + \mathcal{M}(u(t)) \ni f(t), \qquad 0 < t < T, \tag{2.11}$$

y además $\mathcal{N}u(0) = \mathcal{N}u_0$ en E_b', u_0 es un valor inicial que pertenece a $\mathcal{D}$.

Nos podemos apoyar en el Teorema 2.2 para hacernos una idea de las condiciones que se pueden imponer a $\mathcal{N}, \mathcal{M}$ y f para garantizar el buen planteamiento del problema.

Observación 2.10. *Supongamos que E_b es un espacio de Hilbert, donde $b(\cdot,\cdot)$ es el producto interior y $(E_b, |\cdot|_b)$ completo. Así, de la definición de $\mathcal{N}$ se tiene que*

$$\langle \mathcal{N}u, v\rangle = b(u,v) = \langle \mathcal{R}_{E_b} u, v\rangle, \quad \forall u, v \in E.$$

Por lo tanto, $\mathcal{N}$ es el isomorfismo de Riesz de E_b en E_b'. Recordemos que $\mathcal{R}_{E_b}$ denota el isomorfirmo de Riesz en E_b. Dado que ahora $b(\cdot,\cdot)$ es un producto interior, usaremos por comodidad la notación $(\cdot,\cdot)_{E_b}$ en su lugar, luego

$$\langle \mathcal{N}u, v\rangle = (u,v)_{E_b}.$$

Como se supuso a E_b un espacio de Hilbert, entonces por el isomorfismo de Riesz, E_b es isomorfo a E_b'. Podemos identificar a E_b con E_b' como si en esencia fueran el mismo espacio y podemos interpretar a $\mathcal{N}$ como la identidad, esto es, $\mathcal{N}u = u$ para todo u en E_b. Sean u_1, u_2 soluciones de (2.11) con datos f_1 y f_2 respectivamente, entonces restando las ecuaciones se tiene lo siguiente

$$\frac{d}{dt}\Big(u_2(t)) - u_1(t)\Big) + \mathcal{M}(u_2(t)) - \mathcal{M}(u_1(t)) \ni f_2(t) - f_1(t).$$

Si a cada término de la ecuación lo evaluamos en $u_2(t) - u_1(t)$ y luego aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz en el lado derecho de la ecuación y la propiedad

$$\frac{d}{dt}(u(t), u(t))_{E_b} = 2(\frac{d}{dt}u(t), u(t))_{E_b}, \quad \forall t \in [0,T],$$

en el lado izquierdo, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_2(t) - u_1(t)\|_b^2 + \langle \mathcal{M}(u_2(t)) - \mathcal{M}(u_1(t)), u_2(t) - u_1(t)\rangle \\ \leq \|f_2(t) - f_1(t)\|_{E_b'} \|u_2(t) - u_1(t)\|_b\end{aligned}$$

supongamos que la relación $\mathcal{M}$ es monótona en E, entonces obtenemos la desigualdad

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_2(t) - u_1(t)\|_b^2 \leq \|f_2(t) - f_1(t)\|_{E_b'} \|u_2(t) - u_1(t)\|_b,$$

si identificamos las funciones

$$\alpha = \frac{1}{2},\ v(t) = \|u_2(t) - u_1(t)\|_b^2,\ a(t) = 0 \text{ y } b(t) = \|f_2(t) - f_1(t)\|_{E_b'}.$$

Podemos aplicar el Lema 2.5 y obtener la desigualdad

$$\|u_2(t) - u_1(t)\|_b \leq \|u_2(0) - u_1(0)\|_b + \int_0^t \|f_2(s) - f_1(s)\|_{E_b'} ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

De la cual se puede deducir la unicidad de la solución gracias a la condición inicial. Recordemos que estamos tratando a $\mathcal{N}$ como la identidad, entonces la ecuación (2.11) se *convierte en una ecuación de la forma (2.9). En el caso en el que el espacio E_b es un espacio de Hilbert la ecuación (2.11) es equivalente a la siguiente ecuación en E_b*

$$\frac{du}{dt} + \mathcal{N}^{-1} \circ \mathcal{M}(u(t)) \in \mathcal{N}^{-1} f(t), \quad 0 < t < T.$$

Ahora nos preguntamos bajo qué condiciones el operador $\mathcal{A} := \mathcal{N}^{-1} \circ \mathcal{M}$ es m-acretivo en E_b, esto con el fin de apoyarnos en el Teorema 2.2 para poder garantizar la existencia de la solución a la ecuación. Definimos $[x, y] \in \mathcal{A}$ si y solo si $\mathcal{N}y = w$ para algún w tal que $[x, w] \in \mathcal{M}$.

Sean $[x_1, y_1], [x_2, y_2] \in \mathcal{A}$ tales que $\mathcal{N}y_i = w_i$ y $[x_i, w_i] \in \mathcal{M}$ con $i = 1, 2$. Entonces tenemos

$$(y_2 - y_1, x_2 - x_1)_{E_b} = \langle \mathcal{N}(y_2 - y_1), x_2 - x_1 \rangle = \langle w_2 - w_1, x_2 - x_1 \rangle .$$

De aquí se sigue que $\mathcal{A}$ es acretivo si $\mathcal{M}$ es monótono. Ahora, supongamos que $Rg(\mathcal{N} + \mathcal{M}) = E_b'$ y sea $f \in E_b$, entonces existe $u \in E_b$ tal que $\mathcal{N}u + \mathcal{M}u \ni \mathcal{N}f$, luego se cumple $u + \mathcal{N}^{-1} \circ \mathcal{M}u \ni f$ lo que es lo mismo que $(I + \mathcal{A})u \ni f$. Por lo tanto, $\mathcal{A}$ es m-acretivo si $\mathcal{M}$ es monótono y $Rg(\mathcal{N} + \mathcal{M}) = E_b'$.

De esta manera, por las condiciones que hemos impuesto podemos aplicar el Teorema 2.2 y tenemos que para cada función $f : [0, T] \to E_b'$ absolutamente continua y para cada $u_0 \in \mathcal{D}$ existe una única función absolutamente continua $u : [0, T] \to E_b$ tal que satisface la ecuación (2.11) y además $u(0) = u_0$.

Para el buen planteamiento del problema consideramos las siguientes hipótesis:

H1. $\mathcal{N}$ simétrico, monótono y lineal en E.

H2. La relación $\mathcal{M}$ es monótona en E.

H3. $Rg(\mathcal{N} + \mathcal{M}) = E_b'$.

Teorema 2.3. *Asumamos que las hipótesis* **H1-H3** *se cumplen, entonces para cada $u_0 \in \mathcal{D} = \{x \in E : \mathcal{M}(x) \neq 0\}$, u_0 un valor inicial y para cada $f \in W^{1,1}(0, T; E_b')$ (ver Definición 1.36) existe una solución u del Problema 2.1 con*

$$\mathcal{N}\boldsymbol{u} \in W^{1,\infty}(0, T; E_b'),\ u(t) \in \mathcal{D},\ 0 \leq t \leq T \ y\ \mathcal{N}u(0) = \mathcal{N}u_0.$$

Si además $\mathcal{N} + \mathcal{M}$ es estrictamente monótona, entonces la existencia es única.

La demostración de la existencia de la solución la dividiremos en dos partes, en la primera parte se procede haciendo una extensión del espacio cociente $E_b/ker\mathcal{N}$ a un espacio de Hilbert, en donde posteriormente se planteará un problema equivalente al Problema 2.1, es decir, la existencia y unicidad de la solución de un problema implica la existencia y unicidad de la solución del otro problema equivalente. En la segunda parte se mostrará que el problema equivalente al Problema 2.1 cumple las hipótesis del Teorema 2.2 para así poder garantizar la existencia de su solución.

Observación 2.11. *En este trabajo tan solo demostraremos la existencia de la solución, dado que no disponemos de las herramientas suficientes para probar todas las propiedades que posee la solución del Problema 2.1.*

2.3.2 Extensión del espacio $E/Ker\mathcal{N}$

Sea $\mathcal{N}$ un operador el cual es lineal, simétrico y monótono de E en E^*, de la desigualdad de Chauchy-Schwarz tenemos

$$|\langle \mathcal{N}x, y\rangle|^2 \leq \langle \mathcal{N}x, x\rangle \langle \mathcal{N}y, y\rangle = |x|_b^2 \, |y|_b^2 \qquad \forall x, y \in E.$$

De aquí se deduce la continuidad del operador $\mathcal{N}$ de E en E'. Denotamos el kernel de $\mathcal{N}$ por

$$K = \{x \in E : \mathcal{N}x = 0\} = \{x \in E : \langle \mathcal{N}x, x\rangle = 0\} = \{x \in E : b(x, x) = 0\}.$$

Al ser $\mathcal{N}$ lineal tenemos que K es un subespacio de E y denotamos su correspondiente espacio cociente por E/K, donde cada elemento del espacio tiene la forma $\tilde{x} = x + K = \{x + y : y \in K\}$ y definimos en este espacio el producto interior dado por

$$\tilde{b}(\tilde{x}, \tilde{y}) = b(x, y), \quad \forall x, y \in E.$$

Comprobemos que en efecto $\tilde{b}$ está bien definida. Sean $\tilde{x} = \tilde{h}$ y $\tilde{y} = \tilde{z}$, luego existen $k_1, k_2 \in K$ tales que $x = h + k_1$ y $y = z + k_2$, de esta manera tenemos

$$\tilde{b}(\tilde{x}, \tilde{y}) = b(x, y) = b(h + k_1, z + k_2). \tag{2.12}$$

Dado que $\mathcal{N}$ es simétrico y lineal, el operador $b(\cdot, \cdot)$ será bilineal y simétrico. Utilizando estas propiedades nos resulta la igualdad

$$\tilde{b}(\tilde{x}, \tilde{y}) = b(h, z) + b(k_1, z + k_2) + b(k_2, h + k_1) = b(h, z) = \tilde{b}(\tilde{h}, \tilde{z}). \tag{2.13}$$

De (2.12) y (2.13) se deduce la linealidad y simetría de $\tilde{b}$. Así, para comprobar que $\tilde{b}(\cdot, \cdot)$ es un producto escalar en E/K sólo hace falta probar que $\tilde{b}(\tilde{x}, \tilde{x}) = 0$ si y solo si $\tilde{x} = K = 0_{E/K}$. Sea $\tilde{x} = K$, entonces $\tilde{b}(\tilde{x}, \tilde{x}) = b(x, x) = 0$ y además si $\tilde{b}(\tilde{x}, \tilde{x}) = b(x, x) = 0$, entonces $x \in K$ y $\tilde{x} = K$.

La completación del espacio E/K con su correspondiente norma es un espacio de Hilbert W cuyo producto escalar es una extensión de $\tilde{b}(\cdot, \cdot)$ (ver, por ejemplo [24, Teorema 4.2]). Dado que la completación del espacio E/K viene con una función lineal e inyectiva $T : E/K \to W$ con rango denso en W, podemos entender a E/K como un subconjunto propio denso de W, con lo cual la aplicación canónica $q : E \to E/K$ sobre el espacio cociente dada por

$$q(x) := \tilde{x} = \{x + y : y \in K\}, \quad \forall x \in E$$

es un homomorfismo estricto de E_b en W con rango denso en W y su aplicación dual $q' : W' \to E'_b$ está dada por

$$q'(g)(x) = g(q(x)) \quad \forall g \in W', \ \forall x \in E_b.$$

Por definición $q\prime$ es lineal. Para mostrar que q' es sobreyectiva recurrimos a la propiedad

$$Im\ q' = (Ker\ \mathcal{N})^0 = K^0.$$

Sea $f \in E'_b$, entonces $|f(x)| \leq C \langle \mathcal{N}x, x\rangle^{1/2} = 0$ para todo $x \in K$. Luego, $f \in K^0 = Im\ q'$ con lo cual se prueba la sobreyectividad de q'. La inyectividad de q' se puede obtener con [24, Capítulo I, Teorema 5.1]. Finalmente podemos concluir que q' es un isomorfismo de W' en E'_b.

2.3.3 Construcción del problema equivalente

Sea $\mathcal{N}_0 : W \to W'$ el isomorfismo de Riesz dado por

$$\langle \mathcal{N}_0 v, w \rangle = (v, w)_W, \qquad \forall v, w \in W.$$

Para cada $x, y \in E_b$, tenemos

$$\langle \mathcal{N} x, y \rangle = b(x, y) = \tilde{b}(q(x), q(y)) = \langle \mathcal{N}_0 q(x), (q(y)) \rangle = q'\Big(\mathcal{N}_0 q(x)\Big)(y).$$

Reescribimos el operador $\mathcal{N}$ en la forma

$$\mathcal{N} = q' \mathcal{N}_0 q. \tag{2.14}$$

Para obtener una forma similar para la relación $\mathcal{M} : \mathcal{D} \to E_b'$, definimos la relación $\mathcal{M}_0 \subset W \times W'$ de la siguiente forma

$$g \in \mathcal{M}_0(\tilde{x}) \text{ si y sólo si existe un } x \in \mathcal{D} \text{ con } q(x) = \tilde{x} \text{ y } q'(g) \in \mathcal{M}(x).$$

De esta manera obtenemos una relación $\mathcal{M}_0$ con dominio $q(\mathcal{D}) = \{\tilde{x} : x \in \mathcal{D}\}$ para la cual

$$\mathcal{M} = q' \mathcal{M}_0 q. \tag{2.15}$$

Note que q puede dar distintos valores para cualquier elemento en E, luego $\mathcal{M}_0$ puede ser una relación incluso si $\mathcal{M}$ es una función. Los siguientes resultados nos muestran las relaciones entre $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{N}_0$.

Lema 2.6.

(a) Para cada $\tilde{x} = q(x) \in W$, $q'(g) \in \mathcal{M}$ si y sólo si $g \in \mathcal{M}_0(\tilde{x})$, y en este caso tenemos $q'(g)(x) = g(\tilde{x})$.

(b) Se tiene la pertenencia $q'(g) \in (\mathcal{N} + \mathcal{M})(x)$ si y sólo $g \in (\mathcal{N}_0 + \mathcal{M}_0)(\tilde{x})$.

Demostración.

(a). Sean $\tilde{x} = q(x) \in W$ y $q'(g) \in \mathcal{M}(x)$, entonces por la ecuación (2.15)

$$q'(g) \in \mathcal{M}(x) = q'(\mathcal{M}_0 q(x)).$$

Dado que q' es un isomorfismo, tenemos que $g \in \mathcal{M}_0 q(x)$.

Supongamos que $g \in \mathcal{M}_0(\tilde{x})$, por definición de $\mathcal{M}_0$ existe $x \in \mathcal{D}$ tal que $q(x) = \tilde{x}$ y $q'(g) \in \mathcal{M}(x)$.

(b). Si suponemos que $q'(g) \in (\mathcal{N} + \mathcal{M})(x)$, entonces $q'(g) \in (q'\mathcal{N}_0 q + q'\mathcal{M}_0 q)(x)$ por (2.14) y (2.15). De la linealidad e inyectividad de q' obtenemos que $g \in (\mathcal{N}_0 + \mathcal{M}_0)(\tilde{x})$.

Supongamos que $g \in (\mathcal{N}_0 + \mathcal{M}_0)(\tilde{x})$ y recordemos que $q(x) = \tilde{x}$, aplicando q' a ambos lados de la pertenencia obtenemos $q'(g) \in (q'\mathcal{N}_0 q(x) + q'\mathcal{M}_0 q(x)$. Nuevamente por (2.14) y (2.15) tenemos $q'(g) \in (\mathcal{N} + \mathcal{M})(x)$. $\square$

Corolario 2.3.

(a) $\mathcal{M} : D \to E_b'$ *es monótono si y sólo si* $\mathcal{M}_0 : q[D] \to W'$ *es monótono.*

(b) q' *es una biyección de* $Rg(\mathcal{N}_0 + \mathcal{M}_0)$ *en* $Rg(\mathcal{N} + \mathcal{M})$.

Demostración.

(a). Supongamos $[\tilde{x}, g] \in \mathcal{M}_0$, esto ocurre si y sólo si existe $x \in \mathcal{D}$ tal que $q(x) = \tilde{x}$ y $[x, q'(g)] \in \mathcal{M}$, luego

$$\langle g, \tilde{x} \rangle_{W'} = g(\tilde{x}) = g(q(x)) = \langle q', x \rangle_{E_b'} .$$

De aquí se deduce que $\mathcal{M}$ es monótono si y sólo si $\mathcal{M}_0$.

(b). Esto se deduce del Lema 2.6 y del hecho de que q' es un isomorfismo. □

Supongamos que u es una solución de la ecuación (2.11) construida con los operadores $\mathcal{N}$ y $\mathcal{M}$. Usando el hecho de que q' es un isomorfismo de W' en E_b' y junto a los resultados obtenidos para las igualdades (2.14) y (2.15) se sigue que $\tilde{u} = q(u)$ es una solución de

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{N}_0 \tilde{u}(t)) + \mathcal{M}_0(\tilde{u}(t)) \ni \tilde{f}(t), \quad 0 < t < T, \tag{2.16}$$

donde $\tilde{f}(t) = (q')^{-1} f(t)$. También se cumple que si $\tilde{u}$ es una solución de (2.16), entonces para casi todo $t \in (0, T)$ y $\tilde{u}(t) \in q[D]$, existe $u(t) \in D$ con $q(u(t)) = \tilde{u}(t)$. Dado que q' es un isomorfismo y $\mathcal{N} u(t) = q' \mathcal{N}_0 \tilde{u}(t),\ 0 < t < T$, se sigue que u es una solución de (2.11). Esto prueba el siguiente lema.

Lema 2.7. *Una función* $u : [0, T] \to E$ *es solución de* (2.11) *si y sólo si* $\tilde{u} = q \circ u : [0, T] \to W$ *es una solución de (2.16).*

Podemos observar que el problema (2.16) cumple con la condiciones propuestas en la Observación 2.10, por tanto del Teorema 2.2 y de el Lema 2.7, se garantiza la existencia de la solución al Problema 2.1. □

Capítulo 3

Contraste de dos teorías evolutivas

En este capítulo estudiaremos las condiciones de un problema parabólico mixto degenerado, estudiado en [3, Problema 2.1]. A diferencia de [3], el estudio del buen planteamiento lo haremos a través de la teoría desarrollado por R.E Showalter en [23, Capítulo IV, Sección VI], la cual revisamos en el Capítulo 2. Para desarrollar el análisis del buen planteamiento, primero se debe hacer el encaje del problema parabólico mixto degenerado a un problema semilineal de la forma (2.11), para posteriormente comprobar que se satisfacen las hipótesis del Teorema 2.3 y así poder garantizar el buen planteamiento del problema.

El siguiente lema será de utilidad para determinar el espacio en el que se planterá el problema semilineal.

Lema 3.1. *Sea $V = A \times B$, donde A y B son espacios de Hilbert y su correspondiente producto interior está dado por $((a,b),(c,d))_V = (a,c)_A + (b,d)_B$, donde $a, c \in A$ y $b, d \in B$, entonces $V^* \cong A^* \times B^*$.*

Demostración. Primero consideremos las funciones $i_A : A \to A \times B$ tal que $i_A(a) = (a, 0)$ y $i_B : B \to A \times B$ para la cual $i_B(b) = (0, b)$. Sea $\phi \in V^*$, entonces ϕ es lineal y se cumple que $\phi(a,b) = \phi(a,0) + \phi(0,b) = \phi \circ i_A(a) + \phi \circ i_B(b)$. Definimos $f = \phi \circ i_A$ y $g = \phi \circ i_B$, así $\phi(a,b) = f(a) + g(b)$, claramente $f \in A^*$ y $g \in B^*$. Podemos definir una función

$$\begin{aligned} \Pi : V^* &\to A^* \times B^* \\ \phi &\to \ (f, g). \end{aligned}$$

Comprobemos que Π está bien definida. Supongamos que $\phi = \phi_1 \in V^*$, entonces para cada par ordenado de la forma $(a, 0) \in A \times B$ tenemos que $\phi(a, 0) = \phi_1(a, 0)$. Luego las funciones componentes $f = \phi \circ i_A$ y $f_1 = \phi_1 \circ i_A$ son iguales y esto se satisface de igual forma para $g = g_1$. Por lo tanto, $\Pi(\phi) = \Pi(\phi_1)$.

Dados $\phi, \varphi \in V^*$ tales que $\phi = f + g$ y $\varphi = f_1 + g_1$, la linealidad de Π la obtenemos a partir de que $\big(\phi + \varphi\big)(a, 0) = \pi(a, 0) + \varphi(a, 0) = f + f_1$ y de igual manera para g y g_1. Si tomamos un par de funciones $\phi, \varphi \in V^*$ la cuales son distintas en al menos un punto $(a, b) \in A \times B$ tendremos que las funciones $\phi \circ i_A$ y $\varphi \circ i_A$ son distintas o en su defecto $\phi \circ i_B$ y $\varphi \circ i_B$ son distintas, lo cual implica la inyectividad de Π.

Ahora mostremos que la función Π es sobreyectiva y por tanto, es un isomorfismo de V^* en $A^* \times B^*$. Dado $(f, g) \in A^* \times B^*$ definimos la función $\phi(a, b) = f(a) + g(b)$, de aquí podemos ver que $f(a) = \phi(a, 0) = \phi \circ i_A$ y $g(b) = \phi(0, b) = \phi \circ i_B$, luego $\Pi(\phi) = (f, g)$. $\square$

3.1 Revisión de las condiciones de un problema parabólico degenerado mixto

En este apartado se presentan las hipótesis con las cuales el problema parabólico mixto degenerado está bien planteado (ver mas detalles en [3]). Posteriormente se hará el encaje del problema mixto a un problema semilineal.

Sea M un espacio de Banach reflexivo y X y Y espacios de Hilbert tales que X está contenido en Y y su inclusión es densa y continua. Sea $a : X \times X \to \mathbb{R}$ y $b : X \times M \to \mathbb{R}$ dos operadores bilineales y continuos y $R : Y \to Y'$ un operador lineal continuo. Sea A el operador lineal y continuo inducido por la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$, $A : X \to X'$ está dado por

$$\langle Au, w\rangle_X := a(u, w), \quad \forall u, w \in X.$$

Sea V el kernel de la forma bilineal b dado por

$$V := \{v \in X : b(v, \mu) = 0, \ \forall \mu \in M\}.$$

Denotamos por W a la clausura del kernel con respecto a la norma de Y,

$$W := \overline{V}^{\|\cdot\|_Y}.$$

Ahora, consideramos el siguiente problema. Dados $u_0 \in Y$, $f \in L^2(0, T; X')$ y $g \in L^2(0, T; M')$ el problema parabólico mixto consiste en lo siguiente:

Problema 3.1. Encontrar $u \in L^2(0, T; X)$ y $\lambda \in L^2(0, T; M)$ que satisfacen la ecuación:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}[\langle Ru(t), v\rangle_Y + b(v, \lambda(t))] + \langle Au(t), v\rangle_X = \langle f(t), v\rangle_X && \forall v \in X,\\
&b(u(t), \mu) = \langle g(t), \mu\rangle_M && \forall \mu \in M,\\
&\langle Ru(0), v\rangle_Y = \langle Ru_0, v\rangle_Y && \forall v \in Y.
\end{aligned}$$

Para el buen planteamiento del problema consideramos las siguientes hipótesis.

h1. La forma bilineal b satisface la condición de *inf-sup*, esto es, existe un $\beta > 0$ tal que

$$\sup_{v \in X} \frac{b(v, \mu)}{\|v\|_X} \geq \beta \|\mu\|_M, \qquad \forall \mu \in M.$$

h2. R es autoadjunto y monótono en V, esto es

$$\langle Rv, w\rangle_Y = \langle Rw, v\rangle_Y, \qquad \langle Rv, v\rangle_Y \geq 0, \quad \forall v, w \in V.$$

h3. El operador A es autoadjunto en V, esto es

$$\langle Av, w\rangle_X = \langle Aw, v\rangle_X, \quad , \forall v, w \in V.$$

h4. Existen $\gamma > 0$ y $\alpha > 0$ tales que

$$\langle Av, v\rangle_X + \gamma \langle Rv, v\rangle_Y \geq \alpha \|v\|_X^2 \quad \forall v \in V.$$

h5. El dato inicial u_0 pertenece a W.

h6. La función dato g pertenece a $H^1(0, T; M')$ (ver Definición 1.36).

Teorema 3.1. *Asumamos que las hipótesis* **h1-h6** *se cumplen, entonces el Problema 3.1 tiene una única solución* (u, λ) *con* $\lambda \in C([0, T]; M)$.

Demostración. Ver, por ejemplo [3, Teorema 2.1]

Observación 3.1. *Si definimos los operadores* $B : X \to M'$ *y* $B^T : M \to X'$ *de la siguiente manera*

$$b(u, \hat{\lambda}) = \left\langle Bu, \hat{\lambda} \right\rangle = \left\langle B^T \hat{\lambda}, u \right\rangle, \qquad \forall (u, \hat{\lambda}) \in X \times M,$$

entonces el Problema 3.1 es equivalente al siguiente problema.

Problema 3.2. Encontrar $u \in L^2(0, T; X)$ y $\lambda \in L^2(0, T; M)$ que satisface la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Ru(t) + Au(t) + B^T \lambda(t) &= f(t) \\ -Bu(t) &= -g(t) \\ Ru(0) &= Ru_0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Para el encaje del problema parabólico mixto degenerado al problema semilineal lo haremos con el Problema 3.2 por comodidad.

Definamos los operadores $\mathcal{N}$ y $\mathcal{M}$ junto con la variable $\tilde{u}$ y el dato $\tilde{f}$ de la siguiente forma

$$\mathcal{N} := \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M} := \begin{pmatrix} A & B^T \\ -B & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{u} := \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix} \text{ y } \tilde{f} := \begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix}.$$

Además, definimos el espacio $E := X \times M$. De esta manera, el sistema (3.1) se puede reescribir en la forma, hallar $\tilde{u} \in E$ tal que

$$\frac{d}{dt} \mathcal{N} \tilde{u}(t) + \mathcal{M} \tilde{u}(t) = \tilde{f}(t), \quad t \in [0, T]. \tag{3.2}$$

Se puede observar que el sistema (3.1) corresponde a una ecuación de la forma (2.11). Debemos comprobar que en efecto la ecuación (3.2) corresponde a un problema semilineal. Es decir, $\mathcal{N}$ es lineal, simétrico y monótono. Además, la relación $\mathcal{M}$ debe ser un subconjunto de $E \times E'_b$, donde E'_b es el dual asociado a la seminorma que induce $\mathcal{M}$. Dividiremos los procedimientos en secciones en donde cada sección estará dedicada a comprobar ciertos aspectos del Teorema 2.3 para al final concluir con las condiciones bajo las cuales el Problema 3.1 tiene solución y si esta es única.

3.2 Encaje a un problema semilineal

Este apartado estará dedicado a comprobar que la reescritura del Problema 3.2 corresponde a un problema semilineal, para esto es necesario comprobar que se satisface **H1** o en su defecto pedir condiciones en las cuales se satisface la hipótesis. Además, se determinará el espacio en el que se plantea la ecuación semilineal.

Sean $\tilde{u} = \binom{u}{u_1}, \tilde{v} = \binom{v}{v_1} \in X \times M$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Por definición de $\mathcal{N}$ tenemos las siguientes igualdades

$$\langle \mathcal{N}\tilde{u}, \tilde{v} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} Ru \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ v_1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle Ru, v \rangle, \tag{3.3}$$

$$\mathcal{N}(\tilde{u} + \alpha\tilde{v}) = \begin{pmatrix} Ru \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} Rv \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{N}(\tilde{u}) + \alpha\mathcal{N}(\tilde{v}), \qquad \forall u, v \in X. \tag{3.4}$$

De (3.3) y **h2** deducimos la monotonía y simetría de $\mathcal{N}$ en $V \times M$ y además (3.4) se obtiene a partir de la linealidad de R en X, la cual implica la linealidad de $\mathcal{N}$ en E.

Observación 3.2. *Es necesario pedir que R no solo sea monótono y autoadjunto en V, como lo propone la hipótesis* **h2**, *si no también en X debido a que $\mathcal{N}$ debe ser simétrico y monótono en E. Con lo anterior podemos garantizar que se satisface* **H1**. *Notemos que de* (3.3) *se tiene $\mathcal{N} : E \to E^*$.*

Definamos el espacio E'_b como el dual del espacio $E = X \times M$ con la seminorma inducida por $\mathcal{N}$, la cual denotaremos con $|\cdot|_b$ y sea $\mathcal{D} := \{\binom{u}{\eta} \in X \times M : \mathcal{M}\binom{u}{\eta} \in E'_b\}$. A continuación describiremos de forma más precisa al espacio E'_b.

Consideremos el espacio seminormado X_1 como el par $(X, \|\cdot\|_{b_1})$, donde

$$\|v\|_{b_1} = \|(v, 0)\|_b = \langle Rv, v \rangle^{1/2}, \qquad \forall v \in X.$$

También, el espacio seminormado M_2 como el par $(M, \|\cdot\|_{b_2})$ cuya norma está definida por

$$\|\mu\|_{b_2} := \|(0, \mu)\|_b = \langle R0, 0 \rangle^{1/2} = 0, \qquad \forall \mu \in M.$$

Luego, tenemos que $M'_2 \cong \{0\}$. Ahora queremos mostrar que $E'_b \cong X'_1 \times \{0\}$, por el Lema 3.1 se tiene que el dual algebraico de un espacio producto es isomorfo al espacio vectorial que se forma por el producto de los dos duales algebraicos. Nos resta probar que para cualquier $f \in E'_b$ su correspondiente par ordenado $(\tilde{f}, \tilde{g})$ pertenece al espacio $X'_1 \times \{0\}$, cuya norma está dada por

$$\left\|(\tilde{f}, \tilde{g})\right\| := \sqrt{\left\|\tilde{f}\right\|^2_{X'_1} + \|\tilde{g}\|^2_{M'_2}} = \sqrt{\left\|\tilde{f}\right\|^2_{X'_1} + 0} = \left\|\tilde{f}\right\|_{X'_1}.$$

Sea $f \in E'_b$. Definimos $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ como en el Lema 3.1

$$\tilde{f}(x) = f(x, 0) \qquad \forall x \in X_1, \tag{3.5}$$

$$\tilde{g}(\mu) = f(0, \mu) \qquad \forall \mu \in M_2. \tag{3.6}$$

De esta manera, $f(x,\mu) = \tilde{f}(x) + \tilde{g}(\mu)$ y dado que $f \in E_b'$, existe una constante $C > 0$ tal que

$$|f(x,\mu)| = \left|\tilde{f}(x) + \tilde{g}(\mu)\right| \leq C \left\|(x,\mu)\right\|_b = C \left\langle Rx, x\right\rangle^{1/2}, \quad \forall (x,\mu) \in E.$$

Tenemos que para cada $x \in X_1$ se cumple que

$$|f(x,0)| = \left|\tilde{f}(x)\right| \leq C \left\langle Rx, x\right\rangle^{1/2} = C \left\|x\right\|_{b_1},$$

luego $\tilde{f} \in X_1'$ y además, para cada par de la forma $(0,\mu)$ con $\mu \in M_2$ tenemos

$$|f(0,\mu)| = |\tilde{g}(\mu)| \leq C \left\langle R0, 0\right\rangle^{1/2} = 0.$$

Entonces $\tilde{g} = 0$.

Ahora, tomamos un par $(\tilde{f}, 0) \in X_1' \times \{0\}$ y definimos

$$f(x,\mu) = \tilde{f}(x), \qquad \forall (x,\mu) \in E.$$

Luego, $|f(x,\mu)| = \left|\tilde{f}(x)\right| \leq C \left\|x\right\|_{b_1} = C \left\|(x,\mu)\right\|_b$ para algún $C > 0$, lo cual implica que $f \in E_b'$. Finalmente hemos demostrado que $E_b' \cong X_1' \times \{0\}$.

Adicionalmente probemos que $X_1' \subseteq X'$, donde X_1 es el mismo espacio que definimos anteriormente. Para esto, supongamos $f \in X_1'$, luego f es acotada, esto es, existe $C > 0$ tal que para todo $x \in X$ se cumple la desigualdad

$$|f(x)| \leq C \left|\left\langle Rx, x\right\rangle\right|^{1/2}.$$

Ya que $R : Y \to Y'$ es continua, se sigue que

$$|f(x)|^2 \leq C \left|\left\langle Rx, x\right\rangle\right| \leq C \left\|Rx\right\|_{Y'} \left\|x\right\|_Y \leq C_1 \left\|x\right\|_Y^2.$$

Por otro lado, tenemos que la inclusión $X \subseteq Y$ es densa y continua, es decir, $\|x\|_Y \leq C_2 \|x\|_X$ para todo $x \in X$ y para algún $C_2 > 0$, luego tendremos la desigualdad

$$|f(x)|^2 \leq C_1 C_2 \left\|x\right\|_X^2, \qquad \forall x \in X.$$

Esto es equivalente a que $f \in X'$. De esta manera, se demuestra que $X_1' \subseteq X'$. Una vez probado esto, podemos garantizar que (3.2) corresponde a un problema semilineal, al igual que (2.11). Ahora, resta probar que se cumplen las hipótesis **H2-H3** del Teorema 2.3 mediante Teorema 3.1.

3.2.1 Revisión del rango y condición inicial

Para probar la condición de rango (**H3**) del Teorema 2.3, se debe probar que para cada par $\tilde{f} = (f, 0) \in E_b'$ existe $(u, \lambda) \in E$ que satisface la ecuación

$$\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & B^T \\ -B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

La ecuación (3.7) se puede reescribir en la forma

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

donde $\mathcal{A} := R + A$, de esta manera (3.8) tiene la forma de una formulación mixta (ver, Observación 1.10), por este motivo usaremos el Teorema de Babuška–Brezzi para garantizar la existencia y unicidad de la solución (ver, Teorema 1.17).

Para aplicar el Teorema 1.17 debemos comprobar que B cumple la condición *inf-sup*. Para esto es suficiente recordar que

$$\langle Bu, v\rangle = b(u, v), \quad \forall u \in X,\ \forall v \in M.$$

Donde, b cumple la condición *inf-sup* por **h1**. Por último, debemos garantizar que existe $\alpha > 0$ tal que $\langle \mathcal{A}v, v\rangle \geq \alpha \|v\|_X^2$ $\forall v \in V$, es decir, garantizar que $\mathcal{A}$ sea coercivo en V.

De la hipótesis **h4** podemos deducir la siguiente desigualdad

$$\max\{1, \gamma\}(\langle Av, v\rangle + \langle Rv, v\rangle) \geq \alpha \|v\|_X^2 \quad \forall v \in V. \tag{3.9}$$

Si definimos $\delta := \alpha / \max\{1, \gamma\} > 0$ y usamos el hecho de que $\mathcal{A} = R + A$, obtenemos

$$\langle \mathcal{A}v, v\rangle \geq \delta \|v\|_X^2, \quad \forall v \in V, \tag{3.10}$$

con lo que se prueba que $\mathcal{A}$ es coercivo.

Observación 3.3. *Para que* (3.9) *se pueda deducir de* **h4** *es necesario asumir que* A *es monótono en* V*. Más aun, adicionalmente a* **h3** *debemos pedir*

$$\langle Av, v\rangle \geq 0, \quad \forall v \in X,$$

debido a que estas condiciones no se pueden deducir haciendo uso de la teoría abstracta mostrada en el Capitulo 2.

Habiendo comprobado que se cumplen las hipótesis del Teorema 1.17, podemos garantizar que para cada par $(f, 0) \in E_b'$, existe un único par $(u, \lambda) \in E$ que satisface (3.7).

Observación 3.4. *Notemos que*

$$\langle \mathcal{N}\tilde{v}, \tilde{v}\rangle + \langle \mathcal{M}\tilde{v}, \tilde{v}\rangle = \langle Av, v\rangle + \langle Rv, v\rangle, \quad \forall \tilde{v} = \left(\begin{smallmatrix} v \\ \eta \end{smallmatrix}\right) \in E, \tag{3.11}$$

entonces de (3.9) *no podemos concluir que* $\mathcal{N} + \mathcal{M}$ *sea estrictamente monótono. Dado que la expresión no tiene en cuenta los valores de la segunda componente, es posible que* (3.11) *sea cero aunque* $\tilde{v} \neq 0$.

Por el motivo anterior no es posible garantizar la unicidad de la solución mediante el Teorema 2.3. Usualmente se recurren a otros métodos para garantizar la unicidad de la solución y el Teorema 2.3 se usa tan solo para garantizar la existencia, como mostraremos en el siguiente capítulo.

El siguiente lema nos sirve para garantizar que el dominio de $\mathcal{M}$ es no vacío.

Lema 3.2. *Dado* $u_0 \in W := \overline{V}^{\|\cdot\|_Y}$, *existe* $\lambda_0 \in M$ *tal que*

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ -B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ \lambda_0 \end{pmatrix} \in E_b' = X_1' \times \{0\}.$$

Demostración. B^T cumple la condición *inf-sup* al igual que B, así, por [27, Teorema 2.3.3] B^T es sobreyectiva en X'. Notemos que

$$Au_0 \in X'.$$

Luego, dado $f \in X_1' \subseteq X'$ existe $\lambda_0 \in M$ que satisface la ecuación

$$B^T \lambda_0 = f - Au_0 \in X'.$$

Si $u_0 \in W := \overline{V}^{\|\cdot\|_Y}$, existe $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq V$ tal que $x_n \to u_0$, cuando $n \to \infty$. Además, por la continuidad de B se cumple que

$$Bu_0 = \lim_{n\to\infty} Bu_0 = \lim_{n\to\infty} B(u_0 - x_n) + \lim_{n\to\infty} Bx_n = 0.$$

Definiendo $\tilde{u}_0 := \left(\begin{smallmatrix} u_0 \\ \lambda_0 \end{smallmatrix}\right)$ tenemos

$$\mathcal{M}\tilde{u}_0 := \begin{pmatrix} A & B^T \\ -B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ \lambda_0 \end{pmatrix} \in E_b'.$$

□

Sea $\tilde{u} = \left(\begin{smallmatrix} u \\ \mu \end{smallmatrix}\right) \in E$, evaluando a $\mathcal{M}\tilde{u}$ en $\tilde{u}$ obtenemos

$$\langle \mathcal{M}\tilde{u}, \tilde{u} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} A & B^T \\ -B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ \mu \end{pmatrix} \right\rangle := \langle Au, u \rangle + \langle Bu, \mu \rangle - \left\langle B^T u, \mu \right\rangle.$$

Recordemos que por definición $\langle Bu, \mu \rangle = \left\langle B^T u, \mu \right\rangle$, luego

$$\langle \mathcal{M}\tilde{u}, \tilde{u} \rangle = \langle Au, u \rangle. \tag{3.12}$$

De ahí que, $\mathcal{M}$ hereda las propiedades de monotonía y linealidad del operador A. La propiedad de monotonía para A se pidió en la Observación 3.3, bajo estas condiciones se satisface **H2**.

3.2.2 Existencia de solución

El objetivo de esta subsubsección es garantizar la existencia de la solución haciendo uso del Teorema 2.3. Además, extenderemos el espacio en el cual el Problema 3.1 tiene solución, esto se debe a que el espacio dual asociado con $\mathcal{N}$ es más pequeño que el espacio en el que se plantea el problema original.

Ya hemos comprobado que $\mathcal{N}$ satisface **H1** y $\mathcal{M}$ cumple **H2**. También se comprobó la hipótesis del rango, es decir, comprobamos que en efecto $Rg(\mathcal{N}+\mathcal{M}) = E_b'$, pero no fue posible deducir que $\mathcal{N}+\mathcal{M}$ es estrictamente monótono. Por estas razones, por el Teorema 2.3 tan solo podemos garantizar la existencia de la solución de la siguiente manera:

Dado $u_0 \in W$, por Lema 3.2 existe $\tilde{u}_0 := \begin{pmatrix} u_0 \\ \lambda_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}$ con $\lambda_0 \in M$ tal que por Teorema 2.3 para cada $\tilde{F} = (F, 0) \in W^{1,1}(0,T;E_b')$ existe $\tilde{u} = (\hat{u}, \hat{\lambda})$ tal que $\mathcal{N}\tilde{u} \in W^{1,\infty}(0,T;E_b')$ y satisface

$$\frac{d}{dt}\mathcal{N}\tilde{u}(t) + \mathcal{M}\tilde{u}(t) = \tilde{F}(t), \quad t \in (0,T)$$

con $\mathcal{N}\tilde{u}(0) = \mathcal{N}u_0$, lo cual es equivalente a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}R\hat{u}(t) + A\hat{u}(t) + B^T\hat{\lambda}(t) = F(t) \quad &\in X_1' \\ -B\hat{u}(t) = 0 \quad & \end{aligned} \tag{3.13}$$

con $R\tilde{u}(0) = Ru_0$. El sistema de ecuaciones (3.13) se satisface para $0 < t < T$.

Observación 3.5. *Si $\mathcal{N}\tilde{u} \in W^{1,\infty}(0,T;E_b')$, por definición de $W^{1,\infty}(0,T;E_b')$ tenemos $\mathcal{N}\tilde{u} \in L^\infty(0,T;E_b')$, esto es, existe $M > 0$ tal que*

$$M > \|\mathcal{N}\tilde{u}(t)\|_{E_b'} \quad p.c.t \;\; t \in [0,T].$$

Además,

$$\|\mathcal{N}\tilde{u}(t)\|_{E_b'} = \sup_{\|\tilde{v}\|_b \neq 0} \frac{\langle \mathcal{N}\tilde{u}(t), \tilde{v}\rangle}{\langle Rv, v\rangle^{1/2}} = \sup_{\|\tilde{v}\|_b \neq 0} \frac{\langle Ru(t), v\rangle}{\langle Rv, v\rangle^{1/2}} \geq \langle Ru(t), u(t)\rangle^{1/2} = \|\tilde{u}(t)\|_b\,,$$

lo cual nos indica que la función $\tilde{u} : [0,T] \to E_b$ es también esencialmente acotada. Esto es, $\tilde{u} \in L^\infty(0,T;E_b)$ y además $\tilde{u} \in L^2(0,T;E_b)$ por ser $[0,T]$ un intervalo acotado.

Notemos que (3.13) se cumple únicamente en E_b', pero se busca garantizar que (3.13) se cumple en $X' \times M'$. Para ampliar el alcance de la solución, consideremos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} R\underline{u}(t) + A\underline{u}(t) + B^T\underline{\lambda}(t) &= f(t), \\ B\underline{u}(t) &= g(t), \end{aligned} \tag{3.14}$$

con $f \in L^2(0,T;X')$ y $g \in W^{2,1}(0,T;M')$. Por Teorema 1.17, el sistema (3.14) tiene solución única para cada $t \in [0,T]$. Entonces, existen funciones

$$\begin{aligned} \underline{u} : [0,T] &\longrightarrow X & \text{y} \quad \underline{\lambda} : [0,T] &\longrightarrow M \\ t &\mapsto \underline{u}(t) & t &\mapsto \underline{\lambda}(t) \end{aligned}$$

tales que $(\underline{u}, \underline{\lambda})$ es solución de (3.14).

Observación 3.6. *De la segunda ecuación de* (3.14) *se tiene que*

$$B\underline{u}(t) = g(t) \quad \forall t \in [0,T].$$

Dado que B cumple la condición inf-sup, tenemos que B es un isomorfismo de $V^{\perp}$ en M', luego el operador $B^{-1} : M' \longrightarrow X$ existe y escontinuo. Así,

$$\underline{u}(t) = B^{-1} g(t) \quad \forall t \in [T, 0].$$

Imponiendo que $g \in W^{2,1}(0, T; X)$ y con la continuidad de B, tenemos que

$$\underline{u} \in W^{2,1}(0, T; X)$$

en donde $W^{2,1}(0, T; X) := \{z : [0, T] \longrightarrow X : z \in L^1(0, T; X),\ \frac{d}{dt} z \in L^1(0, T; X')$ y $\frac{d^2}{d^2 t} z \in L^1(0, T; X)\}$. Por la continuidad de R en X_1' se sigue que $R\underline{u}(t) - \frac{d}{dt} R\underline{u}(t) \in W^{1,1}(0, T; X_1')$.

La Observación 3.6 nos permite garantizar la existencia de la solución para (3.13) cuando $F(t) = R\underline{u}(t) - \frac{d}{dt} R\underline{u}(t)$.
Si tomamos $F(t) = R\underline{u}(t) - \frac{d}{dt} R\underline{u}(t)$ en (3.13) y sumamos los sistemas de ecuaciones (3.13) y (3.14) obtenemos

$$\begin{aligned} R\underline{u}(t) + A\underline{u}(t) + B^T \underline{\lambda}(t) + \frac{d}{dt} R\tilde{u}(t) + A\hat{u}(t) + B^T \hat{\lambda}(t) &= f(t) + R\underline{u}(t) - \frac{d}{dt} R\underline{u}(t) \\ B\underline{u}(t) + B\hat{u}(t) &= g(t). \end{aligned}$$

Definiendo $u(t) = \hat{u}(t) + \underline{u}(t)$, $\lambda(t) = \hat{\lambda}(t) + \underline{\lambda}(t)$ y usando la linealidad de los operadores A, B^T, B y $\frac{d}{dt}$ finalmente tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Ru(t) + Au(t) + B^T \lambda(t) &= f(t) \\ Bu(t) &= g(t). \end{aligned}$$

Lo cual reescribiendo resulta en:

Problema 3.3. Encontrar $u : [0, T] \longrightarrow X$ y $\lambda : [0, T] \longrightarrow M$ que satisfacen la ecuación:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}[\langle Ru(t), v\rangle_Y + b(v, \lambda(t))] + \langle Au(t), v\rangle_X = \langle f(t), v\rangle_X && \forall v \in X, \\ &b(u(t), \mu) = \langle g(t), \mu\rangle_M && \forall \mu \in M, \\ &\langle Ru(0), v\rangle_Y = \langle Ru_0, v\rangle_Y && \forall v \in Y. \end{aligned}$$

Capítulo 4

Aplicación a la teoría de fluidos

En este capítulo presentaremos el problema de Darcy-Stokes, el cual describe el flujo de un fluido en un medio poroso y el flujo en un medio no poroso adyacente al primero. La finalidad de este capítulo será hallar una formulación débil del problema Darcy-Stokes, a la cual le podamos aplicar la teoría abstracta desarrollada en el Capitulo 2, para garantizar el buen planteamiento del problema.

4.1 El problema de Darcy-Stokes

Antes de presentar la formulación variacional de Darcy-Stokes haremos una introducción de los espacios $H^1(\Omega)$ y $H(\text{div}, \Omega)$, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es no vacío, abierto, acotado y usualmente con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1. Además, presentaremos algunos teoremas y resultados que nos serán de utilidad en el desarrollo de la formulación débil del problema de Darcy-Stokes.

Definición 4.1. Para Ω acotado, diremos que $\partial\Omega$ es de clase C^k ($k \in \mathbb{Z}^+$), si para todo $x_0 \in \partial\Omega$, existen $r_{x_0} > 0$ y $\gamma_{x_0} : \mathbb{R}^{(N-1)} \to \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} \Omega \cap B\left(x_0, r_{x_0}\right) &= \left\{x \in B\left(x_o, r_{x_0}\right) : x_N > \gamma_{x_0}\left(x_1, \ldots, x_{N-1}\right)\right\} \text{ } y \\ \partial\Omega \cap B\left(x_0, r_{x_0}\right) &= \left\{x \in B\left(x_o, r_{x_0}\right) : x_N = \gamma_{x_0}\left(x_1, \ldots, x_{N-1}\right)\right\}, \end{aligned}$$

con $\gamma_{x_0} \in C^k$.

4.1.1 Espacio $H^1(\Omega)$

Definimos el espacio $H^1(\Omega)$ de la siguiente manera

$$H^1(\Omega) := \Big\{ f \in L^2(\Omega) : \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \quad \forall i \in \{1, 2\} \Big\},$$

donde $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ es la derivada débil de f con respeto a la *i-esima* componente.

También, se define el producto interior en $H^1(\Omega)$ como sigue

$$(f, g)_{1,\Omega} := \int_\Omega \Big\{ \nabla f \cdot \nabla g + fg \Big\} \qquad \forall v, w \in H^1(\Omega).$$

El espacio $H^1(\Omega)$ con la norma inducida por el producto interior $(\cdot,\cdot)_{1,\Omega}$ es un espacio de Hilbert. Además, se define el siguiente subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$, como

$$H_0^1(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,\Omega}}.$$

La expresión $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ indica la norma en $H^1(\Omega)$. Asi, $H_0^1(\Omega)$ es la adherencia de $C_0^\infty(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$.

4.1.2 Trazas de $H^1(\Omega)$

Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1, llamamos a $\gamma_0 : C^\infty(\overline{\Omega}) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$ una traza si está definida por

$$\gamma_0(\phi) := \phi|_{\partial\Omega} \quad \forall \phi \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Teorema 4.1. *Sea Ω un subconjunto abierto y acotado con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1. Entonces existe un operador lineal acotado $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ tal que*

$$\gamma_0(\phi) := \phi|_{\partial\Omega} \quad \forall \phi \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

La demostración del teorema se puede ver en [16]. Dado que $C^\infty(\overline{\Omega})$ es denso en $H^1(\Omega)$ y junto con el Teorema 4.1 estamos en condiciones de presentar la siguiente fórmula de integración por partes en $H^1(\Omega)$.

Teorema 4.2. *Sea Ω un subconjunto acotado y abierto de $\mathbb{R}^N$ con frontera $\partial\Omega$ la cual es de clase C^1. Entonces para cada par $f, g \in H^1(\Omega)$ se cumple*

$$\int\limits_{\Omega} g\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\int\limits_{\Omega} f\frac{\partial g}{\partial x_i} + \int\limits_{\partial\Omega} \gamma_0(f)\gamma_0(g)n_i \quad \forall i \in \{1,2\},$$

donde n_i es la i-esima componente del vector $\boldsymbol{n}$ normal a $\partial\Omega$.

Definición 4.2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1. Se define el espacio $H^{1/2}(\partial\Omega)$ como el espacio traza de la frontera $\partial\Omega$, esto es

$$H^{1/2} := \gamma_0(H^1(\Omega)),$$

la norma en el espacio cual está definida por

$$\|\eta\|_{1/2,\partial\Omega} := \text{ínf}\left\{ \|v\|_{1,\Omega} : v \in H^1(\Omega) \text{ tales que } \gamma_0(v) = \eta \right\} \quad \forall \eta \in H^{1/2}(\partial\Omega).$$

El espacio $(H^{1/2}(\partial\Omega), \|\cdot\|_{1/2,\partial\Omega})$ es completo y además su dual es denotado por $H^{-1/2}(\partial\Omega)$, los detalles se pueden ver en [16, Sección 1.3.2].

4.1.3 El espacio $H(\mathbf{div}, \Omega)$

Definición 4.3. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto y $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, ..., f_N)$ una función vectorial tal que $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$. Entonces la divergencia de $\boldsymbol{f}$ se define como

$$\operatorname{div} \boldsymbol{f} := \nabla \cdot \boldsymbol{f} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_i},$$

donde $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ son las derivadas de $\boldsymbol{f}$ en el sentido débil para $i = 1, 2, ..., N$.

Observación 4.1. *Las siguientes propiedades se cumplen para el operador* div.

i) *El operador* div *es lineal.*

ii) *Para $\boldsymbol{u} \in (L^2(\Omega))^N$ se cumplen las igualdades*

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{u},\ \phi)_{L^2(\Omega)} = (\operatorname{div} \boldsymbol{u},\ \phi)_{L^2(\Omega)} = -(\boldsymbol{u}, \nabla\phi)_{(L^2(\Omega))^N} \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Además, para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado que posee frontera $\partial\Omega$ de clase C^1. Sean $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, ..., f_N)$ donde $f_i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, se cumple

$$\int_{\Omega} u \ \operatorname{div} \boldsymbol{f} = -\int_{\Omega} \nabla u \cdot \boldsymbol{f} + \int_{\partial\Omega} u\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n} \tag{4.1}$$

donde $\boldsymbol{n}$ es el vector unitario ortogonal a $\partial\Omega$. Los detalles de la Observación 4.1 y la ecuación (4.1) se pueden ver en [27, sección 3]. La ecuación (4.1) motiva la definición formal de operador div.

Definición 4.4. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado con $\partial\Omega$ de clase C^1, una función $\boldsymbol{f} \in (L^2(\Omega))^N$ tiene divergencia $w \in L^2(\Omega)$ es decir $w = \operatorname{div} \boldsymbol{f}$ si

$$\int_{\Omega} \phi w = -\int_{\Omega} \nabla\phi \cdot \boldsymbol{f} \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Definición 4.5. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado, el espacio $H(\operatorname{div}, \Omega)$ se define por

$$H(\operatorname{div}, \Omega) := \{\boldsymbol{u} \in L^2(\Omega)^N \ : \ \operatorname{div} \boldsymbol{u} = \nabla \cdot \boldsymbol{u} \in L^2(\Omega)\}.$$

Es bien conocido que el espacio $H(\operatorname{div}, \Omega)$ es un espacio de Hilbert con la norma

$$\|\boldsymbol{u}\|_{H(\operatorname{div},\Omega)} := \Big(\|\boldsymbol{u}\|^2_{(L^2(\Omega))^N} + \|\operatorname{div} \boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{2}},$$

la cual es inducida por el producto interior

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{H(\operatorname{div},\Omega)} = \int_{\Omega} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \int_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{u} \operatorname{div} \boldsymbol{v}.$$

Definición 4.6. Sea Ω abierto y acotado con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1, se puede definir el operador acotado

$$\begin{array}{rcl}\gamma_{\boldsymbol{n}} : H(\mathrm{div},\Omega) & \to & H^{-1/2}(\partial\Omega) \\ \boldsymbol{u} & \to & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}.\end{array}$$

Recordemos que $\boldsymbol{n}$ es un vector normal a $\partial\Omega$. La buena definición de $\gamma_{\boldsymbol{n}}$ se puede encontrar en [16, Teorema 3.1].

Definición 4.7. Para Ω un dominio Lipschitz y acotado en $\mathbb{R}^N$, con vector normal exterior $\boldsymbol{n}$ se define el espacio

$$H_0(\mathrm{div},\Omega) := \overline{(C_0^\infty(\Omega))^N}^{\|\cdot\|_{H(\mathrm{div},\Omega)}}.$$

Teorema 4.3.

$$H_0(\mathrm{div},\Omega) = \{\boldsymbol{v}\in H(\mathrm{div},\Omega) : \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mid_{\partial\Omega}=0\}.$$

Demostración. Ver, por ejemplo, [27, Teorema 3.2.11].

Definición 4.8. Sean $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in \left(L^2(\Omega)\right)^N$, se define el gradiente del vector $\boldsymbol{u}$ como la matriz

$$\nabla\boldsymbol{u} := \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right]_{i,j=1,\dots,N} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_N} \\ & \vdots & \\ \frac{\partial u_N}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_N}{\partial x_N} \end{bmatrix}$$

Además, el laplaciano de $\boldsymbol{v}$ se define como

$$\Delta\boldsymbol{v} := \begin{bmatrix} \Delta v_1 \\ \vdots \\ \Delta v_N \end{bmatrix}$$

y la cantidad $\sum_{i,j=1,\dots,N} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ se denota por $\nabla\boldsymbol{u} : \nabla\boldsymbol{v}$.

Además, se cumple la fórmula de integración por partes

$$\int_\Omega w \ \mathrm{div}\ \boldsymbol{u} + \int_\Omega \nabla w\cdot\boldsymbol{u} = \int_{\partial\Omega}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})w \quad \forall w\in H^1(\Omega), \forall\boldsymbol{u}\in H(\mathrm{div},\Omega). \tag{4.2}$$

Adicionalmente, para todo par $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in (H^1(\Omega))^N$ se cumple la fórmula

$$\int_\Omega (\nabla\boldsymbol{u} : \nabla\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\cdot\Delta\boldsymbol{v})dx = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{u}\cdot(\nabla\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})d\gamma. \tag{4.3}$$

Observación 4.2. *Las siguientes propiedades se cumplen y serán de utilidad en el desarrollo del buen planteamiento del problema, sus pruebas correspondiente se pueden encontrar en* [27, Sección 1.2].

i) De la Definición 4.8 se puede ver que

$$\nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{N} \nabla u_i \cdot \nabla v_i,$$

para todo $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in (L^2(\Omega))^N$.

ii) Sean $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ *y* $\beta, \alpha \in \mathbb{R}$, *se cumple*

$$\nabla(\alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{v}) : \nabla \boldsymbol{w} = \alpha(\nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{w}) + \beta(\nabla \boldsymbol{v} : \nabla \boldsymbol{w}).$$

La cantidad $\nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v}$ es llamada producto tensorial. Adicionalmente, agregaremos una observación muy útil que nos ayudará a demostrar una de las hipótesis del Teorema 2.3. Los detalles nuevamente se pueden encontrar en [27, Observación 3.2.2].

Observación 4.3. *Para* $\boldsymbol{u} \in H(div, \Omega)$ *se cumple*

$$\|\boldsymbol{u}\|_{H(\mathrm{div},\Omega)} \leq \|\boldsymbol{u}\|_{H^1(\Omega)^2}\,.$$

A continuación presentaremos las ecuaciones fuertes del problema Darcy-Stokes. Además, se presentan sus condiciones de interfaz correspondientes a la formulación débil del problema.

El problema de Darcy-Stokes consiste en hallar $\boldsymbol{u}_j : \Omega_j \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $p_j : \Omega_j \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ con $\Omega_j \subseteq \mathbb{R}^2$ y $j = 1, 2$ que satisfacen

$$a(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x},t) + \nabla p_1(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \text{en } \Omega_1 \times [0,T] \tag{4.4}$$

$$c(\boldsymbol{x})\frac{\partial p_1(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t) \quad \text{en } \Omega_1 \times [0,T] \tag{4.5}$$

$$-\mu(\boldsymbol{x})\Delta \boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x},t) + \nabla p_2(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \quad \text{en } \Omega_2 \times [0,T] \tag{4.6}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x},t) = 0 \quad \text{en } \Omega_2 \times [0,T], \tag{4.7}$$

donde $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ representa un vector que en cada $\boldsymbol{x}$ apunta en dirección a la fuerza gravitacional, $a(\boldsymbol{x})$ es la viscosidad del fluido, $c(\boldsymbol{x})$ relaciona la compresibilidad y porosidad en el fluido bajo una fuerza $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$ en Ω_1. Por otro lado, $\mu(\boldsymbol{x})$ es la viscosidad cinemática y $\boldsymbol{F}$ es la fuerza actuando sobre el fluido en Ω_2.

Nos referimos como interfaz al conjunto $\Gamma := \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$. Consideremos las siguientes condiciones de interfaz

$$\boldsymbol{u}_2 = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_2 \tag{4.8}$$

$$\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_1. \tag{4.9}$$

Donde $\boldsymbol{n}$ es un vector normal a $\partial\Omega_1$ y $\partial\Omega_2$. Notemos que se cumple $\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{n}$. Asumamos las siguientes condiciones sobre las funciones $a(\boldsymbol{x})$, $c(\boldsymbol{x})$ y $\mu(\boldsymbol{x})$:

- $c(\boldsymbol{x}) = c$ una constante positiva.
- La función $\mu(\boldsymbol{x})$ es acotada, esto es, existen μ_1 y μ_2 tales que

$$0 < \mu_1 \leq \mu(\boldsymbol{x}) \leq \mu_2, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega_2.$$

- La función $a(\boldsymbol{x})$ es acotada, esto es, existen a_1 y a_2 tales que

$$0 < a_1 \leq a(\boldsymbol{x}) \leq a_2 \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega_1.$$

4.2 Formulación variacional del Problema Darcy-Stokes

El objetivo de esta subsección es deducir una formulación variacional para el problema de Darcy-Stokes, a partir de las propiedades de integración de los espacios que se presentaron previamente.

Consideremos el conjunto $\Omega := \Omega_1 \cup \Omega_2$ y el espacio V en el cual se desarrollará la formulación débil del problema, el cual se define como

$$V := \{\boldsymbol{v} \in H(\text{div};\Omega) : \boldsymbol{v}_2 \in H_0^1(\Omega_2)^2,\ \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{n} = 0 \text{ en } \partial\Omega_1\}.$$

Sean $V_1 := \{\boldsymbol{v}_1 : \boldsymbol{v} \in V\}$, $V_2 := \{\boldsymbol{v}_2 : \boldsymbol{v} \in V\}$, entonces $V \cong V_1 \times V_2$. La norma en V está dada por

$$\|\boldsymbol{v}\|_V^2 := \|\boldsymbol{v}_1\|^2_{H(\text{div},\Omega_1)} + \|\boldsymbol{v}_2\|^2_{H(\text{div},\Omega_2)},$$

para todo $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \in V$. Además, consideremos el espacio $Q := L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$ con la norma

$$\|\eta\|_Q := \sqrt{\|\eta_1\|^2_{L^2(\Omega_1)} + \|\eta_2\|^2_{L^2(\Omega_2)}},$$

para todo $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in Q$.

Si tomamos las ecuaciones (4.4), (4.6) y las multiplicamos por $\boldsymbol{\varphi}_1 \in V_1$ y $\boldsymbol{\varphi}_2 \in V_2$ respectivamente e integramos en su correspondiente conjunto de definición, obtenemos

$$\int_{\Omega_1} a\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 + \int_{\Omega_1} \nabla p_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 = -\int_{\Omega_1} \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 \tag{4.10}$$

$$-\int_{\Omega_2} \mu\Delta\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{\varphi}_2 + \int_{\Omega_2} \nabla p_2 \cdot \boldsymbol{\varphi}_2 = \int_{\Omega_2} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2. \tag{4.11}$$

Podemos aplicar (4.2) al segundo sumando del lado izquierdo de cada ecuación, lo que resulta en

$$\int_{\Omega_1} \nabla p_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 = -\int_{\Omega_1} p_1 \text{ div } \boldsymbol{\varphi}_1 + \int_{\partial\Omega_1} (\boldsymbol{\varphi}_1 \cdot \boldsymbol{n}) p_1$$

$$\int_{\Omega_2} \nabla p_2 \cdot \boldsymbol{\varphi}_2 = -\int_{\Omega_2} p_2 \text{ div } \boldsymbol{\varphi}_2 + \int_{\partial\Omega_2} (\boldsymbol{\varphi}_2 \cdot \boldsymbol{n}) p_2.$$

Dado que $\boldsymbol{\varphi}_1 \in V_1$ y $\boldsymbol{\varphi}_2 \in V_2$. Luego, $\boldsymbol{\varphi}_1 \cdot \boldsymbol{n} = 0$ en $\partial\Omega_1$ y $\boldsymbol{\varphi}_2 = 0$ en $\partial\Omega_2$. Así, obtenemos

$$\int_{\partial\Omega_1} (\boldsymbol{\varphi}_1 \cdot \boldsymbol{n}) p_1 = 0$$

$$\int_{\partial\Omega_2} (\boldsymbol{\varphi}_2 \cdot \boldsymbol{n}) p_2 = 0.$$

Por otro lado, usando (4.3) en el primer término de la derecha de la ecuación (4.11), vemos que

$$\int_{\Omega_2} -\mu\Delta \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{\varphi}_2 = \int_{\Omega_2} \mu\nabla \boldsymbol{u}_2 : \nabla \boldsymbol{\varphi}_2 - \int_{\partial\Omega_2} \mu \boldsymbol{u}_2 \cdot (\nabla \boldsymbol{\varphi}_2 \cdot (-\boldsymbol{n})).$$

Por (4.8), tenemos $\boldsymbol{u}_2 = 0$ en $\partial\Omega_2$, luego

$$\int_{\partial\Omega_2} \mu \boldsymbol{u}_2 \cdot (\nabla \boldsymbol{\varphi}_2 \cdot \boldsymbol{n}) = 0.$$

De ahí que,

$$\int_{\Omega_2} -\mu\Delta \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{\varphi}_2 = \int_{\Omega_2} \mu\nabla \boldsymbol{u}_2 : \nabla \boldsymbol{\varphi}_2.$$

Si reemplazamos lo valores correspondientes a cada ecuación, podemos reescribir las ecuaciones (4.10) y (4.11), en la forma

$$\int_{\Omega_1} a\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 - \int_{\Omega_1} p_1 \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_1 = -\int_{\Omega} \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 \tag{4.12}$$

$$\int_{\Omega_2} \mu\nabla \boldsymbol{u}_2 : \nabla \boldsymbol{\varphi}_2 - \int_{\Omega_2} p_2 \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_2 = \int_{\Omega_2} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2. \tag{4.13}$$

Ahora, retomamos la ecuaciones (4.5) y (4.7), a las cuales multiplicaremos por $\eta_1 \in L^2(\Omega_1)$ y $\eta_2 \in L^2(\Omega_2)$ respectivamente, posteriormente integramos a ambos lados de cada ecuación y se obtiene

$$\int_{\Omega_1} c\frac{\partial p_1}{\partial t}\eta_1 + \int_{\Omega_1} \operatorname{div}(\boldsymbol{u}_1)\eta_1 = \int_{\Omega_1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)\eta_1 \tag{4.14}$$

$$\int_{\Omega_2} \operatorname{div}(\boldsymbol{u}_2)\eta_2 = 0. \tag{4.15}$$

Entonces, por (4.12), (4.14), (4.13) y (4.15), el problema débil de Darcy-Stokes es equivalente a hallar: $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) \in V$ y $p = (p_1, p_2) \in Q$, esto es, $p_1 \in L^2(\Omega_1)$ y $p_2 \in L^2(\Omega_2)$ que satisfacen

$$\int_{\Omega_1} a\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 - \int_{\Omega_1} p_1 \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_1 = -\int_{\Omega} \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 \tag{4.16}$$

$$\int_{\Omega_1} c\frac{\partial p_1}{\partial t}\eta_1 + \int_{\Omega_1} \operatorname{div}(\boldsymbol{u}_1)\eta_1 = \int_{\Omega_1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)\eta_1 \tag{4.17}$$

$$\int_{\Omega_2} \mu\nabla \boldsymbol{u}_2 : \nabla \boldsymbol{\varphi}_2 - \int_{\Omega_2} p_2 \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_2 = \int_{\Omega_2} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2 \tag{4.18}$$

$$\int_{\Omega_2} \operatorname{div}(\boldsymbol{u}_2)\eta_2 = 0. \tag{4.19}$$

Los procedimientos que realizaremos a continuación se harán con la intención de reformular el problema en términos de operadores A, B, B' y C que definiremos más adelante. Sumando (4.16) con (4.18) y (4.17) con (4.19), nos resulta

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_1} a\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 - \int_{\Omega_1} p_1 \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_1 \ + \int_{\Omega_2} \mu\nabla \boldsymbol{u}_2 : \nabla \boldsymbol{\varphi}_2 \ - \int_{\Omega_2} p_2 \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_2 \\
&= -\int_{\Omega_1} \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 \ - \int_{\Omega_2} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2 \quad \forall\, \overline{\boldsymbol{\varphi}} \in V, \\
&\int_{\Omega_1} c\frac{\partial p_1}{\partial t}\eta_1 \ + \int_{\Omega_1} \operatorname{div}(\boldsymbol{u}_1)\eta_1 \ + \int_{\Omega_2} \operatorname{div}(\boldsymbol{u}_2)\eta_2 = \int_{\Omega_1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)\eta_1 \quad \forall\, \overline{\eta} \in Q,
\end{aligned}$$

donde $\overline{\boldsymbol{\varphi}} = (\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2)$ y $\overline{\eta} = (\eta_1, \eta_2)$. Notemos que

$$\int_{\Omega_1} c\frac{\partial p_1}{\partial t}\eta_1 = \frac{d}{dt}\int_{\Omega_1} cp_1\eta_1.$$

Definamos los operadores $A : V \longrightarrow V'$ y $B : V \longrightarrow Q'$ dados por

$$\langle A\overline{\boldsymbol{u}}, \overline{\boldsymbol{\varphi}}\rangle := \int_{\Omega_1} a\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 + \int_{\Omega_2} \mu\nabla \boldsymbol{u}_2 : \nabla \boldsymbol{\varphi}_2,$$

con $\overline{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$, $\overline{\boldsymbol{\varphi}} = (\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2)$. El operador B está definido como

$$\langle B\overline{\boldsymbol{u}}, \overline{\eta}\rangle := -\Big(\int_{\Omega_1} \operatorname{div}(\boldsymbol{u}_1)\eta_1 \ + \int_{\Omega_2} \operatorname{div}(\boldsymbol{u}_2)\eta_2\Big).$$

Como se anunció anteriormente la formulación variacional de Darcy-Stokes será equivalente a: Dados $\boldsymbol{F} \in L^2(\Omega_2)$ y $\boldsymbol{g} \in L^2(\Omega_1)$ hallar $\overline{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) \in L^2(0, T; V)$, $\overline{p} = (p_1, p_2) \in L^2(0, T; Q)$ tal que

$$\begin{aligned}
\langle A\overline{\boldsymbol{u}}, \overline{\boldsymbol{\varphi}}\rangle \ + \left\langle B^T\overline{p}, \overline{\boldsymbol{u}}\right\rangle &= \langle F, \overline{\boldsymbol{\varphi}}\rangle\,, \quad \forall\, \overline{\boldsymbol{\varphi}} \in V \\
\frac{d}{dt}(cp_1, \eta_1)_{L^2(\Omega_1)} - \langle B\overline{\boldsymbol{u}}, \overline{\eta}\rangle &= \langle G(t), \overline{\eta}\rangle\,, \quad \forall \overline{\eta} \in Q,
\end{aligned} \tag{4.20}$$

donde

$$\langle G(t), \overline{\eta}\rangle := \int_{\Omega_1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)\eta_1, \qquad \langle F, \overline{\boldsymbol{\varphi}}\rangle := -\int_{\Omega_1} \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 \ - \int_{\Omega_2} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2$$

y $\langle B\overline{\boldsymbol{\varphi}}, \overline{\eta}\rangle = \left\langle B^T\overline{\eta}, \overline{\boldsymbol{\varphi}}\right\rangle$ $\forall \overline{\eta} \in Q$, $\forall \overline{\boldsymbol{\varphi}} \in V$.

Observación 4.4. *De las Observaciones 4.2 y 4.1 se puede deducir que los operadores A y B son bilineales. La continuidad de los operadores A y B ha sido ampliamente estudiada en* [27, Sección 4.1 y Sección 4.2]. *También, notemos que G y F son lineales y acotados.*

4.3 Buen planteamiento del modelo Darcy-Stokes

En esta subsección, garantizaremos el buen planteamiento de la formulación débil del modelo Darcy-Stokes a partir de la teoría abstracta trabajada en el Capítulo 2. En particular a partir del Teorema 2.3. En primer lugar, debemos reestructurar la formulación débil en un problema semilineal al igual que en el Capítulo 3. Luego, se procederá a comprobar las hipótesis del Teorema 2.3, para finalmente, garantizar el buen planteamiento del problema.

Definamos el operador lineal y acotado $\mathcal{E} : Q \longrightarrow Q'$ dado por

$$\langle \mathcal{E}\overline{q}, \overline{\eta}\rangle = \int_{\Omega_1} c q_1 \eta_1 = c(q_1, \eta_1)_{L^2(\Omega_1)},$$

para todo $\overline{q} = (q_1, q_2), \overline{\eta} = (\eta_1, \eta_2) \in Q$. Entonces, el sistema (4.20) se puede reescribir en la forma (2.11) con

$$E := V \times Q, \quad u := \begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{u}} \\ \overline{p} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{N} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{E} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M} := \begin{pmatrix} A & B^T \\ -B & 0 \end{pmatrix}$$

y $f := \left[\begin{smallmatrix} F \\ G \end{smallmatrix}\right]$. Luego, el Problema (4.20) es equivalente a hallar $u \in L^2(0, T; E)$ que satisface

$$\frac{d}{dt}\mathcal{N}u + \mathcal{M}u = f. \tag{4.21}$$

Es claro que gracias a la definición del operador $\mathcal{E}$ y las propiedades del producto interior en $L^2(\Omega_1)$, el operador $\mathcal{N}$ es lineal, simétrico y monótono. Por tanto, $\mathcal{N}$ satisface la hipótesis **H1**.

Observación 4.5. *Denotamos por E_b' al espacio dual de E con la seminorma inducida por $\mathcal{N}$. De manera similar a la Sección 3.2, el dual está dado por $E_b' = \{0\} \times (L^2(\Omega)_{\mathcal{E}})'$, donde $(L^2(\Omega)_{\mathcal{E}})'$ es el dual del espacio cuya norma es inducida por $\mathcal{E}$. Otra vez, nos encontramos en una situación semejante a la presentada en la Sección 3, ya que $\mathcal{E}$ solo tiene en cuenta los elementos de $L^2(\Omega_1)$, luego $(L^2(\Omega)_{\mathcal{E}})' = (L^2(\Omega_1)' \times \{0\})$. Dado que $L^2(\Omega_1) = (L^2(\Omega_1))'$, finalmente tenemos $E_b' = \{0\} \times (L^2(\Omega_1) \times \{0\})$.*

Tenemos $E_b' = \{0\} \times (L^2(\Omega_1) \times \{0\})$ y denotamos por $\mathcal{D} := \{(\overline{\boldsymbol{u}}, \overline{p}) \in V \times Q : \mathcal{M}(\overline{\boldsymbol{u}}, \overline{p}) \in E_b'\}$ al dominio de $\mathcal{M}$ en E.

Ahora debemos comprobar que se satisfacen las hipótesis **H2-H3** del Teorema 2.3 para establecer el buen planteamiento de la formulación débil al problema de Darcy-Stokes. En la siguiente subsección abarcaremos la hipótesis del rango y la condición inicial.

4.4 Condición de rango y valor inicial

Para comprobar la hipótesis de rango del Teorema 2.3, debemos comprobar que $Rg(\mathcal{N} + \mathcal{M}) = E_b'$, lo cual es equivalente a: para cada $(0, f) \in \{0\} \times (L^2(\Omega_1) \times \{0\})$ hallar $(\overline{\boldsymbol{u}}, \overline{p}) \in V \times Q$ tal que

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ -B & \mathcal{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{u}} \\ \overline{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

Para garantizar la existencia de la solución, usaremos [30, Capítulo 4, Teorema 4.3.2], el cual es una generalización del Teorema 1.17. Además de la condición de Babuška–Brezzi, también se requiere que $\mathcal{E}$ sea igual a un $\lambda \geq 0$ por el producto interior correspondiente. En nuestro caso, esto se cumple debido a la forma de $\mathcal{E}$, con $\lambda = c$. Ahora, debemos demostrar la condición *inf-sup* para B y la coercividad de A en el núcleo de B.

Antes de mostrar que B satisface la condición *inf-sup* enunciaremos algunos resultados que serán de utilidad para desarrollar la prueba.

Definición 4.9. Se denota por $L_0^2(\Omega)$ al subespacio cerrado de $L^2(\Omega)$ dado por

$$L_0^2(\Omega) := \left\{\eta \in L^2(\Omega) : \int_\Omega \eta \ = 0\right\}.$$

Definimos al conjunto W y a su correspondiente complemento ortogonal como sigue:

$$\begin{aligned} W &:= \{\overline{\boldsymbol{v}} \in H_0^1(\Omega)^2 : \operatorname{div}(\overline{\boldsymbol{v}}) = 0\} \\ W^\perp &:= \{\overline{\boldsymbol{w}} \in H_0^1(\Omega)^2 : (\overline{\boldsymbol{w}}, \overline{\boldsymbol{v}})_{H_0^1(\Omega)^2} = 0 \quad \forall \overline{\boldsymbol{v}} \in W\}. \end{aligned}$$

Corolario 4.1. *Sea Ω un conjunto conexo. Entonces el operador* div *es un isomorfismo de $W^\perp$ sobre $L_0^2(\Omega)$.*

Demostración. Ver, [31, Corolario I.2.4].

Corolario 4.2. *Existe una constante $C_1 > 0$ tal que*

$$\|\boldsymbol{v}\|_{H_0^1(\Omega)^2} \leq C_1 \|\operatorname{div} \boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall \boldsymbol{v} \in W^\perp.$$

Demostración. Ver, [3, Corolario 3.1].

Ahora, mostremos que B cumple la condición *inf-sup*. Primero, notemos que

$$H_0^1(\Omega)^2 \subseteq V,$$

esto se debe a que las funciones que pertenecen a $H_0^1(\Omega)^2$ son funciones tales que todas sus derivada parciales de primer pertenecen a $L^2(\Omega)$, luego la combinación lineal de estas que conforman a div también pertenece a $L^2(\Omega)$ al ser este un espacio vectorial. Además, la funciones en $H_0^1(\Omega)$ satisfacen las condiciones de frontera impuestas en V.

Por Observación 4.3 se puede deducir $\|\boldsymbol{v}\|_V \leq C \|\boldsymbol{v}\|_{H_0^1(\Omega)^2}$, para todo $\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^2$ y algún $C > 0$. Luego

$$\frac{\langle B\overline{\boldsymbol{v}}, \overline{\eta}\rangle}{\|\overline{\boldsymbol{v}}\|_V \|\overline{\eta}\|_Q} \geq \frac{\langle B\overline{\boldsymbol{v}}, \overline{\eta}\rangle}{C\|\overline{\boldsymbol{v}}\|_{H_0^1(\Omega)^2} \|\overline{\eta}\|_Q} \quad \forall \overline{\boldsymbol{v}} \in V \setminus \{0\} \text{ y } \forall \overline{\eta} \in Q \setminus \{0\}.$$

Por tanto,

$$\inf_{\overline{\eta} \in Q\setminus\{0\}} \sup_{\overline{\boldsymbol{v}} \in V\setminus\{0\}} \frac{\langle B\overline{\boldsymbol{v}}, \overline{\eta}\rangle}{\|\overline{\boldsymbol{v}}\|_V \|\overline{\eta}\|_Q} \geq \frac{1}{C} \inf_{\overline{\eta} \in Q\setminus\{0\}} \sup_{\overline{\boldsymbol{v}} \in H_0^1(\Omega)^2\setminus\{0\}} \frac{\langle B\overline{\boldsymbol{v}}, \overline{\eta}\rangle}{\|\overline{\boldsymbol{v}}\|_{H_0^1(\Omega)^2} \|\overline{\eta}\|_Q},$$

$\forall \overline{\boldsymbol{v}} \in V \setminus \{0\}$ y $\forall \overline{\eta} \in Q \setminus \{0\}$.

Sea $\overline{q} \in L^2_0(\Omega_1) \times L^2_0(\Omega_2) \subseteq Q$ con $\overline{q} \neq 0$, entonces al ser div : $W^\perp \to L^2_0(\Omega)$ un isomorfismo por Corolario 4.1, existe $\overline{\boldsymbol{w}} \in W^\perp$ tal que $\mathrm{div}(\overline{\boldsymbol{w}}) = \overline{q}$, esto es,

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{w}_1 = q_1 \text{ y } \mathrm{div}(\boldsymbol{w}_2) = q_2,$$

donde $\overline{q} = (q_1, q_2)$ y $\overline{\boldsymbol{w}} = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2)$.

Además, por Corolario 4.2 tenemos la desigualdad

$$\|\overline{\boldsymbol{w}}\|_{H^1_0(\Omega)^2} \leq C_1 \|\mathrm{div}\, \overline{\boldsymbol{w}}\|_{L^2(\Omega)} = C_1 \|\overline{q}\|_Q .$$

Luego,

$$\begin{aligned} \sup_{\overline{\boldsymbol{v}} \,\in\, H^1_0(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\langle B\overline{\boldsymbol{v}}, \overline{q}\rangle}{\|\overline{\boldsymbol{v}}\|_{H^1_0(\Omega)^2}} &\geq \frac{-\int_{\Omega_1} q_1\, \mathrm{div}(-\boldsymbol{w}_1) - \int_{\Omega_2} q_2\, \mathrm{div}(-\boldsymbol{w}_2)}{\|-\overline{\boldsymbol{w}}\|_{H^1_0(\Omega)^2}} \\ &\geq \frac{\int_{\Omega_1} q_1 q_1 + \int_{\Omega_2} q_2 q_2}{\|\overline{\boldsymbol{w}}\|_{H^1_0(\Omega)^2}} \geq \frac{\|\overline{q}\|_Q^2}{\|\overline{\boldsymbol{w}}\|_{H^1_0(\Omega)^2}} \geq \frac{\|\overline{q}\|_Q}{C_1}. \end{aligned}$$

De ahí se deduce que

$$\inf_{\overline{\eta} \,\in\, Q\setminus\{0\}} \sup_{\overline{\boldsymbol{v}} \,\in\, V\setminus\{0\}} \frac{\langle B\overline{\boldsymbol{v}}, \overline{\eta}\rangle}{\|\overline{\boldsymbol{v}}\|_V \|\overline{\eta}\|_Q} \geq \frac{1}{C_1 C}.$$

Ahora, continuaremos la prueba de las hipótesis garantizando la coercividad de A en $Ker(B)$, para esto necesitamos hallar $Ker(B)$.

$$\begin{aligned} Ker(B) &= \{\overline{\boldsymbol{v}} \in V : \int_{\Omega_1} p_1\, \mathrm{div}(\boldsymbol{v}_1) + \int_{\Omega_2} p_2\, \mathrm{div}(\boldsymbol{v}_2) = 0, \quad \forall \overline{p} \in Q\} \\ &= \{\overline{\boldsymbol{v}} \in V : \mathrm{div}(\boldsymbol{v}_1) = 0,\ \mathrm{div}(\boldsymbol{v}_2) = 0\}. \end{aligned}$$

Antes de proceder con la prueba enunciaremos la desigualdad de Poincaré, la cual es de mucha ayuda para mostrar la coercividad de A.

Teorema 4.4. (Desigualdad de Poincaré) *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ acotado, entonces existe $C > 0$ tal que*

$$\int_\Omega |v|^2 \leq C \int_\Omega |\nabla v|^2 ,$$

para todo $v \in H^1_0(\Omega)$.

Demostración. Ver, por ejemplo, [29, Lema 1.1.1].

Ahora, gracias a la linealidad de la integral y a la desigualdad de Poincaré se sigue que

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega_2} \nabla \boldsymbol{v} : \nabla \boldsymbol{v} = \int\limits_{\Omega_2} \sum_{i=1}^{2} |\nabla v_i|^2 &= \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega_2} |\nabla v_i|^2 \\ &\geq \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{C} \|v_i\|^2_{H^1_0(\Omega_2)} \\ &= \frac{1}{C} \sum_{i=1}^{2} \|v_i\|^2_{H^1(\Omega_2)} \\ &= \frac{1}{C} \|\boldsymbol{v}\|^2_{H^1_0(\Omega_2)^2} \quad \forall \boldsymbol{v} \in H^1_0(\Omega_2)^2.\end{aligned} \tag{4.23}$$

Con la desigualdad (4.23) tenemos los elementos suficientes para trabajar la coercividad del operador A. Para esto, tomamos $\overline{\boldsymbol{\varphi}} \in Ker(B)$ y se sigue que

$$\begin{aligned}\langle A\overline{\boldsymbol{\varphi}}, \overline{\boldsymbol{\varphi}} \rangle &= \int\limits_{\Omega_1} a\boldsymbol{\varphi}_1 \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 + \int\limits_{\Omega_2} \mu \nabla \boldsymbol{\varphi}_2 : \nabla \boldsymbol{\varphi}_2 \\ &\geq a_1 \|\boldsymbol{\varphi}_1\|^2_{L^2(\Omega_1)^2} + \frac{\mu_1}{C} \|\boldsymbol{\varphi}_2\|^2_{H^1_0(\Omega_2)^2}, \quad \forall \overline{\boldsymbol{\varphi}} \in Ker(B).\end{aligned} \tag{4.24}$$

Definimos $\alpha := \text{mín}\left\{a_1, \mu_1/C\right\}$. Teniendo en cuenta que $\text{div}(\boldsymbol{\varphi}_1) = 0$, se cumple $\|\boldsymbol{\varphi}_1\|_{(L^2(\Omega_1))^2} = \|\boldsymbol{\varphi}_1\|_{H(\text{div},\Omega_1)}$. Por otro lado, de la observación 4.3, tenemos que $\|\boldsymbol{\varphi}_2\|_{H(\text{div},\Omega_2)} \leq \|\boldsymbol{\varphi}_2\|_{(H^1(\Omega_2))^2}$. Con lo anterior, se puede deducir la siguiente desigualdad

$$\langle A\overline{\boldsymbol{\varphi}}, \overline{\boldsymbol{\varphi}} \rangle \geq \alpha(\|\boldsymbol{\varphi}_1\|^2_{H(\text{div},\Omega_1)} + \|\boldsymbol{\varphi}_2\|^2_{H(\text{div},\Omega_2)}) = \alpha \|\overline{\boldsymbol{\varphi}}\|^2_V. \tag{4.25}$$

Habiendo probado las hipótesis de [30, Capítulo 4, Teorema 4.3.2] podemos garantizar la existencia de $(\overline{\boldsymbol{u}}, \overline{p}) \in V \times Q$ que satisface (4.22). Esto también comprueba la hipótesis referente al rango (**H3**) del Teorema 2.3.

Aunque no es una hipótesis como tal, es necesario mostrar que $\mathcal{D} \neq \emptyset$. Para esto probaremos los siguientes lemas.

Lema 4.1. *Dado* $p_{0,2} \in H^1_0(\Omega_2)$ *existe* $\boldsymbol{u}_{0,2} \in H^1_0(\Omega_2)^2$ *que satisface*

$$\begin{aligned}-\mu\Delta \boldsymbol{u}_{0,2} &= -\nabla p_{0,2} \quad \textit{en } \Omega_2 \\ \text{div}\, \boldsymbol{u}_{0,2} &= 0 \quad \textit{en } \Omega_2 \\ \boldsymbol{u}_{0,2} &= 0 \quad \textit{en } \partial\Omega_2.\end{aligned} \tag{4.26}$$

Demostración. Procedemos a obtener la formulación variacional, sea $\boldsymbol{\varphi}_2 \in H^1_0(\Omega_2)^2$ entonces

$$\int\limits_{\Omega_2} \mu\Delta \boldsymbol{u}_{0,2} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2 = \int\limits_{\Omega_2} \nabla p_{0,2} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2.$$

Usando la fórmula de integración por partes (4.2) y que $\operatorname{div} \boldsymbol{u}_{0,2} = 0$ tenemos

$$\int_{\Omega_2} \mu \nabla \boldsymbol{u}_{0,2} : \nabla \boldsymbol{\varphi}_2 + \int_{\Omega_2} \operatorname{div} \boldsymbol{u}_{0,2} \operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi}_2) = -\int_{\Omega_2} \nabla p_{0,2} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2.$$

Definamos los operadores $\tilde{a} : H_0^1(\Omega_2)^2 \times H_0^1(\Omega_2)^2 \to \mathbb{R}$ y dato, como sigue:

$$\tilde{a}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\varphi}_2) := \int_{\Omega_2} \mu \nabla \boldsymbol{v} : \nabla \boldsymbol{\varphi}_2 + \int_{\Omega_2} \operatorname{div} \boldsymbol{v} \operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi}_2), \quad \langle g, \boldsymbol{v} \rangle = -\int_{\Omega_2} \nabla p_{0,2} \cdot \boldsymbol{v}.$$

Entonces el problema se puede reformular como: hallar $\boldsymbol{u}_{0,2} \in H_0^1(\Omega_2)^2$ tal que

$$\tilde{a}(\boldsymbol{u}_{0,2}, \boldsymbol{\varphi}_2) = \langle g, \boldsymbol{\varphi}_2 \rangle, \quad \forall \boldsymbol{\varphi}_2 \in H_0^1(\Omega_2)^2. \tag{4.27}$$

De (4.24) tenemos que $\tilde{a}$ es coercivo en todo $H_0^1(\Omega_2)^2$. Así, usando la Teoria de Lax-Milgram obtenemos solución única.

Notemos que

$$\int_{\Omega_2} \mu \nabla \boldsymbol{u}_{0,2} : \nabla \boldsymbol{\varphi}_2 = -\int_{\Omega_2} \nabla p_{0,2} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2.$$

Luego, usando la fórmula de integración por partes (4.2) obtenemos

$$\int_{\Omega_2} \mu \nabla \boldsymbol{u}_{0,2} : \nabla \boldsymbol{\varphi}_2 = -\int_{\Omega_2} \nabla p_{0,2} \cdot \boldsymbol{\varphi}_2 = \int_{\Omega_2} p_{0,2} \operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi}_2).$$

Finalmente, si $\boldsymbol{u}_{0,2}$ es solución de (4.26) entonces para todo $\boldsymbol{\varphi}_2 \in V_2$ se sigue

$$\int_{\Omega_2} \mu \nabla \boldsymbol{u}_{0,2} : \nabla \boldsymbol{\varphi}_2 - \int_{\Omega_2} p_{0,2} \operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi}_2) = 0. \tag{4.28}$$

Lema 4.2. *Sea* $H = \{\overline{\eta} \in H^1(\Omega) : \Delta \eta_1 \in L^2(\Omega_1),\ \nabla \eta_1 \cdot \boldsymbol{n} = 0$ *en* $\partial\Omega_1 \setminus \Gamma$ *y* $\eta_2 \in H^1(\Omega_2)\}$. *Entonces, dado* $\overline{p}_0 = (p_{0,1}, p_{0,2}) \in H$ *existe* $\overline{\boldsymbol{u}}_0 = (\boldsymbol{u}_{0,1}, \boldsymbol{u}_{0,2}) \in V$ *tal que* $u_0 = (\overline{u}_0, \overline{p}_0)$ *cumple que*

$$\mathcal{M}(u_0) = \begin{pmatrix} A & B^T \\ -B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{u}}_0 \\ \overline{p}_0 \end{pmatrix} \in \{0\} \times (L^2(\Omega_1) \times \{0\}).$$

Demostración. Sea $-a\boldsymbol{u}_{0,1} = \nabla p_{0,1}$, entonces

$$-\operatorname{div}(a\boldsymbol{u}_{0,1}) = \operatorname{div}(\nabla p_{0,1}) = \nabla \cdot (\nabla p_{0,1}) = \Delta p_{0,1} \in L^2(\Omega_2),$$

además $\boldsymbol{u}_{0,1} \cdot \boldsymbol{n} = \nabla p_{0,1} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ en $\partial\Omega_1$, luego $\boldsymbol{u}_{0,1} \in H(\operatorname{div}, \Omega_1)$ y $\boldsymbol{u}_{0,1}|_{\partial\Omega_1} = 0$. De aquí podemos ver que $\overline{\boldsymbol{u}_0} = (\boldsymbol{u}_{0,1}, \boldsymbol{u}_{0,2}) \in V$, donde $\boldsymbol{u}_{0,2}$ es la solución obtenida en el Lema 4.1.

Si $-a\boldsymbol{u}_{0,1} = \nabla p_{0,1}$, de (4.2) tendremos

$$-\int_{\Omega_1} a\boldsymbol{u}_{0,1} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 = \int_{\Omega_1} \nabla p_{0,1} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 = -\int_{\Omega_1} p_{0,1} \operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi}_1) + \int_{\partial\Omega_1} (\boldsymbol{\varphi}_1 \cdot \boldsymbol{n}) p_{0,1} \quad \forall \boldsymbol{\varphi}_1 \in V_1. \tag{4.29}$$

Descomponiendo el último término de la igualdad, podemos ver que

$$\int_{\partial\Omega_1} (\boldsymbol{\varphi}_1 \cdot \boldsymbol{n}) p_{0,1} = 0.$$

Esto se debe a que $\boldsymbol{\varphi}_1 \cdot \boldsymbol{n} = 0$ en $\partial\Omega_1$. Aplicando lo obtenido a (4.29) y usando (4.28), tenemos

$$\int_{\Omega_1} a\boldsymbol{u}_{0,1} \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 + \int_{\Omega_2} \mu \nabla \boldsymbol{u}_{0,2} : \nabla \boldsymbol{\varphi}_2 - \int_{\Omega_2} p_{0,2} \operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi}_2) - \int_{\Omega_1} p_{0,1} \operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi}_1) = 0, \quad \forall \overline{\boldsymbol{\varphi}} \in V, \tag{4.30}$$

lo anterior es equivalente a

$$A\overline{\boldsymbol{u}}_0 + B^T \overline{p}_0 \in \{0\}.$$

Además, como $\boldsymbol{u}_0 \in V \subseteq H(\operatorname{div}, \Omega)$ y $\operatorname{div}(\boldsymbol{u}_{0,2}) = 0$ es claro que

$$-B\overline{\boldsymbol{u}}_0 \in (L^2(\Omega_1))' \times \{0\} \cong L^2(\Omega_1) \times \{0\}.$$

Lo cual termina la demostración. □

4.5 Condiciones de monotonía y unicidad de la solución

Como ya se había anunciado, ahora procederemos a concluir con la verificación de las hipótesis. Para esto, sean $\overline{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) \in V$, $\overline{p} = (p_1, p_2) \in Q$ y $\underline{u} = (\overline{\boldsymbol{u}}, \overline{p})$, entonces evaluando a $\mathcal{M}\underline{u}$ en $\underline{u}$ obtenemos

$$\langle \mathcal{M}\underline{u}, \underline{u} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} A\overline{\boldsymbol{u}} + B^T\overline{p} \\ -B\overline{\boldsymbol{u}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{u}} \\ \overline{p} \end{pmatrix} \right\rangle := \langle A\overline{\boldsymbol{u}}, \overline{\boldsymbol{u}} \rangle + \left\langle B^T\overline{p}, \overline{\boldsymbol{u}} \right\rangle - \langle B\overline{\boldsymbol{u}}, \overline{p} \rangle .$$

Por definición, tenemos $\left\langle B^T\overline{p}, \overline{\boldsymbol{u}} \right\rangle - \langle B\overline{\boldsymbol{u}}, \overline{p} \rangle$ y además podemos usar la desigualdad (4.24) ya que esta no solo es válida en $Ker(B)$, si no también en todo V. Entonces,

$$\langle \mathcal{M}\underline{u}, \underline{u} \rangle \geq a_1 \|\boldsymbol{u}_1\|^2_{L^2(\Omega_1)^2} + \frac{\mu_1}{C} \|\boldsymbol{u}_2\|^2_{H^1_0(\Omega_2)^2} .$$

Por tanto, $\mathcal{M}$ es monótono y se satisface la hipótesis **H2** del Teorema 2.3. Luego, llegados a este punto podemos garantizar la existencia de la solución al problema de Darcy-Stokes.

El operador $\mathcal{N} + \mathcal{M}$ no es monótono estricto. Por ello realizaremos la demostración de unicidad bajo argumentos estandares. Sean $(\overline{\boldsymbol{u}}, \overline{p})$ y $(\overline{\boldsymbol{v}}, \overline{q})$ soluciones del problema para los datos $\boldsymbol{g}, \boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{f}(x,t)$. Por linealidad de los operadores podemos restar cada igualdad y obtener

$$\int_{\Omega_1} a(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{v}_1) \cdot \boldsymbol{\varphi}_1 - \int_{\Omega_1} (p_1 - q_1) \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_1 + \int_{\Omega_2} \mu(\nabla \boldsymbol{u}_2 - \nabla \boldsymbol{v}_2) : \nabla \boldsymbol{\varphi}_2 - \int_{\Omega_2} (p_2 - q_2) \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_2$$
$$= 0, \quad \forall \overline{\boldsymbol{\varphi}} \in V \tag{4.31}$$
$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_1} c(p_1 - q_1)\eta_1 + \int_{\Omega_2} \operatorname{div}(\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{v}_2)\eta_2 + \int_{\Omega_1} \operatorname{div}(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{v}_1)\eta_1 = 0, \quad \forall \overline{\eta} \in Q. \tag{4.32}$$

Tomando $\eta_1 = p_1 - q_1$, $\boldsymbol{\varphi}_1 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{\varphi}_2 = \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{v}_2$, $\eta_2 = p_2 - q_2$, sumando (4.31) y (4.32) nos resulta

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_1} c(p_1 - q_1)^2 + \int_{\Omega_1} a(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{v}_1)\cdot(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{v}_1) + \int_{\Omega_2} \mu(\nabla \boldsymbol{u}_2 - \nabla \boldsymbol{v}_2) : (\nabla \boldsymbol{u}_2 - \nabla \boldsymbol{v}_2) = 0,$$

notemos que

$$\int_{\Omega_1} c(p_1 - q_1)^2 = c\,\|p_1 - q_1\|^2_{L^2(\Omega_1)},$$

usando la desigualdad (4.24), nos queda

$$c\frac{d}{dt}\|p_1 - q_1\|^2_{L^2(\Omega_1)} + a_1\|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{v}_1\|^2_{L^2(\Omega_1)^2} + \frac{\mu_1}{C}\|\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{v}_2\|_{H_0^1(\Omega_2)^2} \leq 0.$$

Luego, integrando entre 0 y $t \in [0, T]$ y usando $\overline{p}(0) = \overline{q}(0)$, obtenemos

$$c\,\|p_1(t) - q_1(t)\|^2_{L^2(\Omega_1)} + \int_0^t (a_1\|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{v}_1\|^2_{L^2(\Omega_1)^2} + \frac{\mu_1}{C}\|\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{v}_2\|_{H_0^1(\Omega_2)^2})dt \leq 0,$$

entonces $\overline{\boldsymbol{u}}(t) = \overline{\boldsymbol{v}}(t) \quad \forall t \in [0, T$ y además $p_1(t) = q_1(t)$ para todo $t \in [0, T]$. Ahora, reemplazando en (4.31) lo obtenido, nos queda

$$-\int_{\Omega_2}(p_2 - q_2)\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}_2 = 0, \quad \forall \boldsymbol{\varphi}_2 \in H_0^1(\Omega_2)^2.$$

Por [27, Lema 4.1.2] tenemos que para algún $\beta > 0$ se cumple

$$\sup_{\boldsymbol{\varphi}_2 \in H_0^1(\Omega_2)^2} \frac{-\int_{\Omega_2}\eta_2\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}_2}{\|\boldsymbol{\varphi}_2\|_{H_0^1(\Omega_2)^2}} \geq \beta\,\|\eta_2\|_{L^2(\Omega_2)}.$$

Tomando $\eta_2 = p_2 - q_2$ tenemos

$$0 \geq \beta\,\|p_2 - q_2\|_{L^2(\Omega_2)},$$

lo cual implica que $p_2(t) = q_2(t)$ para todo $t \in [0, T]$. Con esto podemos concluir la unicidad de la solución.

Conclusiones y Comentarios

A continuación se presentan las conclusiones que se obtuvieron a lo largo del trabajo:

- Se logró describir la relación entre la teoría de ecuaciones parabólicas semilineales y los resultados obtenidos para problemas parabólicos mixtos degenerados.
- Fue posible identificar las condiciones faltantes para que los problemas parabólicos mixtos degenerados posean solución a partir de la teoría abstracta para problemas semilineales.
- Se logró reformular el problema de Dary-Stokes en un problema parabólico semilineal y garantizar la existencia de la solución, mas no su unicidad, haciendo uso de la teoría abstracta estudiada en el Capítulo 2. Sin embargo, usando métodos estándares se logró demostrar la unicidad de la solución.

Para finalizar, se realizan los siguientes comentarios que van enfocados a estudios futuros:

- Este trabajo deja como problema de investigación el uso de métodos numéricos para aproximarse a soluciones de ecuaciones parabólicas semilineales. Se busca desarrollar algoritmos que permitan la implementación de estos métodos para la resolución de este tipo de ecuaciones. El objetivo es obtener soluciones aproximadas precisas y eficientes, a través de la discretización total del problema, en variables temporales y espaciales para la aplicación de métodos numéricos específicos.
- Este trabajo deja como problema de interés, reducir y «relajar» las condiciones de interfaz de la formulación débil del problema de Darcy-Stokes con el fin de obtener un problema más general.

Referencias

[1] R. Acevedo, S. Meddahi, R. Rodríguez, *An $\boldsymbol{E}$-based mixed formulation for a time-dependent eddy current problem*, Math. Comp. **78** (2009) 1929–1949.

[2] R. Acevedo, C. Gómez, *Finite element error estimates for a mixed degenerate parabolic model*, Comptes Rendus. Mathématique. **360** (2022) 431-438.

[3] R. Acevedo, C. Gómez, B. López-Rodríguez, *Well-posedness for a family of degenerate parabolic mixed equations* Journal of Mathematical Analysis and Applications. **498** (2021) 124903.

[4] R. Acevedo, C. Gómez, B. López-Rodríguez, *Fully-discrete finite element approximation for a family of degenerate parabolic problems*, Mathematical Modelling and Analysis, **27** (2022) 134–160.

[5] R. Acevedo, C. Gómez, B. López-Rodríguez, *Fully discrete finite element approximation for a family of degenerate parabolic mixed equations*, Comput. Math. Appl. **96** (2021) 155-177.

[6] D.N. Arnold, F. Brezzi, M. Fortin, *A stable finite element for the stokes equations*, Calcolo, **21** (1984) 337-344.

[7] A. Ilona, E. Vicent, N. Troung, Y. Ivan, *A nonlinear Stokes–Biot model for the interaction of a non-Newtonian fluid with poroelastic media*, EDP Sciences, **53** (2019) 1915-1955.

[8] A. Bermúdez, B. López-Rodríguez, R. Rodríguez and P. Salgado, *An eddy current problem in terms of a time-primitive of the electric field with non-local source conditions*, ESAIM Math. Model. Numer. Anal., **47** (2013) 875–902.

[9] C. Bernardi, G. Raugel, *A conforming finite element method for the time-dependent Navier-Stokes equations*, SIAM J. Numer. Anal., **22** (1985) 455–473.

[10] D. Boffi, L. Gastaldi, *Analysis of finite element approximation of evolution problems in mixed form*, SIAM J. Numer. Anal., **42** (2004) 1502–1526.

[11] R. Bürger, S. Kumar, D. Mora, R. Ruiz-Baier, N. Verma, *Virtual element methods for the three-field formulation of time-dependent linear poroelasticity*, Advances in Computational Mathematics, **47** (2021) 1-37.

[12] A. Bossavit, *Computational Electromagnetism*, Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1998.

[13] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.

[14] H. Darcy, *Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon*, Dalmont (1856)

[15] L. C. Evans, *Partial differential equations, 2nd ed.*, Mathematical Society, Providence, R.I., 2010.

[16] G. N. Gatica, *A simple introduction to the mixed finite element method*, in mathematics. Springer, 2014

[17] G. N. Gatica, *Introducción al análisis funcional. teoría y aplicaciones*, Reverte, 2021

[18] G. Gatica, R. Ruiz-Baier, G. Tierra, *A mixed finite element method for Darcy's equations with pressure dependent porosity*, Mathematic of Computation, **85** (2015) 1-33.

[19] V. Girault, P. Raviart, *Finite element methods for Navier-Stokes equations: theory and algorithms*, Science Business Media, 2012

[20] S. Kesavan, *Topics in funtional analysis and applications*, Wiley Eastern Limited, India, 1989.

[21] R. L. Panton, *Incompressible Flow*, Wiley, New York, 2013.

[22] R.E. Showalter and F. Morales, *Interface approximation of Darcy flow in a narrow channel*, Math. Methods Appl. Sci., **35** (2012) 182–195.

[23] R.E. Showalter, *Monotone operators in Banach space and nonlinear partial diferential equations*, American Mathematical Society, Providence, USA, 1997.

[24] R.E. Showalter, *Nonlinear degenerate evolution equations in mixed formulation*, SIAM J. Math. Anal., **42** (2010) 2114-2131.

[25] L.-A. Ying and S.N. Atluri, *A hybrid finite element method for Stokes flow: Part II Stability and convergence studies*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 36 (1983), pp. 36-60.

[26] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, II/A.* Springer, New York, 1990.

[27] W. A. Astaiza, *Teoría de Babuska-Brezzi y su aplicación a los problemas de Stokes y Darcy*, Universidad del Cauca, Trabajo de grado para obtener el título de Matemático. 2012.

[28] P. B. Nazario, *Soluciones débiles de ecuaciones diferenciales parabólicas*, Universidad del Cauca, Trabajo de grado para obtener el título de Matemático. 2013.

[29] E. Y. Perdomo, *Formulación débil y de Galerkin de la ecuación bidimensional de Poisson*, Universidad del Cauca, Trabajo de grado para obtener el título de Matemático. 2011.

[30] D. Boffi, F. Brezzi, M. Fortin, *Mixed finite element methods and applications*, Springer, 2001.

[31] V. Girault, P. A. Raviart, *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, Springer, 1986.

[32] B. P. Rynne, M. A. Youngson, *Linear funtional analysis*, Springer, 2007.