ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE BASADA EN JUEGOS PARA PROMOVER EL PENSAMIENTO ALEATORIO EN LOS ESTUDIANTES DEL CURSO MATEMÁTICA RECREATIVA DE LA UNIVERSIDAD DEL CAUCA

WILSON FERNANDO BUESAQUILLO HERMOSO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN

2023

ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE BASADA EN JUEGOS PARA PROMOVER EL PENSAMIENTO ALEATORIO EN LOS ESTUDIANTES DEL CURSO MATEMÁTICA RECREATIVA DE LA UNIVERSIDAD DEL CAUCA

Trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Matemáticas

WILSON FERNANDO BUESAQUILLO HERMOSO

Directora

Dra. SAMIN INGRITH CERÓN BRAVO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN.

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Popayán

2023

Nota de Aceptación

____

____

____

Directora: ____

Dra. Samin Ingrith Cerón Bravo

Jurado: ____

Mg. Diego Ramiro Correa Cuene

____

Coordinador del programa de Licenciatura en Matemáticas

Dr. Aldo Iván Parra Sánchez

Lugar y fecha de la sustentación: Popayán, 06 de Julio de 2023

Dedicatoria

A Sebastián y Sofia.

Esta dedicación es para ustedes, quienes han sido mi fuente de inspiración y motivación para alcanzar este logro académico. A lo largo de este camino, han sido mi apoyo incondicional y me han brindado la fuerza necesaria para seguir adelante en momentos de desánimo y cansancio. Gracias por comprender mis ausencias y por alentarme en todo momento, incluso cuando los deberes académicos me han separado de ustedes. Espero que este trabajo de grado sea un ejemplo para que siempre luchen por sus sueños y alcancen todas sus metas.

Los amo con todo mi corazón y les dedico este logro a ustedes, mis adorados hijos.

Agradecimientos

A Dios, por ser mi guía y mi fortaleza en todo momento, por darme la vida y la oportunidad de culminar este proceso académico.

A mis padres, por su amor, apoyo incondicional, y por ser mi fuente de inspiración en cada uno de mis logros. Gracias por enseñarme a luchar por mis metas y por brindarme su amor y cariño incondicional.

A mi hermano Edwin, quien ha sido mi mejor amigo y confidente. Gracias por tu apoyo, tus palabras de aliento y tus consejos en los momentos más difíciles.

A mi directora de práctica, Samin Ingrith Cerón Bravo, por su invaluable orientación, su paciencia, su sabiduría y su amistad, por ayudarme a superar los obstáculos y por brindarme la oportunidad de aprender de su experiencia.

A mi evaluador, Diego Ramiro Correa Cuene, me gustaría expresar mi más sincero agradecimiento por su dedicación y tiempo al evaluar este trabajo de grado. Sus comentarios y sugerencias han sido invaluables para mejorar y enriquecer mi investigación.

A la Universidad del Cauca, por brindarme la oportunidad de cursar mis estudios de pregrado en esta prestigiosa institución. Gracias por la calidad académica, la formación integral y la oportunidad de crecer como persona y profesional.

A los profesores del Departamento de Matemáticas, por su conocimiento y dedicación en la enseñanza de esta ciencia. Sus enseñanzas han sido esenciales en mi formación académica.

Finalmente, agradezco a mis compañeros de carrera y a los estudiantes que participaron en la intervención pedagógica. Gracias por su colaboración y apoyo durante todo el proceso. Juntos hemos construido una experiencia inolvidable que ha dejado una huella en mi vida personal y profesional.

Resumen

El presente trabajo es una investigación cualitativa con un enfoque en la investigación-acción sobre la intervención en el aula. Se llevó a cabo en el contexto del curso Matemáticas Recreativas de la Universidad del Cauca en Popayán, con el objetivo de potenciar el pensamiento aleatorio de los estudiantes a través del juego como estrategia didáctica. Para lograr esto, se describe el contexto educativo, la problemática identificada, los resultados de investigaciones relacionadas con los tópicos abordados y el marco conceptual que fundamenta la propuesta de la práctica pedagógica. Además, se presenta el diseño metodológico, la muestra, y las técnicas y herramientas utilizadas para la recolección de información, que incluyeron la observación participante y no participante, entrevistas, diarios de campo, contenido audiovisual y cuestionarios. En la propuesta didáctica se estructuraron y organizaron las actividades que se desarrollaron en el aula de clase. Finalmente, se describen y analizan las actividades realizadas para notar el comportamiento de los estudiantes frente a los juegos propuestos y su desempeño en relación a los cinco significados de probabilidad. Se inicia la descripción del trabajo contextualizando y justificando el desarrollo de la investigación, luego se presentan los resultados y el análisis, con el fin de demostrar el impacto de la propuesta en el aprendizaje de los estudiantes.

Palabras clave: Pensamiento aleatorio, juegos de azar, significados de la probabilidad, contenidos de un objeto matemático.

Abstract

This study is a qualitative research with a focus on action research in classroom intervention. It was conducted in the context of the course "Recreational Mathematics" at the University of Cauca in Popayán, with the aim of enhancing students' random thinking through game-based didactic strategies. To achieve this, the educational context, identified issues, research findings related to the topics addressed, and the conceptual framework underlying the pedagogical practice proposal are described. The methodological design, sample, and data collection techniques and tools are presented, including participant and non-participant observation, interviews, field notes, audiovisual content, and questionnaires. The didactic proposal involves structuring and organizing activities conducted in the classroom. Finally, the activities are described and analyzed to observe students' behavior and performance in relation to the five meanings of probability. The description of the study begins with contextualization and justification of the research development, followed by the presentation of results and analysis, aiming to demonstrate the impact of the proposal on student learning.

Keywords: Random thinking, gambling games, meanings of probability, mathematical object contents.

Tabla de contenido

Índice de figuras

Índice de tablas

Índice de anexos.

1 Contexto

La Práctica Pedagógica Investigativa (PPI) en el programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Cauca, consta de una serie de cuatro etapas secuenciadas, iniciando la primera etapa en séptimo semestre y culminando la última en décimo semestre. Este proceso dota al futuro Licenciado en Matemáticas de experiencia dentro y fuera del aula de clases por medio de una intervención como futuro docente en una institución educativa.

La primera de estas etapas (PPI) consiste en: hacer una revisión de diferentes teorías en educación matemática, que serán de utilidad para argumentar los procesos y resultados obtenidos a partir de la intervención educativa.

En la segunda fase (PPII), se realiza una búsqueda y selección de autores, conceptos matemáticos, estrategias didácticas, resultados de investigación, políticas, todos enfocados en el propósito de comprender la pregunta de investigación y sus objetivos, para así poder realizar actividades que encaminen al cumplimiento de estos objetivos y dar respuesta a la pregunta. Además de ello se requiere la selección de una institución educativa, en la cual se realiza una inmersión, con el fin de recolectar información y poder establecer una problemática.

Para esta práctica se seleccionó la Universidad del Cauca como institución educativa, específicamente en el curso de Matemáticas Recreativas, curso electivo para los programas de Licenciatura en Matemáticas y Matemáticas, adscritos al Departamento de Matemáticas, de la Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación. Esta selección se realizó con el propósito contribuir, a la formación de los estudiantes universitarios específicamente en el área de estadística y probabilidad.

1.1 Universidad del Cauca

La información que se presenta a continuación, fue tomada de la página oficial de la Universidad del Cauca (s.f).

Figura 1 *Instalaciones de la Facultad de Educación (FANED) de la Universidad del Cauca*

Nota. En la imagen se muestra las instalaciones de la FANED donde se puede evidenciar que la facultad cuenta con una amplia infraestructura. Fuente: Universidad del Cauca (s.f)

La Universidad del Cauca fue creada en Popayán como Universidad del Tercer Distrito mediante decreto del 24 de abril de 1827. El 5 de abril de 2013, el Ministerio de Educación Nacional otorgó la Acreditación Institucional de Alta Calidad por un período de 6 años y a través de la Resolución 6218 del 13 de junio de 2019 renovó dicha Acreditación Institucional por un periodo de ocho años.

La Universidad tiene sus raíces en el Seminario Mayor de Popayán fundado entre 1609 y 1617, establecimiento educativo de primer orden en los tiempos coloniales que funcionó en el Claustro de San José donde tuvieron amplio impacto las ideas más novedosas del pensamiento filosófico, político y científico de la Ilustración, en el siglo XVIII, el Siglo de las Luces.

A semejanza de esos tiempos, la Universidad del Cauca sigue siendo una institución de conocimiento, progreso y foro de libre análisis de las circunstancias y alternativas de la vida social, defensora del discurrir democrático de Colombia, a la vez que ha dinamizando de manera incesante la libertad de expresión y la participación ciudadana. En la última década se ha distinguido por el dinamismo de su estructura investigativa. Se resalta que diecisiete egresados de la Universidad del Cauca han ocupado la jefatura del Estado Colombiano.

La misión de la Universidad del Cauca, es ser una institución de educación superior pública, autónoma, del orden nacional, la cual es fundada en su tradición y legado histórico, es un proyecto cultural que tiene un compromiso vital y permanente con el desarrollo social, mediante la educación crítica, responsable y creativa. Formando personas con integridad ética, pertinencia e idoneidad profesional, demócratas comprometidos con el bienestar de la sociedad en armonía con el entorno. Además, produce y socializa la ciencia, la tecnología, las artes y la cultura en la docencia, la investigación y la proyección social.

La visión de la Universidad del Cauca, es fiel a su lema "Posteris Lvmen Moritvrvs Edat (Quien ha de morir deje su luz a la posteridad), tiene un compromiso histórico, vital y permanente con la construcción de una sociedad equitativa y justa en la formación de un ser humano integral, ético y solidario". (Universidad del Cauca, s.f)

Actualmente la Universidad del Cauca cuenta con 9 facultades que ofrecen formación de pregrado y posgrado en diferentes campos del conocimiento. Sus instalaciones académicas se encuentran ubicadas en distintos sitios de la ciudad de Popayán. Esta práctica se llevó a cabo en la Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación (FACNED), que se encuentra ubicada en Carrera 2A N.º 3N-111 Sector Tulcán en Popayán, cuenta con 6 unidades académico administrativas denominadas departamentos los cuales son: Biología, Educación Física, Recreación y Deporte, Educación y Pedagogía, Física, Matemáticas y Química. La FACNED oferta 11 programas de pregrado y 11 posgrados.

Figura 2 *Ubicación FACNED*

Nota. En la figura se muestra la ubicación geográfica de la FACNED. Fuente: Google Maps 2022.

1.2 Inmersión en la Institución Educativa

El departamento de Matemáticas en el año 2022 contó con una planta profesoral de 33 docentes de planta, 9 ocasionales y 3 catedráticos, los estudiantes adscritos en ese año al programa de matemáticas fueron 116 y al programa de licenciatura en matemáticas alrededor de 200.

La FACNED dispone de una biblioteca principal llamada María José Serrano, de un repositorio virtual y el departamento tiene una biblioteca exclusiva en el ámbito de la educación y la ciencia matemática llamada Alejandría. La sala de cómputo brinda los servicios a los programas de la facultad. También, hay 3 espacios disponibles para la realización de eventos: el auditorio principal, 3 salones en conjunto en el tercer piso del edificio de matemáticas y un pequeño auditorio llamado José María Otero. Además, la universidad del Cauca cuenta con una amplia zona de recreación y deporte llamada CDU, ubicada en el sector Tulcán, y la FACNED cuenta con una cancha en concreto y un gimnasio para las distintas actividades deportivas.

En cuestión de recursos y materiales para impartir las clases en el departamento se cuenta con proyector, reglas, escuadras, marcadores y borrador. La escasez de estos recursos se manifiesta en múltiples asignaturas del departamento, donde predominan las clases magistrales en las que los estudiantes reciben información pasivamente y los docentes son responsables de garantizar la adquisición del conocimiento. En este contexto, la calificación obtenida en los exámenes parciales se utiliza como indicador del aprendizaje del estudiante, descuidando así el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Pero también existen asignaturas donde hay diferentes maneras de evaluar a los estudiantes, como: talleres, exposiciones, diseño de juegos, foro, autoevaluación, coevaluación, dando lugar a la creatividad e interés por parte de los estudiantes. La presente investigación se centra en una de estas asignaturas, llamada Problemas en Educación Matemática, la cual se ha desarrollado de manera virtual en dos semestres consecutivos, por cuenta de la emergencia sanitaria a nivel nacional ocasionada por el virus COVID 19, la manera de tener contacto con los profesores y estudiantes es a través de plataformas de videoconferencias como Zoom, Google Meet o Microsoft Teams.

En el semestre del periodo lectivo 2021-I en la asignatura, se llevó a cabo una práctica docente a cargo del estudiante Eduard Felipe Luna quien realizó un trabajo sobre el desarrollo del pensamiento lógico matemático a través de juegos, el curso estaba a cargo de la Dra. Samin

Ingrith Cerón Bravo. Esta intervención realizada en el curso Problemas en Educación Matemática generó muchas expectativas en los estudiantes, al ver las diferentes maneras de presentar temáticas matemáticas, reconociendo la importancia del juego como alternativa para presentar un concepto matemático abstracto, y llamó la atención la metodología utilizada en el desarrollo de la intervención, esto llevó a generar interés en continuar con el proceso realizado por el practicante. Se realizó una reunión con la Dra. Samin Ingrith Cerón Bravo por medio de la plataforma Google Meet el día 26 de noviembre del 2021, donde se abordaron preguntas con el fin de identificar el comportamiento de los estudiantes frente al curso. A continuación, se relacionan las preguntas con sus respectivas respuestas, respecto al curso en el periodo 2021-I:

¿Los estudiantes expresan sus dudas, piden información?: es muy poca la participación de los estudiantes frente a expresar sus dudas o aclaración sobre algún tema en la hora de clase, pero si hay preguntas en la sesión de asesorías.

¿Interactúan entre sus compañeros (trabajan en grupo) ?: si, los estudiantes trabajan en grupo debido a actividades planteadas.

¿Manifiestan contento o satisfacción trabajando en equipos?: hay satisfacción.

¿Respetan al profesor?: Si, dado que los estudiantes en su mayoría están formándose para ser futuros docentes.

¿Se respetan entre ellos?: Si, existe un ambiente de respeto al compartir ideas.

¿Los estudiantes se ayudan mutuamente?: Si, en la medida de lo posible a través de un grupo de Telegram, grupo creado para la práctica que realizó el practicante Eduard Felipe Luna.

¿Se trabaja en un clima de respeto e incluyente?: Sí.

¿Muestran una actitud favorable hacia el aprendizaje?: Si, los estudiantes se prestan muy interesados en identificar aspectos del curso que sean relevantes en su práctica docente.

¿Se percibe en el profesor una actitud de entusiasmo hacia el curso?: Si, tanto el profesor encargado del curso como el practicante a pesar de la virtualidad tienen una actitud de positivismo e interés por sus estudiantes.

¿El profesor interactúa con los alumnos?: Si, en la medida de lo posible debido a que en la virtualidad la interacción es difícil.

¿En la intervención del estudiante practicante se incorpora el estudio de Estadística y Geometría?: No, se incluyó.

¿Podemos conocer aspectos del estado del curso en cuanto a la transición de la virtualidad a la presencialidad?: En el curso virtual es interesante ver la producción de los estudiantes porque presentan sus trabajos en Classroom, también con documentos en línea que permiten una edición más eficaz que en la presencialidad, también en la virtualidad hay bastantes recursos como por ejemplo Canva como herramienta para realizar infografías, formularios Google para la recolección de información, pero el contacto visual se ha perdido debido a que las limitaciones de conexión hace que la interacción humana se haya perdido, a pesar de los pros que permite la virtualidad. Es interesante identificar esa transición cuando el estudiante vuelva de la virtualidad a la presencialidad, sin dejar de lado los recursos explorados con la virtualidad.

Además, de las respuestas a las preguntas planteadas la docente mencionó que: el curso contaba con 40 estudiantes de los cuales 6 se destacaron por su participación constante y voluntaria, los restantes ofrecieron sus respuestas de acuerdo a lo planteado en las sesiones de clase. Los estudiantes llevaron a cabo múltiples tareas relacionadas con las diferentes actividades, para las cuales se promovieron distintos tipos de evaluación: (Autoevaluación, Coevaluación, Heteroevaluación); para obtener la nota final del curso se promedió el registro de notas de cada una de las actividades realizadas y se obtuvo un buen promedio de notas, cabe resaltar que hubo una sesión de asesoría cada semana.

1.3 Reflexiones de la Inmersión

Según lo relacionado en la inmersión, es interesante destacar la motivación de los estudiantes al encontrarse que hay otras alternativas de presentar los conceptos matemáticos, diferentes a las que comúnmente están acostumbrados, donde se generan espacios en los que aprenden, reflexionan sobre conceptos y alternativas que les serán útiles para su labor como futuros docentes.

En el tiempo de pandemia, la virtualidad ha ocasionado un cambio drástico en la manera como se desarrollan las clases, puesto que el contacto físico ha quedado atrás, los silencios en el aula virtual son eternos, el docente no tiene la seguridad que los estudiantes prestan atención a su clase y no pueden garantizar que ellos están aprendiendo.

La utilización exclusiva del examen como herramienta para que muchos docentes comprueben si sus estudiantes han adquirido los conocimientos deseados ha sido cuestionada. La razón es que la incapacidad de los docentes para supervisar de manera efectiva que los estudiantes no se copian durante el examen parcial pone en duda la confianza de los resultados.

En vista de esta situación, los docentes que han orientado sus clases de forma tradicional durante años, han comenzado a explorar nuevas herramientas y han adaptado sus métodos a las condiciones impuestas por la virtualidad. De esta manera, se han abierto nuevas posibilidades para el aprendizaje en línea.

2 Problemática

2.1 Descripción del Problema

Los programas tanto de Licenciatura en Matemáticas como de Matemáticas en sus primeros semestres comparten asignaturas, dando la posibilidad a que estudiantes de los dos programas compartan la misma aula, teniendo la oportunidad de intercambiar experiencias con los mismos profesores, enfrentarse a los mismos escenarios de aprendizaje y criterios de evaluación. A continuación, se muestra el plan de estudios de cada programa:

Tabla 1 *Plan de estudios de los programas de Licenciatura en Matemáticas y Matemáticas*

Semestre	Programa de Licenciatura en Matemáticas	Programa de Matemáticas
I	• Matemáticas Generales (4 créditos) • Lógica y Conjuntos (4 c) • La Lectura y la Escritura (3 c) • Formación Ciudadana (3 c)	• Matemáticas Generales (4 créditos) • Lógica y Conjuntos (4 c) • Formación Ciudadana (3 c) • Lectura y Escritura (3 c)
II	• Cálculo I (4 créditos) • Geometría Euclidiana (4 c) • Taller de la Lengua Española (3 c) • Pensamiento Matemático I (4 c)	• Cálculo I (4 créditos) • Geometría Euclidiana (4 c) • Humanidades I (3 c) • Taller de Lengua Española (3 c)
III	• Cálculo II (4 créditos) • Geometría Analítica (4 c) • Algebra lineal (4 c) • Estadística y Probabilidad (4 c) • Pensamiento Matemático II (4 c)	• Cálculo II (4 créditos) • Conjuntos Numéricos (4 c) • Álgebra Lineal (4 c) • Humanidades II (3 c) • Ciencias Naturales I (4 c) • Laboratorio de Ciencias Naturales I (1 c)
IV	• Ciencias Naturales I (3 créditos) • Laboratorio de Ciencias Naturales I (3 c). •Pedagogía y Currículo en la enseñanza de las Matemáticas (1 c) •Educación Matemática y Matemática Escolar (4 c)	• Cálculo III (4 créditos) • Teoría de Números Fundamentales (4 c) • Teoría de la Probabilidad (4 c) • Ciencias Naturales II (4 c) • Laboratorio de Ciencias Naturales II (1 c)

	• Programación básica (4 c)	
V	• Área de Interés Personal (3 créditos) • Ciencias Naturales II (3 c) • Laboratorio de Ciencias Naturales II (1 c) • Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (4 c) • Educación Matemática y Matemática Escolar	• Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (4 créditos) • Análisis I (4 c) • Programación Básica (4 c) • Inferencia Estadística (4 c)
VI	• Ciencias Naturales III (3 créditos) • Laboratorio de Ciencias Naturales III (1 c) • Programación básica (4 c) • Teoría de grupos (4 c) • Didáctica de las Matemáticas I (4 c)	• Teoría de Grupos (4 créditos) • Análisis II (4 c) • Análisis Numérico (4 c) • Historia general de las Matemáticas (4 c) • Área de Interés Personal I (4 c)
VII	• Electiva I (4 créditos) • Teoría de los anillos (4 c) • Didáctica de las Matemáticas II (4 c) • Práctica Pedagógica I (4 c) • Análisis I (4 c)	• Teoría de Anillos (4 créditos) • Análisis III (4 c) • Electiva I (4 c) • Área de Interés Personal II (4 c)
VIII	• Área de Interés Personal II (3 créditos) • Electiva II (4 c) • Matemáticas y Experiencia I (4 c) • Práctica Pedagógica II (4 c) • Topología general (5 c)	• Espacios Vectoriales (4 créditos) • Variable Compleja (4 c) • Electiva II (4 c) • Área de Interés Personal III (4 c)
IX	• Electiva III (4 créditos) • Matemáticas y Experiencia II (4 c) • Práctica Pedagógica III (4 c)	• Curso Avanzado I (5 créditos) • Geometría Diferencial (4 c) • Topología General (5 c) • Electiva III (4 c)
X	• Electiva IV (4 créditos) • Práctica Pedagógica IV (5 c) • Matemáticas y Realidad (5 c)	• Curso Avanzado II (5 créditos) • Trabajo de Grado (10 c)

Nota. En la tabla se muestran en paralelo las asignaturas de los dos programas. Fuente: Universidad del Cauca (s.f)

Los estudiantes inscritos en los programas de Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas de la universidad del Cauca como lo muestra en la anterior tabla, pueden haber cursado de manera conjunta, en el ámbito de la ciencia matemática asignaturas como: Matemáticas Generales, Lógica y Conjuntos, Cálculo I, Geometría Euclidiana, Cálculo II, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Programación Básica, Teoría de grupos, Teoría de los anillos, Topología general, unos enfocados a la educación matemática y otros a la investigación de la ciencia matemática. Por tanto, no es extraño que existan cursos donde estudiantes de los dos programas compartan el aula, como también lo es la asignatura Matemáticas Recreativas siendo una asignatura tomada como electiva para el programa de Licenciatura en Matemáticas y como área de interés personal (AIP. I, II o III) o área de humanidades (HUM. I o II) para el programa de Matemáticas, este curso cuenta con personas con un bagaje de información amplio en conocimientos matemáticos, que han tenido en muchas ocasiones asignaturas en donde como comenta Benavides Benitez (2021):

> El proceso educativo se ha visto afectado por lo tradicional, lo memorístico y lo rutinario en lo intelectual, posiblemente porque en los estudiantes no se fomenta una educación activa y participativa, sino repetitiva, es decir se incentiva a que el alumno obtenga un conocimiento a ciegas, lo cual va en detrimento del proceso que debiese ser cien por cien cambiante, para lograr un alto nivel académico.

Además, los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas ven una sola asignatura que contempla el aprendizaje de conceptos estadísticos y de probabilidad (Estadística y Probabilidad), los estudiantes de Matemáticas en su plan de estudios profundizan más en estos conceptos al cursar asignaturas como Teoría de la Probabilidad e Inferencia Estadística. Por lo anterior, es pertinente afianzar el pensamiento aleatorio en los estudiantes de estos programas desde una postura diferente a la tradicional.

Además, el pensamiento aleatorio como opina Zapata Cardona (2014) "requiere habilidades especializadas para leer, interpretar, evaluar críticamente y apreciar información estadística del contexto en que se está inmerso. Una persona que piensa estadísticamente comprende, explica, analiza e interpreta los resultados de procesos estadísticos" (p.54). Del mismo modo, Batanero (2004) expresa que: un ciudadano estadísticamente culto debe ser capaz de controlar sus intuiciones sobre las oportunidades que se le presentan, distinguir entre intuiciones correctas e incorrectas y aplicar el razonamiento estadístico para controlar sus intuiciones en situaciones de riesgo y toma de decisiones. Sin embargo, los estudiantes llegan a la universidad con conocimientos casi nulos y una falsa intuición sobre la probabilidad, lo que les dificulta comprender el concepto de inferencia más adelante.

Existe una limitación del pensamiento aleatorio, por ejemplo, en ocasiones no se aprecia la información estadística dentro de su contexto, puesto que las intuiciones sobre la probabilidad son casi nulas, ya que la enseñanza se centra en el cálculo de probabilidades y fórmulas a seguir, la presente investigación pretende generar un espacio en el curso matemática recreativa para impulsar el pensamiento aleatorio generando escenarios de aprendizaje a través de los juegos, como una alternativa a la ya conocida educación tradicional.

2.2 Formulación del Problema

¿Cómo promover el pensamiento aleatorio de los estudiantes del curso de Matemática Recreativa a través del juego?

2.3 Justificación

La justificación de la presente investigación se fundamenta en la necesidad de implementar una propuesta educativa encaminada al fortalecimiento de las habilidades matemáticas a través de los juegos de azar, que contribuya al desarrollo del pensamiento aleatorio de los estudiantes de los programas de Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas matriculados en el curso Matemática Recreativa de la Universidad del Cauca en periodo 2022-I, llevándolos a: investigar, experimentar, formular conjeturas, examinar y buscar soluciones a cada situación que se presenta mediante juegos. Este es un aspecto formativo relevante, ya que permite ofrecer una perspectiva diferente ante las formas de enseñanza y aprendizaje a las que estamos acostumbrados. De esta manera, se puede enriquecer y diversificar la experiencia educativa de los estudiantes y fomentar su capacidad para adaptarse a diferentes entornos de aprendizaje.

Este escenario posibilita el desarrollo del pensamiento matemático debido a que según Franco & Fonseca (2021):

> El fortalecimiento del pensamiento matemático está estrictamente ligado a la cantidad de experiencias y estímulos que se generen en el contexto desde tres tipos de situaciones problémicas que según el Ministerio de Educación Nacional (1998) las especifica desde las mismas matemáticas, la vida diaria y desde las otras ciencias. (pp. 22-23)

Ser matemáticamente competente se sintetiza de manera concreta en el pensamiento lógico y el pensamiento matemático, “el cual se subdivide en los cinco tipos de pensamiento propuestos en los Lineamientos Curriculares: el numérico, el espacial, el métrico o de medida, el aleatorio o probabilístico y el variacional” (Ministerio de Educación Nacional (MEN), 2006, p. 56). Siendo el pensamiento aleatorio el encargado de ayudar a la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre, de azar, de riesgo o de ambigüedad por falta de información confiable, donde es imposible predecir con certeza lo que sucederá. La importancia del desarrollo de este pensamiento se justifica en el sentido que es crucial en el ámbito de la investigación, toma de decisiones, verificación de la información, situaciones en las que se ignora cuáles puedan ser los patrones, pues esto se relaciona con la realidad en la que vivimos. Por tanto, como lo menciona el MEN (2006), hoy día se privilegia en los estudiantes el desarrollo del pensamiento aleatorio, que les permitirá interpretar, analizar y utilizar los resultados que se publiquen en periódicos y revistas, que se presenten en la televisión o que aparezcan en pantalla o en hojas impresas como productos de los distintos programas de análisis de datos, más que el recuerdo de las fórmulas y la habilidad para calcular sus valores.

Por otro lado, en el pensamiento aleatorio o probabilístico se relacionan conceptos propios de la estadística como la recolección de datos, tipos de datos, muestreo, diferentes maneras de recolectar los datos, medidas de tendencia central, medidas de dispersión, entre otros. Así, como afirma Chaves Esquivel (2015):

> La Estadística es una fuerte herramienta para las diferentes disciplinas científicas, tanto es así que se le ha concebido como un pilar fundamental dentro de la investigación científica. El mayor aporte que la Estadística le brinda a las diferentes disciplinas dentro de este proceso, consiste en su potencial para la recolección y análisis de la información que se genera en estas áreas, con el propósito de argumentar sus valoraciones e investigaciones. (p. 22)

Además, Gairín Sallán (1990) considera que en el aula es conveniente mantener un equilibrio entre la matemática lúdica y la matemática formal puesto que el uso de juegos en la enseñanza es parte importante para mantener el interés de los estudiantes, demostrando efectos beneficiosos. También Gallardo et al. (2007) comentan que desde la Didáctica de la Matemática se destaca el interés por el estudio de la probabilidad trabajando con diversos recursos didácticos, donde se destacan sugerencias como: secuenciar el trabajo con materiales manipulativos con propiedades de simetría como dados o monedas, para pasar progresivamente al estudio de materiales que no tengan estas propiedades –ruletas con áreas desiguales. Los autores proponen un enfoque centrado en el uso de juegos para la introducción de algunos de los conceptos probabilísticos más básicos con el objetivo de contemplar una educación más experimental.

Lo anterior corrobora la importancia de centrarse en el fortalecimiento del pensamiento aleatorio o probabilístico mediante el juego. Debido a que esta alternativa didáctica será de gran utilidad para los docentes que deseen renovar su método de enseñanza tradicional y esta a su vez permita introducir conceptos matemáticos abstractos a través del juego donde se espera lograr un buen nivel de aceptación por parte de sus estudiantes.

Es importante destacar que esta investigación es un recurso significativo para los futuros docentes y docentes en ejercicio como fuente de consulta en la línea de investigación "Didáctica de las matemáticas", puesto que, les permite obtener herramientas innovadoras principalmente para su aprendizaje y así mismo para la enseñanza de los conceptos de la estadística y probabilidad a sus futuros educandos, y de este modo se reconozca el aprendizaje basado en juegos (ABJ) como metodología en la enseñanza de otros conceptos matemáticos y se implemente en la educación en todos sus niveles.

3 Objetivos

3.1 Objetivo General

Potenciar el pensamiento aleatorio de los estudiantes del curso Matemática Recreativa a través del juego como estrategia didáctica.

3.2 Objetivos Específicos

1. Diseñar y aplicar guías de aprendizaje basada en juegos para la creación de situaciones que promuevan el pensamiento aleatorio de los estudiantes de Matemática Recreativa, mediante materiales y herramientas Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC).
2. Analizar las respuestas de los estudiantes en las guías propuestas frente al pensamiento aleatorio.
3. Verificar si estas actividades potencializan el pensamiento aleatorio en los estudiantes.

4 Marco Referencial

4.1 Marco de Antecedentes

Un primer documento a destacar sobre las investigaciones realizadas en el ámbito de la enseñanza y aprendizaje de la estadística y la probabilidad es el libro titulado: Enseñanza de la Estadística a través de Proyectos realizado en la ciudad de Granada, España, por Batanero et al.

(2011), quienes presentan algunos proyectos para la implementación en las clases de estadística, donde se describen los datos y la forma como estos han sido recolectados, además de proponer algunas actividades que llevan a la reflexión de los conceptos estadísticos, permitiendo la ejercitación de las diversas representaciones, técnicas y tipos de argumentación. Los profesores pueden eliminar o agregar otras actividades o elementos en función de la edad de los alumnos y los conocimientos previos, los intereses y el tiempo disponible. Cada proyecto comienza con la exposición de sus objetivos, el tipo de alumnos a los que va dirigido y los datos utilizados. El objetivo de este documento es presentar la estadística como una herramienta en la toma de decisiones, en la investigación y trabajo profesional.

Los proyectos que se proponen se consideran investigaciones genuinas accesibles a nivel de estudiante, se intenta integrar la estadística en el proceso de investigación más general. Mientras que en los problemas y ejercicios "tradicionales" se enfocan en un concepto, atributo o capacidad a la vez, en un proyecto generalmente hay mucho que tratar. En la secuencia que se describe en cada proyecto, es de destacar los contenidos que de manera explícita o implícita se desarrollan, los cuales son: Aplicaciones de la estadística, Conceptos y propiedades, Notaciones y representaciones, Técnicas, procedimientos y Actitudes.

Batanero et al. (2011) reconocen que, son pocos los alumnos que se interesan por la estadística y que ésta es una materia aburrida para ellos. Pero, los alumnos pueden interesarse en muchos temas diferentes y llegar a valorar la estadística como instrumento de investigación de los problemas que les gustaría resolver.

Este libro brinda a la presente investigación, valiosa información sobre recursos, software, páginas web, revistas electrónicas enfocadas en la educación estadística, y un panorama de trabajos estructurados que se han realizado para promover el pensamiento estadístico, utilizando una alternativa a la enseñanza tradicional. Para esta práctica pedagógica se tomará como referencia la estructura de los proyectos para la realización de las diferentes actividades basada en juegos.

El artículo titulado “La probabilidad como elemento orientador de la toma de decisiones” desarrollado por Sanabria & Núñez (2016) en la ciudad de San Pedro, Costa Rica, tiene como objetivo caracterizar situaciones problema donde se involucra la toma de decisiones, partiendo de un problema básico de cálculo de probabilidades con dados y poco a poco a partir de los referentes teóricos de Batanero y Polya, para transformarlo en una situación problema de toma de decisiones que permita abordar la enseñanza de la probabilidad. En este trabajo, se diseña la situación problema, queda pendiente ser validada en el aula. Finalmente, en el proceso de ir analizando y reformulando el problema, se realizan algunas recomendaciones como: La probabilidad debe surgir como un modelo para orientar la toma de decisiones. Un problema que solo le pida al estudiante calcular una probabilidad no involucra al estudiante y degrada la aplicación del concepto de probabilidad, el estudiante debe simular la experiencia aleatoria involucrada, describir las diferentes alternativas que pueden considerar y tomar una decisión inicial intuitiva con base en la probabilidad intuitiva de los eventos involucrados. El aporte de este trabajo a la presente investigación es la situación problema diseñada, que sirvió como recurso en la estrategia pedagógica, dado que involucra el juego como estrategia didáctica.

Por su parte Duarte Montañez (2018), realizó una investigación con el objetivo de usar el juego como estrategia didáctica para fortalecer el pensamiento aleatorio, enfocado especialmente en el cálculo de probabilidades, para estudiantes de sexto grado de la Institución Educativa Colegio Municipal Aeropuerto de Cúcuta, Colombia. El estudio utilizó métodos cualitativos, en particular la investigación acción, los aspectos metodológicos, el diseño de herramientas (como el pre-test), las actividades didácticas a considerar y el post-test, que posibilitaron el análisis descriptivo e interpretativo, así como observaciones, diarios de campo, fotografías, documentación, que permite identificar el progreso y las limitaciones de los estudiantes en el camino.

Duarte Montañez (2018) encontró que en la aplicación de los talleres didácticos de probabilidad, los estudiantes se muestran interesados en ellos, y las actividades planificadas y diseñadas brindan una herramienta que ayuda a reforzar el pensamiento aleatorio, esta experiencia fue significativa porque los estudiantes lograron percibir un “fin”, es decir, reconocen la utilidad del conocimiento matemático, identificando que la estadística ayuda a entender y modelar fenómenos de la vida real con una intencionalidad, lo cual es importante ya que requiere de destrezas que permitan manejar y organizar información facilitando tanto la toma de decisiones como la consideración de predicciones basadas en dicha información.

La autora concluye que los juegos de azar ayudaron a los estudiantes en la asimilación conceptual, mostrando progreso en las pruebas tanto en su razonamiento como en la resolución de problemas dentro del marco del pensamiento aleatorio, y que la mayoría de los estudiantes estaban motivados al realizar experimentos aleatorios, superando dificultades en el grupo, debido al apoyo que reciben de sus compañeros y al ambiente libre de estrés en el salón de clases. Este trabajo, respalda el aspecto lúdico de la presente investigación en el desarrollo de la práctica pedagógica, para el manejo de la probabilidad, y esperando resultados favorables.

En su trabajo de grado titulado "La Matemática Recreativa, un Recurso para Promover el Pensamiento Lógico Matemático con Estudiantes del Programa de Licenciatura en Matemática de la Universidad Del Cauca", realizado en Popayán Cauca, Colombia, Fernández Luna (2022) tiene como objetivo evidenciar la matemática recreativa como elemento potencial para promover el pensamiento lógico matemático en sus estudiantes. La metodología cualitativa etnográfica fue utilizada en la investigación debido a la necesidad de realizar en conjunto las actividades propuestas. Se llevó a cabo un análisis para verificar si la matemática recreativa potencializa el pensamiento lógico-matemático en estudiantes de la carrera de Licenciatura en Matemáticas, enfocándose en la realización de juegos matemáticos. Cada guía de estudio propone que los estudiantes desarrollen y propongan actividades de diversos contextos de manera autónoma, apoyando así el proceso evaluativo. Este trabajo investigativo busca ser el punto de partida para futuras investigaciones que busquen diversificar la enseñanza de las matemáticas tanto en espacios universitarios como en actividades extracurriculares.

Fernández Luna (2022) destacó la importancia de la matemática recreativa al evidenciar su potencial para fomentar el pensamiento lógico-matemático. Además, resaltó que la matemática recreativa genera constantemente ideas en los estudiantes que fortalecen su capacidad para resolver los problemas planteados. Los juegos matemáticos se presentan como una valiosa y significativa en la enseñanza de las matemáticas, ya que diversifican el enfoque pedagógico, partiendo desde la introducción didáctica de un juego relacionado con un tema específico hasta llegar a su conceptualización teórica. Además, se menciona la posibilidad de adaptar los juegos matemáticos a conceptos disciplinares que se desean enseñar en cualquier nivel educativo.

En su investigación, el autor concluye con algunas recomendaciones, siendo una de las más destacadas la inclusión de la matemática recreativa en un mayor número de entornos educativos a nivel universitario. Estos espacios brindan la oportunidad de adquirir los fundamentos iniciales del tema, los cuales son vitales para la comprensión de los conceptos abordados. Este trabajo representa el punto de partida de la presente investigación, ya que surge como respuesta a las sugerencias planteadas en el estudio previo.

4.2 Marco Teórico Conceptual

Este marco teórico presenta tópicos relacionados con los significados de la probabilidad, el pensamiento aleatorio, matemáticas recreativas, el juego como parte del aprendizaje y la relación conocimientos del profesor en la enseñanza - aprendizaje de la probabilidad.

4.2.1. Significados de la Probabilidad

A continuación, se consideran los diferentes significados de la probabilidad que se han dado a través de la historia y los elementos del significado de un objeto matemático según Carmen Batanero. Es importante centrarse en esta cuestión, pues como lo menciona la Universidad Internacional de La Rioja (UNIR, 2021a) al analizar los significados de la probabilidad, se pueden identificar las principales dificultades que enfrentan los estudiantes al tratar de comprender un concepto tan complejo como la aleatoriedad. Este análisis permite diseñar diversas situaciones en el aula para abordar cada uno de estos significados de manera individual y conjunta. Es importante destacar que diferentes enfoques de la probabilidad a menudo se presentan en un mismo problema de la realidad.

El significado de un objeto matemático, está compuesto por el conjunto de prácticas operatorias y discursivas relacionadas con dicho objeto, en el caso de la probabilidad Batanero (2005) diferencia entre:

- El conjunto de prácticas ligadas a la resolución del campo de problemas estadísticos.
- La probabilidad, como objeto matemático.

Para Batanero (2005) existen cinco elementos del significado de un objeto matemático cuya utilidad ocupa en el análisis de respuestas de una actividad matemáticas, o un proceso de enseñanza-aprendizaje, en este caso la probabilidad, son los siguientes:

1. El Campo de Problemas de donde emerge el objeto matemático: Juegos de dados, juegos de cartas, lanzamiento de monedas, etc.
2. Elementos Lingüísticos. Al intentar resolver problemas, es necesario tener símbolos, palabras o gráficos para representar los datos y soluciones, al igual que las operaciones y conceptos usados.

3. Procedimientos y Algoritmos: Aquí está involucrado todo método definido para resolver los problemas, como, recogida de datos, estimación de probabilidades, tablas de frecuencias, distribuciones de probabilidad, tablas de números aleatorios, programas estadísticos etc.
4. Las definiciones y propiedades de los objetos matemáticos y sus relaciones con otros objetos matemáticos: En la actividad matemática se requiere evocar diferentes conceptos que previamente se conocen, cuyas propiedades sirven para resolver problemas. Algunos ejemplos: Axiomas de la probabilidad, Teorema de Bayes, Teorema de Probabilidad total.
5. Los argumentos y demostraciones de estas propiedades: Son los razonamientos que se necesitan para justificar la validez de la solución a un problema o propiedad, como: Experimentos, simulaciones, generalizaciones, etc.

Por otra parte, se debe ser consciente de que un mismo objeto matemático puede enseñarse con diferentes niveles de dificultad, y su significado no podría ser el mismo para diferentes instituciones, en el caso de la probabilidad para estudiantes de primaria podría hacer referencia a un cálculo de experimentos sencillos como lanzar un dado, para estudiantes de secundaria se podrían usar las reglas de Laplace, algunas propiedades y llegar a algo más complejo como resolver un suceso de un experimento compuesto. Pero para Gal (como se citó en Batanero, 2005) una persona culta probabilísticamente, sería capaz de comprender los enunciados de probabilidad en el contexto de apuestas, votaciones o inversión en la bolsa, y tomar una decisión fundamentada en ellos. Puesto que a nivel universitario se requiere trabajar con variables aleatorias, modelos de distribuciones de probabilidad, aplicar teoremas complejos.

Históricamente se pueden reflejar diferentes conceptos de Probabilidad, considerando cinco significados: intuitivo, subjetivo, frecuencial, clásico y axiomático. En la tabla 2 Batanero (2005) resume estos significados con cada uno de sus elementos. Se han excluido los argumentos y demostraciones por ser similares en los cinco significados (deducción, análisis y síntesis, ejemplos y contraejemplos, etc.), pero incluye algunos conceptos relacionados en cada significado.

Tabla 2 *Significados de probabilidad y sus elementos de significado*

Significado de la Probabilidad	Campos de problemas	Elementos lingüísticos	Procedimientos y algoritmos	Definiciones y propiedades	Conceptos relacionados
Intuitivo	Sorteos, Adivinación.	Lenguaje ordinario.	Manipulación de generadores de azar: dados, cartas.	Opinión impredecible, creencia.	Suerte, Destino.
Subjetivo	Mejora el conocimiento sobre sucesos inciertos, incluso no repetibles.	Expresión de la probabilidad condicional.	Teorema de Bayes Asignación subjetiva de probabilidades.	Carácter subjetivo revisable con la experiencia.	Probabilidad condicional, Distribuciones a priori y a posteriori.
Frecuencial	Estimación de parámetros en poblaciones.	Tablas y gráficos estadísticos, Curvas de densidad, Tablas de números aleatorios, Tablas de distribuciones.	Registros de datos estadísticos a posteriori, Ajuste de curvas matemáticas, Análisis matemático, Simulación.	Límite de las Frecuencias relativas, Carácter objetivo basado en la evidencia empírica.	Frecuencia relativa, Universo, Variable aleatoria, Distribución de probabilidad.
Clásico	Cálculo de esperanzas y riesgos en juegos de azar.	Triángulo aritmético, Listado de sucesos, Fórmulas combinatorias.	Combinatoria, Proporciones, Análisis a priori de la estructura del experimento.	Regla de Laplace, Equiprobabilidad de sucesos simples.	Esperanza, Equitatividad, Independencia.
Axiomático	Cuantificar la incertidumbre de resultados en experimentos aleatorios abstractos.	Símbolos Conjuntistas.	Teoría de conjuntos, Álgebra de conjuntos, Teoría de la medida.	Función medible.	Espacio muestral, Espacio de probabilidad, Conjuntos de Borel.

Nota. En la tabla se muestra ejemplos cada uno de los significados de probabilidad con sus elementos de significado. Fuente: Batanero (2005).

La UNIR (2021a) cree conveniente que en la práctica se plantee a los estudiantes actividades que cubran los cinco significados de probabilidad, puesto que a menudo se emplean una combinación de todos ellos en una misma actividad. A demás estos significados al no ser excluyentes y tener distintos enfoques, se complementan dando una completa visión de lo que es la probabilidad.

Sin embargo, se presenta una definición de cada uno de los significados de manera independiente:

4.2.1.1 Significado Intuitivo.

El origen de la probabilidad está relacionado con los juegos de azar en culturas como la Antigua Grecia y Roma. Incluso el primer tratado sobre la probabilidad, del italiano Cardano, tuvo como problemas originales aquellos enmarcados en los juegos de azar con dados.

En todas las civilizaciones han existido evidencias de juegos de azar y se asocia este significado con el lenguaje coloquial de esos juegos. Personas sin formación estadística tienen relación con este contexto, empleando expresiones informales para cuantificar sucesos inciertos y expresar su grado de creencia en ellos.

Estas primeras ideas de probabilidad surgen ligadas a la apuesta, ganancia o pérdida de ellas, la esperanza de un juego, y el concepto de juego equitativo.

4.2.1.2 Significado Clásico.

La solución a algunos juegos de azar que eran de interés entre Pascal y Fermat, se considera el punto de partida de la teoría de la probabilidad. Pero según Batanero (2005) no fue sino hasta 1814 que Laplace acuñó la definición que hoy se enseña como regla de Laplace para la probabilidad de un suceso que puede ocurrir únicamente en un número finito de maneras.

Antes de hablar de la regla de Laplace se deben considerar algunos conceptos básicos de la probabilidad, por ejemplo, la diferencia entre un suceso determinista y un suceso aleatorio:

Un **suceso determinista** es aquel cuyo resultado está determinado por las condiciones iniciales; es decir, antes de realizar el experimento ya es posible determinar el resultado. En cambio, en un **suceso aleatorio** o no determinista se pueden dar varios resultados sin que sea posible predecir cuál va a ocurrir.

Por lo tanto, en un experimento aleatorio, a priori pueden surgir diferentes resultados posibles. El conjunto de posibles resultados básicos en un experimento aleatorio se denomina **espacio muestral**. Al repetir el experimento, obtendremos repeticiones de los posibles resultados que se han logrado. Cada posible resultado obtenido en un experimento se llama **suceso**. En otras palabras, el espacio muestral está conformado por los distintos sucesos.

Cabe aclarar que no todos los sucesos tienen la misma posibilidad de ocurrencia. Cuando dos o más sucesos tienen la misma probabilidad de ocurrencia se dice que son **sucesos equiprobables**. En cambio, si los sucesos no tienen la misma probabilidad de ocurrencia, se habla de sucesos **no equiprobables**.

Para poder calcular la probabilidad de ocurrencia de un suceso, debemos considerar la **Regla de Laplace:**

$$P \ = \frac{nº\ casos\ favorables}{nº\ casos\ posibles}$$

Laplace define la probabilidad de un suceso como el «tamaño» que tiene ese suceso dentro del espacio muestral del experimento. Por ejemplo, al considerar los experimentos:

A. Extraer una carta al azar de una baraja de póquer y lanzar una moneda al aire.
B. Extraer dos cartas al azar de una bajara de póquer.

En el experimento A, se puede hacer la siguiente distinción: apostar a que la carta extraída es corazones, o hacer una apuesta combinada a que la carta es corazones y la moneda es cara. Lo anterior establece la diferencia entre las probabilidades de sucesos simples (cartas) y las probabilidades de sucesos compuestos (cartas y monedas).

En los experimentos A y B se pueden hacer apuestas compuestas. Sin embargo, parece claro que en el experimento A, el resultado de la carta no está relacionado con el resultado de la moneda. En el experimento B, sin embargo, las condiciones cambiarán después de sacar la primera carta. En estos casos, se tratan de **sucesos independientes** (cartas y monedas) o **sucesos dependientes** (2 cartas en la misma baraja).

Al identificar los sucesos X (extraer una carta de corazones) e Y (obtener una cara al lanzar la moneda) son independientes, puesto que:

$$P(X \cap Y) = P(X)P(Y)$$

Es decir, para calcular la probabilidad de que ocurran ambos sucesos, basta con multiplicar la probabilidad de cada uno de ellos.

Si los sucesos no son independientes, es decir si la ocurrencia de uno condiciona la probabilidad de ocurrencia del segundo, esta fórmula no es válida.

Otros conceptos que se relacionan al significado clásico o a priori de la probabilidad al analizar las distintas ordenaciones o agrupaciones que pueden realizarse en un conjunto de elementos dado, son los de la **Combinatoria.** Como:

Variación: grupos de n elementos que pueden formarse en un conjunto al cual pertenecen m elementos. El número de variaciones depende de n y de m y también de si se permiten repeticiones de elementos o no.

$$Variación\ con\ repetición: VR_m^n = m^n$$

$$Variación\ sin\ repetición: VR_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Combinación: las combinaciones se pueden definir como el número de formas en que se pueden extraer subconjuntos, sin repeticiones, a partir de un conjunto dado. El número de formas de escoger k elementos en un conjunto de n se calcula mediante el coeficiente binomial.

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Permutación: número de ordenaciones que se pueden formar con todos los elementos, sin repetición, en conjunto ordenado. En un conjunto con n elementos, el número de permutaciones es $n!$

4.2.1.3 Significado Frecuencial.

La ley de los grandes números, demostrada por Bernoulli en el s. XVII, establece la relación entre el número de intentos en el experimento y la probabilidad de ocurrencia de los sucesos. En la terminología actual, podemos considerar lo siguiente: La probabilidad de ocurrencia de un suceso puede estimarse por la frecuencia relativa del mismo suceso observado en un experimento. Está claro que cuantas más iteraciones se realicen en el experimento, mejor será la aproximación de la frecuencia relativa a la verdadera probabilidad del suceso en cuestión.

Para dar la definición de probabilidad Frecuencial se toma la expuesta por Rengifo Canizales (2021):

Probabilidad a posteriori (medida frecuentista, empírica o intuitiva de probabilidad): Es aquella resultante después de observar un fenómeno aleatorio en el largo plazo. Bajo este enfoque, la probabilidad de cualquier resultado de un fenómeno aleatorio es la proporción de veces que el resultado podría ocurrir en una larga serie de observaciones del fenómeno. En términos generales, se puede decir que, si un fenómeno aleatorio se observa un gran número de veces, digamos n, de las cuales el evento A ocurrió n_A veces, entonces la frecuencia relativa del evento A, $f_A = \frac{n_A}{n}$, tiende a la probabilidad del evento A, $P(A)$.

En símbolos, $\lim\limits_{n\to\infty} f_A = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n_A}{n}\right) \cong P(A)$. Es importante destacar que por la llamada “Ley de los grandes números”, se espera que las probabilidades a posteriori vayan tornándose igual (tiendan) a las probabilidades a priori.

Por tanto, el significado frecuencial define la probabilidad como un número hipotético hacia el cual tiende la frecuencia relativa al estabilizarse.

Algunos problemas de esta interpretación son los siguientes:

- Nunca se obtiene el valor exacto de la probabilidad, sino una estimación.
- Algunos experimentos no se pueden replicar bajo las mismas condiciones exactamente.
- No es sencillo saber cuál es el número necesario de repeticiones hasta tener una buena estimación para la probabilidad.
- Algunos sucesos no son repetibles, especialmente en economía, historia, medicina, etc.

También López (2019) menciona Críticas a la definición de probabilidad frecuencial, como sigue: El concepto de límite es irreal: La fórmula propuesta para el concepto, asume que la probabilidad de un suceso debe estabilizarse cuando repetimos el experimento infinitas veces. Es decir, cuando n tiende a infinito. Sin embargo, en la práctica es imposible repetir algo infinitas veces. Por tanto, no se asume una sucesión verdaderamente aleatoria. Dado que, el concepto de límite, al mismo tiempo, supone que una probabilidad debe estabilizarse, indicando que se trata de algo determinado.

4.2.1.4 Significado Subjetivo.

La repetición de un experimento bajo las mismas condiciones es la base para las interpretaciones clásica y de frecuencia relativa de la probabilidad. Sin embargo, muchos fenómenos no se prestan para repetición, pero a pesar de esto requieren una noción de probabilidad (Canavos, 1984/1988). En este caso la probabilidad se interpreta como el grado de creencia personal con respecto a la ocurrencia de una afirmación.

En este significado se transforma probabilidades a priori (antes de realizar el experimento) en probabilidades a posteriori (una vez observadas sus consecuencias), incorporando la nueva información y revisando la probabilidad de un mismo suceso.

Aquí se involucra la regla de Bayes:

$$P\left({}^{A}\!/_{B}\right) = \frac{P\left({}^{B}\!/_{A}\right)P(A)}{P(B)}$$

Donde:

$P(A)$: probabilidad de que suceda A

$P(B)$: probabilidad de que suceda B

$P(A/B)$: probabilidad de que suceda A, dado que ha acontecido B

$P(B/A)$: probabilidad de que suceda B, dado que ha acontecido A

Esta fórmula permite calcular probabilidades condicionadas. Se calcula la probabilidad de ocurrencia del suceso A, sabiendo que ocurre también el suceso B. Es decir, se establece una diferencia entre la probabilidad del suceso A y la probabilidad de ocurrencia de ese mismo suceso, sabiendo que ha ocurrido otro.

Si consideramos un experimento en el que existe una partición del espacio muestral, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y un suceso B del que conocemos las probabilidades condicionadas $P(B|A_1), \ldots, P(B|A_n)$, entonces podemos calcular la probabilidad de ocurrencia del suceso B mediante la fórmula dada por el Teorema de Probabilidad Total:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P\left({}^{B}/_{A_i}\right) P(A_i)$$

4.2.1.5 Significado Axiomático.

Como lo menciona Batanero (2005) a lo largo del siglo XX diferentes autores contribuyeron a la formalización de una teoría de la probabilidad. Borel contempló la probabilidad como un tipo especial de medida, mientras que Kolmogorov uso esta idea, aplicando la teoría de conjuntos y de la medida, para deducir una axiomática que ha sido aceptada en todas las escuelas, independientemente del significado filosófico otorgado a la naturaleza de la probabilidad.

Para formalizar la definición de probabilidad, a través de un conjunto de axiomas, Canavos (1984/1988) presenta los conceptos básicos de la teoría de conjuntos (o sucesos), sobre los cuales se fundamenta la definición formal de probabilidad. Esta definición es tan general que permite incorporar las distintas interpretaciones de la probabilidad, mencionadas anteriormente.

A continuación, se presentarán definiciones de la teoría de conjuntos, axiomas de probabilidad, teoremas y demás definiciones expuestas en Canavos (1984/1988):

Definición 1. El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio recibe el nombre de *espacio muestral*.

El conjunto de todos los posibles resultados puede ser finito, infinito numerable o infinito no numerable.

Definición 2. Se dice que un espacio muestral es *discreto* si su resultado puede ponerse en correspondencia uno a uno con el conjunto de los enteros positivos.

Definición 3. Se dice que un espacio muestral es *continuo* si sus resultados consisten en un intervalo de números reales.

Con respecto a los resultados de un espacio muestral, se pude estar particularmente interesado en un subconjunto de estos.

Definición 4. Un *evento (o suceso)* en el espacio muestral es un grupo de resultados contenidos en esté, cuyos miembros tienen una característica en común.

Por característica en común debe entenderse que únicamente un grupo de resultados en particular satisface la característica y los restantes, contenidos en el espacio muestral, no la cumplen o satisfacen. Se dice que ha ocurrido un evento si los resultados del experimento aleatorio incluyen a algunos de los que definen al evento. Así el espacio muestral entendido como un evento, tendrá un 100% de ocurrencia, a esto se le denomina *evento seguro*.

Definición 5. El evento que contiene a ningún resultado del espacio muestral recibe el nombre de evento nulo o vacío.

Si $E_1\ y\ E_2$ son dos eventos que se encuentran en un espacio muestral denotado por S.

Definición 6. El evento formado por todos los posibles resultados en $E_1\ o\ E_2$ o en ambos, recibe el nombre de la unión de $E_1\ y\ E_2$ y se denota por $E_1 \cup E_2$.

Definición 7. El evento formado por todos los resultados comunes tanto a E_1 como E_2 recibe el nombre de intersección de $E_1\ y\ E_2$ y se denota por $E_1 \cap E_2$.

Definición 8. Se dice que los eventos $E_1\ y\ E_2$ son mutuamente excluyentes o disjuntos sino tienen resultados en común; en otras palabras $E_1 \cap E_2 . = \emptyset = un\ evento\ vacío.$

Definición 9. Si cualquier resultado de E_2 también es resultado de E_1, se dice que el evento E_2 está contenido en E_1, y se denota por $E_2 \sqsubset E_1$.

Definición 10. Si cualquier resultado de E_1 también es resultado de E_2, se dice que el evento E_1 está contenido en E_2, y se denota por $E_1 \sqsubset E_2$.

Definición 11. El complemento de un evento E con respecto al espacio muestral S, es aquel que contiene a todos los resultados de S que no se encuentran en E, y se denota por $\bar{E}$.

La probabilidad es un número real que mide la posibilidad de que ocurra un resultado del espacio muestral, cuando se realiza un experimento. Por lo tanto, la probabilidad de un evento también es un número real que mide la posibilidad colectiva, de ocurrencia, de los resultados del evento cuando se lleve a cabo el experimento. En Canavos (1984/1988) se da la siguiente definición axiomática de probabilidad.

Definición 12. Sean S cualquier espacio muestral y E cualquier evento de este. Se llamará función de probabilidad sobre el espacio muestral S a $P(E)$ si satisface los siguientes axiomas:

$$P(E) \geq 0$$

$$P(S) = 1$$

Si, para todos los eventos $E_1, E_2, E_3, \ldots,$
$E_i \cap E_j = \emptyset$ para toda $i \neq j$, entonces $P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots$

Las razones de estos tres axiomas se hacen evidentes, por ejemplo, cuando se analiza la probabilidad como una explicación de la frecuencia relativa. Es decir, la probabilidad de un evento refleja la proporción de veces que ocurre cuando se repite el experimento. Estos axiomas también son evidentes para la interpretación subjetiva de la probabilidad, para la cual cualquier grado de creencia se convierte en una razón. Entonces, la probabilidad se comporta como una escala, donde la probabilidad es un número entre cero y uno, y dado que es forzoso que ocurra un resultado cuando se lleva a cabo un experimento, la probabilidad de S es uno. Además, si no hay ningún resultado en común entre dos eventos E_1 y E_2, la probabilidad de que ocurra E_1 o E_2 es igual a la proporción de veces en que ocurre E_1 más la proporción de veces en que ocurra E_2.

Ahora se identifican algunas consecuencias de estos tres axiomas.

Teorema 1. $P(\emptyset) = 0$.

Teorema 2. Para cualquier evento $E \subset S,\ 0 \leq P(E) \leq 1$.

Teorema 3. Sea S un espacio muestral que contiene a cualesquiera dos eventos A y B; entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Definición 13. Sean A y B cualesquiera dos eventos que se encuentran en un espacio muestral S de manera tal que $P(B) > 0$. La probabilidad condicional de A al ocurrir el evento B, es el cociente de la probabilidad del conjunto de A y B con respecto a la probabilidad de B; de esta manera se tiene que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},\ \ P(B) > 0$$

Por simetría

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \;\; P(A) > 0$$

Definición 14. Sean $A\ y\ B$ dos eventos cualesquiera de espacio muestral S. Se dice que el evento A es estadísticamente independiente del evento B si $P(A|B) = P(A)$.

Definición 15. Los eventos $A_1, A_2, \dots, A_{k},$ de un espacio muestral S son estadísticamente independientes si y solo si la probabilidad conjunta de cualquier $2, 3\ \dots\ k$ de ellos es igual al producto de sus probabilidades.

De esta manera, los eventos $A, B\ y\ C$ son estadísticamente independientes si y solo si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

Teorema 4. Si $A_1, A_2\ \dots\ A_{n},$ son n eventos mutuamente excluyentes, de los cuales uno debe ocurrir, es decir $\sum_{i-1}^{n} P(A_i) = 1$, entonces.

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}, \;\; j = 1, 2 \dots n$$

La anterior expresión fue desarrollada por Thomas Bayes (1702-1761) y se conoce como teorema de Bayes. A primera vista no es más que una aplicación de probabilidades condicionales. Sin embargo, ha sido clave en el desarrollo de la inferencia bayesiana en la que se emplea la interpretación subjetiva de probabilidad.

A continuación, en esta parte del marco teórico se presentan aspectos relevantes en esta sistematización sobre el pensamiento aleatorio, la matemática recreativa, el juego, el juego como parte del aprendizaje y el conocimiento del profesor en la enseñanza de la probabilidad.

4.2.2. El Pensamiento Aleatorio

Debido a la falta de información confiable, el pensamiento aleatorio ayuda en la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre, oportunidad, riesgo o ambigüedad, donde es imposible predecir exactamente lo que sucederá. Además, el MEN (2006) menciona que:

> El pensamiento aleatorio se apoya directamente en conceptos y procedimientos de la teoría de probabilidades y de la estadística inferencial, e indirectamente en la estadística

> descriptiva y en la combinatoria. Ayuda a buscar soluciones razonables a problemas en los que no hay una solución clara y segura, abordándolos con un espíritu de exploración y de investigación mediante la construcción de modelos de fenómenos físicos, sociales o de juegos de azar y la utilización de estrategias como la exploración de sistemas de datos, la simulación de experimentos y la realización de conteos. (pp. 64-65)

4.2.3. Matemática Recreativa

Las matemáticas y los juegos siempre han estado relacionados. Una gran cantidad de juegos, tienen un contenido matemático profundo, incluso muchas áreas de las matemáticas están vinculadas con los juegos o se originaron a partir del estudio de los mismos. Si se piensa en el impacto del juego en la historia de las matemáticas Tamayo Bermúdez (2008) menciona que contrario a lo que el común de las personas han pensado, el desarrollo de la matemática ha estado plenamente relacionado con el juego y la lúdica; realmente quienes han realizado aportes significativos en esta ciencia han pasado tiempo creando y pensando en los juegos que esta área del saber ha ido generando: acertijos, problemas ingeniosos, rompecabezas geométricos y los cuadrados mágicos, son solo una pequeña muestra que las matemáticas se ha desarrollado paralela a los juegos que ella misma va generando.

Esta relación que se puede establecer entre los juegos y las matemáticas implica su propia naturaleza, pues el juego comienza aceptando un conjunto de reglas, un cierto número de objetos o piezas cuya función en el juego está definida por reglas. Exactamente de la misma manera, se puede pasar a construir una teoría Matemática definiendo sus axiomas y objetos matemáticos. Gairín Sallán (1990) considera que analizar un juego y buscar su solución es una actividad que se asemeja mucho a la manera como trabajan los matemáticos. Más aún, muchas personas creen que la Matemática es una disciplina que exige una tremenda seriedad, y, sin embargo, la mayoría de matemáticos consideran que, además de otras cosas, la Matemática es un apasionante juego, con muchas ramificaciones y aplicaciones en otras disciplinas.

Muchos académicos se han interesado en la importancia de esta relación y han contribuido a la matemática recreativa, algunos de los más destacados, Martin Gardner, autor entre 1956 y 1981 de la columna Juegos Matemáticos en la revista Scientific American, y de numerosos libros donde se recopilan los artículos de la columna, Yákov Perelmán, escritor ruso de libros de divulgación, Ian Stewart, autor de la columna Mathematical Recreations desde 1990 hasta 2001 y de numerosos libros, también se tienen autores de habla hispana como, Miguel de Guzmán, matemático español, autor entre otros de Aventuras matemáticas, Adrián Paenza, matemático argentino autor de Matemática... ¿Estás ahí?, Ganador del Premio Leelavati en el ICM 2014 en el Congreso Internacional de Matemáticos de Seúl, Eduardo Sáenz de Cabezón, matemático y divulgador español, presentador de Órbita Laika, Autor de Inteligencia Matemática y Apocalipsis matemático, entre otros. Por lo tanto, se cuenta con una amplia literatura sobre esta relación, que cubre prácticamente todas las áreas de la matemática.

En general, los docentes de cualquier rama de las matemáticas tienen acceso a una gran cantidad de juegos matemáticos, entretenimiento y sorpresas que han sido cuidadosamente diseñados para usarse en el aula. Los docentes no deben malinterpretar que la seriedad de su trabajo implica la renuncia de la diversión y los estímulos que el juego puede generar en la motivación de los alumnos (Olarrea et al., 2010).

Otro aspecto importante es el uso de juegos como una alternativa en las clases de matemáticas. En particular Cabello Santos (2006) menciona que el valor de los juegos es despertar el interés de los estudiantes, como lo dijo con mucha precisión Martin Gardner así en la escuela el juego puede convertirse en una poderosa herramienta de aprendizaje si va acompañado, por una parte, de la planificación y; por otra, de abundante reflexión tanto del profesor como de los estudiantes.

4.2.4. El Juego

En las líneas anteriores se habló sobre la relación que existe entre el juego y la matemática, pero ¿Qué es el Juego?, la definición de este concepto tiene muchas connotaciones, no se podría dar una definición universal sobre lo que es el juego, en esta investigación se relacionan los conceptos que se considere pertinentes basados en referentes teóricos.

Así, según Gairín Sallán (1990) una definición formal tanto desde la psicología como desde la sociología sobre lo que es el juego de reglas, está dada por Brigth G, Harvey J, y Wheleer M (1985) quienes estudiaron la definición establecida por Inbar y Stoll (1970), y la complementaron, obteniendo las siguientes características:

- A un juego se dedica libremente.
- Un juego es un desafío contra una tarea o un oponente.

- Un juego se controla por un conjunto definido de reglas. Estas reglas abarcan todas las maneras de jugar el juego.
- Un juego representa una situación arbitraria claramente delimitada en el tiempo y en el espacio desde la actividad de la vida real.
- Socialmente las situaciones de los juegos son consideradas como de mínima importancia.
- El juego tiene una clara delimitación en el espacio y en el tiempo. El estado exacto alcanzado durante el juego no es conocido a priori al comienzo del juego.
- Un juego termina después de un número finito de movimientos en el espacio-tiempo.

En otras palabras, todo juego es, en primer lugar y, sobre todo, una acción libre, donde se involucra un desafío u oponentes, tiene sus reglas definidas para todas las situaciones posibles, representando un escenario delimitado en el espacio y tiempo desde la vida real, donde no se puede conocer previamente que sucederá y debe terminar en un número finito de movimientos.

4.2.4.1 El Juego Como Parte del Aprendizaje.

Este trabajo se centra en los juegos que, dentro de la definición anterior, tienen objetivos instructivos o educativos en la enseñanza de conceptos matemáticos, específicamente en el ámbito de la probabilidad.

En la práctica docente para Gairín Sallán (1990) es útil distinguir los juegos por dos características diferenciadas:

Algunos juegos tienen ejercicios que requieren que los jugadores usen conceptos o algoritmos contenidos en programas matemáticos. Así, un jugador consume su turno haciendo una multiplicación, o encontrando la solución a una ecuación, o calculando el área de una figura plana, etc. Por ello, estos juegos se denominan **juegos de conocimiento**. Se distinguen tres niveles de aplicación de este tipo de juegos:

PRE-INSTRUCCIONAL. A través de estos juegos el alumno puede llegar a descubrir un concepto o establecer la justificación de un algoritmo. De este modo el juego es el único vehículo para el aprendizaje.

CO-INSTRUCCIONAL. El juego puede ser una más de las diferentes actividades que el profesor utiliza para la enseñanza de un bloque temático. En este caso, el juego acompaña a otros recursos de aprendizaje.

POST-INSTRUCCIONAL. Los alumnos ya han recibido la enseñanza sobre un tema, y mediante el juego se hacen actividades para reforzar lo que han aprendido. Por tanto, el juego sirve para consolidar el aprendizaje.

Hay otros juegos cuyo ejercicio exige poner en práctica habilidades, razonamientos o destrezas directamente relacionadas con el modo en el que habitualmente proceden las matemáticas. Por ello se denominan **juegos de estrategia**. Hay unos que son personales o solitarios, y en los que el jugador tiene que encontrar la forma de resolverlo; otros son multipersonales, y en los que la tarea consiste en encontrar la existencia de una estrategia que permita ganar siempre a sus oponentes. Este tipo de juegos es, sin duda, el que más interés ha despertado en los matemáticos de todos los tiempos. De la búsqueda de soluciones de juegos han surgido ramas como la teoría de grafos o la probabilidad.

Desde el punto de vista de la enseñanza de las matemáticas Gairín Sallán (1990) señala que la búsqueda de soluciones de los juegos sirve para uno o más de los siguientes objetivos:

- Utilizar diferentes técnicas heurísticas, que ayudaran a la resolución de problemas.
- Potenciar actitudes como la autoconfianza, autodisciplina o perseverancia en la búsqueda de soluciones.
- Desarrollar habilidades como las de observación y comunicación.
- Apreciar la potencia y belleza de la argumentación matemática.
- Además, algunos juegos permiten fortalecer y desarrollar los conocimientos matemáticos, ya que requieren resolverse a través de diferentes ramas de las matemáticas.

Como se ha dicho, el juego elegido debe enfocarse en conseguir los objetivos previamente marcados de una forma divertida, pero de una manera más motivadora y entretenida. Puesto que motivar no es solo darles a los estudiantes una buena inclinación para aprender cosas nuevas, sino también darles una comprensión del tema que se les está explicando en este caso, de las matemáticas.

Para Nerea Sánchez (2013) la matemática es un juego que presenta las mismas emociones que otros juegos, especialmente los juegos de estrategia. Primero, aprende las reglas, estudia los movimientos principales, experimenta con juegos sencillos, trata de asimilar sus procedimientos para que puedan usarlos más tarde en situaciones similares. El objetivo es que los estudiantes participen activamente y se enfrenten a los nuevos problemas que surgen constantemente debido a la riqueza del juego, desarrollando herramientas útiles para resolver los diversos problemas que se presentan.

Hacer uso de juegos en la enseñanza-aprendizaje en el aula no puede ser de manera improvisada o para cubrir tiempo donde se ha alcanzado con lo planeado en la clase. Para los profesores que decidan practicar juegos con sus estudiantes, Gairín Sallán (1990) propone de una manera esquemática las siguientes consideraciones:

Es necesario que el profesor practique el juego antes de presentarlo a sus estudiantes. Y ello por razones como las siguientes: La eficacia de una actividad depende, en buena medida, del entusiasmo con que la realice el profesor. Por tanto, si un juego agrada personalmente al profesor, este lo presentara de manera que sus alumnos también lo disfruten. El profesor podrá observar, y corregir si fuese necesario, aspectos tales como si hay lagunas o errores en las reglas, si hay jugadas que tienen dificultades, si el juego puede llevar a situaciones monótonas, si la duración es excesiva…

De su propia experiencia sacará información de los procesos que llevan a la solución, posibles "vías muertas", bloqueos que se puedan producir… Así tendrá más posibilidades de prestar ayuda a sus estudiantes en el momento oportuno y de modo más efectivo.

El juego hay que proponerlo a los estudiantes en el momento preciso. Es decir, que hay que determinar si el juego corresponde al nivel pre, co o post-instruccional. Y en el último caso hay que practicarlo relativamente próximo al momento en que se introdujo la instrucción.

El juego ha de utilizarse para el fin adecuado. Los estudiantes deben conocer que el juego sirve para potenciar su aprendizaje. Además, el profesor debe diferenciar si hay que emplear un juego de conocimiento o de estrategia, buscando, en cada caso, que se adapte a los objetivos educativos previstos.

El juego hay que practicarlo de forma correcta. Antes de iniciar el juego hay que dedicar un espacio para que los estudiantes conozcan el material, comprendan las reglas, la forma en cómo ganar o perder. Después es bueno que se practique alguna jugada sencilla; o se utilicen reglas sencillas, o se hagan jugadas de práctica, etc...

Todos los estudiantes deben participar en el juego, que sea una actividad igual para todos, aunque en el desarrollo del mismo pueda haber grupos de estudiantes. Además, procurar medidas para que la solución de juego de estrategia la puedan alcanzar todos, que no se haga pública la solución para que ningún estudiante (con las ayudas necesarias), se le hurte el placer de descubrir el resultado con sus propios medios. Es interesante que el profesor proponga al estudiante que ha encontrado la solución que trate de extender sus resultados a situaciones más complejas.

El profesor puede recurrir a juegos comercializados o publicados para ponerlos a sus estudiantes. Para realizar una selección de estos juegos el profesor debe hacerse preguntas como: ¿sirve el juego para los objetivos propuestos?, ¿qué conocimientos necesita el estudiante para practicar el juego?, ¿qué habilidades se requieren para practicar el juego?, ¿hay problemas de costos o de espacio para practicar el juego?, ¿existe algún compañero que hay experimentado el juego en situaciones similares a las de mis estudiantes?

Si el profesor decide elaborar un juego para que lo practiquen sus estudiantes es conveniente recordar que hay muchos juegos, educativos o no, que ya han sido inventados, que llevan mucho tiempo practicándose y que sueles ser conocidos por los estudiantes. Por ello, es conveniente buscar un juego entre los ya existentes, para después modificar sus reglas y/o materiales y adaptarlos nuestros intereses pedagógicos. Después de elaborado el material y las reglas es bueno hacerse preguntas como las del apartado anterior y probar el funcionamiento con un pequeño grupo de estudiantes para hacer correcciones precisas que permitan su correcto funcionamiento ante toda la clase.

Partiendo de las pautas anteriores, se realizaron los juegos propuestos en esta investigación, identificando el tipo de juego más adecuado, buscando que estos estén enfocados en unos objetivos educativos específicos, que sean divertidos, generando interés y motivación tanto por el juego como por el objeto matemático en él.

4.2.5. Conocimiento del Profesor y Enseñanza de la Probabilidad

Los profesores juegan un papel importante en la interpretación de un currículo y su adaptación a un contexto particular. Si bien la enseñanza de la probabilidad en las escuelas no requiere un alto nivel de conocimientos matemáticos, como la teoría de la medida. Batanero, Contreras et al (2011) recuerdan a los docentes la necesidad de una comprensión sólida de los conceptos básicos de las matemáticas que se enseñan. Esta comprensión incluye una comprensión sólida de las interconexiones y relaciones entre los diferentes conceptos matemáticos y sus aplicaciones, así como otros conocimientos matemáticos no rigurosos necesarios para organizar la enseñanza y ponerla en práctica.

Batanero, Contreras et al (2011) en su trabajo describen los siguientes componentes del conocimiento que los profesores necesitan para enseñar adecuadamente la probabilidad:

Componente epistémica: conocimiento del contenido matemático o estadístico, es decir, el conjunto de problemas, procedimientos, conceptos, propiedades, e lenguaje y argumentos incluidos en la enseñanza de un tema dado y su distribución en el tiempo de enseñanza.

Componente cognitiva: conocimiento de los niveles de los estudiantes del desarrollo y la comprensión del tema, las estrategias de los estudiantes, las dificultades y errores en cuanto al contenido previsto.

Aspecto afectivo: conocimiento de las actitudes de los estudiantes, las emociones, las motivaciones sobre el contenido y el proceso de estudio.

Componente mediacional: conocimiento de los recursos didácticos y tecnológicos disponibles para la enseñanza y las posibles formas de utilizar y distribuir estos recursos en el tiempo.

Componente interaccional: gestión de las organizaciones posibles del discurso en el aula y las interacciones entre el profesor y los estudiantes que ayudan a resolver las dificultades de los estudiantes y los conflictos.

Componente ecológico: el conocimiento de la relación del tema con el currículo oficial, otros temas matemáticos o estadísticos y con los entornos sociales, políticos y económicos que apoyan la enseñanza y el aprendizaje.

Estos modelos de formación docente sirven de guía para la organización de actividades formativas encaminadas al desarrollo total o parcial de los conocimientos. Los modelos anteriores de conocimientos del profesor sugieren que los conocimientos estadísticos en sí mismos no son suficientes para que los docentes puedan enseñar probabilidad de una manera efectiva y desarrollar en sus estudiantes un adecuado razonamiento probabilístico.

Puesto que la presente investigación va dirigida a profesores en formación, es muy importante tener en consideración estos componentes del conocimiento, ya que, según estos, se debe tener en cuenta los elementos del significado de la probabilidad como objeto matemático (Componente epistémica), desarrollo y compresión del tema que tienen los estudiantes (Componente cognitiva), el juego como parte del aprendizaje servirá para estimular las actitudes, emociones y motivaciones de los estudiantes (Aspecto afectivo), también como recurso didáctico para la enseñanza como futuros profesores (Componente mediacional). En esta investigación habrá interacciones entre practicante y estudiantes con el ánimo ayudar a resolver las dificultades y conflictos (Componente interaccional) y esto con el fin de potenciar el pensamiento aleatorio o probabilístico el cual es uno de los cinco pensamientos en que se subdivide el pensamiento matemático propuesto en los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (LCM) y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (EBCM) (Componente ecológico).

5 Diseño metodológico

5.1 Enfoque de Investigación

El enfoque de esta investigación es de carácter cualitativo teniendo en cuenta el propósito de esta, puesto que según Hernández et al. (2014) definen la investigación cualitativa como un enfoque de investigación que se centra en comprender los significados y las experiencias subjetivas de los participantes en un fenómeno determinado, a través de técnicas de recolección de datos como la observación, la entrevista y el análisis de documentos. Este tipo de investigación no busca generalizar los hallazgos a una población más amplia, sino más bien profundizar en el conocimiento de un fenómeno particular desde la perspectiva de los participantes.

5.2 Diseño de la Investigación

El abordaje general que se utiliza es la investigación-acción ya que este proceso se basa en observar, pensar y actuar de una manera cíclica, donde se tiene en cuenta cómo los estudiantes expresan sus emociones, opiniones y reflexiones en los distintos escenarios, se observa si lo planteado es adecuado para el objetivo de la investigación o requieren alguna modificación, para luego implementar una serie de actividades que se consideran adecuadas para alcanzar el objetivo, teniendo en cuenta lo expresado por los estudiantes. Así mismo, Salgado (2007) señala que la Investigación-Acción tiene como objetivo solucionar problemas cotidianos y mejorar prácticas específicas, necesita información que sirva como guía para la toma de decisiones en programas, procesos y reformas estructurales. Sus fundamentos se basan en la idea de que los participantes que experimentan un problema son los más aptos para abordarlo en un entorno naturalista, dado que su comportamiento está fuertemente influenciado por el entorno en el que se encuentran. Según Stringer (como se citó en Hernández et al. 2014) el diseño de investigación-acción consta de tres fases esenciales: la observación, que implica la construcción de un bosquejo del problema y la recolección de datos; el análisis y la interpretación, en la que se reflexiona sobre los datos obtenidos; y la acción, que implica la resolución de problemas y la implementación de mejoras. Estas fases se llevan a cabo de forma cíclica, repitiéndose una y otra vez hasta que se logra resolver el problema, realizar el cambio o introducir la mejora de manera satisfactoria.

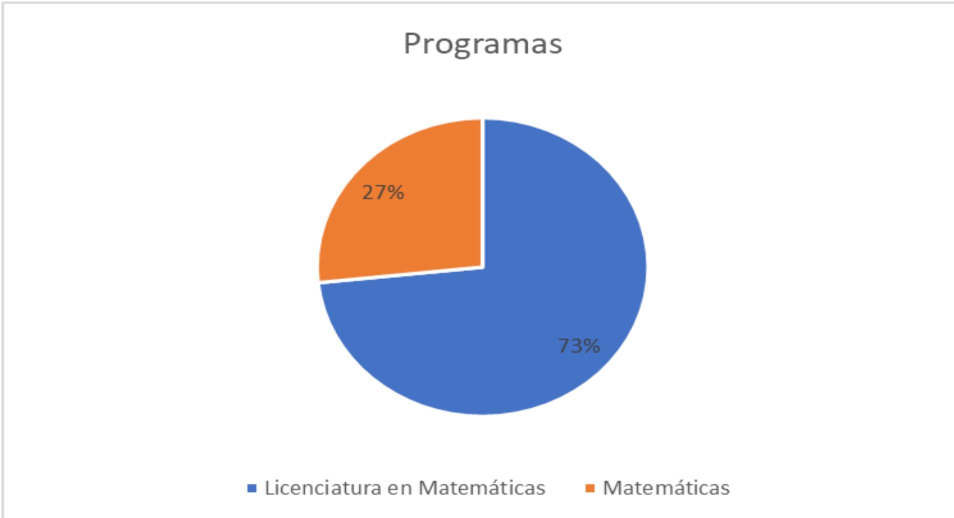
Las tres fases fueron fundamentales en el desarrollo de la investigación ya que, a través de una observación constante en toda la intervención, se pudo apreciar el interés de los estudiantes en los significados de la probabilidad y los juegos planteados. Al reflexionar sobre esto, se realizaron modificaciones en los juegos y la forma de abordar los conceptos de cada uno de los significados de probabilidad. Como resultado, se obtuvo una gran respuesta por parte de los estudiantes, quienes se sintieron cómodos e interesados al ver que se proponían juegos más atractivos que los anteriores y comprendieron con mayor facilidad los conceptos tratados en cada sesión.

5.3 Población y Muestra

La inmersión tuvo lugar en el curso "Problemas en Educación Matemática" durante el período académico 2021-I, el cual tuvo la participación de 40 estudiantes que no fueron objeto de la presente investigación. Sin embargo, en el curso "Matemáticas Recreativas" del periodo 2022-I, los estudiantes presentaron características similares, ya que se trataron de individuos respetuosos, con habilidades para el trabajo en equipo, formados para ser futuros docentes, en su mayoría provenientes de cursos de enseñanza tradicional y con interés en explorar nuevas formas de aprender sobre contenidos matemáticos y curiosidades relacionadas con temas como la probabilidad.

En el curso "Matemáticas Recreativas" se inscribieron 30 estudiantes, de los cuales 22 pertenecían al programa de Licenciatura en Matemáticas y 8 al programa de Matemáticas. Es importante destacar que los estudiantes no estaban en el mismo semestre, ya que se contó con participantes de cuarto, sexto, séptimo, octavo, noveno y décimo semestre. A continuación, en la Figura 3 se presenta el porcentaje de estudiantes de cada programa.

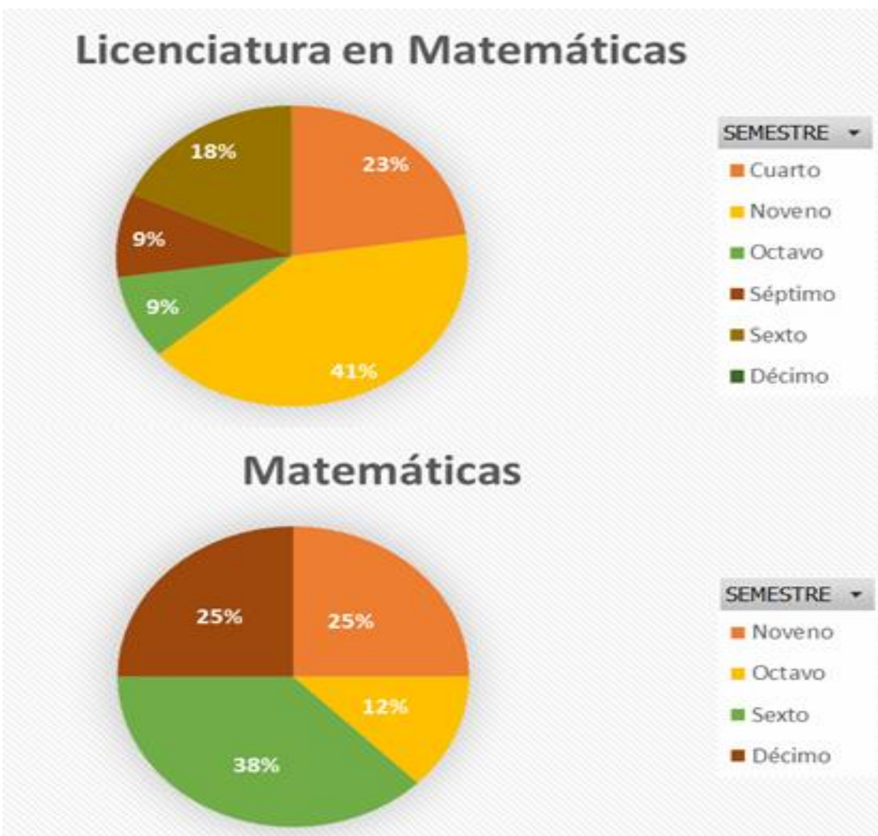
Figura 3 *Porcentaje de estudiantes de los dos programas en el curso Matemáticas Recreativas*



Nota. En la figura se puede observar una predominancia de los estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas en comparación con los estudiantes del programa de Matemáticas que participaron en el curso. Fuente: Elaboración propia.

En la figura 4 se muestra el semestre en el que se encuentran los estudiantes con respecto a sus programas.

Figura 4 *Semestres de los estudiantes por cada programa del curso Matemáticas Recreativas*



Nota. La figura muestra el porcentaje de estudiantes por semestre al cursar la signatura Matemáticas Recreativas según los dos programas. Fuente: Elaboración propia.

Con respecto a la figura 4 se evidencia que en los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas existe un 23% de estudiantes que se encuentran en cuarto semestre, estudiantes que si bien hay tenido la oportunidad de cursar diferentes asignaturas en las que se encuentra Estadística y Probabilidad (asignatura que debería cursarse en tercer semestre), se tiene un 77% de estudiantes que se encuentran en semestre superiores donde han tenido la oportunidad de cursar asignaturas de mayor complejidad, donde se podría afirmar que cuentan con una cierta ventaja al momento analizar y solucionar ejercicios propuestos. Para el caso de los estudiantes de Matemáticas se cuenta con estudiantes de sexto semestre en adelante, quienes ya cuentan con conocimientos, habilidades o experiencias con respecto a la probabilidad.

Con el fin de caracterizar a los estudiantes del curso, se planteó la siguiente pregunta: ¿Han cursado la asignatura de Estadística y Probabilidad? Obteniendo lo siguiente:

Figura 5 *Caracterización de los estudiantes del curso Matemáticas Recreativas*

Nota. La encuesta la realizaron 17 estudiantes, los datos se capturaron por medio de un formulario Google. Fuente: Elaboración propia.

De los estudiantes que respondieron a la pregunta, se pudo observar que el 6% de ellos no habían cursado la asignatura de Estadística y Probabilidad. Esta situación les permitió explorar temas "nuevos" de manera innovadora y adquirir conocimientos que les resultarán útiles cuando finalmente decidan cursar la materia. Por otro lado, el 94% restante de los estudiantes que ya habían cursado la asignatura, tuvieron la oportunidad de fortalecer sus conocimientos y abordar los conceptos de probabilidad de manera más entretenida.

Para el propósito de analizar la información, se utiliza la siguiente estructura de codificación para los estudiantes: se asigna la letra "E" de "estudiante" seguida de un número enumerado del 1 al 30 en orden secuencial. Por lo tanto, los códigos asignados van desde E1 hasta E30.

5.4 Fases de la Investigación

Este trabajo de práctica se desarrolló en tres fases.

5.4.1 Fase I – Inmersión en la Institución

La profesora titular del curso Problemas en Educación Matemática del periodo 2021-I, Dra. Samin Ingrith Cerón Bravo permitió que como practicante tuviera acceso a Classroom donde se encuentra las clases de este periodo y así poder observar la práctica docente del estudiante Eduard Felipe Hernández Luna, la cual generó la intención de este trabajo.

Después de esto, se procedió a revisar los referentes teóricos relacionados con el pensamiento aleatorio y la probabilidad, así como también se estudió la relación entre el juego y las matemáticas y cómo se puede utilizar como herramienta de aprendizaje. Además, se consideró importante conocer los conocimientos que un profesor debe tener para enseñar la probabilidad según Carmen Batanero. Todo esto se llevó a cabo con el objetivo de diseñar guías que se utilizaron durante el período 2022-I con los estudiantes de Matemáticas Recreativas.

5.4.2 Fase II – Ejecución de la Practica

Para llevar a cabo la práctica docente, se elaboraron 5 guías de aprendizaje, las cuales se distribuyeron en 12 sesiones de clase que se dividieron en diferentes etapas: entrega de la guía, explicación de la temática, vamos a jugar, ejercicios de los juegos y retroalimentación de los ejercicios propuestos. Es importante destacar que tanto las guías como los juegos diseñados originalmente para los estudiantes sufrieron modificaciones debido a las observaciones realizadas por el practicante.

Durante la recolección y organización de los datos obtenidos en el aula y las tareas entregadas por los estudiantes, se utilizaron diversas herramientas, como registro fotográfico, documentos físicos y en medio magnéticos con las soluciones a los ejercicios propuestos, diarios de campo y una encuesta al final de la intervención.

Los datos recopilados se analizaron reflexivamente en cada actividad realizada en clase, y se documentaron en el diario de campo correspondiente.

Por último, se entregó un informe de las notas obtenidas por los estudiantes durante el proceso a la docente titular.

5.4.3 Fase III – Análisis de la Práctica Pedagógica

Durante esta fase, se llevó a cabo un análisis detallado de los resultados obtenidos en las fases I y II con el fin de describir las actividades realizadas durante la intervención pedagógica. Se realiza un análisis cuidadoso del comportamiento de los estudiantes frente a los juegos propuestos y se identifica su desempeño en relación a los cinco significados de probabilidad. Para ello, se utilizan los cinco elementos que componen el significado de un objeto matemático, los cuales son una herramienta útil para el análisis de las respuestas en actividades matemáticas y para el proceso de enseñanza-aprendizaje. Finalmente, se elaboran conclusiones a partir de los resultados obtenidos.

6 Técnicas e Instrumentos de Recolección de Datos

Teniendo en cuenta el enfoque y diseño utilizado en la presente investigación se tuvo en cuenta las siguientes técnicas e instrumentos de recolección de datos.

6.1 Observación Participante y no Participante

Para Hernández et al. (2014) la observación cualitativa no se trata simplemente de observar pasivamente el mundo y tomar notas, sino de involucrarse activamente en situaciones sociales y reflexionar continuamente sobre ellas. Es importante prestar atención a los detalles, eventos, sucesos e interacciones que ocurren en el entorno observado. En resumen, la observación cualitativa implica una inmersión profunda y una actitud activa y reflexiva.

En este caso, se clasificó la observación según el papel del observador. Durante la etapa de inmersión de la investigación, se utilizó la técnica de **observación no participativa** como método de recolección de datos, debido a la emergencia sanitaria causada por el virus COVID-19, lo que impidió el contacto directo con los estudiantes. En lugar de eso, se observaron videos de clases del curso Problemas en Educación Matemática del periodo 2021-I, impartidas por el practicante Eduard Felipe Luna a 37 estudiantes a través de la aplicación Google Meet. Además, se revisaron diapositivas y otros documentos para una mejor comprensión del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Se utilizó también la técnica de **observación participante**, en la cual el observador toma parte en la mayoría de las actividades, pero no se integra completamente con los participantes, manteniendo principalmente su papel como observador. Según Hernández et al. (2014), esta técnica permite al observador comprender mejor el punto de vista interno de los participantes al involucrarse de manera más activa en la situación observada. Durante la ejecución de la práctica se observaron 30 estudiantes del curso Matemáticas Recreativas del periodo 2022-I, en donde el practicante tuvo un rol activo en el desarrollo de los juegos y las preguntas planteadas en las sesiones de clase, lo que permitió observar con detalle las acciones de los estudiantes y registrar lo que se consideró relevante para su posterior análisis. Esta técnica resultó valiosa en la investigación porque, al involucrarse más directamente con los estudiantes, los datos recopilados tienen un mayor contexto y permiten comprender mejor la experiencia vivida.

Para la recolección de datos, se empleó el formato de observación denominado diario de campo. Este formato permitió registrar detalles de cada una de las sesiones de clase, incluyendo observaciones, impresiones y un primer análisis del practicante. Además, se realizó un registro fotográfico con el fin de proporcionar descripciones precisas de las actividades realizadas por los estudiantes en algunas sesiones de clase.

6.2 Entrevista

En la presente investigación, el objetivo de la entrevista es obtener información detallada y profunda sobre las experiencias, perspectivas y creencias de los participantes acerca de cómo los juegos pueden ser una herramienta valiosa para el proceso de enseñanza y aprendizaje en conceptos como los significados de la probabilidad.

En la inmersión, se llevó a cabo una entrevista con la Dra. Samin Ingrith Cerón Bravo, quien es la profesora encargada del curso Problemas en Educación Matemática durante el periodo 2021-I. El objetivo de esta entrevista es comprender la perspectiva de la docente acerca de las acciones de los estudiantes al utilizar una metodología basada en juegos para la enseñanza en un entorno virtual. Además, se buscó identificar las necesidades que deben abordarse en el próximo curso que implemente esta metodología. La entrevista se realiza utilizando una estructura definida, tal como se describe en Hernández et al. (2014) la **entrevista estructurada**, se define como una reunión para conversar e intercambiar información entre dos personas, donde el entrevistador sigue una guía de preguntas específicas y se limita a ella.

Durante la etapa de intervención de la práctica pedagógica, se llevaron a cabo entrevistas abiertas con los estudiantes durante las sesiones de clase. El propósito de estas entrevistas fue recopilar las opiniones de los estudiantes acerca de las preguntas planteadas en los juegos relacionados con el concepto de probabilidad de cada sesión, y luego fomentar un debate para explorar diferentes puntos de vista y llegar a un consenso. Según Hernández et al. (2014), las **entrevistas abiertas** se basan en una guía general de contenido, y el entrevistador tiene la flexibilidad de manejarla según las necesidades.

Se utilizaron diversos instrumentos de recolección de datos, tanto en formato electrónico como físico, entre ellos se incluyeron: encuesta a la docente, respuestas de los estudiantes a las tareas propuestas, respuestas al Formulario Matemáticas Recreativas sobre significados de la probabilidad, así como registros fotográficos. Estos instrumentos permitieron obtener información detallada y rica en cuanto a los conocimientos y experiencia de los estudiantes en el curso de Matemáticas Recreativas.

7 Cronograma

A continuación, se presenta el cronograma de actividades que se llevaron a cabo para cumplir con los objetivos establecidos. Es importante destacar que para la planificación se consideró el horario proporcionado por la docente titular, el cual indica que el curso Matemáticas Recreativas se orienta durante 4 horas catedra semanales, divididas en 2 horas diarias (martes y jueves).

Figura 6 *Cronograma de actividades*

Nombre se la sesión	Descripción de la sesión	Junio							Julio				
		2	7	14	16	23	28	30	7	12	14	19	21
Significado Intuitivo de la probabilidad	Entrega de la guía												
	Explicación de la temática												
	Vamos a jugar												
	Ejercicios de los juegos												
	Retroalimentación de los ejercicios												
Significado Clásico de la probabilidad	Entrega de la guía												
	Explicación de la temática												
	Vamos a jugar												
	Ejercicios de los juegos												
	Retroalimentación de los ejercicios												
Significado Frecuencial de la probabilidad	Entrega de la guía												
	Explicación de la temática												
	Vamos a jugar												
	Ejercicios de los juegos												
	Retroalimentación de los ejercicios												
Significado Subjetivo de la probabilidad	Entrega de la guía												
	Explicación de la temática												
	Vamos a jugar												
	Ejercicios de los juegos												
	Retroalimentación de los ejercicios												
Significado Axiomático de la probabilidad	Entrega de la guía												
	Explicación de la temática												
	Vamos a jugar												
	Ejercicios de los juegos												
	Retroalimentación de los ejercicios												

Nota. La figura muestra actividades llevadas a cabo durante la práctica pedagógica. Fuente: Elaboración propia

Es importante mencionar que en cada sesión se llevaron a cabo diversas actividades dentro del tiempo estipulado. Por ejemplo, en la sesión del 12 de julio, se explicó la temática del significado frecuencial de la probabilidad y se desarrolló un juego para abordar temas relacionados con el significado subjetivo de la probabilidad. Debido a limitaciones de tiempo, se abordó el significado axiomático de la probabilidad en una sola sesión de clase.

8 Propuesta Didáctica

8.1 Presentación

El proyecto de intervención pedagógica para el curso electivo "Matemáticas Recreativas" del periodo 2022-I en la Licenciatura en Matemáticas y Matemáticas de la Universidad del

Cauca. Tiene como objetivo principal mejorar el pensamiento aleatorio de los estudiantes mediante el uso de juegos como herramienta educativa. En particular, se utilizan juegos que abordaron los conceptos relacionados con los significados de la probabilidad, los cuales se encuentran incluidos en los microcurrículos de las asignaturas obligatorias de los programas, en particular, de Estadística y Probabilidad e Inferencia Estadística. De esta manera, se espera lograr un aprendizaje más efectivo y significativo, al tiempo que se promueve el desarrollo de habilidades y destrezas en el pensamiento aleatorio de los estudiantes.

En consecuencia, se desarrollaron 5 guías de aprendizaje que se distribuyeron en 12 sesiones de 120 minutos cada una. Cada guía se centró en el estudio de los conceptos relacionados con la probabilidad intuitiva, clásica, frecuencial, subjetiva y axiomática. Se diseñaron juegos acordes con cada temática y su estructura fue planificada para motivar a los estudiantes, fomentar su interés por los juegos y ayudar a comprender la relación existente entre estos y los contenidos tratados. En este sentido, se produjo el juego como herramienta didáctica para mejorar las habilidades de los estudiantes en la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre, oportunidad, riesgo o ambigüedad, donde es imposible prever con exactitud lo que sucederá.

La propuesta didáctica se divide en tres etapas: la presentación del tema por parte del profesor, la realización de juegos y ejercicios por parte de los estudiantes, y una discusión general de los resultados obtenidos. Se esperaba que los estudiantes realizasen una lectura previa del material que se iba a abordar en cada sesión.

8.2 Marco Legislativo y Contexto

Se busca establecer una base sólida sobre la importancia y pertinencia del desarrollo del pensamiento aleatorio mediante situaciones de la vida real, específicamente a través de juegos. Para lograrlo, se utilizan como referencias los lineamientos curriculares en matemáticas del MEN (1998), los estándares básicos de competencia en matemáticas del MEN (2006) y el microcurrículo de las asignaturas Matemáticas Recreativas y Estadística y Probabilidad. Esto con el propósito de definir estrategias y herramientas que permitan alcanzar los objetivos planteados en cada guía propuesta.

8.2.1. Lineamientos Curriculares en Matemáticas

Los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (LCM) del MEN (1998) fundamentan las orientaciones y directrices para la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles educativos, desde la educación básica primaria hasta la educación media superior. Se enfocan en la importancia de las matemáticas como herramienta fundamental para el desarrollo de habilidades y competencias en los estudiantes, y definitivamente los objetivos y metas que se deben alcanzar en cada nivel educativo, así como las competencias y habilidades que los estudiantes deben desarrollar en el area de las matematicas. Además, abordarán los contenidos que deben ser enseñados en cada nivel educativo, las metodologías y estrategias pedagógicas adecuadas para lograr un aprendizaje efectivo, y la evaluación de los procesos y resultados del aprendizaje en matemáticas.

En particular, se destaca la importancia de relacionar los contenidos de aprendizaje con la experiencia cotidiana de los estudiantes y presentarlos en un contexto de situaciones problemáticas y de intercambio de puntos de vista. Para organizar el currículo, se propone considerar tres aspectos interrelacionados: procesos generales, conocimientos básicos y el contexto. Según esta visión global e integral, es imprescindible abordar cada uno de estos aspectos al diseñar una situación didáctica. Entre los conocimientos básicos se encuentra el pensamiento aleatorio, junto con el pensamiento numérico, espacial, métrico y variacional.

En el desarrollo del pensamiento aleatorio, es fundamental que tanto los estudiantes como los docentes se sumerjan en un espíritu de exploración e investigación a través de la enseñanza de la probabilidad y la estadística. La inclusión de estos temas en el currículo de matemáticas implica el uso de pensamiento inductivo para proponer inferencias sobre un conjunto de datos, lo que a su vez puede tener diferentes posibilidades de ser cierto. Por su carácter no determinista, la enseñanza de la probabilidad requiere un enfoque significativo y contextualizado, en el que la presencia de problemas abiertos y cierta indeterminación permiten exponer argumentos estadísticos, encontrar diferentes interpretaciones y tomar decisiones. Las proporciones estadísticas, como las frecuencias relativas, las probabilidades, los valores esperados y los valores medios, se presenta mediante definiciones formales, reglas de cálculo o funciones matemáticas, pero estos valores exactos no reflejan completamente la naturaleza aleatoria de los datos. Para una comprensión adecuada, es fundamental un marco de significación que permita relacionar estos valores con situaciones concretas de la vida real, como aplicaciones prácticas en diferentes contextos.

En esta propuesta de investigación, se tiene en cuenta que el desarrollo del pensamiento aleatorio debe involucrar tanto a estudiantes como a docentes, en línea con las consideraciones planteadas en los lineamientos. Esta propuesta se enfoca en docentes en formación y busca evitar que las definiciones, axiomas, fórmulas relacionadas con la probabilidad se presenten aislados del contexto. Para ello, se proponen los juegos como herramienta didáctica, ya que permiten abordar situaciones de azar y desarrollar habilidades como el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercicio de procedimientos. En consecuencia, se espera que esta estrategia potencie el pensamiento aleatorio de los docentes en formación.

8.2.2. Estándares Básicos de Competencia en las Matemáticas

En los Estándares Básicos de Competencia en las Matemáticas (EBCM) del MEN (2006) se propone una nueva visión de las matemáticas, considerándolas como una creación humana y una disciplina en constante cambio, resultado de la actividad de grupos culturales. Se enfatiza la importancia de incorporar esta visión en los procesos de formación de los estudiantes y de pasar de una enseñanza orientada hacia la retención de contenidos a una enseñanza que respalda el desarrollo de competencias matemáticas, científicas, tecnológicas, lingüísticas y ciudadanas. Se define la competencia como un conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socioafectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores.

Se destaca que el aprendizaje por competencias es significativo y comprensivo y que las competencias matemáticas no se adquieren de manera espontánea, sino que requieren ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problemáticas significativas y comprensivas que posibiliten avanzar a niveles de competencia más complejos. Se hace visible en que la noción de competencia es objeto de interés en muchas investigaciones y reflexiones de la comunidad de investigadores en educación matemática.

Además, se relaciona la expresión "ser matemáticamente competente" con los fines de la educación matemática en todos los niveles educativos y con la adopción de un modelo epistemológico sobre las propias matemáticas. Se explican los cinco procesos generales contemplados en los LCM, los cuales definen lo que significa ser matemáticamente competente y se subraya la importancia de ser diestro, eficaz y eficiente en el desarrollo de cada uno de esos procesos generales.

Por otro lado, ser matemáticamente competente se concreta de manera específica en el pensamiento lógico y el pensamiento matemático, que se subdivide en los cinco tipos de pensamiento propuestos en los LCM: el numérico, el espacial, el métrico o de medida, el aleatorio o probabilístico y la variación.

Se enfatiza la importancia del pensamiento aleatorio en la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre y de riesgo, y se mencionan los conceptos y procedimientos de la teoría de probabilidad y de la estadística inferencial que lo sustentan, destacando que hoy en día, no es tan importante para los estudiantes el recuerdo de fórmulas y la habilidad para calcular sus valores, como sí lo es el desarrollo del pensamiento aleatorio, que les permitirá interpretar, analizar y utilizar los resultados que se presentando en distintos medios.

Se considera que las ideas y consideraciones expresadas en los EBCM son esenciales para la elaboración de esta propuesta didáctica, ya que sirvieron como base para reflexionar en profundidad sobre la planificación de los objetivos, actividades y métodos de evaluación.

8.2.3. Microcurrículo Matemáticas Recreativas y Estadística y Probabilidad

Durante el proceso de diseño de esta propuesta didáctica, se tuvo en cuenta la importancia del microcurrículo como documento que establece los objetivos de aprendizaje, contenidos, metodologías y evaluación para una unidad curricular específica. Por esta razón, se llevó a cabo una revisión exhaustiva de los microcurrículos correspondientes a las asignaturas de Matemáticas Recreativas como al de Estadística y Probabilidad.

El objetivo principal de esta revisión fue abordar los contenidos del curso estadística y probabilidad, en particular los fundamentos básicos de la teoría de la probabilidad. Además, se buscó ir en línea con los objetivos generales y específicos del curso Matemáticas Recreativas, que tiene como finalidad despertar el interés por el quehacer matemático, relacionar juegos y pasatiempos con conceptos matemáticos, mostrar algunos temas matemáticos desde otra perspectiva y facilitar su comprensión.

Finalmente, se estableció la metodología de enseñanza basada en el curso Matemáticas Recreativas, para proporcionar un ambiente de aprendizaje enriquecido por situaciones problemáticas significativas y comprensivas, que puedan avanzar a niveles de competencia cada vez más complejos y fomentar el pensamiento aleatorio.

8.3 **Objetivos de la propuesta didáctica.**

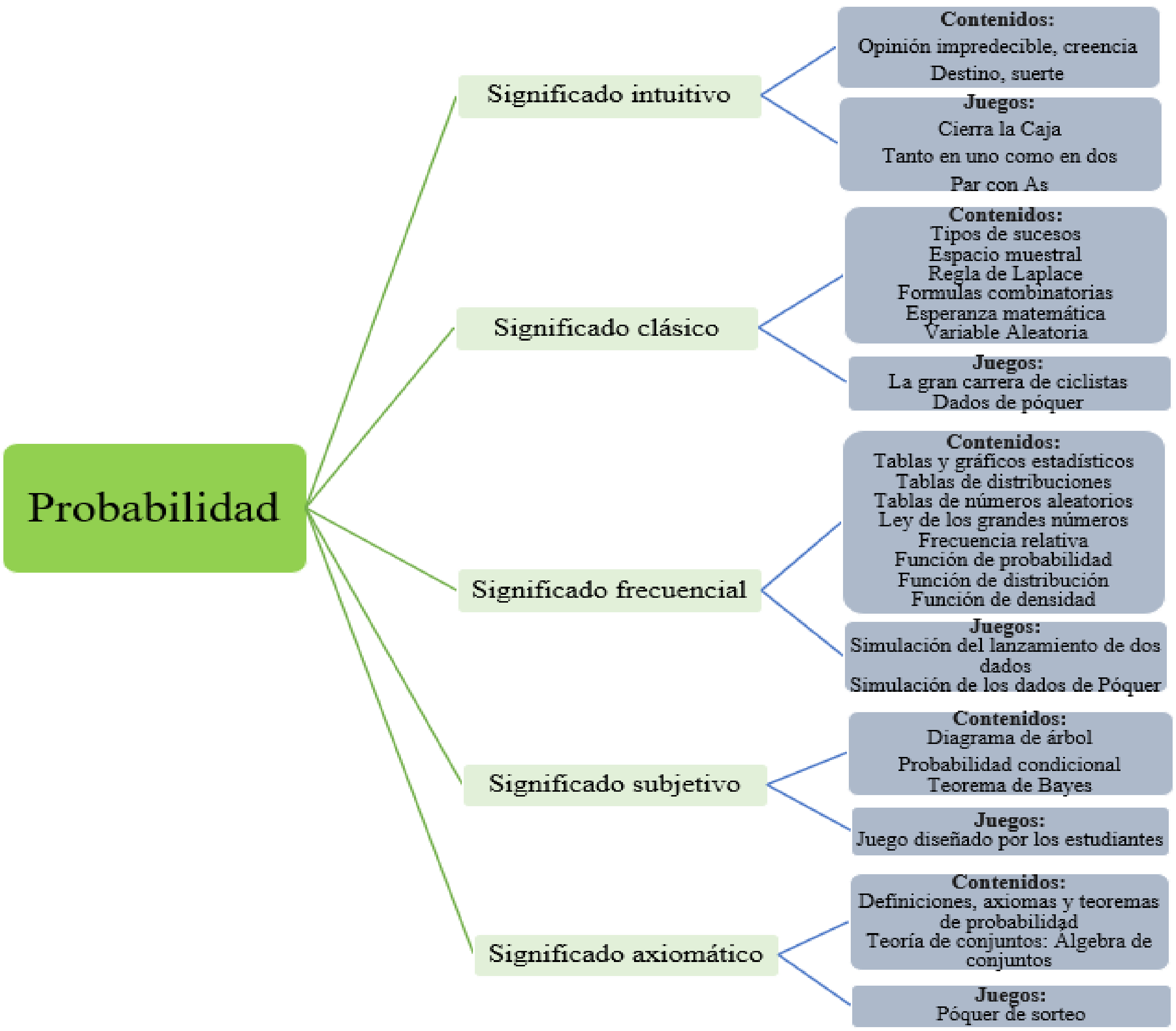
La siguiente propuesta didáctica se centra en la utilización de juegos de azar como herramienta para potenciar el pensamiento aleatorio y busca:

- Facilitar el aprendizaje de conceptos probabilísticos del estudiante a través del aprendizaje basado en juegos (ABJ).
- Estimular la curiosidad de los estudiantes hacia los conceptos de probabilidad mediante la aplicación de juegos de azar.
- Comprender la relación entre los juegos de azar y las matemáticas a un nivel más profundo.
- Identificar y comprender los 5 significados de probabilidad.
- Utilizar los conceptos matemáticos propios y relacionados a los 5 significados de probabilidad.

8.4 Contenidos

A continuación, se presenta un esquema que muestra los contenidos teóricos abordados en las sesiones de clase, junto con los juegos correspondientes.

Figura 7 *Contenidos abordados en la propuesta pedagógica implementada*



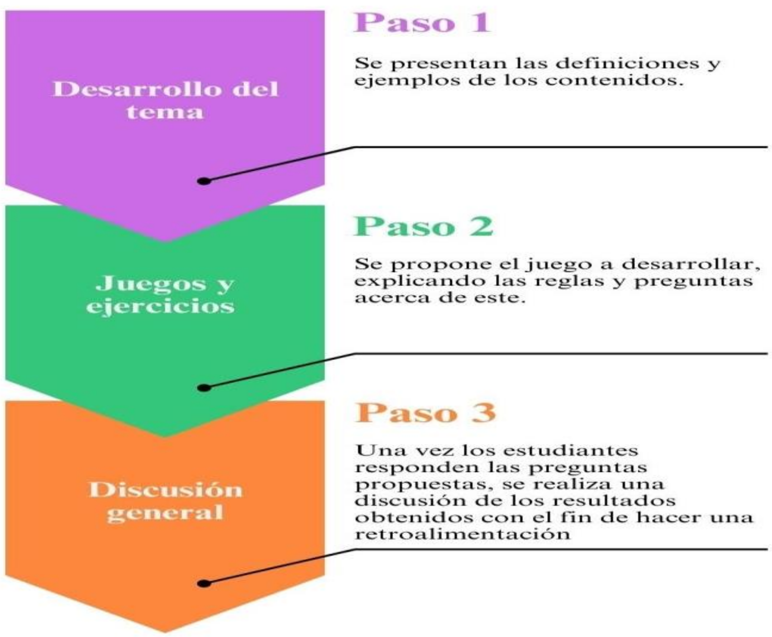
Nota. El diagrama presenta los contenidos y juegos propuestos durante la intervención pedagógica. Fuente: Elaboración propia

8.5 Metodología

Para la implementación de esta propuesta didáctica se usó el aprendizaje basado en juegos (ABJ) que “se caracteriza como una metodología activa que fomenta el aprendizaje significativo siendo el alumno el protagonista de su aprendizaje, consiste en la utilización de juegos como herramientas de apoyo al aprendizaje, la asimilación o evaluación” (Universidad de Murcia, s.f, p. 1). En este sentido Puga & Jaramillo (2015) mencionan que las “metodologías activas, entendiéndolas como aquellos métodos, técnicas y estrategias que utiliza el docente para convertir el proceso de enseñanza en actividades que fomenten la participación activa del estudiante y lleven al aprendizaje" (p. 297).

Por lo tanto, para lograr los objetivos de esta propuesta, se seleccionó la metodología activa del aprendizaje basado en juegos, que involucra actividades que utilizan juegos de azar como herramienta didáctica para potenciar el pensamiento aleatorio. Con base en lo anterior, se propone el siguiente procedimiento:

Figura 8 *Esquema de la planificación de las sesiones de clase*



Nota: Fases del proceso de cada guía. Fuente: Elaboración propia.

Se siguió este proceso en la mayoría de las guías propuestas, a excepción de la guía del significado intuitivo de la probabilidad donde se presentaron los juegos en primer lugar y posteriormente se abordaron los contenidos relacionados con ellos.

8.6 Temporalización

La tabla 3 presenta la distribución de tiempo para cada guía en sesiones de clase.

Tabla 3 *Temporalización del desarrollo de las guías*

Nombre se la sesión	Contenidos	Número de sesiones	Etapas de la sesión	Tiempo (min.)

Significado Intuitivo de la probabilidad	Opinión impredecible, creencia, destino, suerte.	3	Presentación Explicación de la temática Vamos a jugar Ejercicios de los juegos Retroalimentación de los ejercicios	10 20 210 90 30
Significado Clásico de la probabilidad	Tipos de sucesos, Espacio muestral, Regla de Laplace, Formulas combinatorias, Esperanza matemática, Variable Aleatoria.	3	Explicación de la temática Vamos a jugar Ejercicios de los juegos Retroalimentación de los ejercicios	60 150 90 60
Significado Frecuencial de la probabilidad	Tablas y gráficos estadísticos, Tablas de distribuciones, Tablas de números aleatorios, Ley de los grandes números, Frecuencia relativa, Función de probabilidad, Función de distribución, Función de densidad.	3	Explicación de la temática Vamos a jugar Ejercicios de los juegos Retroalimentación de los ejercicios	60 150 90 60
Significado Subjetivo de la probabilidad	Diagrama de árbol, Probabilidad condicional, Teorema de Bayes.	2	Explicación de la temática Vamos a jugar Ejercicios de los juegos Retroalimentación de los ejercicios	30 120 60 30
Significado Axiomático de la probabilidad	Definiciones, axiomas y teoremas de probabilidad, Teoría de conjuntos, Álgebra de conjuntos.	1	Explicación de la temática Vamos a jugar Ejercicios de los juegos Retroalimentación de los ejercicios	60 30 30

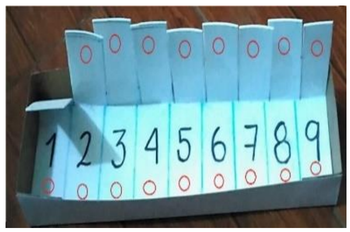
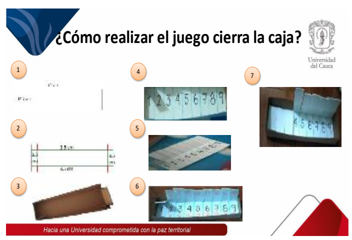
Nota: La tabla representa el tiempo dedicado a las actividades en el transcurso del desarrollo de cada guía. Fuente: Elaboración propia.

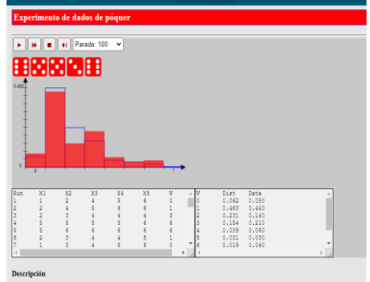
En la tabla anterior, se puede observar que, en la guía del Significado axiomático de la probabilidad, debido a limitaciones de tiempo, no se pudo realizar la retroalimentación de los ejercicios.

8.7 Recursos

En esta sección se detallan los recursos utilizados para llevar a cabo cada una de las sesiones. En términos generales, se contó con la participación de la docente titular, el practicante y los estudiantes, así como con materiales tales como marcadores, borradores, pizarras y cuadernos de notas en todas las sesiones. A continuación, la tabla 4 incluye los materiales específicos facilitados por el practicante para el desarrollo de los juegos, la exposición de los temas y la resolución de los ejercicios propuestos en cada una de las guías.

Tabla 4 *Recursos usados en las sesiones*

Nombre se la sesión	**Recursos**	**Ilustraciones**
Significado Intuitivo de la probabilidad	Juego cierra la caja (dados plásticos, cartón cartulina, fomi, cinta adhesiva de nailon, tijeras, regla, silicona líquida) Juegos tanto en uno como en dos y par con as (dados plásticos, hojas de papel), proyector.	   
Significado Clásico de la probabilidad	Juego La Gran Carrera de Ciclistas (plantillas con ilustraciones de ciclistas, dados diseñados con cartón cartulina, fichas de póquer). Juego Dados de póquer (dados plásticos), proyector.	    

Significado Frecuencial de la probabilidad	Celulares, simuladores en páginas web, proyector.	   
Significado Subjetivo de la probabilidad	Urnas de cartón, veinticuatro pelotas plásticas de diferentes colores, dos dados, una moneda, proyector.	   
Significado Axiomático de la probabilidad	Cinco barajas de cartas, fichas de póquer, proyector.	  

Nota: La tabla los recursos utilizados para la realización de la propuesta didáctica y sus ilustraciones. Fuente: Elaboración propia.

8.8 Actividades

Para estructurar cada actividad, se agregó la explicación de la temática, juegos, ejercicios de los juegos, retroalimentación, las actividades evaluativas y los objetivos de aprendizaje que se desarrollaron durante las horas de clase. Para alcanzar los objetivos de la propuesta, se consideraron ciertos aspectos clave: la exposición de temas se apoyó en materiales didácticos, mientras que para los juegos se formaron equipos con un número determinado de participantes y se fomentó la discusión de posibles soluciones. La retroalimentación se llevó a cabo mediante diálogos o discusiones de cada uno de los juegos y las preguntas correspondientes, lo que permitió compartir experiencias y aprendizajes adquiridos. Para la actividad evaluativa, se propuso ejercicios para realizar en casa o en clase que se encuentran en cada guía.

Cabe destacar que en el anexo 1, se encuentran detallados de manera exhaustiva cada una de las actividades que se presentan a continuación.

Tabla 5 *Estructura para las sesiones del significado intuitivo de la probabilidad*

Explicación de la temática	**Juegos**	**Ejercicios de los juegos**	**Retroalimentación**	**Actividad evaluativa**
Opinión impredecible, creencia, destino, suerte.	Cierra la Caja, Tanto en uno como en dos, Par con As.	Se realizan los ejercicios propuestos por parte de los estudiantes, Ejercicios para desarrollar extra clase.	Diálogo con los estudiantes de los juegos y ejercicios.	Ejercicios de los juegos, Ejercicios extra clase.

Objetivos de aprendizaje:

- Analizar el significado intuitivo de probabilidad a través de juegos con dados.
- Utilizar tablas para la recolección de datos estadísticos.
- Identificar las combinaciones en los dados.
- Asignar un valor numérico de manera intuitiva a la posibilidad que tiene un suceso de ocurrir.
- Reconocer los campos de problemas, elementos lingüísticos, procedimientos y algoritmos, definiciones y propiedades, conceptos relacionados y argumentos que están involucrados en el significado intuitivo de probabilidad.

Nota. Fuente: Elaboración propia.

Tabla 6 *Estructura para las sesiones del significado clásico de la probabilidad*

Explicación de la temática	Juegos	Ejercicios de los juegos	Retroalimentación	Actividad evaluativa
Tipos de sucesos, Espacio muestral, Regla de Laplace, Formulas combinatorias, Esperanza matemática, Variable Aleatoria.	La gran carrera de ciclistas, Dados de póquer.	Se realizan los ejercicios propuestos por parte de los estudiantes, Ejercicios para desarrollar extra clase.	Diálogo con los estudiantes de los juegos y ejercicios.	Ejercicios de los juegos, Ejercicios extra clase.

Objetivos de aprendizaje:

- Analizar el significado clásico de probabilidad a través de juegos con dados.
- Utilizar tablas para la recolección de datos estadísticos.
- Explorar los conceptos que conforman en el significado clásico de probabilidad.
- Explorar los conceptos relacionados con el significado clásico de probabilidad.
- Asignar un valor numérico utilizando la regla de Laplace a la probabilidad que tiene un suceso de ocurrir.
- Identificar entre sucesos dependientes e independientes.
- Reconocer los campos de problemas, elementos lingüísticos, procedimientos y algoritmos, definiciones y propiedades, conceptos relacionados y argumentos que están involucrados en el significado clásico de probabilidad.

Nota. Fuente: Elaboración propia.

Tabla 7 *Estructura para las sesiones del significado frecuencial de la probabilidad*

Explicación de la temática	Juegos	Ejercicios de los juegos	Retroalimentación	Actividad evaluativa
Tablas y gráficos estadísticos, Tablas de distribuciones, Tablas de números aleatorios, Ley de los grandes números, Frecuencia relativa, Función de probabilidad, Función de distribución, Función de densidad.	Simulación del lanzamiento de dos dados, Simulación de los dados de Póquer.	Se realizan los ejercicios propuestos por parte de los estudiantes, Ejercicios para desarrollar extra clase.	Diálogo con los estudiantes sobre las simulaciones.	Ejercicios de los juegos, Ejercicios extra clase.

Objetivos de aprendizaje:

- Analizar el significado frecuencial de probabilidad a través de simulación.
- Explorar los conceptos que conforman en el significado frecuencial de probabilidad.
- Explorar los conceptos relacionados con el significado frecuencial de probabilidad.

- Establecer la relación entre el número de intentos en el experimento y la probabilidad de ocurrencia de los sucesos.
- Reconocer los campos de problemas, elementos lingüísticos, procedimientos y algoritmos, definiciones y propiedades, conceptos relacionados y argumentos que están involucrados en el significado frecuencial de probabilidad.

Nota. Fuente: Elaboración propia.

Tabla 8 *Estructura para las sesiones del significado subjetivo de la probabilidad*

Explicación de la temática	Juegos	Ejercicios de los juegos	Retroalimentación	Actividad evaluativa
Diagrama de árbol, Probabilidad condicional, Teorema de Bayes.	Juego diseñado por los estudiantes.	Se realizan los ejercicios propuestos por parte de los estudiantes, Ejercicios para desarrollar extra clase.	Diálogo con los estudiantes sobre las propuestas para diseñar un juego, Aclaración de dudas de los ejercicios propuestos.	Ejercicios de los juegos, Ejercicios extra clase.

Objetivos de aprendizaje:

- Analizar el significado subjetivo de probabilidad a través de juegos con urnas, dados, monedas.
- Explorar los conceptos que conforman en el significado subjetivo de probabilidad.
- Explorar los conceptos relacionados con el significado subjetivo de probabilidad.
- Hacer uso de diagramas de árbol para la solución de los problemas planteados.
- Hacer uso del concepto de probabilidad condicional y el teorema de Bayes para solucionar los problemas propuestos.
- Reconocer los campos de problemas, elementos lingüísticos, procedimientos y algoritmos, definiciones y propiedades, conceptos relacionados y argumentos que están involucrados en el significado subjetivo de probabilidad.

Nota. Fuente: Elaboración propia.

Tabla 9 *Estructura para las sesiones del significado axiomático de la probabilidad*

Explicación de la temática	Juegos	Ejercicios de los juegos	Retroalimentación	Actividad evaluativa
Definiciones, axiomas y teoremas de probabilidad, Teoría de conjuntos, Álgebra de conjuntos.	Póquer de sorteo.	Se realizan los ejercicios propuestos por parte de los estudiantes, Ejercicios para desarrollar extra clase.	Aclaración de dudas de los ejercicios propuestos.	-Ejercicios de los juegos, Ejercicios extra clase.

Objetivos de aprendizaje:

- Analizar el significado axiomático de probabilidad a través de juegos con cartas.
- Explorar las definiciones, axiomas y teoremas que conforman en el significado axiomático de probabilidad.
- Explorar los conceptos relacionados con el significado axiomático de probabilidad.
- Hacer uso de las definiciones, axiomas y teoremas dentro de la probabilidad axiomática para solucionar los problemas propuestos.
- Reconocer los campos de problemas, elementos lingüísticos, procedimientos y algoritmos, definiciones y propiedades, conceptos relacionados y argumentos que están involucrados en el significado axiomático de probabilidad.

Nota. Fuente: Elaboración propia.

8.9 Evaluación y Seguimiento

La evaluación es un componente esencial del proceso de enseñanza-aprendizaje y es fundamental para observar y medir los resultados alcanzados por los estudiantes durante el desarrollo de las actividades propuestas. Con este fin, se ha diseñado una rúbrica de evaluación específica para cada significado de probabilidad, las cuales se encuentran al final de cada guía de aprendizaje y se encuentra como anexo 1. Estas rúbricas permiten una evaluación detallada y objetiva de los aprendizajes adquiridos por los estudiantes en cada sesión.

9 Resultados y Discusión

En esta sección se presentan los datos obtenidos de las cinco guías proporcionadas a los estudiantes durante la intervención en el aula. En primer lugar, se describe el comportamiento de los estudiantes frente a los juegos propuestos. Luego, se realiza un análisis de las respuestas a las preguntas de los juegos y los ejercicios extra clase en cada una de las guías, centrándose en los cinco elementos del significado de un objeto matemático propuesto por Batanero (2005). El objetivo de este análisis es establecer la comprensión profunda de los conceptos de probabilidad por parte de los estudiantes e identificar posibles dificultades y errores conceptuales con el fin de cumplir con el objetivo general de esta investigación.

9.1 Consideraciones para el Análisis de Resultados

El marco teórico presentado sobre los cinco significados de la probabilidad y los cinco elementos del significado de un objeto matemático sirve de base para el análisis de los resultados. Según Batanero (2005), los cinco elementos del significado de un objeto matemático resultan útiles en la evaluación de las respuestas a una actividad matemática o un proceso de enseñanza-aprendizaje, en este caso, en el ámbito de la probabilidad. A continuación, se describen estos cinco elementos:

1. **El Campo de Problemas** de donde emerge el objeto matemático: Se introduce un concepto matemático a los estudiantes basado en la experiencia adquirida a través de los juegos propuestos.
2. **Elementos Lingüísticos:** Para resolver ejercicios planteados, es necesario que los estudiantes utilicen símbolos, palabras o gráficos para representar los datos y las soluciones, así como las operaciones y conceptos empleados
3. **Procedimientos y Algoritmos:** Esta categoría incluye todos los métodos utilizados por los estudiantes para resolver problemas, como la recogida de datos, la estimación de probabilidad, el uso de tablas de frecuencias, distribuciones de probabilidad, tablas de números aleatorios, programas estadísticos, entre otros.
4. **Las definiciones y propiedades de los objetos matemáticos y sus relaciones con otros objetos matemáticos:** Durante la actividad matemática, los estudiantes deben recordar diversos conceptos que ya conocen y cuyas propiedades son útiles para resolver problemas. Algunos ejemplos de estos conceptos son los axiomas de la probabilidad, el teorema de Bayes y el teorema de la probabilidad total.
5. **Los argumentos y demostraciones de estas propiedades:** Son los razonamientos que los estudiantes utilizan para justificar la validez de la solución a un problema o propiedad, como: Experimentos, simulaciones, generalizaciones, etc.

9.2 Descripción y Análisis de los Significados de la Probabilidad

La descripción y análisis de los resultados se divide en las cinco guías propuestas, donde cada una de ellas aborda uno de los significados de la probabilidad.

9.2.1. Significado Intuitivo de la Probabilidad

Para abordar el significado intuitivo de la probabilidad se realizaron 3 actividades (Cierra la Caja, Tanto en uno como en dos y Par con As).

9.2.1.1 Cierra la Caja.

Cabe resaltar que la intervención pedagógica tuvo lugar en la segunda parte del curso de Matemática Recreativa que estuvo a cargo del practicante, en la primera sesión se explicó que la intervención consistía en abordar los cinco significados históricos de la probabilidad, siguiendo una guía por cada significado, cada guía contiene: objetivos, temporalización, contenidos, recursos necesarios, metodología, las actividades con sus ejercicios correspondientes, un poco de historia, el significado de la probabilidad, ejercicios extra clase y la rúbrica de evaluación, se aclararon dudas sobre la forma de evaluación. El material de las 5 guías de trabajo se encuentra en el anexo 1. El material en diapositivas usado en clase se encuentra en formato PDF en el anexo 2. En la sesión 1, después de la orientación inicial, se entregó a los estudiantes la guía #1 denominada: Juegos con Dados Significado Intuitivo de Probabilidad, donde se encuentran las actividades y el contenido a trabajar, luego se presentó unas diapositivas donde se encuentran los nombres de los 5 significados de probabilidad y se mencionó que a lo largo de las sesiones se hablara de cada uno de ellos empezando con el significado intuitivo de probabilidad, y que para tratar este significado se realizaran 3 actividades (Cierra la Caja, Tanto en uno como en dos y Par con As), así se procedió a realizar la socialización de la actividad 1.(cierra la caja) donde se presentó una diapositiva con los pasos para realizar la construcción del prototipo del juego cierra la caja.

Figura 9 *Instrucciones para el diseño del prototipo Cierra la Caja*

Nota. Se muestran 7 pasos para diseñar el prototipo del juego Cierra la Caja. Fuente: Elaboración propia.

Para llevar a cabo la elaboración del prototipo, se solicitó a los estudiantes que formen grupos y se encarguen de realizar uno de los pasos necesarios para la producción del prototipo.

De esta forma, se crea una especie de fábrica en la que los estudiantes trabajaron en equipo para producir los prototipos.

Esta actividad se realizó con el propósito de evaluar la disposición de los estudiantes para trabajar en equipo y su motivación para trabajar con materiales manipulativos, además de ser un paso necesario para poder jugar "Cierra la Caja".

Sin embargo, debido a que el material base para el juego es cartón cartulina, que es un material difícil de cortar, y considerando que algunos estudiantes llegaron tarde y no recibieron las instrucciones iniciales, se decidió replantear los grupos. Se utilizan cuatro grupos denominados G1, G2, G3 y G4.

El grupo G1, compuesto por 8 estudiantes, se encargó de los pasos 1 y 2, el grupo G2, formado por 7 estudiantes, realizó el paso 4, el grupo G3, con 6 estudiantes, se encargó del paso 5 y el grupo G4, compuesto por 7 estudiantes, realizó los pasos 3 y 6. Todos los grupos participaron en el paso 7.

Figura 10 *Elaboración por parte de los estudiantes del prototipo Cierra la Caja*

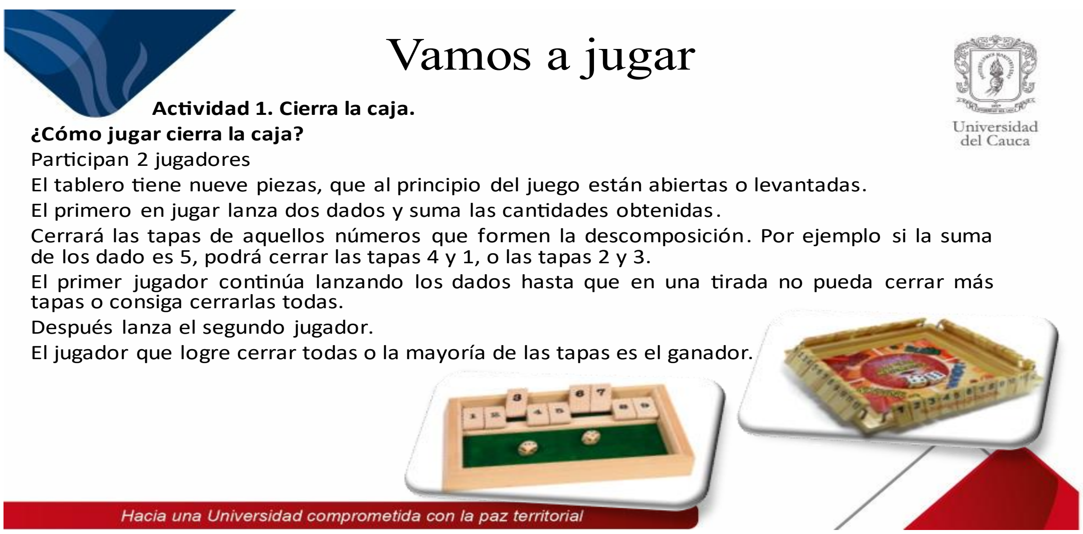
Nota. En la figura se muestra cómo se organizaron los estudiantes para realizar la actividad. Fuente: Autoría propia.

Durante la sesión, se pudo observar una buena disposición por parte de los estudiantes para trabajar en equipo y con los materiales proporcionados. La mayoría de ellos se mantuvieron activos en la realización de sus tareas asignadas. No obstante, hubo momentos en los que algunos estudiantes finalizaron su tarea y optaron por utilizar sus celulares, alejándose de la actividad en cuestión. Se entiende que esta conducta podría haber sido motivada por la reciente necesidad de usar dispositivos electrónicos para mantenerse conectados con las labores académicas. Para hacer frente a esta situación, se asignó una tarea adicional a los estudiantes que recurrieron a sus celulares.

A pesar de esto, la sesión culminó de manera satisfactoria, puesto que se había establecido el reto de producir más de 30 prototipos del juego "Cierra la Caja" con los materiales disponibles, el cual se logró cumplir exitosamente.

Durante la segunda sesión, se presentaron las instrucciones para jugar Cierra la Caja y posteriormente se llevó a cabo el juego en parejas, seguido de una sección de preguntas para responder después de finalizar el juego. Las instrucciones del juego fueron presentadas mediante diapositivas.

Figura 11 *Instrucciones de como jugar Cierra la Caja*



Nota. En la presentación se muestra imágenes de prototipos del juego Cierra la Caja que son comercializados. Fuente: Elaboración propia.

El prototipo diseñado por los estudiantes es para 2 personas, pero teniendo en cuenta que varios estudiantes llegaron luego de las instrucciones dadas, se solicitó que ellos jueguen con un prototipo para 4 personas, llevado por el practicante, en total 8 estudiantes jugaron con 2 tableros para 4 personas.

Debido a esto las preguntas planteadas para este grupo de estudiantes tendrán cambios significativos en sus respuestas a diferencia de los estudiantes que jugaron en parejas.

Los estudiantes expresaron buena disposición para jugar, se les solicitó jugar 5 partidas y dependiendo las partidas hacer sus observaciones, en las primeras partidas se notó emoción en ellos, pero a medida que jugaron más partidas el interés por el juego se fue perdiendo, esto debido a que debían ir anotando los resultados de cada lanzamiento y no había una apuesta de ningún tipo que los motivara a ganar.

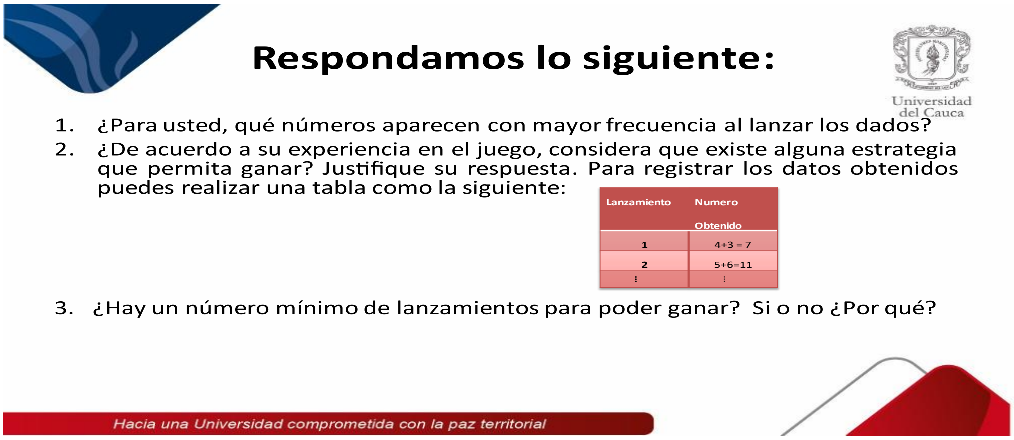
Figura 12 *Estudiantes jugando Cierra la Caja*

Nota. Fuente: Autoría propia.

Algunos estudiantes experimentaron emociones momentáneas de emoción al obtener resultados favorables en los dados, sin embargo, estas emociones no duraron mucho. En los grupos de 4 personas, algunos estudiantes tomaban sus celulares mientras esperaban su turno para lanzar los dados, ya que el tiempo de espera era mayor en comparación con los grupos que jugaron en parejas.

Al finalizar el tiempo estipulado para jugar, se procedió a responder las preguntas correspondientes al juego y posteriormente se llevó a cabo la socialización de las respuestas.

Figura 13 *Preguntas planteadas sobre el juego Cierra la Caja*



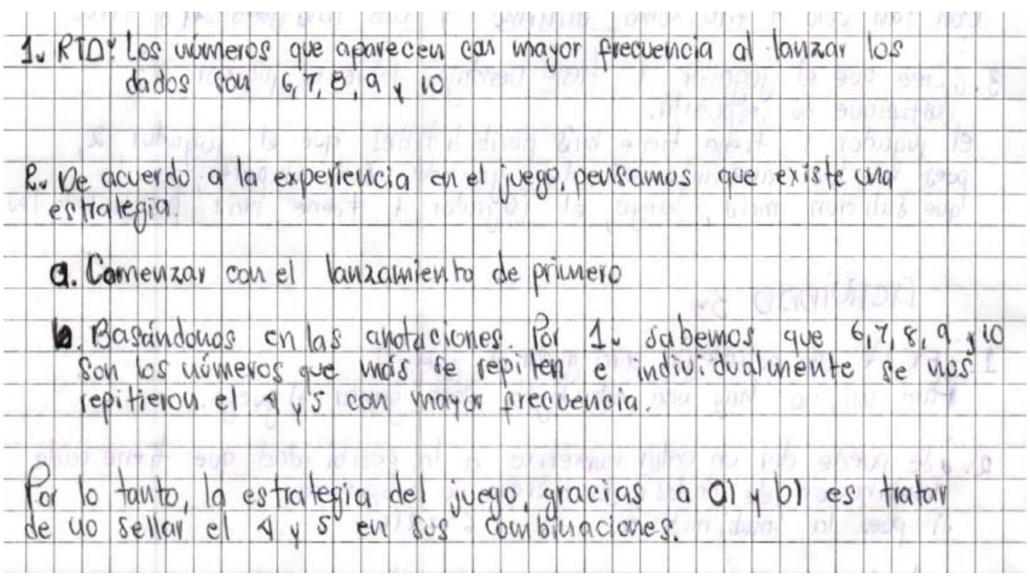
Nota. Fuente: Elaboración propia.

Esta actividad fue llevada a cabo con el objetivo de conocer las primeras impresiones y opiniones de los estudiantes al jugar juegos que dependen de generadores de azar, como los dados. Asimismo, se buscó analizar los elementos lingüísticos, procedimientos, algoritmos y argumentos que utilizaron los estudiantes al realizar los ejercicios propuestos.

Las respuestas a las preguntas 1 y 2 son subjetivas, ya que los estudiantes responden en función de su experiencia personal, y sus resultados son diferentes entre sí. Sin embargo, justifican sus respuestas mediante argumentos empíricos y, en algunos casos, deductivos.

Los estudiantes E1 y E12 argumentan sus respuestas de forma deductiva.

Figura 14 *Respuesta estudiante E1*



Nota. Respuesta a las preguntas 1 y 2. Fuente: Autoría propia.

La situación descrita indica que, aunque los estudiantes no poseen las definiciones y propiedades necesarias para fundamentar sus justificaciones de manera sólida, son capaces de crear argumentaciones deductivas propias de la práctica matemática para realizar demostraciones.

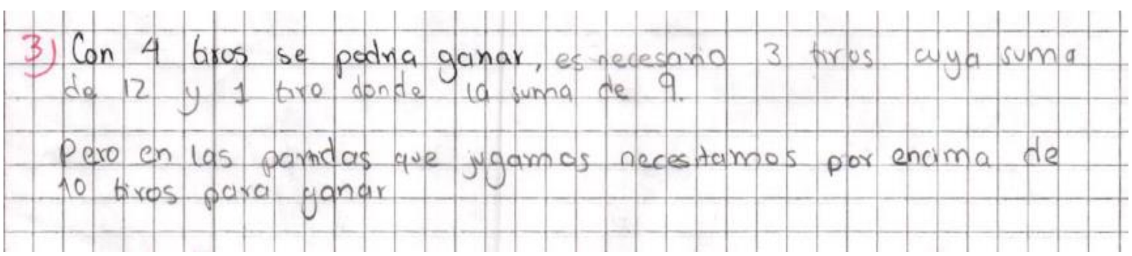
Con respecto a la pregunta 3, hubo un debate al establecer cuál era el número mínimo de lanzamientos que se podía realizar para ganar el juego, ya que algunos estudiantes respondieron basándose en su experiencia previa, mientras que otros analizaron la situación-problema planteada y determinaron la combinación de dados necesarios para bajar la mayor cantidad de tapas y ganar en el menor número de lanzamientos posibles.

Una posible respuesta a la situación planteada es la siguiente:

> "El número mínimo de lanzamientos para poder ganar es de cuatro, si contamos con tal suerte que ocurra que en tres lanzamientos se saque par de seis y en otro lanzamiento una combinación que sume nueve, para cerrar las tapas 1, 2, 3,6 (un lanzamiento), 4,8 (otro lanzamiento), 5,7 (otro lanzamiento) y 9 en otro lanzamiento."

El estudiante E2 responde de manera adecuada y hace una reflexión sobre la experiencia vivida.

Figura 15 *Respuesta del estudiante E2 a la pregunta 3*



3) Con 4 tiros se podria ganar, es necesario 3 tiros cuya suma de 12 y 1 tiro donde la suma de 9.

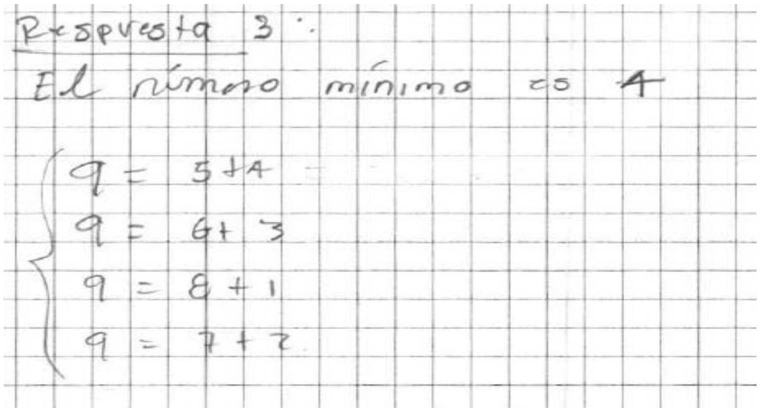
Pero en las partidas que jugamos necesitamos por encima de 10 tiros para ganar

Nota. Fuente: Autoría propia.

En la respuesta anterior, el estudiante E2 analizó la situación problema y da una respuesta adecuada, aunque no especifica qué tapas cerraría en los 4 lanzamientos. Además, reflexiona sobre su experiencia personal y observó que, aunque el juego se puede ganar en 4 lanzamientos, es muy poco probable según su experiencia, ya que el juego generalmente se gana en al menos 10 lanzamientos. Esto demuestra que el estudiante llevó a cabo un análisis de la situación-problema y proporcionó un posible escenario en el que se puede ganar el juego con el menor número de lanzamientos posibles, al tiempo que reconoció que tal escenario es poco probable en la práctica.

En la figura 16, se puede observar la respuesta proporcionada por el estudiante E5, la cual es considerada como "correcta", aunque su procedimiento conduce a un resultado incorrecto.

Figura 16 *Respuesta del estudiante E5 a la pregunta 3*

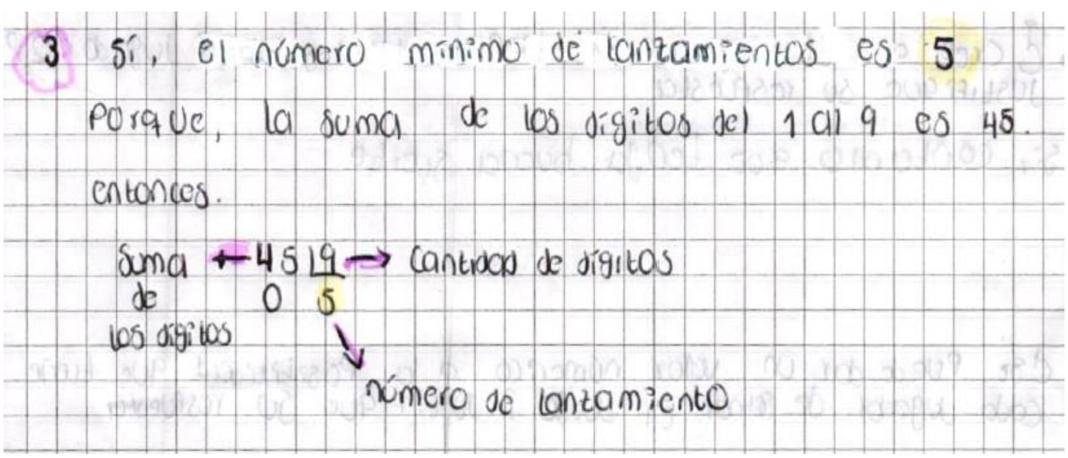


Nota. Fuente: Autoría propia.

La respuesta dada por el estudiante E5 muestra un resultado aparentemente correcto, pero su procedimiento lo llevó a un error, ya que, al considerar solo 4 lanzamientos con una suma de dados de 9, omite la tapa con el número 9, lo que significa que debería haber un quinto lanzamiento. Esto resalta la importancia de los procedimientos que los estudiantes utilizan para argumentar sus soluciones.

Por otra parte, en la respuesta del estudiante E30 se evidencia una manera de analizar la situación-problema de una manera distinta, que llevó a una respuesta incorrecta.

Figura 17 *Respuesta del estudiante E30 a la pregunta 3*



Nota. Fuente: Autoría propia.

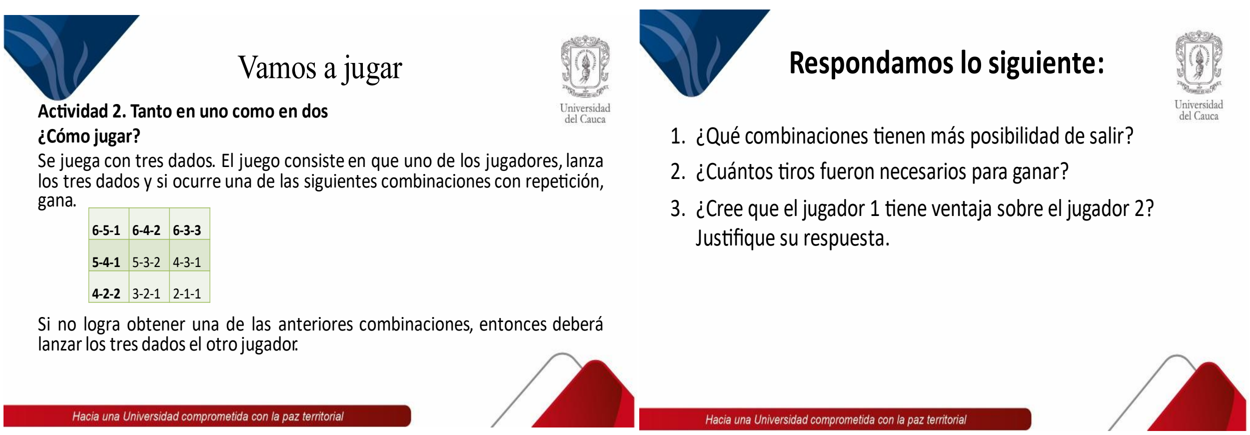
La respuesta presentada en la Figura 17 se basa en un procedimiento que involucra la suma de los 9 números utilizados en el juego, que es dividida por 9 (el número de dígitos utilizados), lo que resulta en un cociente de 5, que se considera el número mínimo de lanzamientos necesarios para ganar el juego. Sin embargo, esta argumentación carece del contexto de la situación problema, ya que la suma de los números proviene de dos dados que deben ser considerados al analizar la situación.

9.2.1.2 Tanto en uno como en dos y Par con As.

Con el propósito de continuar explorando las intuiciones y opiniones de los estudiantes al enfrentarse con juegos que dependen de generadores de azar, como los dados, se llevaron a cabo dos actividades utilizando tres dados, lo que representa una diferencia con respecto a la actividad anterior donde se utilizó solo dos dados.

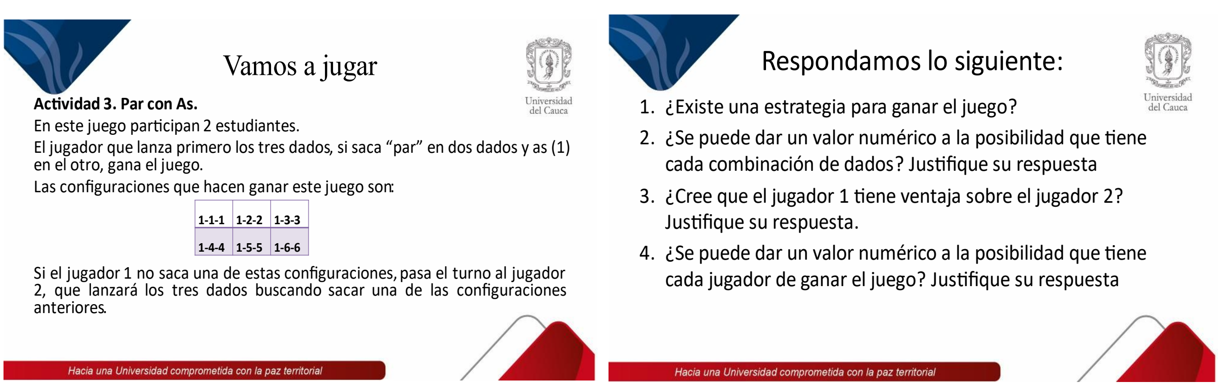
Se pidió a los estudiantes que se organizaran en parejas y se les entrego los tres dados. Se presentaron diapositivas con las instrucciones de los juegos y, después de jugar se realizaron preguntas para su análisis y discusión.

Figura 18 *Reglas del juego Tanto en uno como en dos y sus preguntas*



Nota. Fuente: Elaboración propia.

Figura 19 *Reglas del juego Par con As y sus preguntas*



Nota. Fuente: Elaboración propia.

Los estudiantes expresaron buena disposición para jugar, en el caso de la actividad 2 los estudiantes terminaron muy rápido las 5 partidas propuestas para el juego, en el espacio dispuesto para la socialización de las preguntas, comentaron que las combinaciones de los dados que se requerían para ganar el juego salían con facilidad, caso contrario ocurrió con el juego 3, debido a que las combinaciones que se requerían para ganar el juego no salían con facilidad, comentaron que los juegos les llamaron mucho la atención debido a que no habían tratado con juegos como estos, donde se pedía sacar cierto tipo de combinaciones con los tres dados para poder ganar, los juegos generaron emoción en ellos, se llenaron de curiosidad al tratar juegos sencillos con dados, que son entretenidos, pero aún faltaba una apuesta que los motivara a ganar.

Figura 20 *Estudiantes jugando Tanto en uno como en dos y Par con As*

Nota. Fuente: Autoría propia.

Durante las tres actividades realizadas, los estudiantes optaron por lanzar los dados desde sus pupitres, a pesar de que estos instrumentos pueden rebotar con facilidad. Muchos tuvieron que levantarse para recoger los dados, ya que no se animaron a jugar de pie o sentados en el suelo. Se cree que, en un colegio, esta situación no habría ocurrido puesto que, los niños son más extrovertidos. Teniendo en cuenta las sugerencias de los estudiantes de incluir apuestas en los juegos, se plantearon actividades donde se incluyó este elemento.

En relación a las 7 preguntas planteadas en los juegos anteriores, este estudio se enfoca en analizar las respuestas a la pregunta 2 del juego Par con As, con el propósito de identificar los elementos lingüísticos, procedimientos, definiciones y argumentos empleados por los estudiantes para llegar a una solución, y así detectar posibles dificultades y aplicar estrategias que ayuden a superarlas. A continuación, se presenta la pregunta:

¿Se puede dar un valor numérico a la posibilidad que tiene cada combinación de dados? Justifique su respuesta

En la tabla 10 se presenta una clasificación de las respuestas a la pregunta luego de ser analizadas.

Tabla 10 *Clasificación respuestas de los estudiantes a la pregunta 2 del juego Par con As*

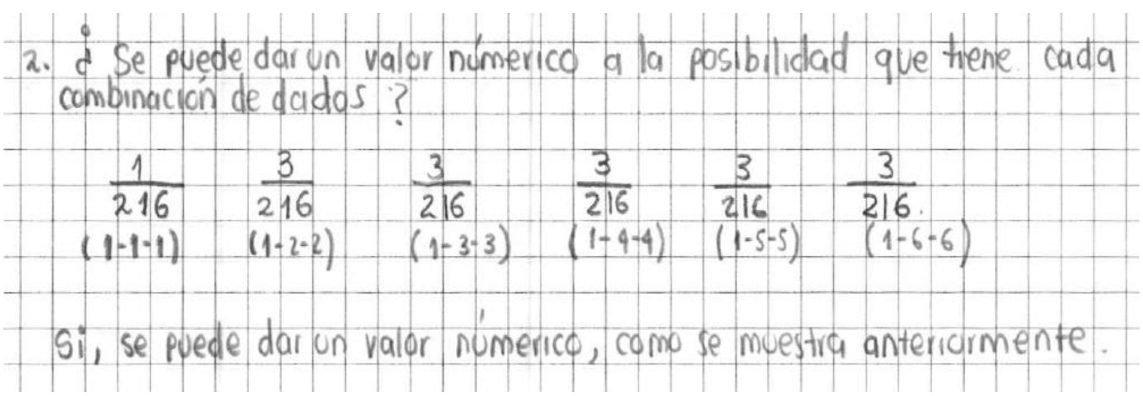
	Respuestas correctas con un proceso adecuado	**Respuestas sin procesos**	**Respuestas incorrectas**	**Interpretan la pregunta de otra manera**	**No responde la pregunta**
Estudiantes	E7, E10, E11, E23, E24, E26, E30, E25	E9, E15, E21, E27	E13, E19, E22, E28, E29	E1, E2, E4, E6, E12, E16, E20	E3, E5, E8, E14, E17, E18

Nota. En la tabla se muestra las diferentes categorías que se consideraron para analizar las respuestas de los estudiantes. Fuente: Elaboración propia.

Se les pidió a los estudiantes que asignen un valor numérico a las posibilidades de obtener las combinaciones 1-1-1, 1-2-2, 1-3-3, 1-4-4, 1-5-5 y 1-6-6 al lanzar los 3 dados, usando sus conocimientos previos.

Se evidenció que los estudiantes que dan una respuesta correcta, reconocieron que implícitamente se pide la probabilidad de las combinaciones y debe hacer uso de las fórmulas combinatorias, entendieron el contexto en que se basa la pregunta.

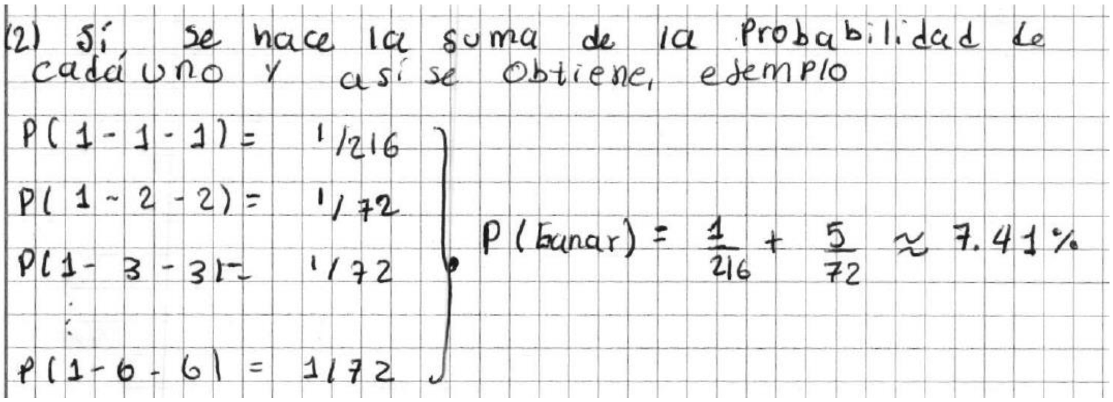
Figura 21 *Respuesta del estudiante E7*



Nota. Fuente: Autoría propia.

En la respuesta del estudiante E7 se aprecia que asignó un valor numérico a cada una de las combinaciones que están dentro del juego, el cual está representado por un cociente donde su numerador representa los casos favorables y su denominador es el número de casos posibles (Regla de Laplace) que se tiene al lanzar tres dados.

Figura 22 *Respuesta del estudiante E25*



(2) Sí, se hace la suma de la probabilidad de cada uno y así se obtiene, ejemplo

$P(1-1-1) = 1/216$

$P(1-2-2) = 1/72$

$P(1-3-3) = 1/72$

$\vdots$

$P(1-6-6) = 1/72$

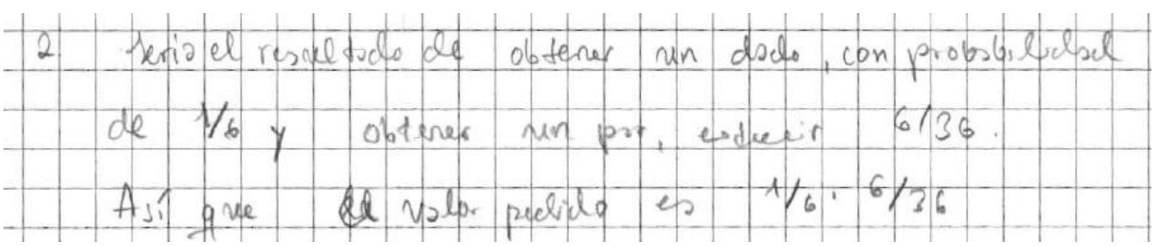
$P(\text{Ganar}) = \frac{1}{216} + \frac{5}{72} \approx 7.41\%$

Nota. Fuente: Autoría propia.

El estudiante E25 se destacó en su respuesta al hacer uso explícito del concepto de probabilidad para calcular la posibilidad de ganar el juego. Además, utilizó la suma de probabilidad como propiedad teórica para calcular la probabilidad total y la expresó de manera porcentual. Esto sugiere que el estudiante tiene un conocimiento sólido en teoría de probabilidad. En contraste con otros estudiantes que solo asignaron valores numéricos a las combinaciones sin hacer referencia a la probabilidad.

Se consideraron respuestas incorrectas, a las respuestas donde los estudiantes afirmaron que, si existe la posibilidad de obtener un valor numérico de cada una de las combinaciones, pero el proceso que utilizaron para argumentar dicha afirmación es incorrecto.

Figura 23 *Repuesta del estudiante E19*



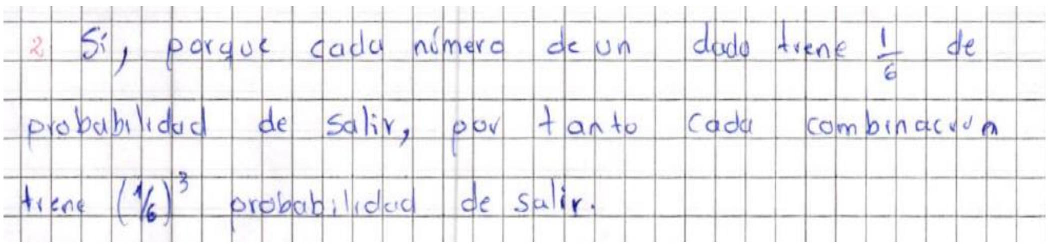
2 Sería el resultado de obtener un dado, con probabilidad de 1/6 y obtener un par, es decir 6/36.
Así que el valor pedido es $1/6 \cdot 6/36$

Nota. Fuente: Autoría propia.

En la respuesta del estudiante E19, se observa que primero consideró la probabilidad de obtener el número 1 al lanzar un dado. Luego, mencionó la probabilidad de sacar un par al lanzar los dos dados restantes, para luego multiplicar las probabilidades de sucesos independientes. Si bien este proceso es correcto para obtener las combinaciones 1-1-1, 1-2-2, 1-3-3, 1-4-4, 1-5-5 y 1-6-6 en ese orden específico, no se tiene en cuenta la posibilidad de obtener otras combinaciones, como 2-1-2 u otras ordenaciones de las combinaciones anteriores que también serán válidas para ganar el juego.

Se observa que los estudiantes interpretaron la pregunta de manera diferente al no tener en cuenta el contexto en el que se planteó. Un ejemplo de esto se puede ver en la figura 24.

Figura 24 *Repuesta del estudiante E6*


2 Sí, porque cada número de un dado tiene $\frac{1}{6}$ de probabilidad de salir, por tanto cada combinación tiene $(1/6)^3$ probabilidad de salir.

Nota. Fuente: Autoría propia.

El estudiante E6 interpretó la pregunta como un cálculo de probabilidad simple, donde afirmó que cada número tiene una probabilidad de 1/6 al lanzar un dado y que al tratarse de tres dados se tiene $\left(\frac{1}{6}\right)^3$. Si bien es cierto que todas las combinaciones posibles al lanzar tres dados tienen la misma probabilidad, en términos de sucesos elementales en un espacio muestral, no se considera que se está pidiendo la probabilidad de salir específicamente con las combinaciones 1-1-1, 1 -2-2, 1-3-3, 1-4-4, 1-5-5 y 1-6-6, que en la mayoría de los casos son sucesos compuestos del espacio muestral. Se puede observar que el estudiante E6 interpretó la pregunta de manera incorrecta al no considerar el contexto específico de la misma.

La anterior interpretación por parte de los estudiantes puede deberse a la formulación de la pregunta, para evitar ambigüedades se sugiere reformular la pregunta, una posible reformulación seria la siguiente:

> ¿Se puede dar un valor numérico a la posibilidad que tiene cada combinación para ganar el juego? Justifique su respuesta

En las preguntas que se plantearon para abordar el significado intuitivo de la probabilidad, no se incluyó claramente la palabra "probabilidad". Esto se debe a que el objetivo no era tratar el concepto de probabilidad en sí mismo, sino más bien evaluar las intuiciones y conocimientos previos que los estudiantes tienen acerca de la probabilidad mediante los juegos propuestos.

Los ejercicios propuestos para resolver extra clase que se encuentran en cada una de las guías, en el caso particular de la guía 1 se analizaron las respuestas al ejercicio 3, que se presenta a continuación:

3. El Príncipe de Toscana, muy aficionado al juego de los dados, preguntó a Galileo por qué al tirar tres dados y sumar sus resultados era más frecuente obtener 10 puntos que 9, a pesar de que en ambos casos hay seis formas distintas de obtener dichas sumas:

10 = 6+3+1 = 6+2+2 = 5+4+1= 5+3+2 =4+4+2 = 4+3+3

9 = 6+2+1 = 5+3+1 = 5+2+2 = 4+4+1 = 4+3+2 = 3+3+3.

¿Qué justificación daría para resolver este problema?

En la tabla 11 se presenta una clasificación de las respuestas a la pregunta luego de ser analizadas.

Tabla 11 *Clasificación de las respuestas de los estudiantes a la pregunta 3*

	Respuestas correctas con un proceso adecuado	**Respuestas sin procesos**
Estudiantes	E1, E2, E4, E5, E7, E8, E10, E11, E12, E13, E14, E15, E17, E18, E19, E21, E22, E23, E24, E25, E26, E27, E28, E29, E30	E3, E6, E9, E16, E20

Nota. En la tabla se muestra las diferentes categorías que se consideraron para analizar las respuestas de los estudiantes. Fuente: Elaboración propia.

Se observa que los estudiantes que ofrecieron una respuesta correcta con un proceso adecuado reconocieron que la descomposición de los números 10 y 9 como la suma de tres números está condicionada por lanzamiento de tres dados. Este hecho resulta fundamental para la solución del ejercicio, ya que el orden en el que pueden salir los resultados de los dados determina las posibilidades de obtener los números 9 y 10 como suma de tres números.

Algunos estudiantes basan su respuesta en una combinación en específico, por ejemplo, la siguiente respuesta:

Figura 25 *Respuesta del estudiante E30*

Al tirar tres dados y sumar sus resultados era más frecuente obtener 10 puntos que 9, porque hay menos probabilidad de que salga en cada uno de los dados el mismo número. Es decir, obtener el 9 a partir de la suma 3+3+3.

Nota. Fuente: Autoría propia.

El estudiante E30 sostuvo que, para obtener la suma de 9 como resultado de lanzar tres dados, la combinación de 3+3+3 es menos probable que las otras combinaciones, lo que hace que el número 10 sea más probable de obtener. Aunque no mencionó la probabilidad, su respuesta es considerada correcta ya que demostró comprensión de que las diferentes combinaciones de suma están condicionadas por el lanzamiento de los tres dados, y que la combinación 3+3+3 es menos probable que las demás, siendo el número 10 más probable de obtener. Además, es importante destacar que los estudiantes no estuvieron obligados a mencionar el concepto de probabilidad si aún no se ha introducido en el curso.

Otros estudiantes dieron una solución más elaborada donde se muestra todas las posibilidades que tienen los números 9 y 10 vistos como suma de las puntuaciones al lanzar tres dados.

Figura 26 *Respuesta del estudiante E24*

A continuación, expresamos las diferentes formas en las que puede aparecer cada descomposición aritmética cuando de lanzan tres dados:

9 = 1 + 2 + 6 (6 formas)	**10 = 1 + 3 + 6 (6 formas)**
9 = 1 + 3 + 5 (6 formas)	**10 = 1 + 4 + 5 (6 formas)**
9 = 1 + 4 + 4 (3 formas)	**10 = 2 +2 + 6 (3 formas)**
9 = 2 + 2 + 5 (3 formas)	**10 = 2 + 3 + 5 (6 formas)**
9 = 2 + 3 + 4 (6 formas)	**10 = 2 + 4 + 4 (3 formas)**
9 = 3 + 3 + 3 (1 forma)	**10 = 3 + 3 + 4 (3 formas)**

Como se puede observar, el nueve podía aparecer en el lanzamiento de tres dados de 25 formas posibles y el diez de 27.

Nota. Fuente: Autoría propia.

El estudiante E24 presentó un análisis adecuado del ejercicio, al buscar todas las formas posibles de obtener los números 9 y 10 como suma de números al lanzar tres dados, y comparar los totales para demostrar que el número 10 tiene más posibilidades de salir. Se puede observar que el estudiante llevó a cabo un proceso adecuado para su argumentación y comprendió las condiciones que se presentan al lanzar tres dados.

Los estudiantes que no presentan un proceso basan su respuesta en opiniones personales que tienen sobre los juegos donde se involucre el azar.

Figura 27 *Respuesta del estudiante E3*

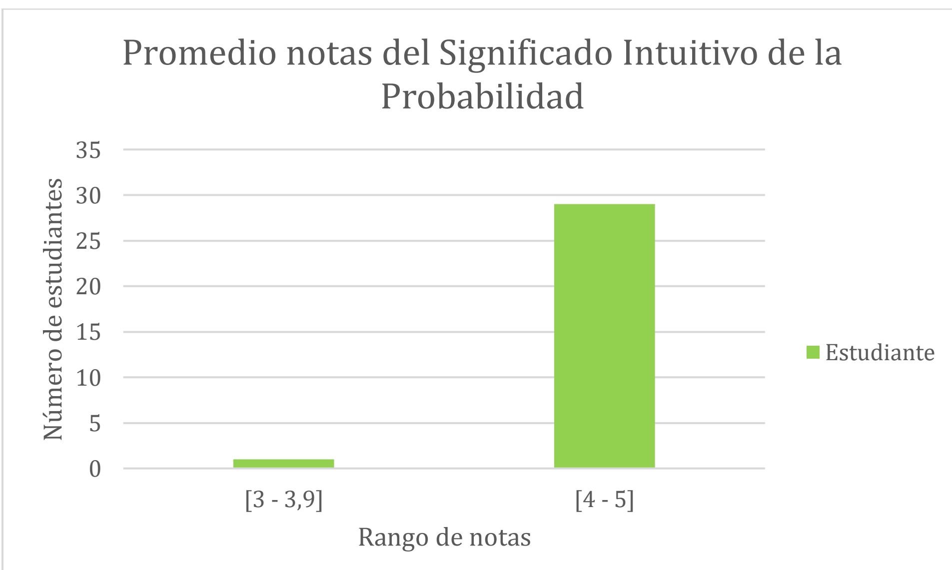
R/ Considero que en este juego se crea una ilusión de control sobre el azar, que permite creer que dominamos sucesos sobre los que no tenemos ninguna influencia, como lo es este caso donde aunque se calculen las probabilidades, la suerte juega un papel importante.

Nota. Fuente: Autoría propia.

La respuesta anterior muestra que el estudiante E3 no analizó correctamente la situación-problema, ya que no tuvo en cuenta los números 9 y 10 ni su generación como suma de números al lanzar tres dados.

A continuación, en la figura 28 se muestra el promedio las de notas de los estudiantes, una vez se finalizó la implementación de las actividades de la guía #1.

Figura 28 *Promedio notas del Significado Intuitivo de la Probabilidad*



Nota. En la figura se muestra en el eje horizontal los rangos de los valores de las notas y en el eje vertical el número de estudiantes. Fuente: Elaboración propia.

En la anterior figura se puede observar que un solo estudiante tiene su promedio de notas por debajo de 4, esto muestra que los estudiantes se comprometieron a resolver de manera responsable todas las actividades evaluativas.

En términos generales, el promedio de las notas de los estudiantes para el primer significado fue bueno, cabe aclarar que las actividades evaluativas que se propusieron en su mayoría son de carácter subjetivo y experimental, dado que no se mencionó un concepto matemático en concreto sino ideas intuitivas de lo que es la probabilidad, pero se pudo identificar que la mayoría de los estudiantes usaron procedimientos y argumentos adecuados para llegar a una solución, se detectaron posibles dificultades y se implementaron estrategias que ayudaron a superarlas.

9.2.2. Significado Clásico de la Probabilidad

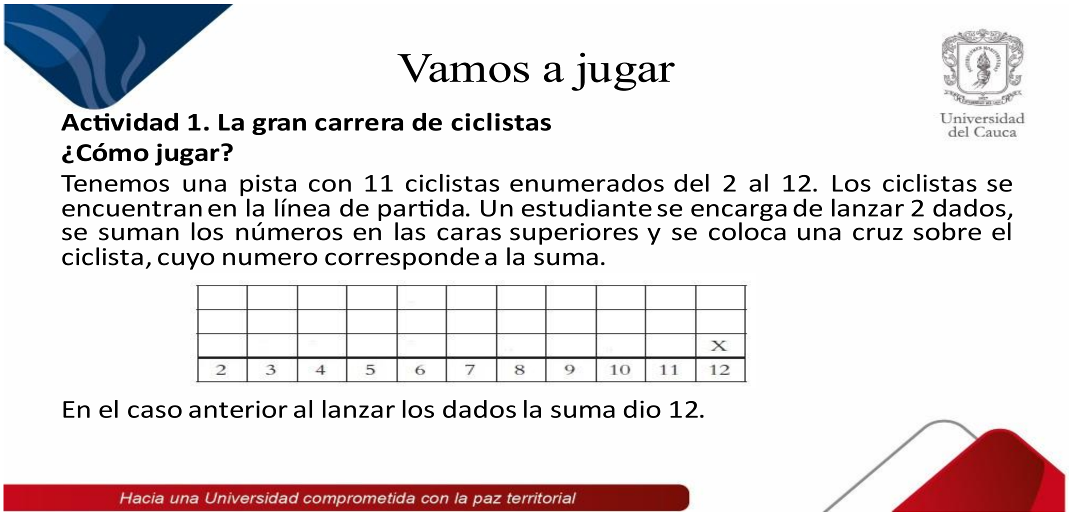
Para abordar el significado clásico de la probabilidad se realizaron 2 actividades (La Gran Carrera de Ciclistas y Dados de Póquer).

9.2.2.1. La Gran Carrera de Ciclistas.

La actividad denominada la gran carrera de ciclistas se llevó a cabo en dos sesiones donde además se presentaron los conceptos relacionados al significado clásico de probabilidad y la combinatoria. Se entregó la guía #2 denominada: Juegos con Dados, Significado Clásico de Probabilidad, donde se encuentran las actividades y el contenido a trabajar.

Se realizó una simulación de como jugar la gran carrera de ciclistas, la cual consistió en organizar a los estudiantes en 2 grupos, quienes fueron los apostadores y las casas de apuestas. En el grupo designado para las casas de apuestas se organizaron 5 estudiantes por casa de apuestas (hubo 3 casas de apuestas), para el grupo de los apostadores, cada estudiante que deseaba lanzaba los dados y entre todos se llevó cuenta de las puntuaciones y se encargaban de apostar con fichas. Después de 3 carreras, los grupos cambiaron los roles. Se presentó la siguiente diapositiva donde se mostró cómo funcionaba el juego:

Figura 29 *Instrucciones de como jugar la Gran Carrera de Ciclistas*



Nota. Las instrucciones anteriormente mencionadas se muestran en la guía #2. Fuente: Elaboración propia.

Se realiza esta actividad con el fin de poder dar instrucciones claras de un juego que contiene distintos roles, determinar la motivación que les genera trabajar en equipo y con materiales manipulativos, además poder socializar a que nos referimos con probabilidad clásica y los conceptos que se involucran en ella.

Para los estudiantes no fue difícil comprender las condiciones del juego, los roles de cada grupo y como se gana el juego, una vez organizados se vieron muy motivados debido a que en el juego se involucraba una apuesta, cada apostador contaba con fichas plásticas y podía apostar en 3 diferentes casas de apuestas, también los integrantes de las casas de apuestas estaban emocionados porque querían que los apostadores realizaran sus apuestas en su casa, hacían distintas tablas de pagos para convencer que su casa de apuestas era la mejor opción. Una vez se finaliza la etapa de las apuestas y se lanzaron los dos dados, se observaba el resultado, era un sinfín de emociones puesto que cada apostador como los integrantes de las casas de apuestas deseaban un resultado favorable para ellos, “ya que tenían algo que perder”.

Figura 30 *Simulación de como jugar la Gran Carrera de Ciclistas*

Nota. La figura muestra la etapa en la que los estudiantes realizaron sus apuestas en la parte izquierda, mientras que en la parte derecha se ve a un integrante de una casa de apuestas registrando una apuesta. Fuente: Elaboración propia.

Al finalizar la simulación del juego, se les informó a los estudiantes que aquellos que obtuvieran la mayor cantidad de fichas después de las tres carreras (ya sea como apostadores o como integrantes de una casa de apuestas) recibirían un premio, con el fin de motivarlos aún más para la siguiente sesión.

Después, se presentaron diapositivas que contenían los conceptos relacionados al significado clásico de probabilidad y la combinatoria, con el fin de socializar estos temas con los estudiantes.

Figura 31 *Presentación de los contenidos del Significado Clásico de la Probabilidad*

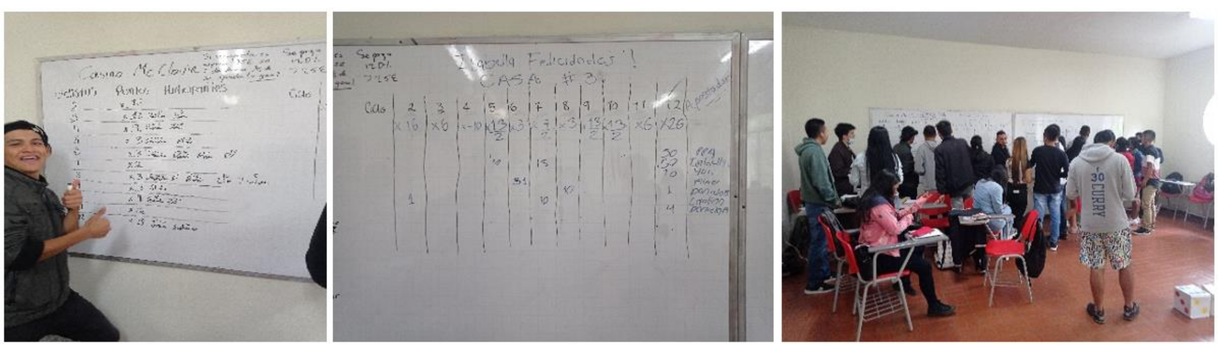
Nota. Las demás presentaciones se encuentran en el anexo 2. Fuente: Elaboración propia.

Después de la socialización de los conceptos relacionados con el significado clásico de probabilidad y la combinatoria, los estudiantes plantearon algunas preguntas al respecto. Para finalizar la sesión, se sugiere a los estudiantes revisar los conceptos dados en la clase con el fin de que en la próxima sesión puedan tomar decisiones en el juego teniendo en cuenta estos conceptos.

Algunas consideraciones: Durante la organización de los grupos de apostadores y casas de apuestas, se encontró dificultad debido a que no se había explicado con exactitud lo que se iba a realizar, lo cual ocasionó que los estudiantes se mostraran reacios a moverse de sus asientos. De lo anterior, se recomienda dar las explicaciones de manera clara y organizada antes de formar los grupos. No obstante, es interesante destacar la disposición de los estudiantes luego de haber jugado, prestando atención a las temáticas abordadas sin problemas y motivados al conocer el juego que jugarían en la próxima sesión y cómo funciona. Esto demuestra cómo el juego puede ser útil para motivar a los estudiantes.

Durante la segunda sesión se realiza la Gran Carrera de Ciclistas, los estudiantes ya sabían cómo organizarse para la actividad, se repartieron las fichas tanto para los apostadores como para las casas de apuestas, los integrantes de las casas de puestas empezaron a realizar sus tablas de pagos en el tablero del salón, para así comenzar con la etapa de las apuestas.

Figura 32 *Los estudiantes juegan la Gran Carrera de Ciclistas*



Nota. La figura muestra la etapa en la que los estudiantes realizaron las tablas de pagos en la parte izquierda, mientras que en la parte derecha se ve a los estudiantes haciendo sus apuestas. Fuente: Elaboración propia.

Una vez finalizada la etapa de las apuestas, se empezaba a lanzar los dos dados para determinar que ciclista sería el ganador de la ronda. Al finalizar la ronda, las casas de apuestas modificaban sus tablas de pagos dependiendo lo que ocurría en la ronda anterior.

La actividad consistió en dos etapas, en la primera etapa se debían jugar tres rondas, en la primera ronda, para ganar la carrera, el ciclista debía completar tres cruces, en la segunda ronda ganaría el que complete cuatro cruces y en la última ronda se debían completar cinco cruces.

Para la segunda etapa cambian los roles, los integrantes de las casas de apuestas pasan a ser apostadores y los apostadores conforman tres casas de apuestas.

Las rondas fueron muy emocionantes para todos, estaban muy activos, en momentos muy cortos aprovechaban para sentarse, se entregaron los primeros premios a los ganadores finalizadas las tres primeras rondas, esto motivo a que al cambiar los roles los estudiantes planificaran mejor su estrategia para ganar en la segunda etapa.

Comentarios: Los estudiantes que integran las casas de apuestas comentan que tienen en cuenta el concepto de esperanza matemática vista en la anterior clase, esto con el fin de publicar una apuesta que los beneficie, otros estudiantes en su tabla de pagos utilizan números fraccionarios para reflejar el premio a obtener si gana el ciclista, lo interesante de utilizar números fraccionarios es que el premio en muchas ocasiones era menor que en otras casas de apuestas.

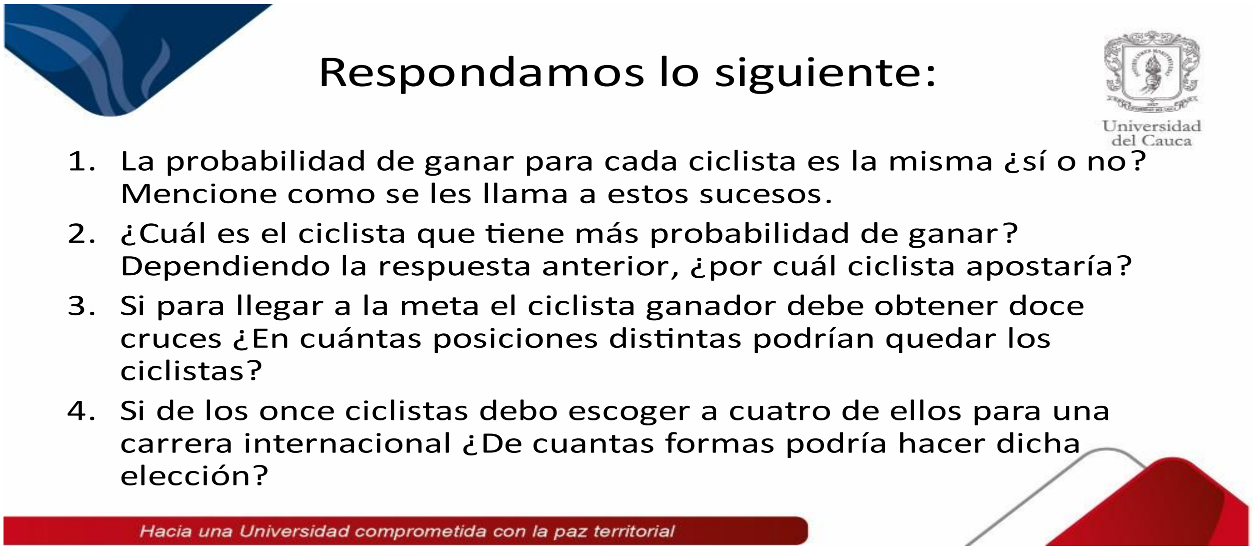
Las casas de apuestas ya tenían conocimientos sobre cuales ciclistas tenían mayor probabilidad, estos eran los que tenían los números 6, 7, 8 y 9, según la teoría, los ganadores casi siempre serian estos ciclistas, por lo tanto, las casas de apuestas optaban por multiplicar la apuesta a estos ciclistas de una manera más baja a comparación de los demás ciclistas.

Las tres casas de apuestas optaron por multiplicar mucho lo apostado en números que tenían una baja probabilidad, en las casas de apuestas hubieron ofertas de pagar 12, 15 y hasta 26 veces lo apostado si el ciclista número 12 ganaba la ronda a las 4 cruces, lo fascinante de esta ronda es que contra todo pronóstico el ciclista número 12 ganó a las 4 cruces, esto quiere decir que al lanzar los dados cayo la pareja de 6 cuatro veces en la ronda, superando a los ciclistas con el número 7, 8 y 9 que eran los favoritos por los apostadores. En este caso los apostadores que realizaron la apuesta al ciclista número 12 estaban emocionados por ganar, las casas de apuestas no podían creer que debían pagar todo lo prometido, este es un ejemplo de lo impredecible que es el azar y que en estos juegos cualquier cosa puede pasar.

Algunos apostadores decían: “Por creer en la teoría he perdido todo”, varios apostadores confiados en que los ciclistas con los números 6, 7 y 8, siempre apostaron alguno de ellos o incluso a los tres y en diferentes casas de apuestas, pero lamentablemente los ciclistas con estos números no ganaban. Lo anterior ya generaba dudas, ¿porque los números con mayor probabilidad en la teoría, no ganaban en la práctica?, esto abre camino al concepto de la Probabilidad Frecuencial.

En la figura 33 se presentan las preguntas planteadas con relación al juego “la Gran Carrera de Ciclistas”, las respuestas proporcionadas por los estudiantes fueron registradas en Classroom.

Figura 33 *Preguntas de la Gran Carrera de Ciclistas*



Nota. Fuente: Elaboración propia.

Las preguntas fueron realizadas con el objetivo de evaluar a los estudiantes sobre los conceptos abordados en relación con el juego propuesto. Además, se analizaron los elementos lingüísticos, procedimientos, algoritmos y argumentos que los estudiantes utilizaron al realizar los ejercicios propuestos.

En la tabla 12 se presenta una clasificación de las respuestas a las preguntas luego de ser analizadas.

Tabla 12 *Clasificación de las respuestas de los estudiantes a las preguntas*

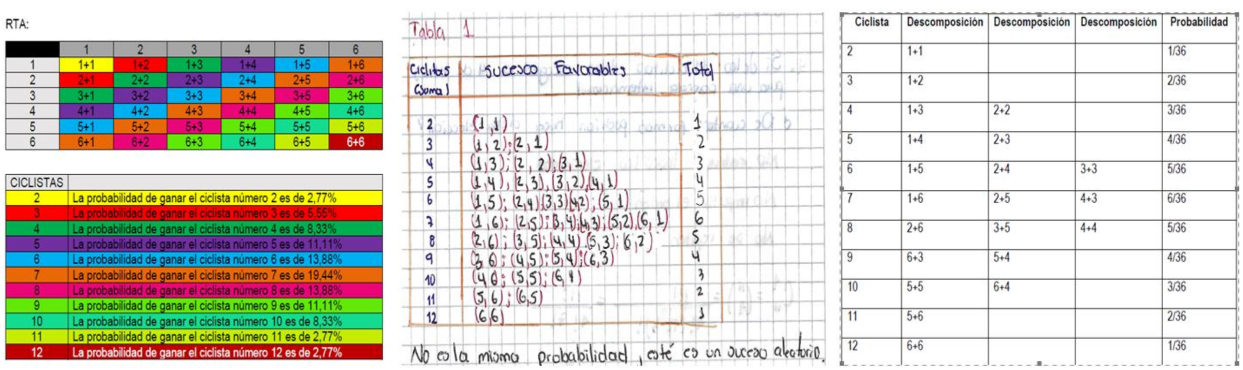
	Respuestas correctas con un proceso adecuado	Respuestas sin procesos	Respuestas con un proceso no adecuado	Respuestas incorrectas	Interpretan la pregunta de otra manera
Pregunta 1	E1, E3, E4, E8, E11, E17, E18, E22, E23, E24, E25, E30	E2, E9, E15, E16, E19, E21, E24, E26, E27, E28	E5, E6, E7, E12, E13, E20, E29	E10	
Pregunta 2	E1, E3, E4, E8, E11, E17, E18, E22, E23, E24, E25, E30	E2, E9, E16, E19, E21, E24, E27	E5, E6, E7, E10, E12, E13, E14, E15, E26, E28 E29		

Pregunta 3	E6, E7, E10, E12, E17, E19, E20, E24, E26, E27, E28		E1, E3, E4, E8, E11, E13, E15, E16, E18, E21, E22, E23, E25, E29	E2, E5, E9, E14, E30
Pregunta 4	E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E11, E12, E14, E15, E19, E20, E21, E22, E23, E24, E25, E27, E29, E30		E1, E10, E13, E16, E17, E18, E26, E28	

Nota. En la tabla se muestra las diferentes categorías que se consideraron para analizar las respuestas de los estudiantes. Fuente: Elaboración propia.

En cuanto a la primera pregunta, los estudiantes que ofrecieron una respuesta correcta con un proceso adecuado, explicaron de manera clara y precisa por qué los ciclistas no tienen la misma probabilidad. Señalando que esto se debe a que al lanzar dos dados y sumar sus puntuaciones, algunos resultados tienen más combinaciones que otros. Para respaldar sus explicaciones, utilizaron tablas, tal como se muestra en la figura 34.

Figura 34 *Respuesta de los estudiantes E1, E4 y E11*


RTA:

	1	2	3	4	5	6
1	1+1	1+2	1+3	1+4	1+5	1+6
2	2+1	2+2	2+3	2+4	2+5	2+6
3	3+1	3+2	3+3	3+4	3+5	3+6
4	4+1	4+2	4+3	4+4	4+5	4+6
5	5+1	5+2	5+3	5+4	5+5	5+6
6	6+1	6+2	6+3	6+4	6+5	6+6

CICLISTAS	
2	La probabilidad de ganar el ciclista número 2 es de 2,77%
3	La probabilidad de ganar el ciclista número 3 es de 5,55%
4	La probabilidad de ganar el ciclista número 4 es de 8,33%
5	La probabilidad de ganar el ciclista número 5 es de 11,11%
6	La probabilidad de ganar el ciclista número 6 es de 13,88%
7	La probabilidad de ganar el ciclista número 7 es de 19,44%
8	La probabilidad de ganar el ciclista número 8 es de 13,88%
9	La probabilidad de ganar el ciclista número 9 es de 11,11%
10	La probabilidad de ganar el ciclista número 10 es de 8,33%
11	La probabilidad de ganar el ciclista número 11 es de 2,77%
12	La probabilidad de ganar el ciclista número 12 es de 2,77%

Tabla 1

Ciclistas (Suma)	Sucesos Favorables	Total
2	(1,1)	1
3	(1,2); (2,1)	2
4	(1,3); (2,2); (3,1)	3
5	(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)	4
6	(1,5); (2,4) (3,3) (4,2); (5,1)	5
7	(1,6); (2,5); (3,4); (4,3); (5,2), (6,1)	6
8	(2,6); (3,5); (4,4) (5,3); (6,2)	5
9	(3,6); (4,5); (5,4); (6,3)	4
10	(4,6); (5,5); (6,4)	3
11	(5,6); (6,5)	2
12	(6,6)	1

No es la misma probabilidad, esté es un suceso aleatorio.

Ciclista	Descomposición	Descomposición	Descomposición	Probabilidad
2	1+1			1/36
3	1+2			2/36
4	1+3	2+2		3/36
5	1+4	2+3		4/36
6	1+5	2+4	3+3	5/36
7	1+6	2+5	4+3	6/36
8	2+6	3+5	4+4	5/36
9	6+3	5+4		4/36
10	5+5	6+4		3/36
11	5+6			2/36
12	6+6			1/36

Nota. En la figura se muestra las tablas utilizadas por los estudiantes que hace parte de la respuesta que dieron mediante Classroom. Fuente: Autoría propia.

En las respuestas, los estudiantes demuestran comprensión de que estos sucesos son aleatorios y no tienen la misma probabilidad (definiciones y propiedades). Se puede observar que utilizan símbolos y notaciones adecuadas (elementos lingüísticos) para presentar la solución, así mismo utilizan tablas (procedimientos) para organizar los datos para poder argumentar sus respuestas.

Los estudiantes E2, E9, E15, E16, E19, E21, E24, E26, E27 y E28 comentan que los ciclistas no tienen la misma probabilidad, pero no proporcionan ejemplos o procedimientos para respaldar su afirmación.

Los estudiantes que ofrecieron una respuesta con un proceso no adecuado, explicaron que los ciclistas no tienen la misma probabilidad debido a que los ciclistas 6, 7 y 8 tienen la mayor probabilidad. Refirieron que estos ciclistas tienen igual probabilidad debido a que tienen el mismo número de formas de descomponerse con respecto a la suma de dos números.

Figura 35 *Respuesta de los estudiantes E7, E12 y E20*

Rta:

- No, pues los ciclistas 6, 7 y 8 son los que tienen mayor probabilidad de ganar ya que la suma de cada número tiene más combinaciones posibles frente a los otros números.

2 = 1 + 1
3 = 1 + 2
4 = 1 + 3 = 2 + 2
5 = 1 + 4 = 2 + 3
6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3
7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4
8 = 2 + 6 = 3 + 5 = 4 + 4
9 = 3 + 6 = 4 + 5
10 = 4 + 6 = 5 + 5
11 = 5 + 6
12 = 6 + 6

No, la probabilidad de ganar para cada ciclista no es la misma ya que
Ciclista 2: 1+1 = 1/36
Ciclista 3: 2+1 = 1/36
Ciclista 4: 2+2, 3+1 = 2/36= 1/18
Ciclista 5: 1+4, 2+3 = 2/36 = 1/18
Ciclista 6: 1+5, 2+4, 3+3 = 3/36 =1/12
Ciclista 7: 1+6, 2+5 , 3+4 = 3/36 = 1/12
Ciclista 8: 2+6, 3+5, 4+4 = 3/36 = 1/12
Ciclista 9: 6+3, 5+4 = 2/36= 1/18
Ciclista 10: 6+4, 5+5 = 2/36 = 1/18
Ciclista 11: 5+6= 1/36
Ciclista 12: 6+6 = 1/36
A estos sucesos se les llama suceso aleatorio y sucesos equiprobables

Solución

Ciclistas	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Posibles combinaciones	1+1	1+2	1+3 2+2	1+4 2+3	1+5 2+4 3+3	1+6 2+5 3+4	2+6 3+5 4+4	3+6 4+5	4+6 5+5	5+6	6+6

Nota. Fuente: Autoría propia.

En la figura 35 se evidencia que los estudiantes no tienen en cuenta que la suma viene generada por un instrumento aleatorio como son los dados, los estudiantes hacen referencia a la descomposición mediante la suma que tienen los números 6, 7 y 8 son iguales y en este caso la conmutatividad de las sumas no tiene relevancia, pero las combinaciones que se generan con los dados y su conmutatividad marcan la diferencia. Mostrando falta de compresión en las definiciones y propiedades que se han comentado sobre el la probabilidad clásica. Los símbolos, notaciones (elementos lingüísticos) y las tablas (procedimientos) usadas para presentar la información fueron adecuadas.

El estudiante E10 como se nota en la figura 36, no toma en cuenta que cada ciclista tiene una combinación diferente de resultados de dos dados que le permiten ganar, lo que lleva a mencionar que todos tienen la misma probabilidad, sin tener en cuenta la complejidad de los posibles resultados.

Figura 36 *Respuesta estudiante E10*

RTA: Si. La probabilidad de ganar para cada ciclista es de $\frac{1}{11}$, es decir del 9%. A estos sucesos se les denomina como un Suceso Aleatorio ya que se pueden dar varios resultados sin que sea posible predecir cuál va a ocurrir.

Nota. Fuente: Autoría propia.

En anterior figura, se puede observar que el estudiante intenta aplicar la Regla de Laplace para calcular la probabilidad, sin embargo, esta regla solo es aplicable cuando los eventos son equiprobables, lo cual no es el caso en este juego debido a que las combinaciones de los dados no tienen la misma probabilidad. Por lo tanto, se puede inferir que el estudiante tiene una falta de comprensión del contexto en el que se sitúa la pregunta y de la aplicación adecuada de la Regla de Laplace (definiciones y propiedades).

La segunda pregunta expuesta en la diapositiva de la figura 33, se relaciona con la primera, y en este caso, 12 estudiantes (E1, E3, E4, E8, E11, E17, E18, E22, E23, E24, E25 y E30) respondieron acertadamente que el ciclista número 7 es el que tiene más probabilidad de ganar y que apostarían por él, así como por los ciclistas 6 y 8 como buenas opciones.

Por otro lado, 7 estudiantes (E2, E9, E16, E19, E21, E24 y E27) mencionan que el ciclista con mayor probabilidad es el 7 y que apostarían por él, a pesar de no haber brindado más información en la pregunta 1.

Finalmente, 11 estudiantes (E5, E6, E7, E10, E12, E13, E14, E15, E26, E28 y E29) respondieron que los números 6, 7 y 8 tienen la misma y mayor probabilidad, siendo esta de 3/36, y que por lo tanto apostarían por ellos. Esta respuesta viene dada por la interpretación que se da en la respuesta al punto 1.

En cuanto a la tercera pregunta expuesta en la diapositiva de la figura 33, los estudiantes que ofrecieron una respuesta con un proceso adecuado, entendieron el contexto de la pregunta, que pide la permutación sin repetición de un conjunto con 11 elementos, en este caso, los 11 ciclistas. Todos llegaron a las respuestas como se muestran en la Figura 37.

Figura 37 *Respuesta estudiante E6*

Haciendo uso de la formula de permutación (sin repetición), como se pide calcular las posiciones distintas entonces tenemos: 11! = 39916800. Este último es el número de posiciones diferentes en que podrían quedar los ciclistas.

Nota. Fuente: Autoría propia.

El estudiante E6 representó su respuesta por medio de símbolos adecuados (elementos lingüísticos) y demostró compresión de la situación problema, donde tiene claro las definiciones y propiedades de los conceptos abordados y hace un uso de la fórmula (procedimientos) de manera adecuada.

Se observó que los estudiantes que ofrecieron una respuesta incorrecta, no entendieron la pregunta completamente y, por lo tanto, no lograron identificar que el conjunto a permutar son los 11 ciclistas. Algunos de ellos mencionaron 10 o 12 elementos y esto indica una falta de atención en la lectura.

Figura 38 *Respuesta estudiante E8*

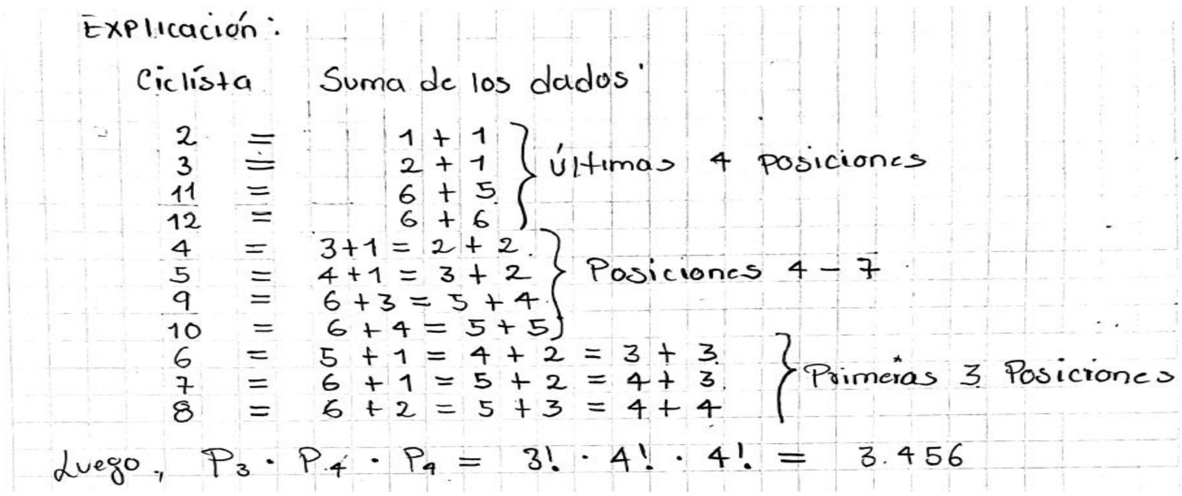
Si para llegar a la meta el ciclista ganador debe obtener doce cruces ¿En cuántas posiciones distintas podrían quedar los ciclistas?
Pn = n!
Pn= 12*11*10*9*8*7*6*5*4*3*2*1=479001600

Nota. Fuente: Autoría propia.

En la figura 38 se evidencia que el estudiante E8 utilizó fórmulas (procedimientos) distintas a la permutación sin repetición, lo que indica una falta de conocimiento en la aplicación de las fórmulas combinatorias correspondientes.

Los estudiantes que interpretaron de otra manera la pregunta, mostraron algunas situaciones, como se muestra en la figura 39.

Figura 39 *Respuesta estudiante E5*



Nota. Fuente: Autoría propia.

El estudiante E5 baso su argumentación mostrando que las posiciones que debían ocupar los ciclistas estaban condicionadas por las posibilidades que tienen de ganar cada ciclista con respecto a número que representan. Por ejemplo, las primeras 3 posiciones debían siempre ser ocupadas por los ciclistas cuyos números son 6, 7 y 8 los cuales según expresado tienen igual combinación respecto a la suma. Esto refleja dificultades del estudiante en la compresión de las definiciones y propiedades de la probabilidad clásica.

Lo anterior evidencia que hay problemas en la formulación de la pregunta. Se considera reformular la pregunta, como sigue:

“Si cada ciclista debe ocupar una posición diferente, ¿cuántas posibilidades hay para que los ciclistas se queden en diferentes posiciones?”

La cuarta pregunta expuesta en la diapositiva de la figura 34, presentó una situación problema para hacer uso de una fórmula combinatoria adecuada, donde se obtuvo resultados similares a la pregunta 3. Algunos estudiantes entendieron la pregunta y respondieron apropiadamente, utilizando definiciones y procedimientos correctos para respaldar sus argumentos. Otros no aplicaron la fórmula correcta o usaron otras fórmulas, y algunos estudiantes no interpretaron la pregunta correctamente. El análisis de estas respuestas se puede encontrar en los diarios de campo en el anexo 4.

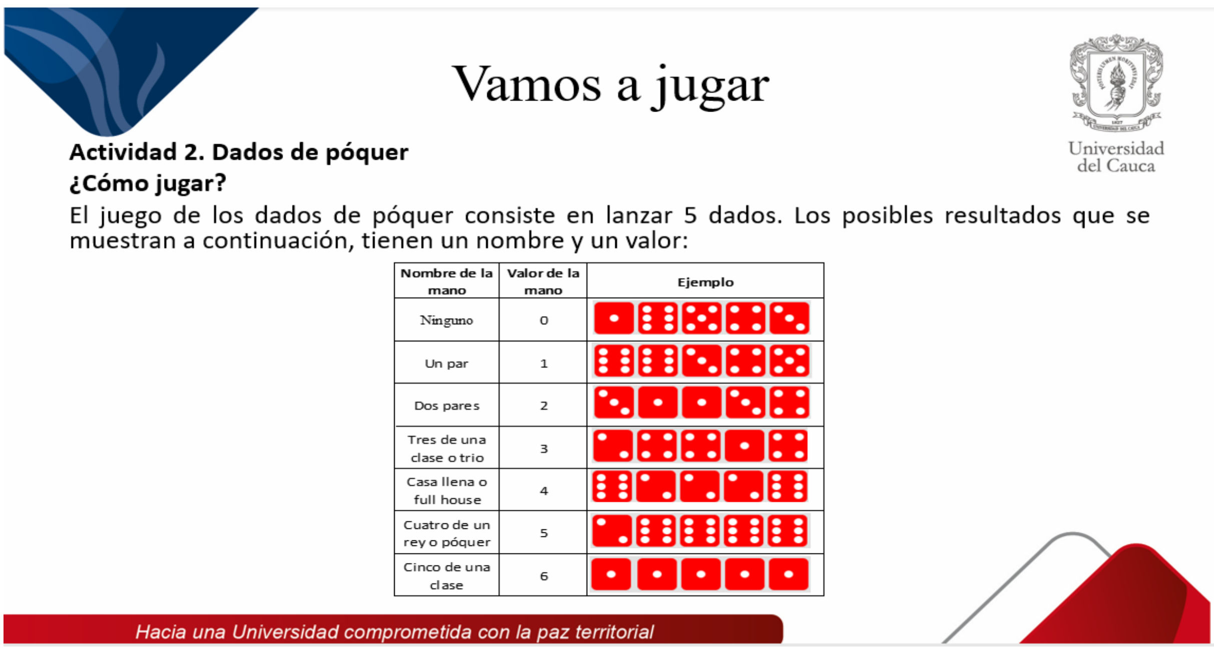
Comentarios: Todas las respuestas a las preguntas anteriores se retroalimentaron con los estudiantes donde se pudo ofrecer las respectivas aclaraciones y se hicieron observaciones.

Es interesante observar cómo la misma situación puede ser interpretada de manera diferente por los estudiantes, lo que evidencia la importancia de comprender el contexto de un problema para poder dar una respuesta matemáticamente válida. También es destacable el hecho que algunos estudiantes se enfocan tanto en el contexto que pueden llegar a dar soluciones que no son las esperadas, lo que demuestra la flexibilidad y creatividad que pueden tener los estudiantes en la resolución de problemas.

9.2.2.2. Dados de Póquer.

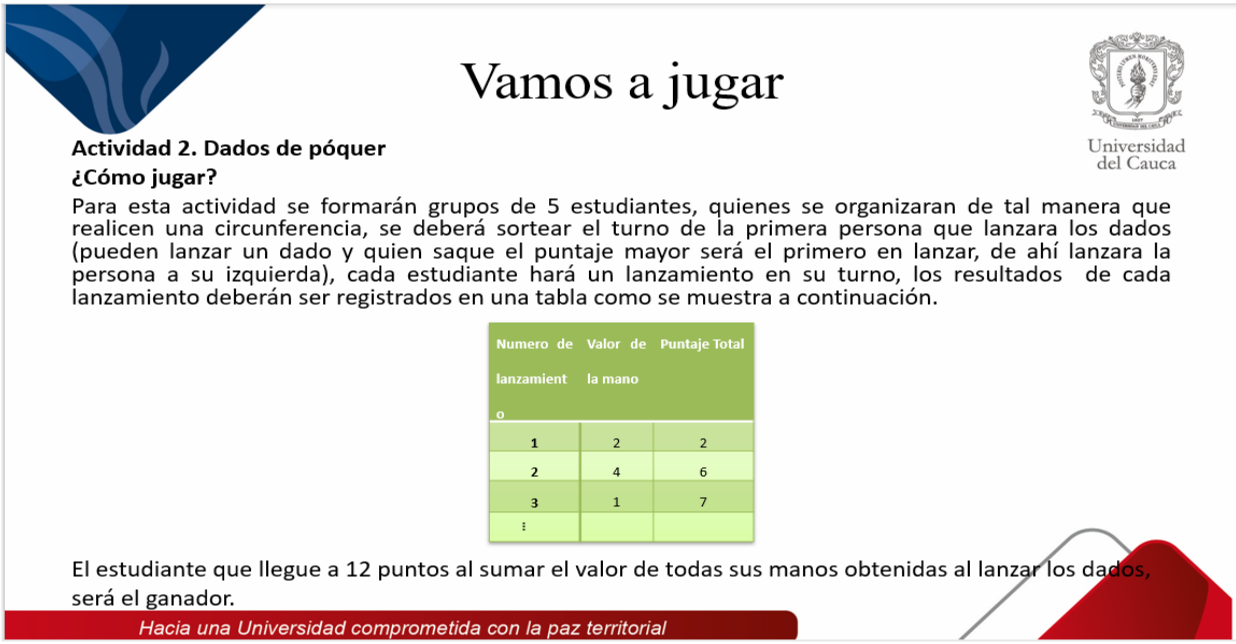
Con el objetivo de proporcionar a los estudiantes un ejemplo de experimento aleatorio que involucre una combinatoria más compleja, se sugiere que se formen grupos de seis para realizar la actividad 2 (Dados de Póquer), donde se explicaron las reglas del juego como se muestra en las figuras 40 y 41.

Figura 40 *Dinámica del juego Dados de Póquer*



Nota. En la figura se muestra la clasificación de los resultados al lanzar 5 dados que se consideran en el juego. Fuente: Elaboración propia.

Figura 41 *Reglas para jugar Dados de Póquer*



Nota. En la figura se muestra las reglas del juego. Fuente: Elaboración propia.

Los estudiantes presentaron dudas del tipo de jugada o valor de la mano que se obtiene al lanzar los 5 dados, pero luego de jugar la primera partida comprenden las condiciones y las reglas para ganar.

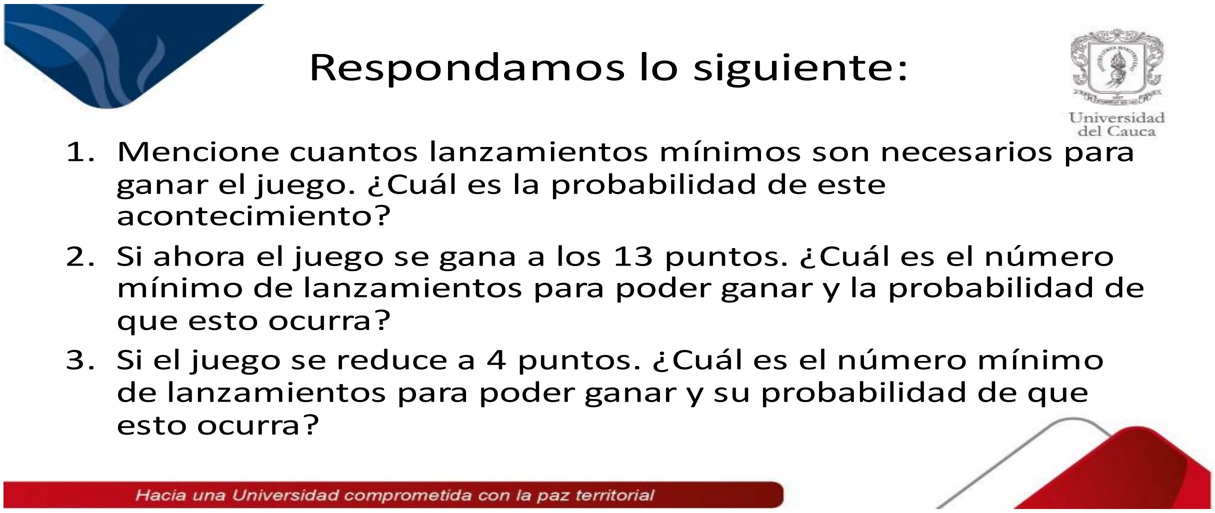
Figura 42 *Estudiantes jugando Dados de Póquer*

Nota. Fuente: Autoría propia.

Después de jugar, los estudiantes manifestaron que el juego fue muy divertido y les sorprendió la gran cantidad de combinaciones que pueden obtenerse al lanzar los cinco dados.

Las preguntas correspondientes a la actividad Dados de Póquer se presentan en la figura 43.

Figura 43 *Preguntas Dados de Póquer*



Nota. Fuente: Elaboración propia.

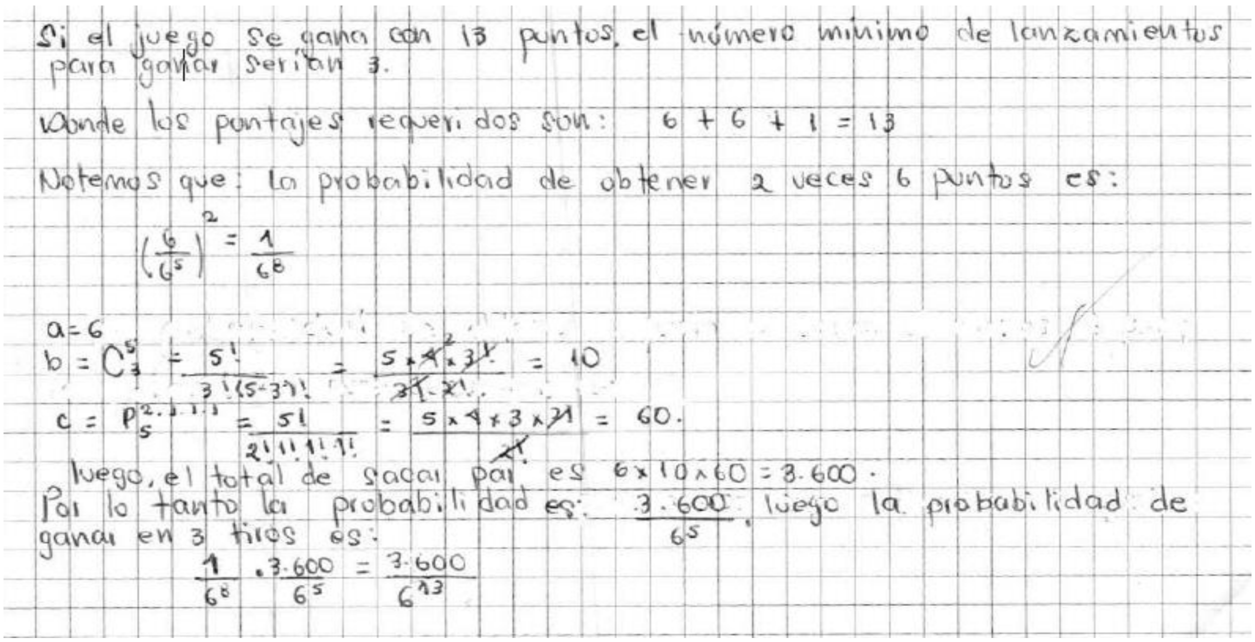
Cada una de las preguntas fue resuelta por los grupos que se conformaron para jugar, para el análisis de las respuestas dadas, se codifican los grupos por G1 hasta G6. Aquí se presenta el análisis de la pregunta 2 debido a que se considera que fue la más enriquecedora, el análisis de las demás preguntas se encuentra en los diarios de campo que se encuentra en el anexo 4.

La pregunta 2 generó controversia en su respuesta debido a que se tenían que considerar varias situaciones. La respuesta como practicante fue: *Teniendo en cuenta que con dos lanzamientos como máximo se pueden sumar 12 puntos entonces se deben hacer 3 lanzamientos*, acuerdo al que llegaron todos los grupos. Entonces se estableció que como mínimo se debían hacer 3 lanzamientos.

La estrategia utilizada para resolver la pregunta 2 como practicante fue calcular la probabilidad de obtener una puntuación de 6 en dos lanzamientos, y luego calcular la probabilidad de obtener al menos un punto en un tercer lanzamiento. Para ello, se calcula la probabilidad de sacar 1, 2, 3, 4, 5 o 6 en un lanzamiento y sumar estas probabilidades para obtener la probabilidad de sacar al menos un punto. Finalmente, multiplica esta probabilidad por la probabilidad previamente calculada de obtener dos lanzamientos con una puntuación de 6. En otras palabras, si se establece una terna que represente el valor de las puntaciones en los 3 lanzamientos que se debe obtener para ganar el juego, serian: (6,6,1), (6,6,2) … (6,6,6). Entonces se calcularía la probabilidad de dichos eventos para luego sumarse y obtener la probabilidad total de ganar el juego con tres lanzamientos.

Algunos grupos hicieron el análisis anteriormente descrito e identificaron que calcular la probabilidad de estos eventos sería muy extenso. Por tanto, calcularon la probabilidad de uno de los eventos (6,6,1), (6,6,2) … (6,6,6). Obteniendo un resultado como se muestra en la figura 44.

Figura 44 *Respuesta del grupo G2*


Si el juego se gana con 13 puntos, el número mínimo de lanzamientos para ganar serían 3.

Donde los puntajes requeridos son: $6 + 6 + 1 = 13$

Notemos que: la probabilidad de obtener 2 veces 6 puntos es:

$$\left(\frac{6}{6^5}\right)^2 = \frac{1}{6^8}$$

$a = 6$

$$b = C^5_3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \cdot 2!} = 10$$

$$c = P_5^{2,1,1,1} = \frac{5!}{2!1!1!1!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 60.$$

luego, el total de ganar par es $6 \times 10 \times 60 = 3.600$.

Por lo tanto la probabilidad es: $\frac{3.600}{6^5}$, luego la probabilidad de ganar en 3 tiros es:

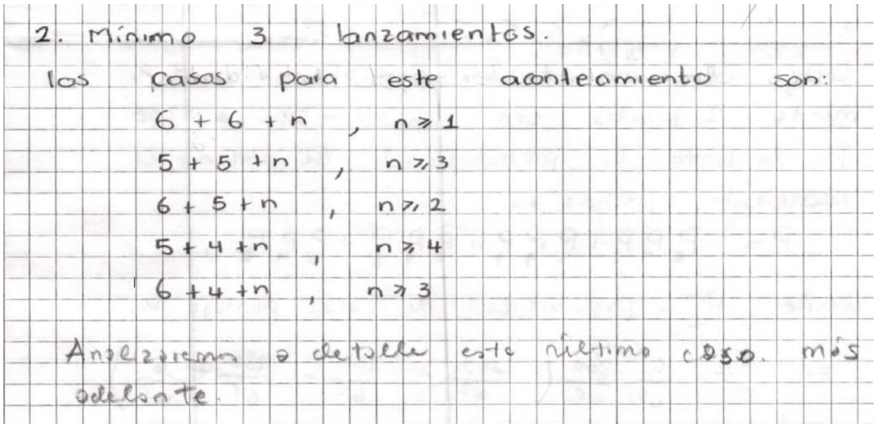
$$\frac{1}{6^8} \cdot \frac{3.600}{6^5} = \frac{3.600}{6^{13}}$$

Nota. Fuente: Autoría propia.

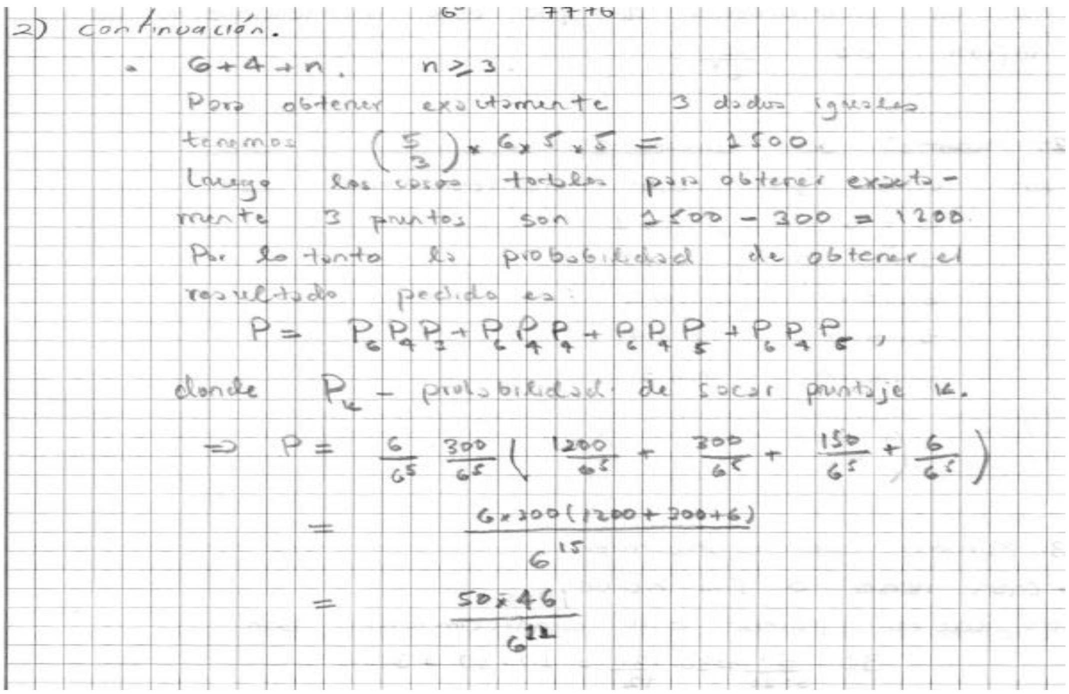
En el proceso realizado por el grupo G2 se muestra que particularmente calcularon la probabilidad de la terna (6,6,1), donde calcularon la probabilidad de obtener una puntuación de 6 en dos lanzamientos, y luego la probabilidad de obtener 1, utilizando símbolos adecuados y la fórmula de la combinación (procedimientos) para luego llegar a su conclusión.

El grupo G5 realizó una generalización de las situaciones que debían ocurrir para ganar el juego a los 13 puntos con 3 lanzamientos, donde hicieron una clasificación de casos tomando no solamente el hecho de que ocurra que en dos lanzamientos se tenga puntuaciones de 6, sino otros casos donde también se gana con 3 lanzamientos como se muestra en la figura 45:

Figura 45 *Respuesta del grupo G5*



2. Mínimo 3 lanzamientos.
los casos para este acontecimiento son:
$6 + 6 + n \quad , \quad n \geq 1$
$5 + 5 + n \quad , \quad n \geq 3$
$6 + 5 + n \quad , \quad n \geq 2$
$5 + 4 + n \quad , \quad n \geq 4$
$6 + 4 + n \quad , \quad n \geq 3$
Analizaremos a detalle este último caso más adelante.



2) continuación.
- $6 + 4 + n \, , \quad n \geq 3$
Para obtener exactamente 3 dados iguales tenemos $\binom{5}{3} * 6 \times 5 \times 5 = 1500$
Luego los casos totales para obtener exactamente 3 puntos son $1500 - 300 = 1200$.
Por lo tanto la probabilidad de obtener el resultado pedido es:
$$P = P_6 P_4 P_3 + P_6 P_4 P_4 + P_6 P_4 P_5 + P_6 P_4 P_6 \, ,$$
donde P_k – probabilidad de sacar puntaje k.
$$\Rightarrow P = \frac{6}{6^5} \, \frac{300}{6^5} \left(\frac{1200}{6^5} + \frac{300}{6^5} + \frac{150}{6^5} + \frac{6}{6^5} \right)$$
$$= \frac{6 \times 300 (1200 + 300 + 6)}{6^{15}}$$
$$= \frac{50 \times 46}{6^{12}}$$

Nota. La respuesta del grupo G5 tiene 2 partes. Fuente: Autoría propia.

En la primera parte, el grupo G5 identificó todos estos casos posibles para ganar en 3 lanzamientos expresándolos por medio de símbolos (elementos lingüísticos) que muestran la generalidad de los casos, evidenciando que es muy extenso calcular todas las probabilidades de los casos en la sesión, pero fue muy valioso que se hayan identificado. En la segunda parte, calcularon la probabilidad de las ternas $(6{,}4, n)$ donde $n \geq 3$, haciendo uso de procedimientos correctos como la fórmula de la combinación, para calcular una probabilidad total, mostrando comprenden las definiciones y propiedades de la probabilidad clásica.

Esta pregunta generó un análisis muy enriquecedor de la situación presentada, debido a que no se tomó en cuenta la generalidad de los casos posibles para llegar a una solución definitiva a la pregunta.

En cuanto a los ejercicios planteados para resolver fuera de clase en la guía 2, se realizó un análisis de las respuestas dadas al ejercicio 3, el cual se hizo relevante debido a su relación con una situación descrita en la guía 1. A continuación, se presenta el enunciado del ejercicio:

3. Una de las preguntas del juego cierra la caja fue: ¿Hay un número mínimo de lanzamientos para poder ganar? Si o no ¿Por qué? La respuesta a esta pregunta es que el número mínimo de lanzamientos para poder ganar es de cuatro, si contamos con tal suerte que ocurra que en tres lanzamientos se saque par de seis y en otro lanzamiento una combinación que sume nueve, para cerrar las tapas 1,2,3,6 (un lanzamiento), 4,8 (otro lanzamiento), 5,7 (otro lanzamiento) y 9 en otro lanzamiento. Calcule la probabilidad de que esto ocurra.

En la tabla 13 se presenta una clasificación de las respuestas a la pregunta luego de ser analizadas.

Tabla 13 *Clasificación de las respuestas de los estudiantes a la pregunta 3*

	Respuestas correctas con un proceso adecuado	**Respuestas con error en su interpretación**	**No responden la pregunta**
Estudiantes	E1, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E11, E12, E14, E18, E19, E20, E21, E22, E23, E24, E25, E26, E27, E29, E30.	E10.	E2, E9, E13, E15, E16, E17, E28.

Nota. En la tabla se muestra las diferentes categorías que se consideraron para analizar las respuestas de los estudiantes. Fuente: Elaboración propia.

Se puede observar que los estudiantes que presentan respuestas correctas y utilizan un proceso adecuado, reconocen las definiciones involucradas en el significado clásico de probabilidad y precisan justificaciones basadas en estas definiciones. En la figura 46 se muestra un ejemplo de ello.

Figura 46 *Respuesta del estudiante E3*

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

Para poder ganar son como mínimo 4 lanzamientos que sumen
P(A) 12 para tapar 1,2,3,6
P(B)12 para tapar (5,7)
P(C)12 para tapar(8,4)
P(D) 9 para tapar (9)
$6^2=36$ formas con dos dados
P(12)=1/36= 0,0277
P(9)=4/36= 0,1111
$P(A \cap B \cap C \cap D)$= 0.0277*0.0277*0.0277*0.1111= 0,00023613119563%
por lo tanto es muy poco probable que ocurra.

Nota. Fuente: Autoría propia.

La figura anterior muestra que el estudiante E3 comprende la situación y presenta su argumentación de manera clara y organizada. En su respuesta, el estudiante adjunta una imagen del espacio muestral, utiliza términos adecuados para describir las probabilidades (elementos lingüísticos), reconoce que existen 4 eventos independientes (definiciones y propiedades) en esta situación y aplica tanto la regla de Laplace (procedimientos) como la definición de probabilidad para eventos independientes y obtiene la probabilidad requerida. Además, concluye que la probabilidad de que ocurran estos eventos es muy baja.

En la figura 47 se muestra la respuesta del estudiante E10.

Figura 47 *Respuesta del estudiante E10*

En el juego cierra la caja el número mínimo de lanzamientos para poder ganar es de cuatro, si se cuenta con tal suerte que ocurra que en tres lanzamientos se saque par de seis y en otro lanzamiento una combinación que sume nueve. La probabilidad de que esto ocurra es la siguiente:

$$P = \frac{n^\circ\ casos\ favorables}{n^\circ\ casos\ posibles}$$

° Probabilidad de ocurrencia para cerrar las tapas 1,2,3,6 (un lanzamiento):

$$P_1 = \frac{4}{9} \approx 0.444$$

° Probabilidad de ocurrencia para cerrar las tapas 4,8 (un lanzamiento):

$$P_2 = \frac{2}{9} \approx 0.222$$

° Probabilidad de ocurrencia para cerrar las tapas 5,7 (un lanzamiento):

$$P_2 = \frac{2}{9} \approx 0.222$$

° Probabilidad de ocurrencia para cerrar la tapa 9 (un lanzamiento):

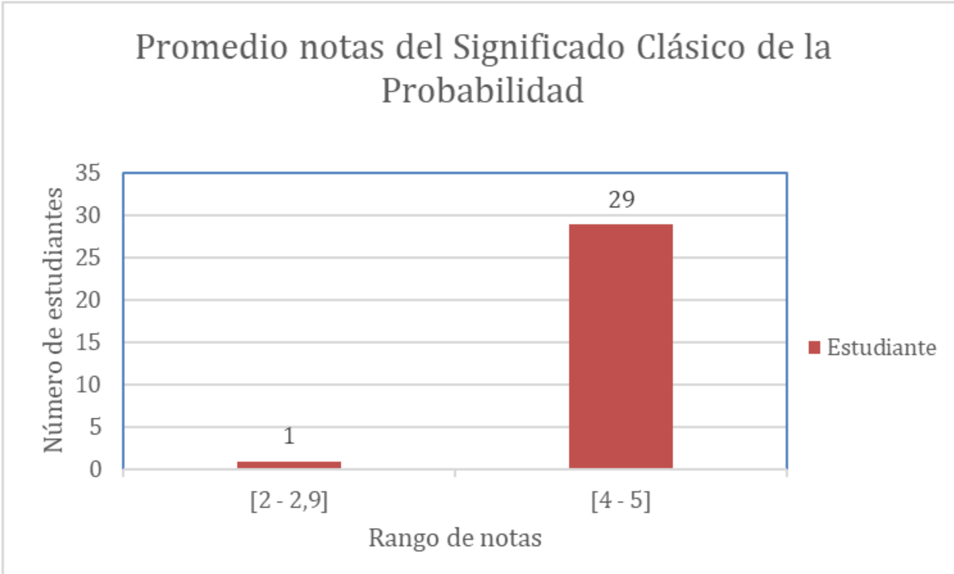
$$P_2 = \frac{1}{9} \approx 0.111$$

Nota. Fuente: Autoría propia.

En la figura previa se puede observar que el estudiante E10 muestra conocimiento de la fórmula de Laplace y la utilizó en su respuesta. Sin embargo, su error consistió en aplicar la fórmula a datos incorrectos, ya que calcula la probabilidad en función de las tapas que deben cerrarse y el total de tapas, sin tener en cuenta que las tapas deben cerrarse considerando los resultados obtenidos al lanzar dos dados (espacio muestral).

A continuación, en la figura 48 se muestra el promedio las de notas de los estudiantes, una vez se finalizó la implementación de las actividades de la guía #2.

Figura 48 *Promedio notas del Significado Clásico de la Probabilidad*



Nota. En la figura se muestra en el eje horizontal los rangos de los valores de las notas y en el eje vertical el número de estudiantes. Fuente: Elaboración propia.

En la figura anterior, se puede apreciar que solo un estudiante tiene un promedio de notas inferior a 3. Este resultado indica que la mayoría de los estudiantes se comprometieron de manera responsable a resolver todas las actividades evaluativas. Su dedicación y esfuerzo refleja una actitud positiva hacia el proceso de aprendizaje y mostró su disposición para alcanzar buenos resultados académicos.

En general, el desempeño de los estudiantes en el segundo significado fue satisfactorio. Durante las actividades evaluativas, se pudo observar que comprendieron cuándo utilizar la permutación o la combinación, expresaron de manera clara los conceptos de probabilidad clásica, como la regla de Laplace, y fueron capaces de identificar sucesos elementales y compuestos, así como de trabajar con ellos para fundamentar sus argumentaciones.

9.2.3. Significado Frecuencial de la Probabilidad

Para abordar el significado frecuencial de la probabilidad se realizó la actividad llamada "Experiencia con la simulación".

2.2.3.1. Experiencia con la simulación.

Esta actividad consistió en tres sesiones en las que se utilizaron 2 simuladores, se plantearon preguntas relacionadas con su uso y se presentaron los conceptos asociados al significado frecuencial de la probabilidad.

Se llevó a cabo esta actividad con el objetivo de recoger las opiniones, observaciones y comentarios que los estudiantes tienen al trabajar con simuladores que facilitan la realización de experimentos aleatorios que se repiten una gran cantidad de veces y así comparar la probabilidad frecuencial con la probabilidad clásica o teórica.

Inicialmente se entregó la guía #3 denominada: Simulación: Significado Frecuencial de Probabilidad, donde se encuentran las actividades y el contenido a trabajar.

Se mostró a los estudiantes los conceptos de la ley de los grandes números y la probabilidad frecuencial, junto con ejemplos, antes de utilizar los simuladores. Las presentaciones de los conceptos mencionados se encuentran en el anexo 2.

Luego se pidió a los estudiantes que formaran parejas y accedieran al enlace https://nces.ed.gov/nceskids/chances.asp, que se encuentra en la guía #3, para llevar a cabo la simulación del lanzamiento de dos dados.

Se explica cómo funciona el simulador de dos dados, donde se podrá elegir el número de lanzamientos a realizar, una vez efectuada la elección del número de lanzamientos, y seleccionando el botón "tirar el dado".

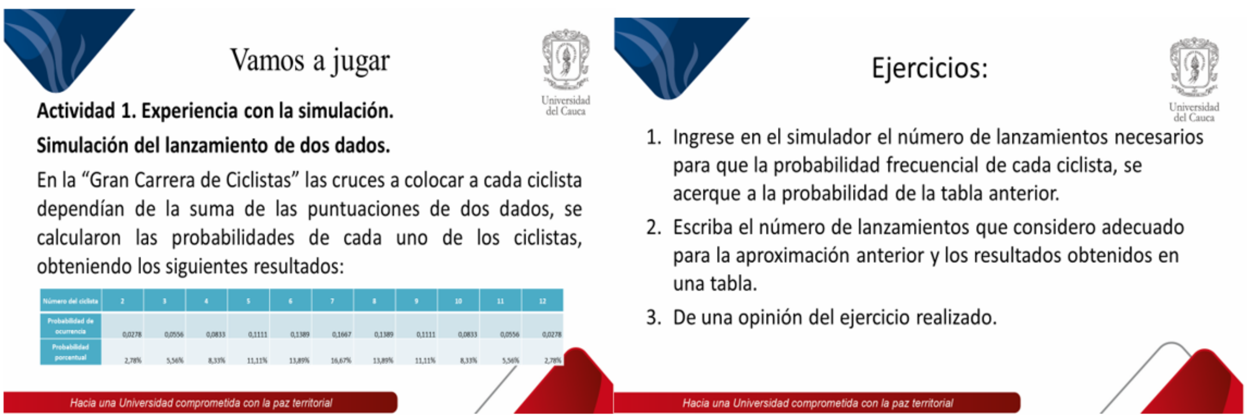
Figura 49 *Simulación del lanzamiento de dos dados*

Nota. En la figura se muestra la simulación con 7 lanzamientos. Fuente: https://nces.ed.gov/nceskids/chances.asp.

En la figura 49 se muestra que el simulador arroja un diagrama de barras donde en el eje horizontal aparece la suma de las puntuaciones de los dados, en el eje vertical está el número de veces que dichas sumas aparecieron, además en la parte inferior del diagrama estarán los sucesos elementales de los dos dados y cuantas veces ocurrieron en la simulación.

Después de utilizar el simulador, se proyecta una diapositiva que recuerda la actividad 1 (La Gran Carrera de Ciclistas) de la guía #2 donde se muestra las probabilidades de cada ciclista. Posteriormente, se presentan los ejercicios correspondientes para esta parte de la simulación, como se puede apreciar en la figura 50.

Figura 50 *Ejercicios de la simulación del lanzamiento de dos dados*

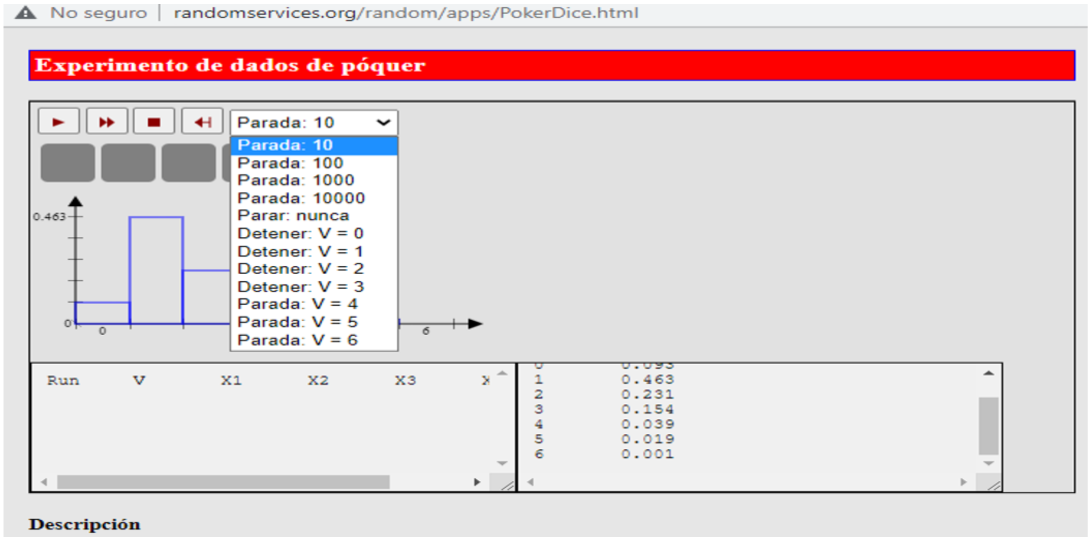


Número del ciclista	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilidad de ocurrencia	0,0278	0,0556	0,0833	0,1111	0,1389	0,1667	0,1389	0,1111	0,0833	0,0556	0,0278
Probabilidad porcentual	2,78%	5,56%	8,33%	11,11%	13,89%	16,67%	13,89%	11,11%	8,33%	5,56%	2,78%

Nota. Fuente: Elaboración propia.

Una vez terminado los ejercicios anteriores, se solicita los estudiantes ingresar al link http://www.randomservices.org/random/apps/PokerDice.html para realizar la simulación del juego dados de Póquer. En la figura 51 se muestra esta simulación donde se encuentran distintas opciones a elegir, como: parar cuando se hayan completado 10, 100, 1000, 10000 lanzamientos o incluso nunca parar. También parar cuando se llegue algún tipo de mano determinada, es pertinente recordar que cada mano tiene un valor que va desde 0 hasta 6.

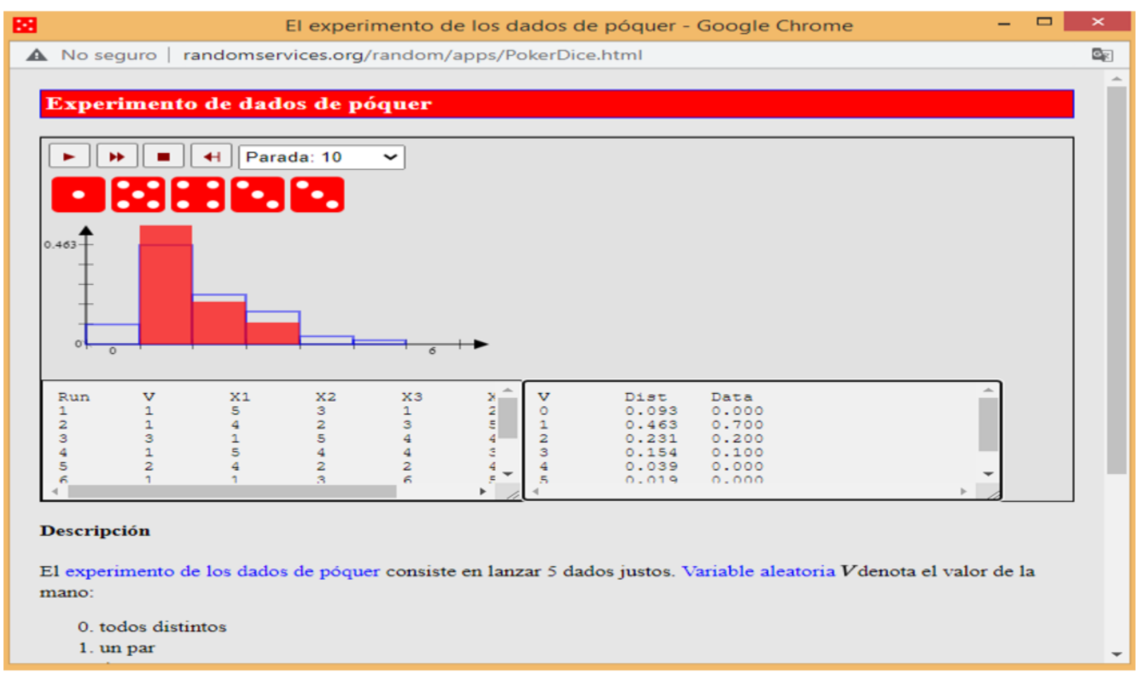
Figura 51 *Opciones para elegir en la simulación*



Nota. En la figura se presenta la parte inicial de la simulación. Fuente: http://www.randomservices.org/random/apps/PokerDice.htm.

En la figura 52, se puede observar el simulador después de ser ejecutado. Se muestra un diagrama de barras con el valor de las manos en el eje horizontal (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6) y la probabilidad de cada valor en el eje vertical.

Figura 52 *Simulador Dados de Póquer una vez ejecutado*

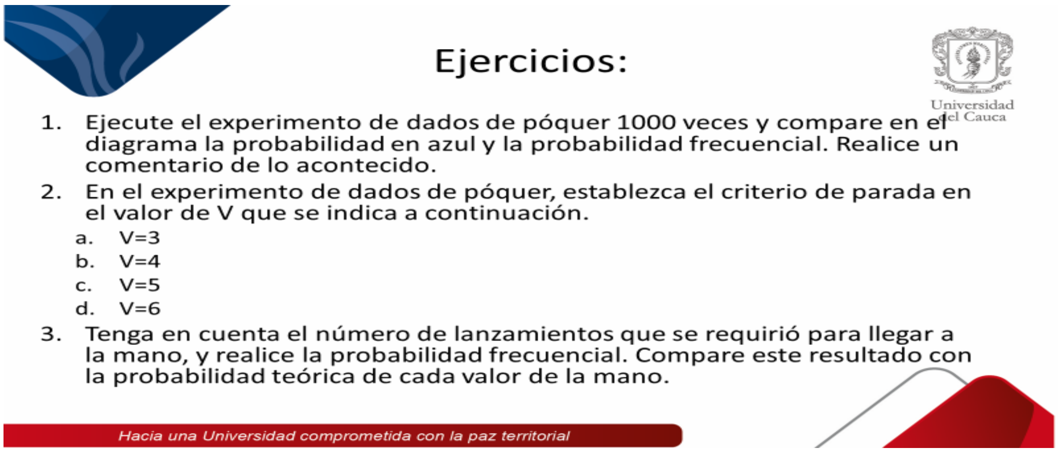


Nota. En la figura se muestra el simulador cuando se elige parar en 10 lanzamientos. Fuente: http://www.randomservices.org/random/apps/PokerDice.htm.

Además, en la simulación resulta ser que las barras rojas muestran la probabilidad frecuencial de cada una de las manos, mientras que la probabilidad teórica se resalta mediante una línea azul. Finalmente, en la parte inferior del diagrama de barras se encuentran dos tablas de datos donde se visualizan los resultados obtenidos y la descripción del juego.

Luego de experimentar con el simulador se presenta los ejercicios a realizar para esta simulación.

Figura 53 *Ejercicios de la simulación de Dados de Póquer*



Nota. Fuente: Elaboración propia.

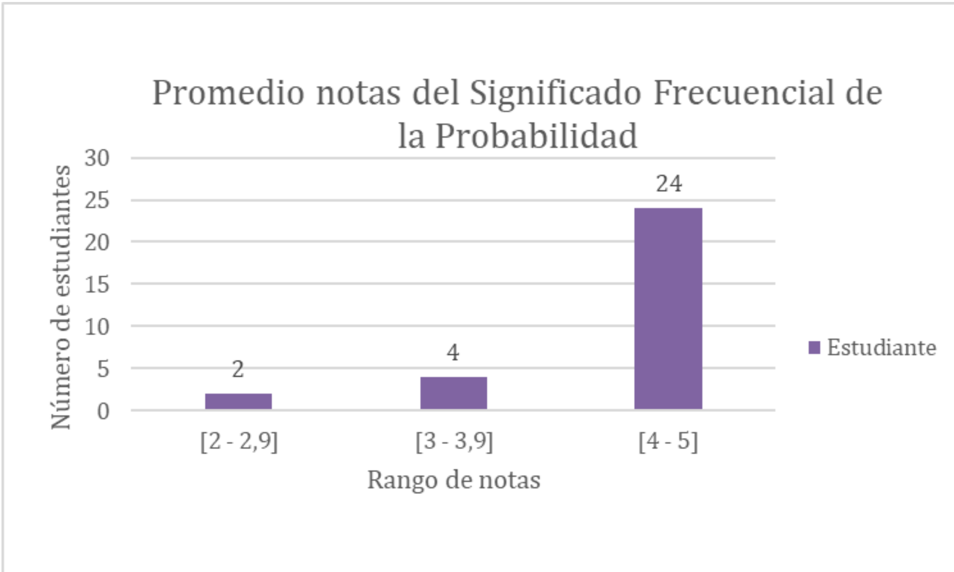
Los estudiantes utilizaron los dos simuladores de manera adecuada, resolvieron los ejercicios propuestos y plantearon preguntas sobre los conceptos abordados en los simuladores. Estas inquietudes permitieron que en la siguiente sesión se presentaran los conceptos de función de probabilidad, función de distribución y función de distribución para variables aleatorias, acompañados de ejemplos para que los estudiantes pudieran observar y aclarar sus dudas.

Es relevante destacar que algunos de los conceptos presentes en los simuladores no habían sido tratados previamente, y que su experimentación identificó la necesidad de socializarlos con los estudiantes, con el fin de comprender todo lo que se presentaron en estos simuladores.

En cuanto a los ejercicios planteados para cada uno de los simuladores y los ejercicios realizados fuera de clase, es importante destacar que el objetivo de este trabajo fue acercar a los estudiantes a los simuladores y brindarles la oportunidad de observar una forma alternativa de ejecutar experimentos aleatorios que, de forma manual, sería casi imposible llevar a cabo. Además, se buscó que los estudiantes consideren este recurso como una herramienta útil para ser implementada en su futuro desempeño docente.

A continuación, en la figura 54 se muestra el promedio las de notas de los estudiantes, una vez se finalizó la implementación de las actividades de la guía #3.

Figura 54 *Promedio notas del Significado Frecuencial de la Probabilidad*



Nota. En la figura se muestra en el eje horizontal los rangos de los valores de las notas y en el eje vertical el número de estudiantes. Fuente: Elaboración propia.

En la figura anterior, se puede observar que dos estudiantes tienen un promedio de notas inferior a 3, mientras que cuatro estudiantes tienen un promedio superior a 3 pero inferior a 4. Este resultado se debe a la ausencia de varios estudiantes en las sesiones de clase donde se llevó a cabo las actividades evaluativas, lo que impactó negativamente en sus calificaciones. A pesar de esto, la mayoría de los estudiantes demuestran compromiso y responsabilidad al resolver todas las actividades evaluativas.

En general, la mayoría de los estudiantes realizaron correctamente todas las actividades evaluativas y expresaron que trabajar con los simuladores fue práctico e interesante. Pudieron verificar el valor teórico de la probabilidad al realizar un número significativo de lanzamientos y consideraron que el simulador fue útil para tomar decisiones, brindando una perspectiva diferente al cálculo de probabilidades tradicional. Además, destacaron que el diagrama de barras en el simulador proporcionaba un resumen visual de los resultados de los lanzamientos, lo que facilitaba la comprensión de los mismos.

9.2.4. Significado Subjetivo de la Probabilidad

Para abordar el significado subjetivo de la probabilidad se realizaron 2 actividades.

9.2.4.1. Juego Diseñado por los Estudiantes.

La primera actividad se llevó a cabo con el propósito de observar la motivación de los estudiantes y escuchar sus opiniones y observaciones al participar en un juego por equipos que sigue ciertas reglas. En este juego se utilizaron otros instrumentos de azar, como urnas con pelotas, una moneda y dados, y se fomentó la creación de un nuevo juego donde se involucra el concepto de probabilidad subjetiva.

Se explicó la actividad a realizar de la siguiente manera: Primero se forman cuatro equipos con los estudiantes: Equipo A, Equipo B, Equipo C y Equipo D. A continuación, se mencionan las condiciones del juego: Los equipos A y B se enfrentarán y habrá un equipo ganador. Luego, los equipos C y D se enfrentarán y el ganador se enfrentará al equipo ganador de la primera ronda, obteniendo así un solo equipo ganador de los cuatro formados.

En el juego se utilizaron dos urnas, cada una asignada a un equipo, cabe resaltar que cada urna contiene 12 pelotas de diferentes colores (3 azules, 3 moradas, 2 naranjas, 2 verdes, 1 verde fluorescente, 1 fucsia). Además, se utilizó un dado y una moneda.

Para ganar, uno de los equipos debía obtener todas las pelotas del otro equipo. El juego se desarrolla por turnos: un jugador de cada equipo decide entre cara o cruz de una moneda, lanza la moneda, y el ganador lanza un dado. La puntuación obtenida en el dado indica el número de pelotas que el equipo ganador deberá extraer de la urna del equipo contrario.

Existen dos reglas adicionales: si se saca la pelota verde fluorescente, se permite sacar una pelota extra, y si se saca la pelota fucsia, se pierde una pelota de las ya obtenidas.

Luego de jugar con las instrucciones dadas, se solicitó a cada grupo de estudiantes los siguientes ejercicios:

1. Con los jugadores de cada equipo analizar los materiales, condiciones y reglas del juego anterior, para luego proponer un juego que contenga los mismos o más materiales, diferentes condiciones y reglas para ganar.
2. De las cuatro propuestas de juego que se obtendrán de los equipos, se llegara a un consenso para construir un nuevo juego, para luego jugarlo.

Después de haber llegado a un acuerdo sobre las 4 propuestas de juego presentadas por los grupos, se propuso un nuevo juego para la próxima sesión que incluyó preguntas que fueron respondidas después de jugarlo.

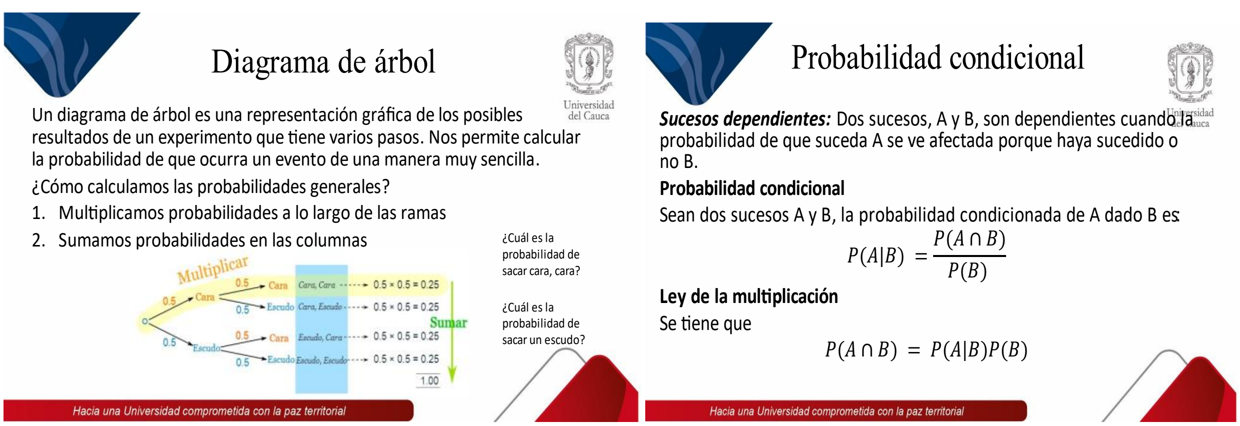
Algunas consideraciones: Los estudiantes fueron enfáticos al comentar que esperar por su turno, causaba que ellos perdieran el interés de lo que sucedía en el juego. Esta situación se daba porque eran 4 equipos y solo había 2 urnas entonces 2 equipos debían esperar para jugar, para poder solucionar esta situación se estableció que debían ser 4 urnas en el nuevo juego y los 4 equipos jugarían a la vez, hasta que uno de los 4 equipos quedara con las pelotas de los 3 equipos restantes. Esta observación dada por los estudiantes fue tomada en cuenta para la realización del juego de la siguiente sesión.

También se comentó que utilizar varios instrumentos aleatorios se volvía tedioso por tal motivo se decide retirar la moneda del juego y dejar solo los dos dados y las 4 urnas. La apreciación fue pertinente.

Las nuevas reglas que se dieron y al acuerdo al que se llegó con los estudiantes es muy fructífero debido a que es un juego con las reglas y condiciones que ellos desearon.

Antes de comenzar a jugar el juego diseñado, se entregó la guía #4 titulada "Juegos con urnas, dados, monedas, Significado Subjetivo de Probabilidad". Posteriormente, se presentó en diapositivas los conceptos y ejemplos relacionados con la probabilidad subjetiva.

Figura 55 *Presentación de los contenidos del Significado Subjetivo de la Probabilidad*

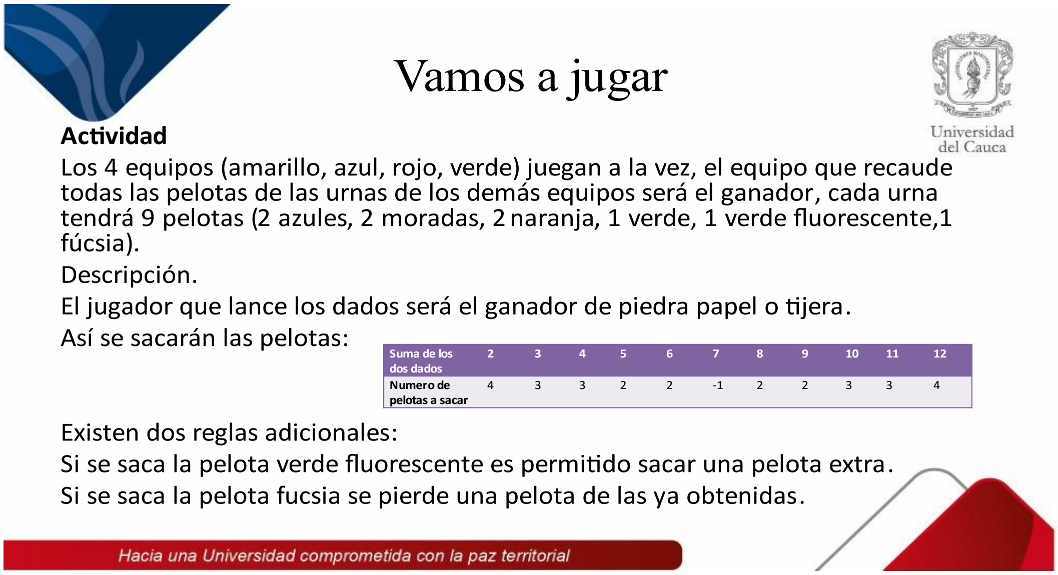


Nota. Las demás presentaciones se encuentran en el anexo 2. Fuente: Elaboración propia.

En la figura 55 se muestra algunos de los conceptos y de los ejemplos abordados donde se aclararon dudas de los estudiantes.

Luego, se presentó el juego y las reglas que se habían establecido en la sesión anterior, tal como se ilustra en la figura 56.

Figura 56 *Juego diseñado por los estudiantes*



Nota. Fuente: Elaboración propia.

Los estudiantes disfrutaron del juego y experimentaron emociones intensas. Hubo controversias sobre las reglas, ya que los estudiantes las interpretaron de diferentes maneras. A pesar de que los equipos iban siendo eliminados en ciertos momentos del juego, todos los estudiantes estuvieron atentos. Incluso los miembros del equipo eliminado seguían interesados en el juego y a la expectativa de quién sería el siguiente equipo eliminado. Definitivamente, el juego provocó gran impresión en ellos.

Figura 57 *Estudiantes jugando*

Nota. En la figura se puede observar el diseño final y algunas etapas del juego. Fuente: Autoría propia.

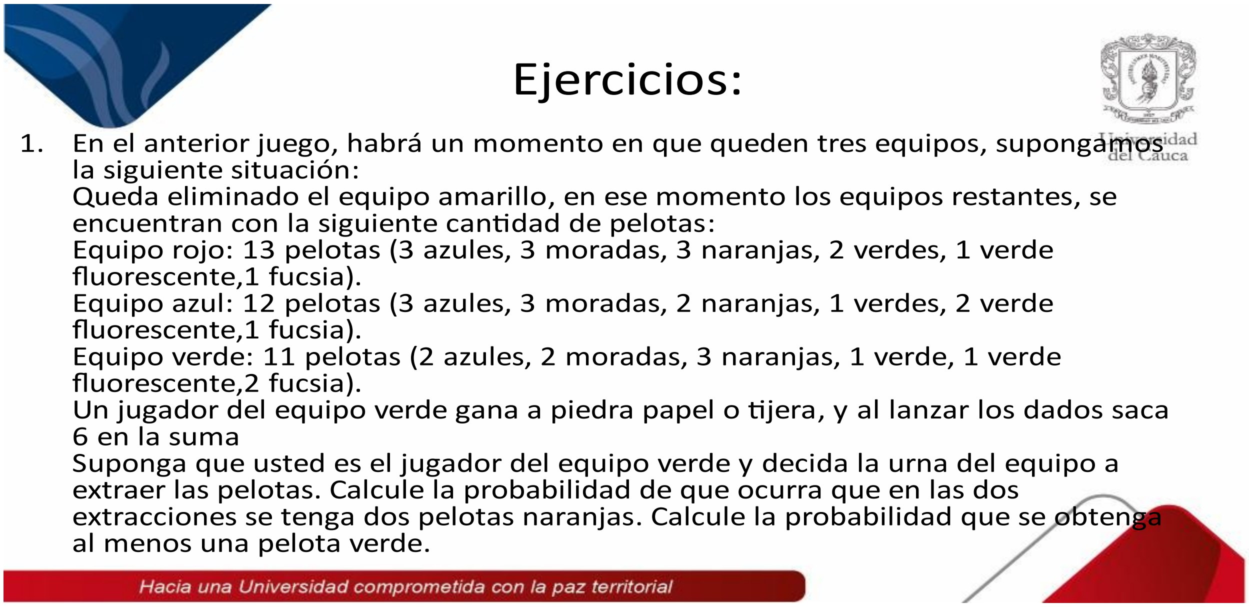
Los equipos rojo y azul optaron por formar una alianza con el objetivo de eliminar a los otros dos equipos (verde y amarillo) y asegurar un lugar en la final. Su estrategia consistía en que si cualquiera de los dos equipos ganaba el juego de piedra, papel o tijeras para decidir quién lanzaría el dado y elegiría la urna del equipo contrario, elegirían a los otros dos equipos como objetivo. Esta táctica les resultó efectiva y lograron avanzar a la final.

Algunas consideraciones: Contar con las opiniones y propuestas de los estudiantes frente al diseño del juego fue muy fructífero debido a que se generaron reglas muy divertidas que como practicante no había pensado considerar al momento de proponer un juego. A pesar de que todos conocían las reglas al momento de implementarlas se dieron interpretaciones diferentes, se debe llegar a un consenso sobre la interpretación de las reglas antes de iniciar el juego para no tener malos entendidos, debido a que los estudiantes estaban tan emocionados en ocasiones la toma de decisión al interpretar una regla generaba molestia, mi función en el juego fue la de juez, tuve que tomar decisiones que a algunos de los estudiantes no les gusto. Por esto, se sugiere que antes de iniciar el juego, se establezcan de manera aclara todas las reglas.

Los estudiantes estaban muy motivados en ganar porque se propuso que se ofrecería un premio para los ganadores. Una recompensa en el juego siempre será de gran ayuda para motivar a los estudiantes.

El juego que se diseñó entre los participantes y el practicante no tiene nombre, y se considera interesante asignar uno. Se sugiere acordar un nombre con los estudiantes durante la actividad. También, se plantearon dos ejercicios relacionados al juego diseñado por los estudiantes, con el fin de evaluar el conocimiento de los estudiantes sobre los conceptos del significado subjetivo de la probabilidad. Finalmente, se solicitó a los estudiantes que formen parejas para poder responder a los dos ejercicios del juego. Para el análisis de las respuestas, se codifican los grupos de estudiantes de G1 a G14. En la figura 58 se muestra el primer ejercicio del juego.

Figura 58 *Ejercicio 1*



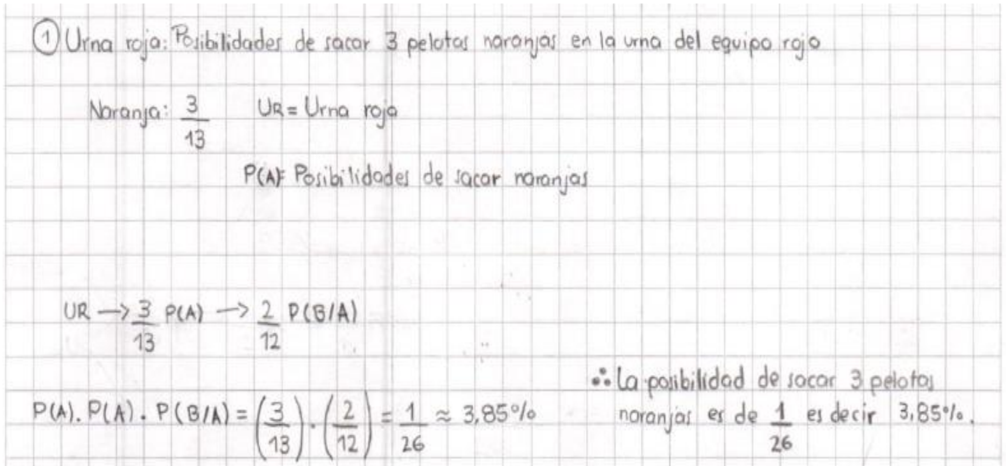
Nota. Fuente: Elaboración propia.

En este ejercicio se presentó una situación en la que se deben sacar dos pelotas y se debe tomar una decisión para elegir si sacar del equipo rojo o azul. Elegir el equipo rojo o azul tendrá consecuencias para calcular la probabilidad de obtener dos pelotas naranjas en las dos extracciones, y calcular la probabilidad de obtener al menos una pelota verde en las dos extracciones, ya que las pelotas en las urnas de estos dos equipos son diferentes en cantidad y colores.

Los grupos G1, G2, G3, G4, G5, G6, G8, G13 y G14 eligieron el equipo rojo y los grupos G7, G9, G10, G11 y G12, el equipo azul en sus respuestas.

Todos los grupos que eligieron el equipo rojo proporcionaron una respuesta correcta al calcular la probabilidad de obtener dos pelotas naranjas en las dos extracciones, y algunos de ellos usaron un diagrama de árbol para argumentar su respuesta.

Figura 59 *Respuesta del grupo G2*

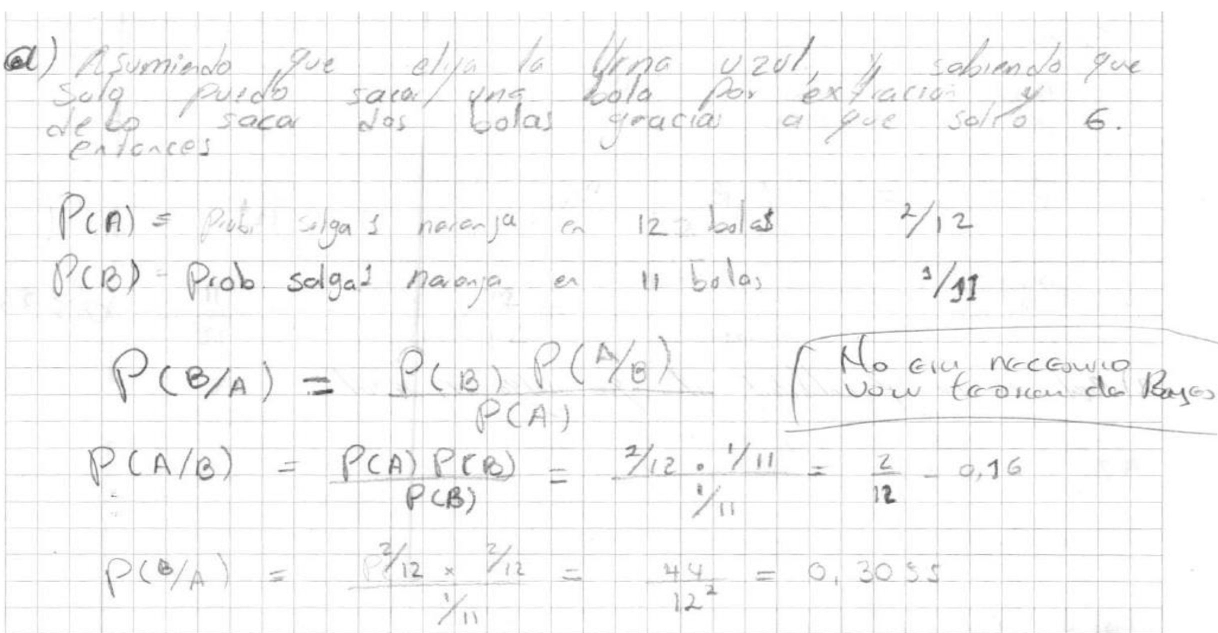


Nota. En la figura se muestra la argumentación del grupo G2. Fuente: Autoría propia.

La figura 59 muestra el proceso que realizaron los alumnos del grupo G2. Es evidente que entendieron la situación presentada, ya que construyen un diagrama de árbol (procedimientos) conciso que les permitió visualizar las probabilidades de los eventos solicitados. Usaron notación apropiada (elementos lingüísticos) y propiedades de probabilidad condicional para llegar a la respuesta y finalmente expresaron la probabilidad como un porcentaje.

De los grupos que escogieron la urna azul, el grupo G7 no identificó en qué situación se debe usar el Teorema de Bayes.

Figura 60 *Respuesta del grupo G7*



Nota. En la figura se muestra la argumentación del grupo G7. Fuente: Autoría propia.

En la figura 60 se evidencia que el grupo G7 identificó los eventos A y B de manera correcta, pero para calcular la probabilidad de que estos dos eventos sucedan, utilizaron el Teorema de Bayes, regla que se usa para calcular la probabilidad de un evento, dado que ya un evento ocurrió. Esto conllevó a que su respuesta no fue correcta.

Con respecto al segundo punto del ejercicio 1 en el cual se pidió calcular la probabilidad de obtener al menos una pelota verde en las dos extracciones.

De los grupos que escogieron extraer las pelotas de la urna roja, los grupos G1, G2 y G4, no consideraron las 3 situaciones que se presentan a continuación:

Situación 1: En las dos extracciones sale la pelota verde

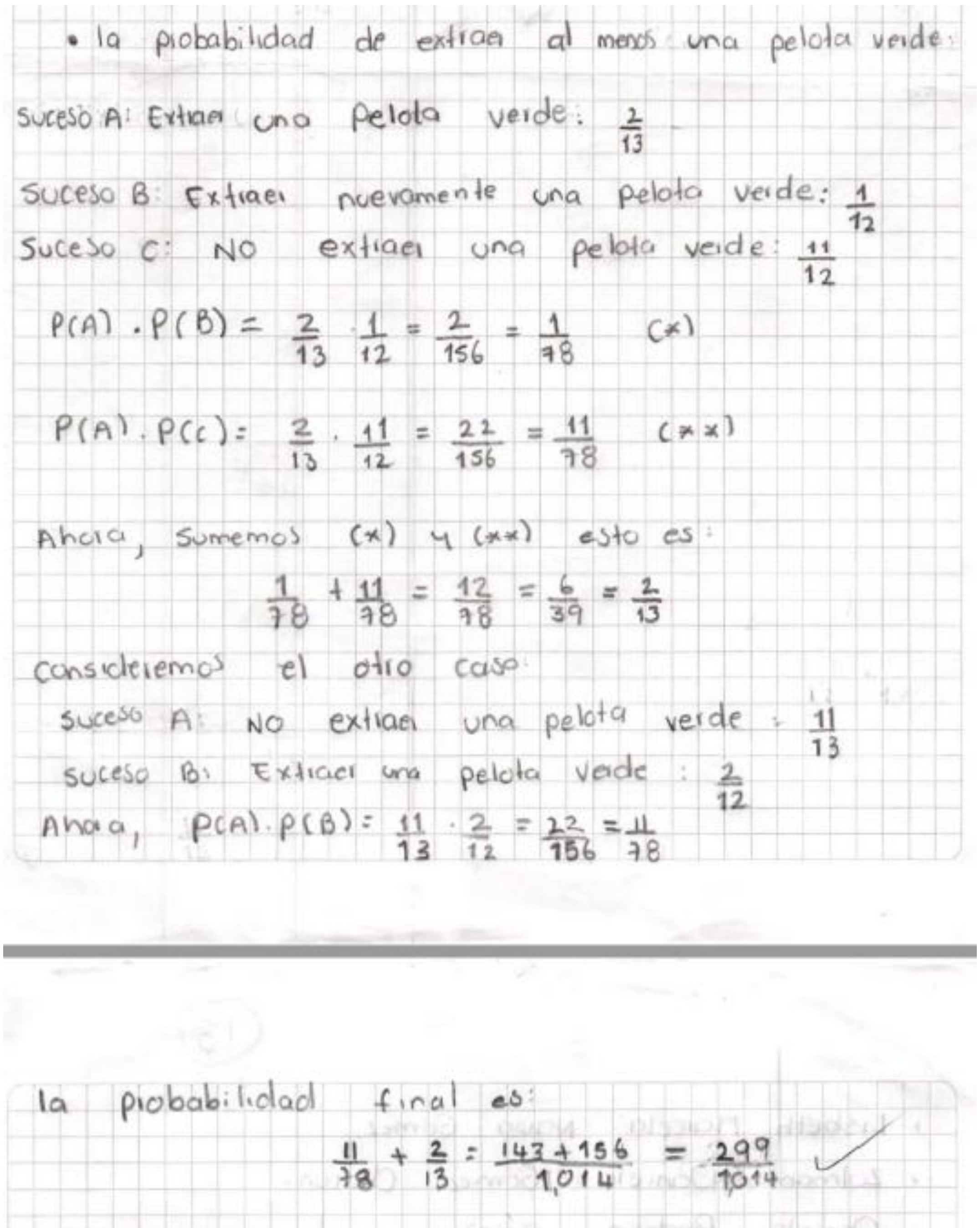
Situación 2: En la primera extracción sale pelota verde y en la segunda extracción no sale una pelota verde

Situación 3: En la primera extracción no sale la pelota verde y en la segunda extracción sale la pelota verde

Los grupos G1 y G2 no consideraron las 3 situaciones, el grupo G4 no consideró la situación 2. Esto llevó a que sus respuestas fueron incorrectas.

Los otros grupos realizaron el ejercicio de manera adecuada, considerando las 3 situaciones anteriormente descritas. En la figura 61 se muestra la solución dada por el grupo G13.

Figura 61 *Respuesta del grupo G13*



• la probabilidad de extraer al menos una pelota verde:

Suceso A: Extraer una pelota verde: $\frac{2}{13}$

Suceso B: Extraer nuevamente una pelota verde: $\frac{1}{12}$

Suceso C: NO extraer una pelota verde: $\frac{11}{12}$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{13} \cdot \frac{1}{12} = \frac{2}{156} = \frac{1}{78}$ $(*)$

$P(A) \cdot P(C) = \frac{2}{13} \cdot \frac{11}{12} = \frac{22}{156} = \frac{11}{78}$ $(**)$

Ahora, sumemos $(*)$ y $(**)$ esto es:

$$\frac{1}{78} + \frac{11}{78} = \frac{12}{78} = \frac{6}{39} = \frac{2}{13}$$

Consideremos el otro caso:

Suceso A: NO extraer una pelota verde: $\frac{11}{13}$

Suceso B: Extraer una pelota verde: $\frac{2}{12}$

Ahora, $P(A) \cdot P(B) = \frac{11}{13} \cdot \frac{2}{12} = \frac{22}{156} = \frac{11}{78}$

la probabilidad final es:

$$\frac{11}{78} + \frac{2}{13} = \frac{143 + 156}{1{,}014} = \frac{299}{1014}$$

Nota. En la figura se muestra la argumentación del grupo G13. Fuente: Autoría propia.

En la anterior figura muestra que el grupo G13 identificó y organizó los eventos involucrados en el ejercicio de manera adecuada, hicieron uso de notaciones (elementos lingüísticos) para las probabilidades de cada uno de los eventos, calcularon el producto de las probabilidades (procedimientos) y al final expresaron la probabilidad total del evento que se solicitó. Se evidencia que los estudiantes conocen y expresan de manera clara las definiciones y propiedades que se presentaron sobre la probabilidad subjetiva.

Para el ejercicio donde se escogió la urna azul, hay 2 situaciones que los favorecían y se debían sumar sus probabilidades.

Situación 1: Se extrae la única pelota verde en la primera extracción, en la segunda extracción puede salir cualquier pelota

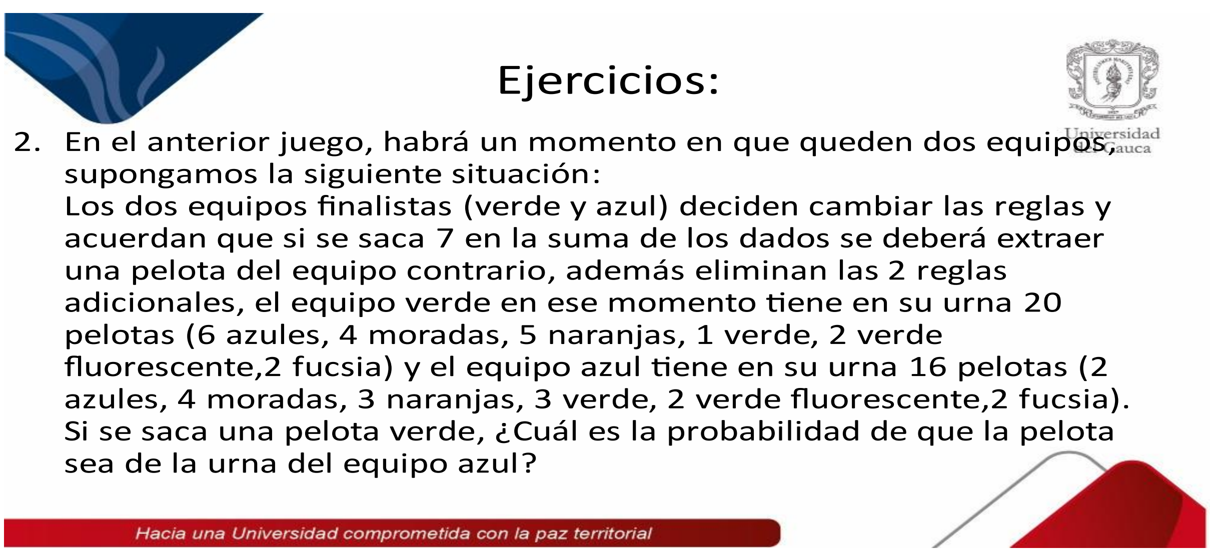
Situación 2: En la primera extracción no sale la pelota verde y en la segunda extracción sale la pelota verde

Todos grupos cometieron un error al resolver el ejercicio, 4 de los grupos solo consideraron la situación 1 pero de una manera errada debido que hacen un cálculo de probabilidad simple donde obtuvieron $P(V) = 1/12$, haciendo referencia a que hay una pelota de las doce en la urna, pero no consideraron la segunda parte de la situación donde deben multiplicar esta probabilidad con la probabilidad de sacar cualquier pelota en la segunda extracción, ignorando el hecho de que son dos extracciones las que se deben hacer, así las cosas, solo calcula la probabilidad de una extracción donde se obtiene la pelota verde. Llegando a una solución errada.

Se evidencia que, en el ejercicio las palabras “al menos una” generó un conflicto en la compresión de lo que realmente se solicitó.

En la figura 62 se muestra el segundo ejercicio del juego.

Figura 62 *Ejercicio 2*

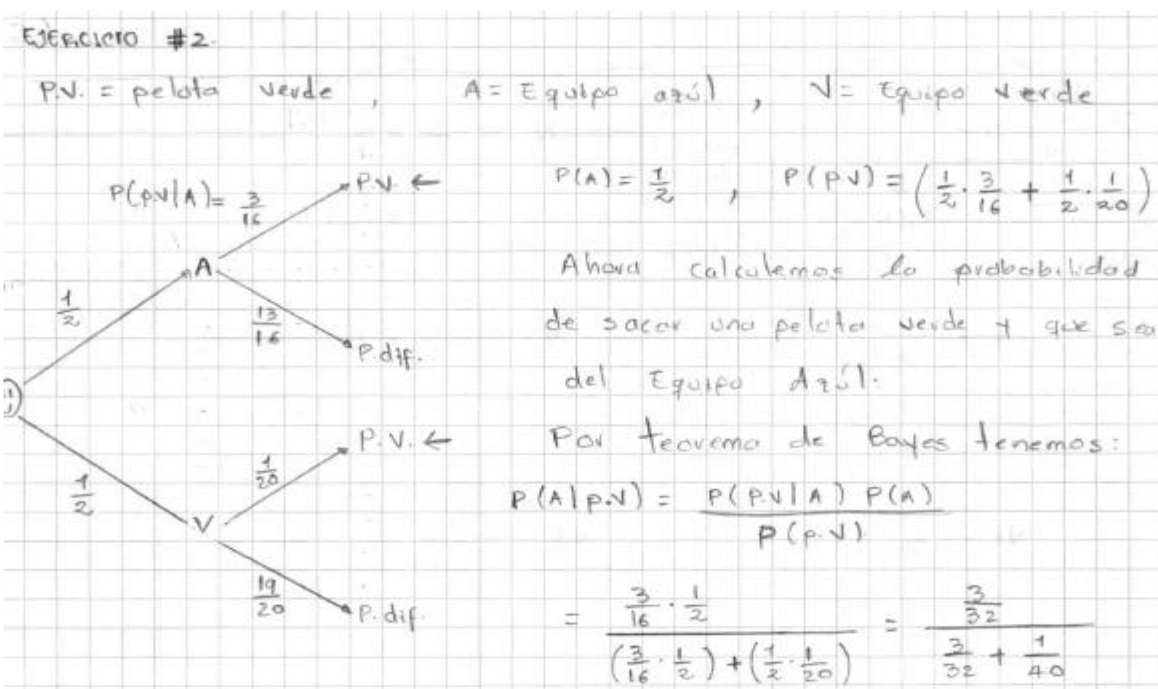


Nota. Fuente: Elaboración propia.

En este ejercicio se planteó lo siguiente: Tenemos dos equipos, donde el equipo verde tiene 20 pelotas y el azul 16 pelotas. Si ha ocurrido el hecho de que salió una pelota verde entonces, cual es la probabilidad de que esa pelota este en la urna del equipo azul. Cómo tenía pensado resolver este ejercicio era por medio del Teorema de Bayes, donde se identifique los sucesos y se aplique el teorema por el hecho de que se considera que ya un evento ha sucedido, salió una pelota verde. Pero los grupos hicieron el análisis al ejercicio de dos maneras.

El primer análisis lo presentaron los grupos G2, G3, G6, G10, G11, G12 y G14: Abordaron la situación planteada y reconocieron que era necesario aplicar el Teorema de Bayes para resolverla. Sin embargo, los grupos G2, G3 y G12 cometieron errores al aplicar el teorema y obtuvieron respuestas incorrectas. En la figura 63 se muestra una argumentación que se realizó.

Figura 63 *Respuesta del grupo G6*



Nota. En la figura se muestra la argumentación del grupo G6. Fuente: Autoría propia.

El grupo G6 mostró una argumentación en la que se utilizaron procedimientos adecuados, como la creación de un diagrama de árbol que ayudó a comprender la situación planteada.

Además, identificaron los eventos de manera adecuada, lo que es necesario para aplicar el Teorema de Bayes. Finalmente, dieron su respuesta de manera porcentual.

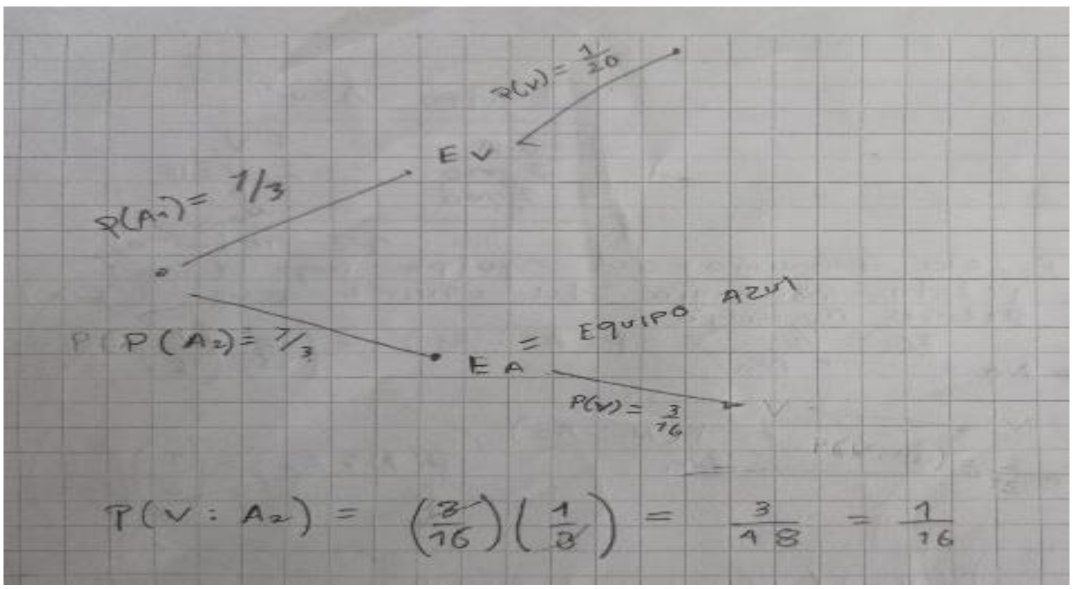
El segundo análisis lo presentaron los grupos G1, G4, G5, G7, G8, G9 y G13: Establecieron dos sucesos:

Suceso A: La pelota pertenece al equipo azul

Suceso B: Extraer una pelota verde

Los grupos G1, G7, G8 y G9, calculan la probabilidad de sacar una pelota de la urna azul y que esa pelota sea verde lo cual sería: $P(A)P(B \mid A) = 1/3 * 3/16 = 1/16$

Figura 64 *Respuesta del grupo G1*



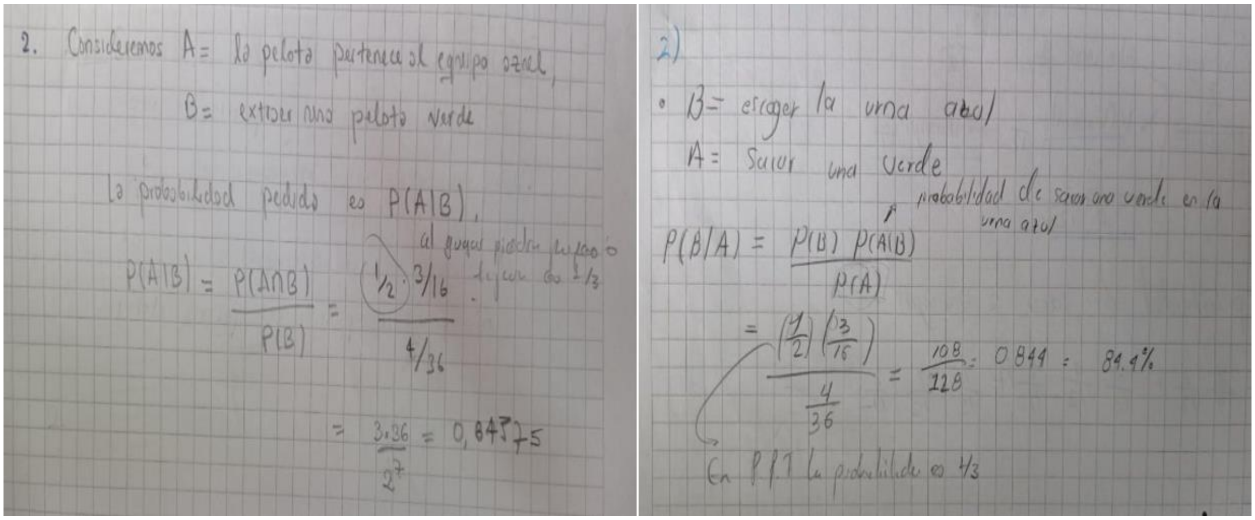
Nota. En la figura se muestra la argumentación del grupo G1. Fuente: Autoría propia.

En la figura 64, se evidencia que el grupo G1 utilizó un diagrama de árbol, pero al considerar los sucesos A y B anteriormente mencionados, ignoraron el hecho de que ya el evento B sucedió y que se debía considerar la probabilidad de extraer una pelota verde en la urna del equipo verde.

Los grupos G4, G5 y G13, quisieron calcular la probabilidad de sacar una pelota de la urna azul, cuando esta es verde, lo expresan así: $P(A \mid B) = P(A \cap B)/(P(B))$

Los tres grupos asumen que la probabilidad de A es $P(A) = \frac{1}{2}$, por el hecho que solo quedaban dos equipos. La probabilidad de B cuando A ocurre es $P(B|A) = \frac{3}{16}$. Entonces expresaron la solución como se muestra en la figura 65.

Figura 65 *Respuesta de los grupos G4 y G5*



Nota. En la figura se muestra la argumentación del grupo G4 y G5. Fuente: Autoría propia.

Cabe notar que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{16}\right)}{\frac{4}{36}}$$

Implícitamente expresaron:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Lo cual es el teorema de Bayes.

El problema se dio en considerar $P(B) = \frac{4}{36}$, donde asumieron que la probabilidad del evento B será el cociente de las 4 pelotas verdes que hay sobre el total de pelotas de las dos urnas que son 36, ignorando el hecho de que para que el evento B ocurra se debe considerar la probabilidad que tiene cada urna de ser elegida.

Después de analizar el ejercicio, se identificó que existe cierta falta de claridad en su planteamiento, lo que ha generado diferentes interpretaciones entre los estudiantes. A pesar de esto, se ha notado que los estudiantes tienen un buen entendimiento de las definiciones y propiedades de los conceptos relacionados, y utilizaron procedimientos como el diagrama de árbol y una notación lingüística adecuada para desarrollar sus argumentos. Es posible que se deba reformular el ejercicio para abordar más específicamente el Teorema de Bayes. Una posible reformulación podría ser:

En el anterior juego, habrá un momento en que queden dos equipos, supongamos la siguiente situación:

Hay dos equipos finalistas (verde y azul), el equipo verde en ese momento tiene en su urna 20 pelotas (6 azules, 4 moradas, 5 naranjas, 1 verde, 2 verde fluorescente, 2 fucsia) y el equipo azul tiene en su urna 16 pelotas (2 azules, 4 moradas, 3 naranjas, 3 verde, 2 verde fluorescente, 2 fucsia).

El juez del juego decide marcar las pelotas de los dos equipos para identificar de qué urna es, vierte todas las pelotas en una sola urna y saca una pelota verde.

¿Cuál es la probabilidad de que la pelota sea de la urna del equipo azul?

Por otra parte, se realizó un análisis de las respuestas de los estudiantes para el ejercicio extra clase, el cual se basó en el Problema de Monty Hall. Este problema plantea una situación donde el concursante debe elegir entre tres puertas, detrás de una de ellas se encuentra un premio, mientras que detrás de las otras dos se encuentran cabras. Después de que el concursante haya elegido una puerta, el presentador, quien conoce lo que hay detrás de cada puerta, abre otra puerta que no tiene el premio detrás y le da la oportunidad al concursante de cambiar su elección o mantenerla. Se solicita a los estudiantes dar sus argumentaciones de manera gráfica, intuitiva y formal y se dan unas sugerencias para abordar el problema.

Todos los estudiantes para sus respuestas hicieron una representación gráfica para abordar el problema, también dan su opinión sobre su elección, donde por unanimidad decidieron cambiar de puerta, al justificar su respuesta de manera formal los estudiantes siguieron la siguiente sugerencia:

Para la explicación matemática tenga en cuenta los siguientes sucesos:

Suceso A: El jugador selecciona la puerta que contiene el coche en su selección inicial.

Suceso B: El jugador selecciona una puerta que contiene una cabra en su selección inicial.

Suceso C: El jugador gana el coche.

El interés es calcular $P(C)$ para cada tipo de jugador (el jugador que nunca cambia de puerta, el jugador que siempre cambia de puerta).

Para calcular $P(C)$, basta con notar que $C = (C \cap A) \, U \, (C \cap B)$ ya que $A \cap B = \emptyset \; y \; A \, U \, B = E \; (Espacio \; muestral)$.

Además, al ser este problema tan conocido, existen múltiples soluciones en internet, de donde los estudiantes pudieron verse apoyados. Por consecuencia en sus respuestas los estudiantes realizaron su argumentación formal de una manera adecuada.

Otra de las sugerencias dadas fue:

Si está interesado en ver cómo funciona el juego, ejecute el juego de Monty Hall mediante el simulador que se encuentra en el siguiente link, realice 20 juegos donde seleccione alguna de las puertas, pero no cambie la puerta, luego realice 20 juegos donde siempre cambie la puerta que selecciono inicialmente, compare cuál de las estrategias le resulto mejor. http://www.randomservices.org/random/apps/MontyHall2.html

En este caso los estudiantes E1, E6, E20 y E24 siguieron esta sugerencia, donde expresaron los resultados obtenidos usando gráficos y tablas de datos. Es interesante observar a las conclusiones que llegan los estudiantes luego de realizar el experimento mediante el simulador.

Figura 66 *Respuesta del estudiante E24*

12	Puerta 3	Gana	Puerta 3 a puerta 1	Gana
13	Puerta 3	Pierde	Puerta 2 a puerta 3	Pierde
14	Puerta 3	Pierde	Puerta 3 a puerta 2	Gana
15	Puerta 1	Gana	Puerta 1 a puerta 3	Gana
16	Puerta 1	Pierde	Puerta 2 a puerta 3	Gana
17	Puerta 2	Gana	Puerta 3 a puerta 1	Gana
18	Puerta 2	Gana	Puerta 1 a puerta 3	Gana
19	Puerta 3	Gana	Puerta 2 a puerta 1	Pierde
20	Puerta 2	pierde	Puerta 3 a puerta 1	Pierde

En la simulación se obtuvo lo siguiente:
Cuando NO se cambió de puerta Ganó en 9 juegos de 20
Cuando se cambió de puerta se Ganó en 14 juegos de 20
Es decir, cuando no se cambió de puerta la probabilidad de ganar fue de $\frac{9}{20} = 0{,}45 = 45\%$
Y cuando se cambió de puerta la probabilidad de ganar fue de $\frac{14}{20} = 0{,}7 = 70\%$

Por lo tanto, la mejor opción es cambiar de Puerta en el juego de Monty Hall ya que existe una mayor probabilidad de ganar, por lo que la respuesta seria la **opción b)**

El razonamiento intuitivo que nos lleva a la conclusión errónea es que como hay dos puertas, una con el coche y otra con la cabra, y no sabemos en cuál de las dos está el coche, pensamos que cada una tiene 50% o 1/2 de probabilidad. **Pero este**

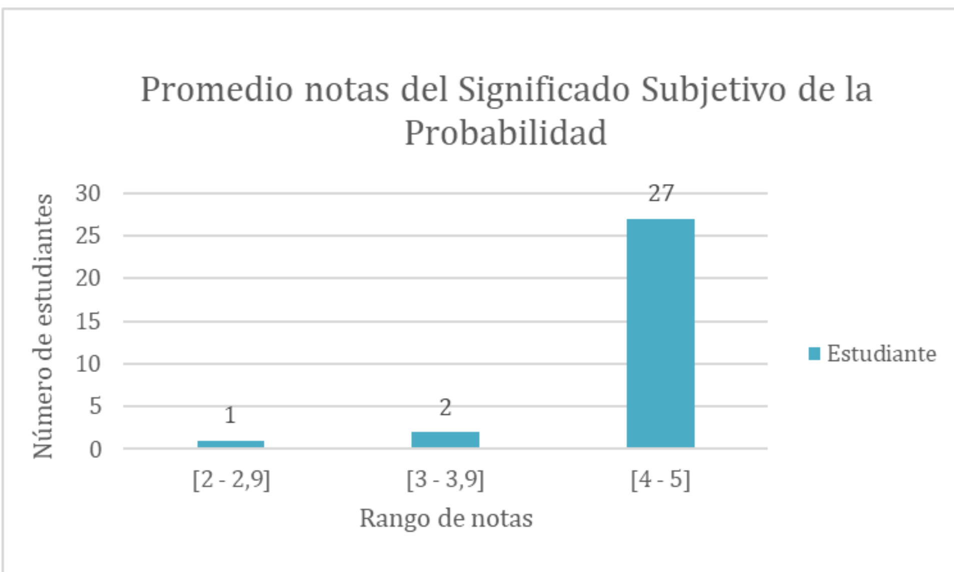
Nota. En la figura se muestra una parte de la respuesta proporcionada por el estudiante E24. Fuente: Autoría propia.

En la figura 66 se puede observar que el estudiante E24 tomó una decisión basada en los resultados de las simulaciones realizadas, haciendo uso del concepto de probabilidad frecuencial, añadiendo una reflexión sobre lo que la intuición puede llevar a cometer errores.

En conclusión, el análisis de las respuestas de los estudiantes al Problema de Monty Hall permitió observar la comprensión y aplicación de los conceptos de probabilidad condicional, que forman parte del significado subjetivo de la probabilidad. Aunque el problema es conocido, los estudiantes pueden aplicar estos conceptos para tomar decisiones informadas en situaciones donde no hay certeza sobre lo que pueda ocurrir. Además, algunos estudiantes hicieron conexiones entre los conceptos abordados previamente y el problema presentado, lo que demuestra una comprensión sólida de los mismos. En resumen, el ejercicio del Problema de Monty Hall resultó ser una herramienta útil para que los estudiantes aplicaran sus conocimientos en un contexto práctico y relevante.

A continuación, en la figura 67 se muestra el promedio las de notas de los estudiantes, una vez se finalizó la implementación de las actividades de la guía #4.

Figura 67 *Promedio notas del Significado Subjetivo de la Probabilidad*



Nota. En la figura se muestra en el eje horizontal los rangos de los valores de las notas y en el eje vertical el número de estudiantes. Fuente: Elaboración propia.

En la figura anterior, se puede apreciar que un estudiante tiene un promedio de notas inferior a 3, mientras que dos estudiantes tienen un promedio superior a 3 pero inferior a 4. Este resultado muestra un mayor compromiso y responsabilidad por parte de los estudiantes al abordar y resolver todas las actividades evaluativas en comparación con el significado anterior.

El compromiso y la responsabilidad mostrados por los estudiantes en la realización de las actividades evaluativas de este significado reflejan un progreso notable y una actitud favorable hacia su desarrollo académico. Es un indicio de su crecimiento y disposición para afrontar los retos educativos de manera efectiva.

En resumen, los estudiantes demostraron un buen nivel de comprensión en cuanto a las definiciones y propiedades de los conceptos relacionados con el significado subjetivo de la probabilidad, emplearon procedimientos adecuados como el diagrama de árbol y utilizaron una notación lingüística apropiada para respaldar sus argumentos. Es destacable que algunos estudiantes lograron establecer conexiones entre los conceptos abordados anteriormente, lo cual indicó una comprensión sólida de los mismos. Esta capacidad de relacionar y aplicar conocimientos previos enriqueció su comprensión de la probabilidad subjetiva y les permitió tomar decisiones informadas.

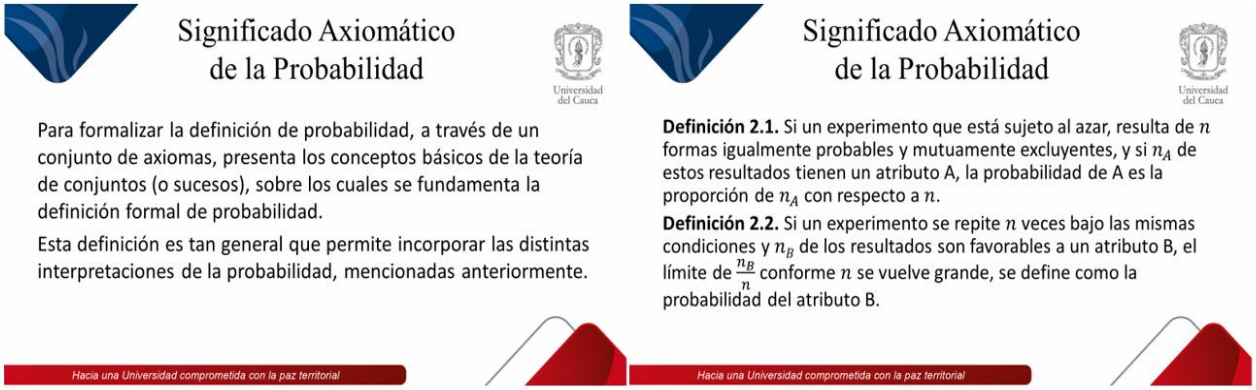
9.2.5. Significado Axiomático de la Probabilidad

Para abordar el significado axiomático de la probabilidad se realizó una actividad (Póquer de sorteo).

9.2.5.1. Póquer de Sorteo.

Antes de comenzar la presentación del juego, se expuso en diapositivas las definiciones, axiomas y teoremas relacionados con la probabilidad axiomática, las cuales se encuentran en el libro "Probabilidad y Estadística: Aplicaciones y Métodos" de George Canavos (1984/1988). Como se muestra en la figura 68.

Figura 68 *Presentación Significado Axiomático de la Probabilidad*



Nota. En la figura se muestra las primeras presentaciones para abordar la temática, las demás diapositivas se encuentran en el anexo 2. Fuente: Elaboración propia.

Se aclararon las dudas de los estudiantes en relación a las definiciones y teoremas expuestos. Luego, se les pidió que se organizaran en grupos de cinco personas para llevar a cabo la actividad 1, llamada Póquer de sorteo.

Figura 69 *Presentación sobre como jugar Póquer de Sorteo*

Nota. Fuente: Elaboración propia.

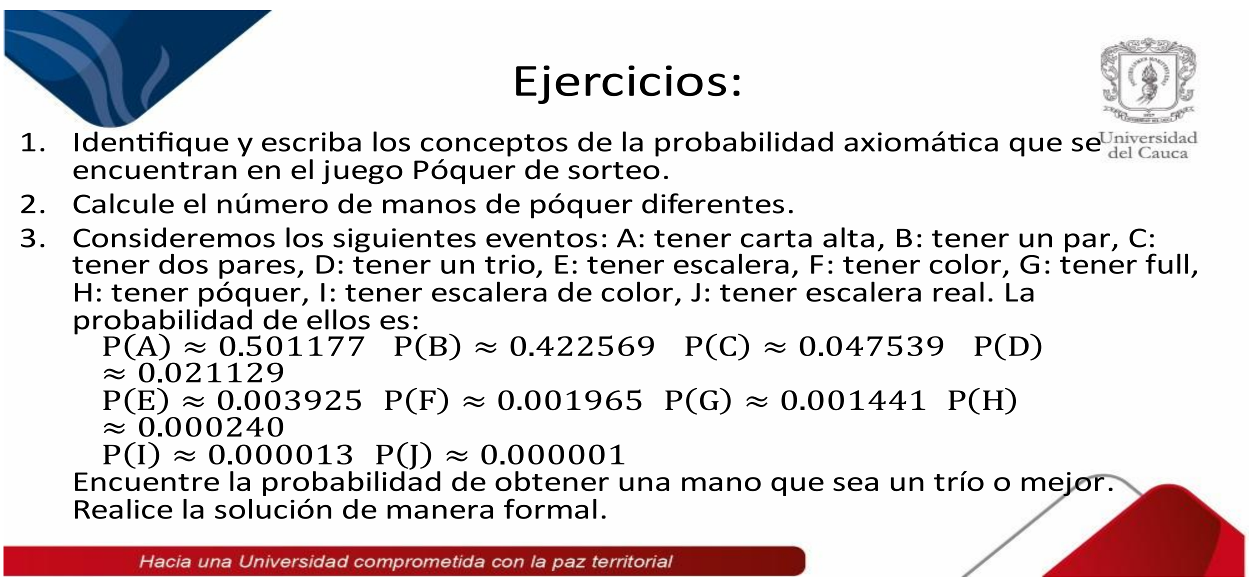
Se evidenció que los estudiantes se sienten cómodos al plantear sus inquietudes y dudas, lo que demostró un ambiente propicio para el aprendizaje. Además, se observó que los estudiantes se interesaron por conocer las reglas y la dinámica del juego propuesto, lo que les permitió disfrutar del mismo y aplicar los conceptos de probabilidad aprendidos de manera práctica.

Figura 70 *Estudiantes jugando Póquer de Sorteo*

Nota. Fuente: Autoría propia.

Los ejercicios planteados para el juego se muestran en la figura 71.

Figura 71 *Ejercicios del juego Póquer de Sorteo*



Nota. Fuente: Elaboración propia.

Antes de proceder con el análisis de las respuestas dadas por los grupos de estudiantes, se asignó un código a cada grupo del curso, desde G1 hasta G19.

En el ejercicio 1 se solicitó a los estudiantes nombrar las definiciones y teoremas que creen se encuentran inmersos en el juego.

Los grupos G1, G2, G3, G4, G5, G6, G8 escribieron los conceptos que ellos consideraron que estaban en el juego, pero de manera informal, comentaron que se encuentran conceptos como: espacio muestral, sucesos independientes, probabilidad condicional, función de probabilidad, Teorema de Bayes, combinatoria, teorema del producto, probabilidad de la intersección, experimento.

Los grupos G7 y G9 nombraron de manera formal las definiciones y teoremas presentados en la sesión y descritos en la guía #5, que ellos consideraron se encuentran en el juego.

Figura 72 *Respuesta del grupo G9*

1. Identifique y escriba los conceptos de la probabilidad axiomática que se encuentran en el juego Póquer de sorteo.

   a. Definición 2.1, Definición 2.2, Definición 2.3, Definición 2.4, Definición 2.6, Definición 2.7, Definición 2.8, Definición 2.9, Definición 2.10, Definición 2.12, Definición 2.13 (Ya que podría definir una función de probabilidad adecuada para cada mano), Teorema 2.1, Teorema 2.2, Teorema 2.3, Definición 2.14 y Teorema 2.4.

Nota. Fuente: Autoría propia.

Se observa en la figura 72 que los estudiantes ofrecieron respuestas adecuadas, demostrando que comprenden que, dentro del significado axiomático de la probabilidad, las definiciones y teoremas están formalizados.

En el ejercicio 2 se pidió calcular el número total de manos que se pueden formar con 5 cartas de una baraja de Póquer. Para dar solución a este ejercicio basta con tener en cuenta que la baraja contiene 52 cartas y que para una mano de Póquer se necesitan 5 cartas. Luego utilizar la fórmula de combinación sin repetición

$$C_5^{52} = \binom{52}{5} = \frac{52!}{5!(52-5)!} = \frac{52!}{5! * 47!} = 2.598.960$$

Obteniendo como resultado que hay $2.598.960$ manos de Póquer.

En la respuesta a este ejercicio, 8 de los grupos aplicaron la formula anterior obteniendo el resultado esperado.

El grupo G5 realizó una interpretación diferente del ejercicio donde mencionaron que el número de manos diferentes es de 10, haciendo referencia a los distintos tipos de manos que hay en el juego, lo anterior se muestra en la figura 73.

Figura 73 *Respuesta del grupo G5*

2. Calcule el número de manos de póquer diferentes.

Solución
El número de manos diferentes que se pueden tener es de 10.

Nota. Fuente: Autoría propia.

En este caso se puede observar que no hubo una adecuada comprensión del juego, puesto que al jugar se identifica que las posibles manos que pueden salir al recibir 5 cartas es mayor a 10. Además, no tuvieron en cuenta que la palabra "calcule" en el ejercicio, indica que se requiere la implementación de un cálculo matemático en el cual se haga uso de un algoritmo, el cual naturalmente se ha abordado en sesiones anteriores e incluso en la misma sesión en que se propuso el juego.

Como practicante, presento una reformulación del ejercicio para evitar ambigüedades y mejorar la comprensión de los estudiantes. Una posible reformulación del ejercicio podría ser: "Calcule el número de posibles manos de póquer en el juego". Esto sería más claro y directo, y ayudaría a los estudiantes a enfocarse en el cálculo matemático requerido para resolver el problema.

Para culminar, a continuación, se analiza el ejercicio 3, en el cual se describieron eventos, que serían los tipos de manos diferentes que hay en el juego, además, se proporciona la probabilidad de cada uno de ellos. En particular, se debe calcular la probabilidad que está compuesta por los eventos D, E, F, G, H, I y J, para esto, basta con sumar las probabilidades. Pero realizar este proceso implica justificar por medio de las definiciones y teoremas de la teoría, los pasos que se realizan. Se quiso observar la manera como los estudiantes justificaban de manera formal sus procedimientos.

En la respuesta a este ejercicio, 8 grupos realizaron el proceso, identificaron que debían sumar las probabilidades de los eventos D, E, F, G, H, I y J para obtener la respuesta correcta, pero solo grupos G1, G7 y G9 justificaron el porqué de los pasos que siguieron.

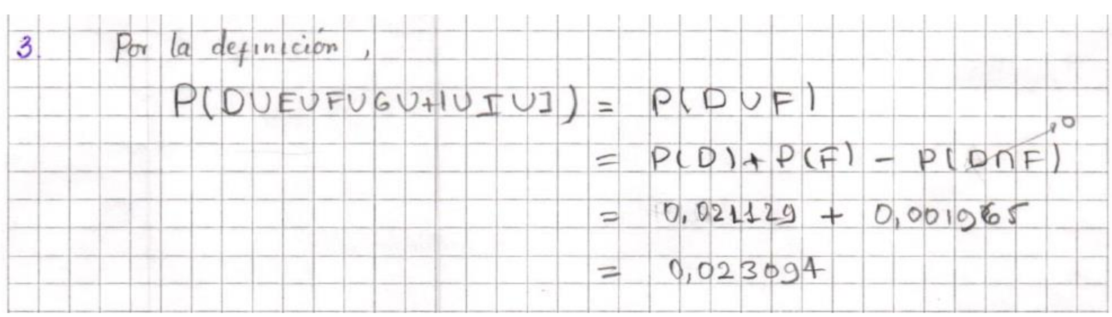
Figura 74 *Respuesta del grupo G1*

Nota. Fuente: Autoría propia.

En la figura 74 se evidencia que los estudiantes del grupo G1 se preocuparon por justificar los procesos que realizaron, algo que es esencial en la demostración matemática.

En la figura 75, se muestra que el grupo G2, identificó las probabilidades de los eventos que debían sumarse, pero al realizar la suma omitieron sumar la probabilidad de los eventos E, G, H, I y J, obteniendo un resultado que no se requería.

Figura 75 *Respuesta del grupo G2*



Nota. Fuente: Autoría propia.

El proceso que realizó el grupo G2 no es claro, y aunque entregaron las soluciones durante la sesión, es posible que la falta de tiempo haya impedido que llegaran a la respuesta correcta.

A continuación, se presentan los ejercicios que se diseñaron para la realizar extra clase. Realice la lectura de las definiciones, axiomas y teoremas expuestos en las páginas anteriores para realizar los siguientes ejercicios:

a. Con la definición 2.14 demuestre que, para cualesquier dos eventos, $A\ y\ B$, $P(A|B) + P(\bar{A}|B) = 1, con\ tal\ de\ que\ P(B) \neq 0.$

b. Sean $A\ y\ B$ dos eventos cualesquiera de S. Si $A\ y\ B$ son mutuamente excluyentes, muestre que no pueden ser independientes. Deduzca cuando dos eventos independientes son, también, mutuamente excluyentes.

Estos ejercicios fueron diseñados con la intención de ser discutidos con los estudiantes debido a su complejidad. La realización de estos ejercicios requiere que el estudiante comprenda todos los conceptos presentados, sea capaz de identificar los conceptos involucrados y pueda utilizar los axiomas y teoremas necesarios para justificar su respuesta. Aunque debido a limitaciones de tiempo solo se pudo presentar las definiciones, axiomas y teoremas necesarios para abordar estos ejercicios, muchos estudiantes presentaron argumentaciones distintas, lo que evidencia los procesos que utilizaron para resolver los ejercicios.

En la tabla 14 se presenta una clasificación de las respuestas a la pregunta luego de ser analizadas.

Tabla 14 *Clasificación de las respuestas de los estudiantes al ejercicio*

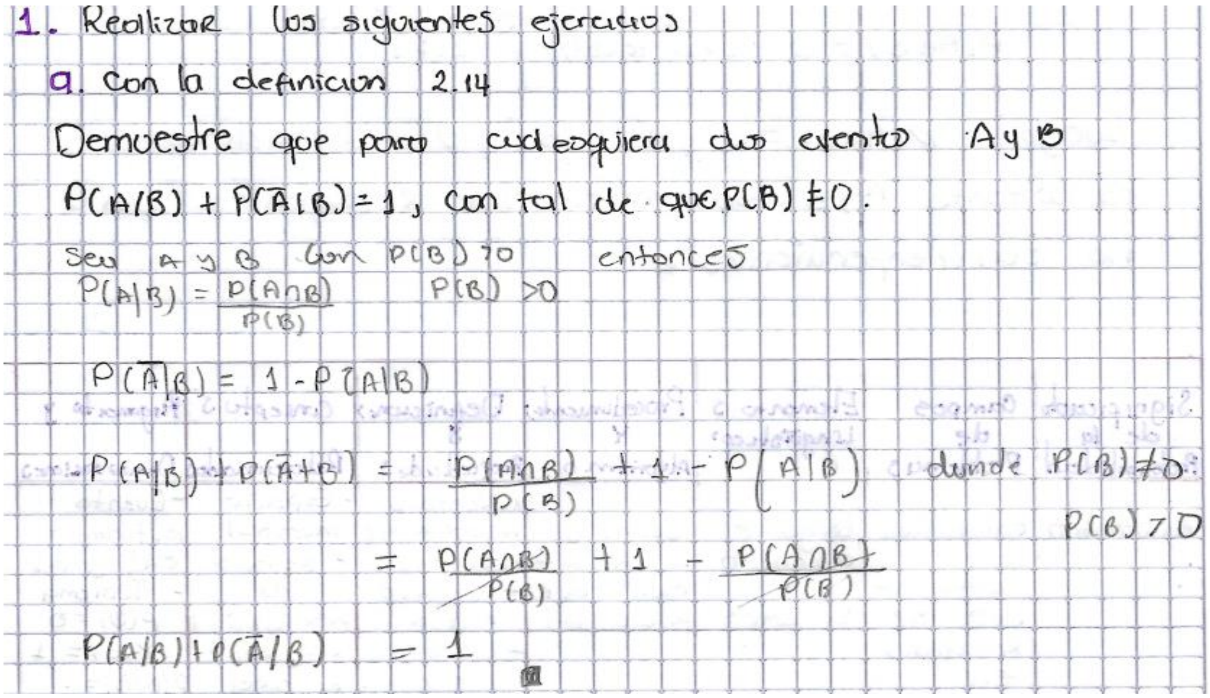
	Respuestas correctas con un proceso adecuado	**Respuestas con un proceso no adecuado**	**No responden el ejercicio**
Estudiantes	E1, E5, E6, E7, E10, E11, E12, E18, E19, E20, E22, E23, E24, E25, E26, E27, E28, E30	E2, E3, E4, E16, E17	E8, E9, E13, E14, E15, E21, E29

Nota. En la tabla se muestra las diferentes categorías que se consideraron para analizar las respuestas de los estudiantes. Fuente: Elaboración propia.

Los estudiantes que ofrecieron una respuesta acertada y emplearon un proceso adecuado, utilizaron una argumentación deductiva, la cual consiste en partir de una definición y aplicar razonamientos lógicos para llegar a una conclusión.

En cuanto a los estudiantes que presentaron algún error al desarrollar sus argumentaciones, se puede observar en la figura 76 la respuesta del estudiante E4.

Figura 76 *Respuesta del estudiante E4*

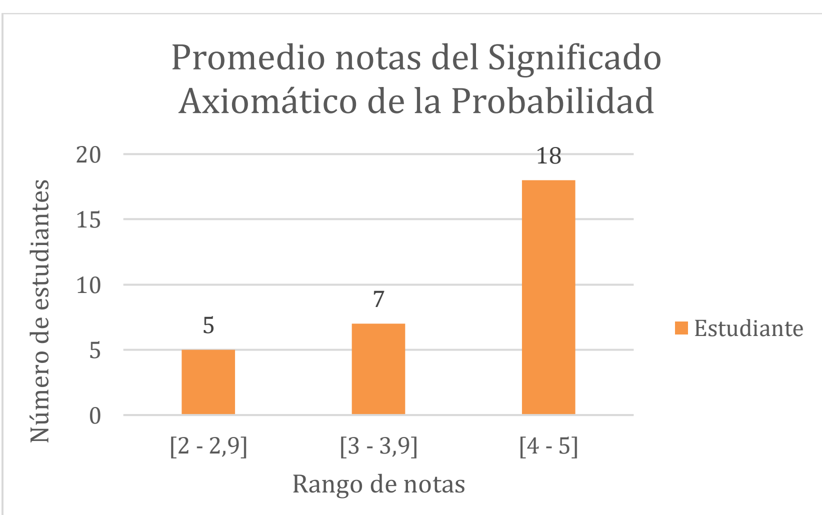


Nota. Fuente: Autoría propia.

En la argumentación que realizó el estudiante E4 se evidencia que conoce la definición 2.14. Sin embargo, en su proceso deductivo, comete un error al utilizar de manera implícita la conclusión (tesis), lo que lleva a una deducción errónea de que $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$. Este tipo de error es muy común entre los estudiantes al tratar de realizar demostraciones, ya que utilizan lo que se debe demostrar como parte de su razonamiento.

A continuación, en la figura 77 se muestra el promedio las de notas de los estudiantes, una vez se finalizó la implementación de las actividades de la guía #5.

Figura 77 *Promedio notas del Significado Axiomático de la Probabilidad*



Nota. En la figura se muestra en el eje horizontal los rangos de los valores de las notas y en el eje vertical el número de estudiantes. Fuente: Elaboración propia.

En la figura anterior, se puede observar que cinco estudiantes tienen un promedio de notas inferior a 3, mientras que siete estudiantes tienen un promedio superior a 3 pero inferior a 4. Este resultado se debe a la ausencia de varios estudiantes en la sesión de clase donde se llevó a cabo las actividades evaluativas, lo que impactó negativamente en sus calificaciones. A pesar de esto, la mayoría de los estudiantes demostraron hasta el final del curso su compromiso y responsabilidad al resolver todas las actividades evaluativas.

En términos generales, se pudo evidenciar la mayoría de los estudiantes comprendieron los conceptos involucrados en el significado axiomático de la probabilidad, fueron capaces utilizar los axiomas y teoremas necesarios para justificar sus respuestas, emplearon una argumentación deductiva, la cual consistió en partir de una definición y aplicar razonamientos lógicos para llegar a una conclusión. Sin embargo, hubo estudiantes que, en su proceso deductivo, cometieron un error al utilizar de manera implícita la conclusión (tesis). Este tipo de error es muy común entre los estudiantes al tratar de realizar demostraciones, ya que utilizan lo que se debe demostrar como parte de su razonamiento. Es relevante destacar la importancia de una argumentación rigurosa y lógica en la resolución de problemas matemáticos, evitando así la utilización de supuestos no verificados que puedan conducir a resultados incorrectos.

9.2.6. Encuesta final

Después de la intervención, se llevó a cabo una encuesta a los estudiantes para conocer sus opiniones, reflexiones y sugerencias en relación con lo abordado en el curso.

A continuación, se presentan algunas preguntas y respuestas con el fin de evidenciar el cumplimiento de los objetivos de la presente investigación.

A la pregunta: *¿Lo visto en este curso afianza sus conocimientos abordados en el curso de Estadística y Probabilidad y lo visto en Matemáticas Recreativas?*, los estudiantes respondieron:

> "Sí, ya que, a través de los juegos, miramos toda la teoría que nos dieron más práctica y didáctica."
>
> "En particular me sirvió mucho la parte de probabilidad, ya que había visto solo la parte estadística en un curso anterior."

"Los afianza solo un poco ya que cuando vi el curso de Estadística no abordamos muchos temas, ya que para ese tiempo (2018) estábamos en paro."

"Si. Ya que hay un poco más de claridad cuando lo teórico se lleva a la práctica mediante juegos y actividades de probabilidad."

"Si puesto que la explicación fue interesante primero recreativa y luego formal entonces queda más claro el concepto."

"Si, nos da una idea mucho más clara y aplicable, además que se trabajan conceptos muy interesantes alrededor de los juegos de azar."

"Si, ha sido un buen complemento para aclarar algunos conceptos que quedaron con vacíos."

"En mi curso de Estadística y probabilidad solo logramos abarcar la parte estadística; por tal razón fue de gran ayuda los temas de probabilidad abordados en esta asignatura."

Con respecto a la pregunta: *¿Qué opina de la metodología usada en esta parte el curso?*, los estudiantes respondieron:

"Me pareció muy interesante porque a medida que uno se divierte y sale de la monotonía, aprende y/o recuerda temas vistos en clase."

"Buena, sin embargo, falta a veces más explicación en los temas que se abarcan"

"La metodología vista al transcurrir el curso fue de manera muy dinámica, a su vez se logró tener conocimientos teóricos con el fin de llevarlos a la práctica"

"Creo que está bien, ya que hace ver las cosas de otro punto de vista lo cual aumenta el conocimiento."

"Me pareció interesante puesto que se salió de lo tradicional y de esta manera fueron clases alegres donde participamos todos y entendíamos los conceptos."

"increíble, una manera súper lúdica. En la que como estudiantes aprendemos mucho más, te diviertes, sonríes, ganas y pierdes."

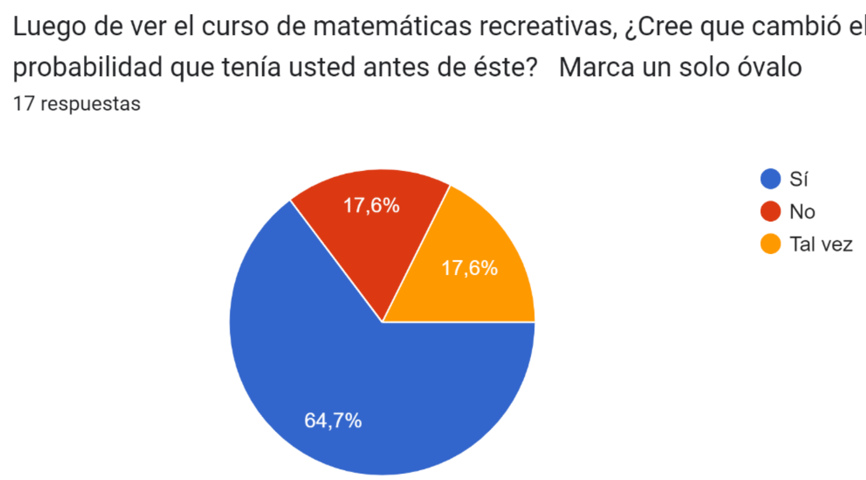
"Me parece una metodología muy completa, aunque sería bueno que se dieran más explicaciones para realizar los trabajos. Por lo demás considero que es correcta la manera de realizar las prácticas en cursos como estos y no se aleja nada de la idea general del curso."

"Fue muy buena la metodología dado que siempre se estuvo aplicando lo visto en teoría mediante juegos, lo cual genera una mejor comprensión de los conceptos."

"Es una metodología llamativa; ya que genera interés en los estudiantes y nos aleja un poco de la metodología tradicional utilizada para este tipo de asignaturas."

En la figura 78 se muestra el porcentaje de los estudiantes que respondieron la pregunta: Luego de ver el curso de matemáticas recreativas, *¿Cree que cambió el concepto sobre probabilidad que tenía usted antes de éste?*

Figura 78 *Respuesta de los estudiantes*



Nota. Fuente: Elaboración propia.

Los estudiantes proporcionaron una justificación de su respuesta a la pregunta anterior de la siguiente manera:

"Todo ocurría según lo que entendía por probabilidad"

"Porque al ver la teoría cree que todo tiende a tratar de lo "mismo" pero tiene que aprender a diferenciar lo que le preguntan, pero con el curso ya se sabe que hay 5 significados y cómo utilizar cada uno."

"Algunas cosas las recordaba, pero no es que haya cambiado, sino que se pudo complementar."

"Actualmente crecieron los conceptos respecto a la rama estadística y esto hace que se logre ver algunas escenas desde el punto de vista estadístico con el fin de tomar mejores decisiones"

"Lo reforzó."

"la verdad no aprendí mucho del curso como como tal y verlo en matemáticas recreativas fue aprender de nuevo y recibir lo aprendido fue bueno"

“Varios conceptos, quizás (nuevos) pudieron aclararse.”

“Siempre he considerado que la mayoría de estos juegos ocurren por suerte, pero veo que son muy importantes las decisiones que tomemos y si aplicamos los conceptos pues mucho mejor, pues tendríamos una justificación para tomar nuestras decisiones.”

“Mas que cambiar, es aclarar, afianzar porque en algunos de ellos se me habían olvidado y con las actividades los recordé y a su vez los afiancé un poco más.”

“Si, a través de las actividades planteadas en clase logramos asimilar la probabilidad de manera real y con elementos que podíamos interactuar.”

“Al conocer otros significados de la probabilidad la forma en que se miran las cosas cambia.”

Todas las preguntas y respuestas de los estudiantes se encuentran en el anexo 3.

Las respuestas de los estudiantes proporcionan una perspectiva importante sobre la efectividad de la metodología utilizada, la claridad y calidad de la enseñanza, así como las fortalezas y debilidades del curso en general. Además, las sugerencias y comentarios de los estudiantes deben ser tomados en cuenta para realizar mejoras y ajustes en un plan de estudio y la metodología de enseñanza para futuros cursos.

10 Conclusiones

- Con respecto al primer objetivo específico, se logró diseñar y aplicar cinco guías de aprendizaje a partir de la implementación de diez juegos relacionados con los significados históricos de la probabilidad, donde se crearon situaciones propicias para expresar emociones, opiniones, reflexiones, conocimientos, en torno a las temáticas vistas. Durante la implementación de las guías se utilizaron materiales y herramientas (TIC) tales como celulares, sitios web y proyectores de video, evidenciándose una buena aceptación por parte de los estudiantes. Adicionalmente, se realizaron alrededor de 45 ejercicios para recoger las opiniones, reflexiones y conocimientos de los estudiantes.
- Con respecto al segundo objetivo específico, se analizaron las respuestas de los estudiantes a los 45 ejercicios planteados, centrándose en recopilar información que permitió evidenciar el cumplimiento del objetivo general. En particular, se analizaron las respuestas que demostraban si los estudiantes estaban familiarizados con las

definiciones y propiedades de los conceptos tratados, y si utilizaban de manera adecuada símbolos, palabras o gráficos (elementos lingüísticos), procedimientos y algoritmos para presentar sus argumentaciones.

- Con respecto al tercer objetivo específico, se puede verificar que las actividades llevadas a cabo para desarrollar cada una de las guías (temática, juegos, ejercicios de los juegos, retroalimentación, actividades evaluativas) permitieron exponer unas temáticas concretas, acompañadas de juegos que presentaron situaciones con presencia de problemas abiertos y con cierta indeterminación donde los estudiantes expusieron argumentos probabilísticos, dando diferentes interpretaciones y tomando decisiones, reflejando completamente la naturaleza aleatoria de los datos. La retroalimentación ayudó a los estudiantes a comunicar y reflexionar sobre los resultados, generando discusiones y consensos. Por último, las actividades evaluativas permitieron interpretar, analizar y utilizar los resultados obtenidos en los juegos, evidenciando que los conceptos abordados en las sesiones fueron adquiridos por los estudiantes: Además, se pudo observar el progreso de los estudiantes en la utilización de símbolos, palabras o gráficos (elementos lingüísticos), procedimientos y algoritmos para presentar sus argumentaciones a medida que se iban implementado las guías. Todo esto en correspondencia con las orientaciones, directrices, ideas planteadas en los LCM y EBCM.
- Tras evaluar el cumplimiento de cada uno de los objetivos específicos, se puede concluir que se logró alcanzar del objetivo general, ya que en las observaciones de los resultados obtenidos se pudo apreciar claramente cómo los juegos, desde una estrategia didáctica, potenciaron el pensamiento aleatorio en los estudiantes.
- La pregunta de investigación, fue formulada de la siguiente manera ¿Cómo promover el pensamiento aleatorio de los estudiantes del curso de Matemática Recreativa a través del juego? En respuesta a esta pregunta se sugieren los siguientes pasos para promover el pensamiento aleatorio:
    - Realizar una profundización sobre los conceptos históricos de la probabilidad, estudiar la relación entre el juego y las matemáticas para luego seleccionar juegos apropiados que permitan a los estudiantes experimentar y reflexionar sobre conceptos probabilísticos.

- Diseñar guías (en este caso una por cada significado de la probabilidad) donde se encuentren los objetivos de aprendizaje, los conceptos para dar una fundamentación teórica y juegos para motivar y despertar el interés de los estudiantes, acompañados de historia sobre los conceptos ya que se brinda una contextualización a raíz de los hechos históricos que se desarrollaron para fundamentar los conceptos que hoy en día se conocen, ejercicios con el fin de conocer y analizar los conocimientos de los estudiantes y rúbricas de evaluación para establecer de manera clara y objetiva una valoración al trabajo de los estudiantes.
- Dividir las sesiones de clase en las siguientes etapas: entrega de la guía para que los estudiantes realicen una lectura y conozcan previamente lo que se desea realizar, explicación de la temática con el fin de mostrar la parte teórica, vamos a jugar para establecer las relaciones que existen entre la teoría y los juegos propuestos, ejercicios de los juegos que deben estar relacionados a la teoría que se aborde y la retroalimentación de los ejercicios propuestos para poder escuchar las opiniones y percepciones que los estudiantes tienen tanto de la parte teórica como de los juegos, así, aclarar dudas y llegar a consensos. Es importante destacar que tanto las guías como los juegos diseñados pueden sufrir modificaciones debido a las observaciones, reflexiones y acciones que se realicen por parte del docente. Puesto que la observación; el análisis y la interpretación; y la acción son las fases esenciales en el diseño de investigación-acción.
- Realizar un análisis cuidadoso del comportamiento de los estudiantes frente a los juegos propuestos e identificar su desempeño en relación a los conceptos abordados. Para ello, se puede utilizar los cinco elementos que componen el significado de un objeto matemático, los cuales son una herramienta útil para el análisis de las respuestas en actividades matemáticas y para el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Elaborar conclusiones a partir de los resultados obtenidos.

- Los estudiantes se mostraron muy interesados en la metodología desarrollada, afirmando ser una herramienta muy práctica para abordar conceptos de una manera distinta a la tradicional y así como futuros docentes motivar y despertar el interés de sus estudiantes.
- Al final del curso se planteó la pregunta ¿*Considera que en los cursos como Estadística y Probabilidad se deberían incluir actividades como las que se realizaron?*, donde los estudiantes en un 94% respondieron de manera afirmativa. Algunas justificaciones que se dieron fue que al igual que otros cursos que son tan abstractos, se deberían incluir actividades en los cuales se interactúe con objetos manipulables de manera que permita interactuar con la realidad y la teoría al mismo tiempo y así lograr un aprendizaje significativo.
- La Gran Carrera de Ciclistas fue uno de los juegos que más llamo más la atención de los estudiantes debido a la estructura de este y la forma como se desarrollaron las apuestas, además en este juego los conceptos básicos de la probabilidad se pusieron en práctica. Debido a su impacto, este juego fue implementado en el evento Matemáticas a la Calle en su décima versión, donde tuvo gran acogida por parte de los estudiantes de los colegios participantes en el evento, sin duda este juego puede ser de gran ayuda para abordar no solo conceptos de probabilidad sino también conceptos como operaciones con números enteros. Por ejemplo, se puede implementar nuevas reglas al juego, donde consideren además la suma de las puntuaciones de los dados, también la resta, multiplicación y división para determinar que ciclista obtiene una cruz.
- Los juegos propuestos se pueden adaptar para abordar cualquiera de los significados de la probabilidad dado la relación estrecha que existe entre los significados.

11 Limitaciones y prospectiva

- Una limitación para el desarrollo de la propuesta didáctica fue el tiempo con el que se contó para el desarrollo de esta, debido que, al estar en el contexto de la universidad pública, existieron permisos académicos derivados de asambleas que se desarrollaron, afectando el abordaje de algunas temáticas, ajustándolas por actividades de manera asincrónica.
- Es importante analizar y replantear de manera adecuada las preguntas que van acompañadas de los juegos, debido a que pueden tener diferentes interpretaciones que pueden generar confusiones o llegar a resultados no esperados, en los tres casos presentados se sugirieron ajustes a estas preguntas.
- Es relevante implementar en el programa de Licenciatura en Matemáticas y Matemáticas una propuesta que aborde conceptos de otras asignaturas de los programas, con una metodología distinta a la tradicional, para que, como futuros docentes se cuente con herramientas prácticas y vivenciales para la enseñanza de conceptos abstractos.
- Gran parte de lo mostrado en esta propuesta es de utilidad para desarrollar una propuesta que vaya enfocada en la enseñanza y aprendizaje de conceptos básicos de probabilidad en estudiantes de los colegios.

12 Referencias bibliográficas

Batanero, C. (2004). Los retos de la cultura estadística. *Yupana*, 27-36. doi:https://doi.org/10.14409/yu.v1i1

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Relime, 8(3)*, 247-263. Obtenido de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2096616

Batanero, C., Contreras, J. M., & Diaz, C. (2011). Experiencias y sugerencias para la formación probabilística de los profesores. *Paradigma, 32(2)*, 53-68. Obtenido de http://www.revistas.upel.edu.ve/index.php/paradigma/article/view/1230

Batanero, C., Diaz, C., Arteaga, P., & Contreras, M. (2011). Estadística con Proyectos. Granada: ReproDigital. Facultad de Ciencias. Obtenido de https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Libroproyectos.pdf

Benavides Benitez, E. (2 de Julio de 2021). Encolombia. Recuperado el 8 de Febrero de 2022, de https://encolombia.com/libreria-digital/lmedicina/doc-univ/docencialaeducacion/

Cabello Santos, G. (2006). ¿Por qué la matemática recreativa en el aula? *III Encuentro de Matemáticas Del Caribe Colombiano*, 13-17. Obtenido de http://funes.uniandes.edu.co/10027/

Canavos, G. (1984/1988). Probabilidad y estadística. Aplicaciones y métodos. Mexico: Mcgraw-hill/interamericana de mexico, s.a. de c.v.

Chaves Esquivel, E. (2015). La enseñanza de la estadística y la probabilidad, más allá de procedimientos y técnicas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 21-31.

Duarte Montañez, S. M. (2018). Los juegos tradicionales de azar como estrategia didáctica para fortalecer el pensamiento aleatorio en los estudiantes del grado sexto de la institución educativa colegio municipal aeropuerto del municipio de cúcuta. *(Trabajo de investigación de maestría).* Universidad Autonoma de Bucaramanga-UNAB, Bucaramanga. Obtenido de http://hdl.handle.net/20.500.12749/2528

Fernández Luna, E. F. (2022). La Matemática Recreativa, un Recurso para Promover el Pensamiento Lógico Matemático con Estudiantes del Programa de Licenciatura en Matemática de la Universidad Del Cauca. *(Trabajo de Investigación - Pregrado).* Universidad Del Cauca., Popayán.

Franco, E., & Fonseca, H. (2021). Matemática recreativa, una estrategia para fortalecer el pensamiento numérico y espacial. *(Trabajo de investigacion de pregrado).* Universidad Libre Seccional Socorro, El Socorro.

Gairín Sallán, J. M. (1990). Efectos de la utilización de juegos educativos en la enseñanza de las matemáticas. *Educar, 17*, 105-118. Obtenido de https://raco.cat/index.php/Educar/article/view/42235

Gallardo, S., Cañadas, M., Manuel, M., Marta, M., & Maria, P. (2007). Jugando con la probabilidad. *Investigación en el aula de matemáticas: estadística y azar*, 200-207.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, M. (2014). Metodología de la Investigación. mexico: mcgraw-hill / interamericana editores, s.a. de c.v.

López, J. (31 de Enero de 2019). Probabilidad frecuencial. Recuperado el 17 de Marzo de 2022, de Economipedia: https://economipedia.com/definiciones/probabilidad-frecuencial.html

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). Lineamientos Curriculares en Matemáticas. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio. Obtenido de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional. Obtenido de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

Nerea Sánchez, E. (2013). El juego y la matemática. Juegos de matemáticas para el alumnado del primer ciclo de e. primaria. *(Trabajo de grado de pregrado).* Universidad de Valladolid, Valladolid. Obtenido de https://educrea.cl/wp-content/uploads/2018/05/DOC1-juego-y-matematica.pdf

Olarrea, J., Nuño, J. C., & Blasco, F. (2010). La matemática recreativa como herramienta para el aprendizaje. *Séptimo Simposium Iberoamericano en Educación, Cibernética e Informática*, SIECI, 10.

Puga Peña, L. A., & Jaramillo Naranjo, L. M. (2015). Metodología activa en la construcción del conocimiento matemático. *Sophia, Colección de Filosofía de la Educación*, 291-314. Obtenido de https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=441846096015

Rengifo Canizales, E. (2021). Estadística y Probabilidad. Popayán: Antonio María Alarcón Reina Ediciones Popayán Positiva.

Salgado Lévano, A. C. (2007). Investigación Cualitativa: Diseños, evaluación del rigor metodológico y retos. *Liberabit*, 71-78. Obtenido de http://www.scielo.org.pe/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1729-48272007000100009&lng=es&tlng=es

Sanabria, G., & Núñez, F. (2016). La probabilidad como elemento orientador de la toma de decisiones. *Matemática, Educación e Internet*, 1-13. Obtenido de https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/

Tamayo Bermúdez, C. A. (2008). El juego: un pretexto para el aprendizaje de las matemáticas. *Taller realizado en 9° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (16 al 18 de Octubre de 2008)*, 79-82.

Universidad de Murcia. (s.f). Juego y metodologías activas en el aula universitaria. España. Obtenido de https://www.um.es/innova/webformacion/metodologias/ficha-Juego.pdf

Universidad del Cauca. (s.f). Acerca de Unicauca | Universidad del Cauca. Recuperado el 8 de Febrero de 2022, de https://www.unicauca.edu.co/versionP/node/18445#:~:text=La%20Universidad%20tiene%20sus%20ra%C3%ADces,pol%C3%ADtico%20y%20cient%C3%ADfico%20de%20la

Universidad Internacional de La Rioja (UNIR). ((2021b)). Tema 2: Aspectos generales de la enseñanza de la estadística y la probabilidad. En *Didáctica de la Probabilidad y la Estadística.*

Universidad Internacional de La Rioja (UNIR). (2021a). Tema 3: Los significados de la probabilidad. En *Didáctica de la Probabilidad y la Estadística.*

Zapata Cardona, L. (2014). Alcance de las tareas propuestas por los profesores de estadística.

13 Anexos

ANEXO 1 Guías

Guía 1.

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Matemáticas

Juegos con Dados
Significado Intuitivo de Probabilidad

Asignatura:	Matemática Recreativa	Guía:	1
Docente:		Semestre:	
Estudiante:		Código:	

Objetivos:

1. Analizar el significado intuitivo de probabilidad a través de juegos con dados.
2. Utilizar tablas para la recolección de datos estadísticos.
3. Identificar las combinaciones en los dados.
4. Asignar un valor numérico de manera intuitiva a la posibilidad que tiene un suceso de ocurrir.
5. Reconocer los campos de problemas, elementos lingüísticos, procedimientos y algoritmos, definiciones y propiedades, conceptos relacionados y argumentos que están involucrados en el significado intuitivo de probabilidad.

Temporalización: 4 horas

Contenidos: Significado intuitivo de Probabilidad, tablas de frecuencia, combinatoria, esperanza matemática.

Recursos necesarios: Los recursos necesarios para la realización de las actividades 1, 2 y 3 son: dados plásticos, fichas plásticas, diseño del juego cierra la caja en cartón y foami, marcadores, hojas de papel cuadriculado, regla, lápiz, borrador, tijeras, proyector para observar diapositivas.

Metodología actividad 1: Se solicita a los estudiantes realizar el prototipo del juego Cierra la Caja. Una vez realizado el prototipo del juego por los estudiantes, se dará explicación de las reglas. Se da inicio al juego, el docente observará como se desarrolla la actividad y estará atento a cualquier inquietud. Una vez completado los 15 minutos de juego, el docente retomar el juego, pero esta vez enfocados en resolver unas interrogantes. Luego se genera un espacio de 20 minutos para la socialización de las diferentes respuestas. Se iniciará preguntando si algún estudiante quiere de manera voluntaria compartir su respuesta a las interrogantes expuestas, en caso contrario, el docente escogerá a un estudiante para qué intervenga. La socialización de las respuestas involucrara a todos los estudiantes, generando un debate a partir de las respuestas dadas.

Metodología actividades 2 y 3: Se solicita a los estudiantes reunirse en parejas distintas a las parejas formadas en la actividad 1 (para el caso de la actividad 3 las parejas serán distintas de la actividad 1 y 2) y se procede a la descripción del juego. Se distribuirá tres dados a cada pareja, y observará como se desarrolla la actividad y se estará atento a cualquier inquietud durante 20 minutos. Luego, el docente solicita retomar el juego, pero esta vez enfocados en resolver unas interrogantes (durante 15 minutos). A continuación, se genera un espacio para la socialización de las diferentes respuestas.

Actividad 1. Cierra la caja.

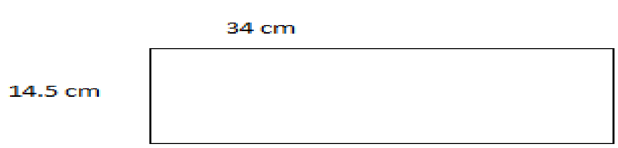
¿Cómo realizar el juego cierra la caja?

La idea es diseñar un prototipo de cierra la caja como se muestra en la Figura 1.

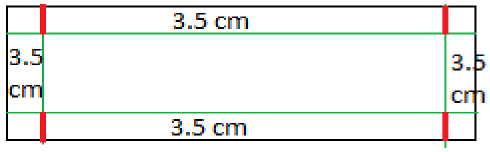
Figura 1. Juego cierra la caja

Teniendo en cuenta las siguientes instrucciones:

1. Sobre cartón cartulina recorta un rectángulo de 34 cm de largo por 14.5 cm de ancho.

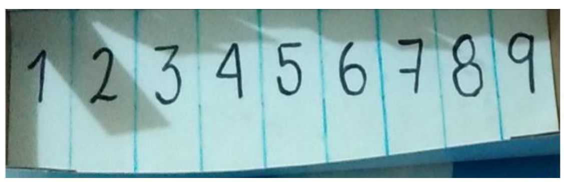


2. Ahora traza una línea (color verde) de 3.5cm en cada uno de los lados del rectángulo y recorta las líneas marcadas en rojo a continuación:

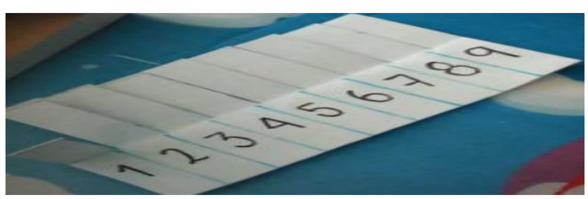


3. Dobla el cartón cartulina por cada una de las líneas trazadas y pega las pestañas ya recortadas para formar la caja, como se muestra a continuación:

4. Utilizando fomi corta un rectángulo de 27 cm de largo por 7.5 cm de ancho y marca una línea vertical cada 3 cm y escribe los números del 1 al 9 en cada casilla formada.



5. De la misma forma recorta un rectángulo de 27 cm de largo por 9 cm de ancho y recorta cada 3 cm. Luego pega 1.5 cm de cada tira detrás de cada número, como se ve en la siguiente imagen:



6. Finalmente pega la tira de números dentro la caja y un trozo de velcro en las marcas que se señalan como se muestra en el resultado final.

¿Cómo jugar cierra la caja?

En este juego participan 2 estudiantes.

El tablero tiene nueve piezas numeradas del 1 al 9, que al principio del juego están abiertas o levantadas.

El jugador que acaba de lanzar los dos dados debe descomponer el número obtenido como suma de dos o más números. Por ejemplo, si el primer jugador lanza los dos dados y suma las cantidades obtenidas. Supongamos que obtiene un 4 y un 1, por tanto, la suma es 5, entonces, cerrará las tapas de aquellos números que formen la descomposición. En este ejemplo podrá cerrar las tapas 4 y 1, o las tapas 2 y 3.

El primer jugador continúa lanzando los dados hasta que en una tirada no pueda cerrar más puertas o consiga cerrarlas todas.

Después lanza el segundo jugador.

Gana el jugador que cierre la caja.

Respondamos lo siguiente:

1. ¿Para usted, qué números aparecen con mayor frecuencia al lanzar los dados?
2. ¿De acuerdo a su experiencia en el juego, considera que existe alguna estrategia que permita ganar? Justifique su respuesta.

Para registrar los datos obtenidos puedes realizar una tabla como la siguiente:

Lanzamiento	Numero Obtenido
1	4+3 = 7
2	5+6=11

3. ¿Hay un número mínimo de lanzamientos para poder ganar? Si o no ¿Por qué?

Actividad 2. Tanto en uno como en dos

¿Cómo jugar?

En este juego participan 2 estudiantes.

Se juega con tres dados. El juego consiste en que uno de los jugadores, lanza los tres dados y logre sacar una de las siguientes combinaciones con repetición:

6-5-1	6-4-2	6-3-3
5-4-1	5-3-2	4-3-1
4-2-2	3-2-1	1-1-1

Si no logra lanzar una de las anteriores combinaciones, entonces deberá lanzar los tres dados el otro jugador.

Si el jugador 2 tampoco lanza una de las anteriores combinaciones, entonces lanzará los dados el jugador 1 y así sucesivamente hasta que alguno de los jugadores lance una de las combinaciones anteriores, lo que le hará ganar el juego.

Respondamos lo siguiente:

1. ¿Qué combinaciones tienen más posibilidad de salir?
2. ¿Cuántos tiros fueron necesarios para ganar?
3. ¿Cree que el jugador 1 tiene ventaja sobre el jugador 2? Justifique su respuesta.

Actividad 3. Par con As.

En este juego participan 2 estudiantes.

El jugador que lanza primero los tres dados, si saca "par" en dos dados y as (1) en el otro, gana el juego.

Las configuraciones que hacen ganar este juego son:

1-1-1	1-2-2	1-3-3
1-4-4	1-5-5	1-6-6

Si el jugador 1 no saca una de estas configuraciones, pasa el turno al jugador 2, que lanzará los tres dados buscando sacar una de las configuraciones anteriores. De esta manera se irán turnando hasta que alguno de los jugadores logre una de las configuraciones anteriores, ganando entonces el juego.

Respondamos lo siguiente:

1. ¿Existe una estrategia para ganar el juego?
2. ¿Se puede dar un valor numérico a la posibilidad que tiene cada combinación de dados? Justifique su respuesta

3. ¿Cree que el jugador 1 tiene ventaja sobre el jugador 2? Justifique su respuesta.
4. ¿Se puede dar un valor numérico a la posibilidad que tiene cada jugador de ganar el juego? Justifique su respuesta

Un poco de historia…

Posiblemente sea el juego, una de las actividades humanas más antiguas, el origen de las primeras ideas en probabilidad. El talus (la taba) aparece ya en excavaciones arqueológicas egipcias y se tienen noticias de su utilización en Sumeria y Asiria. Sin embargo, no sabemos si se utilizaban con fines religiosos o de entretenimiento.

En el museo del Hermitage existen dados egipcios, fechados en el siglo XVI antes de Cristo, increíblemente bien equilibrados, algunos con una forma tan irregular que parecen haber sido limados para conseguir la equiprobabilidad de los resultados.



A pesar de que existen estudios sobre el juego de los dados anteriores al siglo XV, incluso una referencia al mismo en el Mahabharata, la necesidad de la utilización de cálculos y el carecer de una notación numérica adecuada podría explicar el hecho de que matemáticos tan hábiles en otros campos como los griegos no trabajaran en este tema.

Probablemente, fueron los árabes los primeros en planteárselo, de hecho, no parece casual que la palabra albur, que se utilizaba para designar el azar sea tan árabe como la palabra álgebra o que la palabra azar provenga de la palabra árabe zahr, flor del naranjo con la que representaban el as en uno de los lados del dado.

Parece ser que uno de estos juegos de dados denominado hazard (del árabe al-azar, que también significa dado) fue introducido en Europa durante la Tercera Cruzada.

De hecho, los primeros probabilísticos europeos fueron italianos del siglo XV, que recibieron la influencia árabe, a través del norte de África, y que desarrollaron simultáneamente la aritmética y la probabilidad.

Significado Intuitivo

El origen de la probabilidad está relacionado con los juegos de azar en culturas como la Antigua Grecia y Roma. Incluso primer tratado sobre la probabilidad, del italiano Cardano, tenía como problemas originales aquellos enmarcados en los juegos de azar con dados. Este significado está relacionado con estos hechos.

En todas las civilizaciones han existido evidencias de juegos de azar y se asocia este significado con el lenguaje coloquial de esos juegos. Personas sin formación estadística tienen relación con este contexto, empleando expresiones informales para cuantificar sucesos inciertos y expresar su grado de creencia en ellos.

Estas primeras ideas de probabilidad surgen ligadas a la apuesta, ganancia o pérdida de ellas, la esperanza de un juego y el concepto de juego equitativo.

Ejercicios:

1. (¿Juegas o no?) hay un puesto donde por $1.000 pesos se puede jugar DADOS A SEIS. Este juego consiste en lazar dos dados distintos, si la suma de los resultados de los dados es menor igual a 6 se gana el juego sino se pierde. Si se gana el juego, se obtiene un premio de $1.500 pesos. Se debe tomar una decisión: jugar o no DADOS A SEIS.
    a. Analice las repercusiones de las diferentes decisiones que se puede tomar.
    b. Antes de decidir si se va al puesto a pagar por jugar este juego, juegue DADOS A SEIS, veinte veces.
    c. Intuitivamente, ¿Cuál decisión tomaría teniendo en cuenta los datos obtenidos en b)? ¿Por qué?
2. Elige uno de los tres juegos propuestos e invita a un familiar o amigo (que no esté en el curso) a jugar. Realiza alguna de las preguntas que se plantearon. Escribe su respuesta y comenta algo que te haya llamado la atención de ella.
3. El Príncipe de Toscana, muy aficionado al juego de los dados, preguntó a Galileo por qué al tirar tres dados y sumar sus resultados era más frecuente obtener 10 puntos que 9, a pesar de que en ambos casos hay seis formas distintas de obtener dichas sumas: 10 = 6+3+1 = 6+2+2 = 5+4+1= 5+3+2 =4+4+2 = 4+3+3 9 = 6+2+1 = 5+3+1 = 5+2+2 = 4+4+1 = 4+3+2 = 3+3+3. ¿Qué justificación daría para resolver este problema?
4. Complete la siguiente tabla:

Significado de la Probabilidad	Campos de problemas	Elementos lingüísticos	Procedimientos y algoritmos	Definiciones y propiedades	Conceptos relacionados
Intuitivo			Manipulación de generadores de azar: dados, cartas.	Opinión impredecible, creencia	

Evaluación:

1. Para la evaluación de estas sesiones de clase se tendrán en cuenta la asistencia y participación del estudiante en la clase.
2. Las respuestas tanto de las preguntas de las actividades como de los ejercicios serán entregadas en hojas que debe contener los datos del estudiante: nombres, apellidos, asignatura, número de celular y código. En lo posible enumera las hojas y asegúrate que tu trabajo está muy bien ordenado.
3. La siguiente, es la rúbrica de evaluación del desarrollo de la guía 1. Asegúrate de cumplir con la totalidad de las actividades. Debes obtener como mínimo 70 puntos del puntaje total para aprobar.

CRITERIO	PUNTAJE
Demuestra originalidad, interés, creatividad y compromiso en el desarrollo de las actividades y/o ejercicios.	10 puntos
Demuestra total honestidad y responsabilidad en el desarrollo del material de trabajo.	10 puntos
Expone sus ideas con un lenguaje ordinario de manera clara y organizada en las diferentes actividades y/o ejercicios.	5 puntos
Utiliza herramientas como tablas de frecuencia de manera adecuada para el almacenamiento de datos en las diferentes actividades y/o ejercicios.	5 puntos
Desarrolla las preguntas propuestas en la actividad 1 (Cierra la caja)	10 puntos
Desarrolla las preguntas propuestas en la actividad 2 (Tanto en uno como en dos)	10 puntos
Desarrolla las preguntas propuestas en la actividad 3 (Par con As)	10 puntos
Desarrolla el ejercicio 1	10 puntos
Desarrolla el ejercicio 2	10 puntos

Desarrolla el ejercicio 3	10 puntos
Desarrolla el ejercicio 4	10 puntos
TOTAL	100 puntos

Guía 2.

FACNED 50 AÑOS

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Matemáticas

194 Años Universidad del Cauca

Juegos con Dados
Significado Clásico de Probabilidad

Asignatura:	Matemática Recreativa	Guía:	2
Docente:		Semestre:	
Estudiante:		Código:	

Objetivos:

1. Analizar el significado clásico de probabilidad a través de juegos con dados.
2. Utilizar tablas para la recolección de datos estadísticos.
3. Explorar los conceptos que conforman en el significado clásico de probabilidad.
4. Explorar los conceptos relacionados con el significado clásico de probabilidad.
5. Asignar un valor numérico utilizando la regla de Laplace a la probabilidad que tiene un suceso de ocurrir.
6. Identificar entre sucesos dependientes e independientes.
7. Reconocer los campos de problemas, elementos lingüísticos, procedimientos y algoritmos, definiciones y propiedades, conceptos relacionados y argumentos que están involucrados en el significado clásico de probabilidad.

Temporalización: 4 horas

Contenidos: Significado clásico de Probabilidad, esperanza matemática, tablas de frecuencia, sucesos, espacio muestral, Regla de Laplace, combinatoria, variación, permutación.

Recursos necesarios: Los recursos necesarios para la realización de las actividades 1, 2 y 3 son: dados plásticos, fichas plásticas, marcadores, hojas de papel cuadriculado, regla, lápiz, borrador, plantillas, proyector para observar diapositivas.

Metodología actividad 1: Se presentan los conceptos de la probabilidad clásica de manera informal, para luego realizar la gran carrera de ciclistas (actividad 1), la cual consiste en organizar a los estudiantes en 2 grupos, quien serán los apostadores y las casas de apuestas. En el grupo designado para las casas de apuestas deberán organizarse 5 estudiantes por casa de apuestas (habrá 3 casas de apuestas), para el grupo de los apostadores habrá un estudiante que lanzara los dados y otro que llevara cuenta de las puntuaciones y los 13 restantes se encargaran de apostar. Luego de 3 carreras, los grupos cambiaran los roles.

Metodología actividad 2: Para esta actividad se formarán grupos de 5 estudiantes, quienes se organizarán de tal manera que realicen una circunferencia, se deberá sortear el turno de la primera persona que lanzara los dados (pueden lanzar un dado y quien saque el puntaje mayor será el primero en lanzar, de ahí lanzara la persona a su izquierda), cada estudiante hará un lanzamiento en su turno, donde la mano obtenida tendrá un valor en puntos. El estudiante que llegue a 12 puntos al sumar el valor de todas sus manos obtenidas al lanzar los dados, será el ganador.

Actividad 1. La Gran Carrera de Ciclistas.

¿Cómo jugar?

Tenemos una pista con 11 ciclistas enumerados del 2 al 12. Los ciclistas se encuentran en la línea de partida. Un estudiante se encarga de lanzar 2 dados, se suman los números en las caras superiores y se coloca una cruz sobre el ciclista, cuyo número corresponde a la suma.

										X
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

En el caso anterior al lanzar los dados la suma dio 12.

Respondamos lo siguiente:

1. La probabilidad de ganar para cada ciclista es la misma ¿sí o no? Mencione como se les llama a estos sucesos.
2. ¿Cuál es el ciclista que tiene más probabilidad de ganar? Dependiendo la respuesta anterior, ¿por cuál ciclista apostaría?

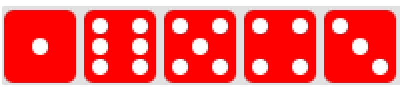
3. Si para llegar a la meta el ciclista ganador debe obtener doce cruces ¿En cuántas posiciones distintas podrían quedar los ciclistas?
4. Si de los once ciclistas debo escoger a cuatro de ellos para una carrera internacional ¿De cuantas formas podría hacer dicha elección?

Actividad 2: Dados de póquer

¿Cómo jugar?

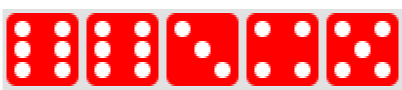
El juego de los dados de póquer consiste en lanzar 5 dados. Los posibles resultados que se muestran a continuación, tienen un nombre y un valor:

- Ninguno: Al lanzar los dados se producen cinco puntuaciones distintas.

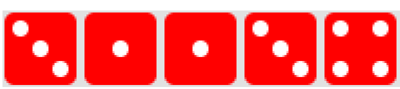
  El valor de esta mano es 0.

- Un par: Al lanzar los dados sucede que un puntaje ocurre dos veces y otros tres puntajes ocurren una vez cada uno.

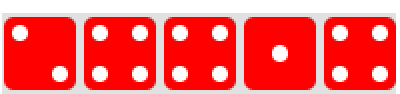
  El valor de esta mano es 1.

- Dos pares: Al lanzar los dados sucede que dos puntajes distintos ocurren dos veces y un puntaje ocurre una vez.

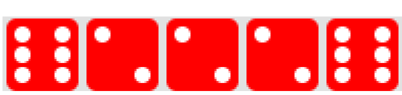
  El valor de esta mano es 2.

- Tres de una clase o Trio: Al lanzar los dados sucede que un puntaje ocurre tres veces y dos puntajes ocurren una vez cada uno.

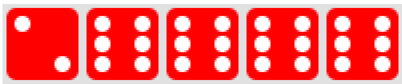
  El valor de esta mano es 3.

- Casa Llena o Full House: Al lanzar los dados sucede que un puntaje ocurre tres veces y otro puntaje ocurre dos veces.

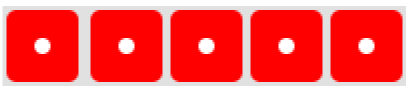
El valor de esta mano es 4.

- Cuatro de un rey o Póquer: Al lanzar los dados sucede que un puntaje ocurre cuatro veces y otro puntaje ocurre una vez.



El valor de esta mano es 5.

- Cinco de una clase: Al lanzar los dados sucede que un puntaje ocurre cinco veces.



El valor de esta mano es 6.

Para esta actividad se formarán grupos de 5 estudiantes, quienes se organizarán de tal manera que realicen una circunferencia, se deberá sortear el turno de la primera persona que lanzara los dados (pueden lanzar un dado y quien saque el puntaje mayor será el primero en lanzar, de ahí lanzara la persona a su izquierda), cada estudiante hará un lanzamiento en su turno, los resultados de cada lanzamiento deberán ser registrados en una tabla como se muestra a continuación.

Numero de lanzamiento	Valor de la mano	Puntaje Total
1	2	2
2	4	6
3	1	7
⋮		

El estudiante que llegue a 12 puntos al sumar el valor de todas sus manos obtenidas al lanzar los dados, será el ganador.

Respondamos lo siguiente:

1. Mencione cuantos lanzamientos mínimos son necesarios para ganar el juego. ¿Cuál es la probabilidad de este acontecimiento?
2. Si ahora el juego se gana a los 13 puntos. ¿Cuál es el número mínimo de lanzamientos para poder ganar y la probabilidad de que esto ocurra?
3. Si el juego se reduce a 4 puntos. ¿Cuál es el número mínimo de lanzamientos para poder ganar y su probabilidad de que esto ocurra?

Un poco de historia…

El reparto de las apuestas: Calandri, Pacioli y Tartaglia

Filippo Calandri, nacido en Siena hacia el año 1467, en uno de los primeros tratados de aritmética, publica una primera versión del llamado problema del reparto de apuestas que más tarde trataron en su correspondencia Pascal y Fermat. El problema lo plantea de la siguiente forma:

> Dos personas juegan a la palla grossa (Juego de pelota, antecedente del tenis), de forma que gana el juego el primero que consiga seis victorias. Por azar, cuando uno de los dos ha ganado 5 veces y el otro 3, explota la pelota y es imposible terminar el juego. Se quiere saber qué parte de la apuesta inicial le corresponde a cada uno.

La solución dada por Calandri, y las obtenidas más tarde por Luca Pacioli (1445-1514) y por Nicolo Fontana, apodado Tartaglia (1500-1557) son incorrectas, ya que su razonamiento se centra en los puntos ya obtenidos y no en las posibilidades (probabilidades) de ganar de cada participante.

Cardano y Galileo

A la muerte de Gerolamo Cardano (1501-1576) se encontró, entre sus manuscritos, el titulado Liber de Ludo Alae (Libro de los juegos de azar) la primera obra dedicada íntegramente a la probabilidad. Fue publicada en 1663. En esta obra Cardano incluye, junto con capítulos dedicados a consideraciones morales sobre el juego y anécdotas provenientes de su propia experiencia como jugador, una descripción detallada de los espacios muestrales correspondientes al lanzamiento de 1, 2 o 3 dados. Asimismo, presenta una primera aproximación al concepto de probabilidad en términos de proporciones.

La obra de Cardano Liber de Ludo Aleae comienza con una especie de autobiografía en la que mezcla anécdotas y trucos de jugador de dados, junto con consejos moralizantes sobre el peligro de los juegos de azar. Junto a afirmaciones como: los jugadores como los ladrones son viles pues están sórdidamente inclinados al lucro… aparecen métodos para saber cuándo un dado está adulterado o recomendaciones como: si estás decidido a jugar grandes cantidades, juega con alguien que no sea más hábil ni más afortunado que tú.

Galileo Galilei (1564-1642) establece la noción de probabilidad de un evento A como la proporción de resultados favorables a A respecto al número total de resultados posibles; y relaciona problemas combinatorios y juegos de azar.

Significado Clásico

La solución a algunos juegos de azar que eran de interés entre Pascal y Fermat, se considera el punto de partida de la teoría de la probabilidad. Pero según Batanero (2005) no fue sino hasta 1814 que Laplace acuño la definición que hoy enseñamos como regla de Laplace para la probabilidad de un suceso que puede ocurrir únicamente en un número finito de maneras.

Antes de hablar de la regla de Laplace debemos considerar algunos conceptos básicos de la probabilidad.

La UNIR establece la diferencia entre un suceso determinista y un suceso aleatorio. Un **suceso determinista** es aquel cuyo resultado está determinado por las condiciones iniciales; es decir, antes de realizar el experimento ya es posible determinar el resultado. En cambio, en un **suceso aleatorio** o no determinista se pueden dar varios resultados sin que sea posible predecir cuál va a ocurrir.

Por lo tanto, en un experimento aleatorio, a priori pueden surgir diferentes resultados posibles. El conjunto de posibles resultados básicos en un experimento aleatorio se denomina **espacio muestral**. Al repetir el experimento, obtendremos repeticiones de los posibles resultados que se han logrado. Cada posible resultado obtenido en un experimento se llama **suceso**. En otras palabras, el espacio muestral está conformado por los distintos sucesos.

Cabe aclarar que no todos los sucesos tienen la misma posibilidad de ocurrencia. Cuando dos o más sucesos tienen la misma probabilidad de ocurrencia se dice que son **sucesos equiprobables**. En cambio, si los sucesos no tienen la misma probabilidad de ocurrencia, hablamos de sucesos **no equiprobables**.

Para poder calcular la probabilidad de ocurrencia de un suceso, debemos considerar la **Regla de Laplace:**

$$P = \frac{n^{\text{o}}\ casos\ favorables}{n^{\text{o}}\ casos\ posibles}$$

Laplace define la probabilidad de un suceso como el «tamaño» que tiene ese suceso dentro del espacio muestral del experimento.

Pensemos en dos experimentos:

A. Extraer una carta al azar de una baraja de póquer y lanzar una moneda al aire.
B. Extraer dos cartas al azar de una bajara de póquer.

En el experimento A, podemos hacer la siguiente distinción: podemos apostar a que la carta extraída es corazones, o podemos hacer una apuesta combinada a que la carta es corazones y la moneda es cara. Acabamos de establecer la diferencia entre las probabilidades de sucesos simples (cartas) y las probabilidades de sucesos compuestos (cartas y monedas).

Ahora veamos la diferencia entre el experimento A y el experimento B, en ambos podemos hacer apuestas compuestas. Sin embargo, parece claro que en el experimento A, el resultado de la carta no está relacionado con el resultado de la moneda. En el experimento B, sin embargo, las condiciones cambiarán después de sacar la primera carta. En estos casos, estamos hablando de **sucesos independientes** (cartas y monedas) o **sucesos dependientes** (2 cartas en la misma baraja).

Los sucesos X (extraer una carta de corazones) e Y (obtener una cara al lanzar la moneda) son independientes, puesto que:

$$P(X \cap Y) = P(X)P(Y)$$

Es decir, para calcular la probabilidad de que ocurran ambos sucesos, basta con multiplicar la probabilidad de cada uno de ellos.

Si los sucesos no son independientes, es decir si la ocurrencia de uno condiciona la probabilidad de ocurrencia del segundo, esta fórmula no es válida.

Otros conceptos que se relacionan al significado clásico o a priori de la probabilidad cuando analizamos las distintas ordenaciones o agrupaciones que pueden realizarse en un conjunto de elementos dado, son los de la **Combinatoria.**

Variación: grupos de n elementos que pueden formarse en un conjunto formado por m elementos. El número de variaciones depende de n y de m y también de si permitimos repeticiones de elementos o no.

$$Variación\ con\ repetición: VR_m^n = m^n$$

$$Variación\ sin\ repetición: VR_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Combinación: las combinaciones se pueden definir como el número de formas en que se pueden extraer subconjuntos, sin repeticiones, a partir de un conjunto dado. El número de formas de escoger k elementos en un conjunto de n se calcula mediante el coeficiente binomial

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Permutación: número de ordenaciones que se pueden formar con todos los elementos, sin repetición, en conjunto ordenado. En un conjunto con n elementos, el número de permutaciones es $n!$

Ejercicios:

1. Preguntas conceptuales:
   a. ¿Cuál es la diferencia entre un suceso determinista y un suceso aleatorio?
   b. Explique la relación que tiene el espacio muestral y los sucesos.
   c. ¿Cuándo un suceso es equiprobable y no equiprobable?
   d. ¿A qué se refiere cuando habla de sucesos dependientes y sucesos independientes?
2. ¿Hubo algo que llamo su atención en las 2 actividades propuestas? Por favor hacer una descripción de ello.
3. Una de las preguntas del juego cierra la caja fue: ¿Hay un número mínimo de lanzamientos para poder ganar? Si o no ¿Por qué?
   La respuesta a esta pregunta es que el número mínimo de lanzamientos para poder ganar es de cuatro, si contamos con tal suerte que ocurra que en tres lanzamientos se saque par de seis y en otro lanzamiento una combinación que sume nueve, para cerrar las tapas

1,2,3,6 (un lanzamiento), 4,8 (otro lanzamiento), 5,7 (otro lanzamiento) y 9 en otro lanzamiento. Calcule la probabilidad de que esto ocurra.

4. Dos jugadores, que han depositado una apuesta inicial, lanzan repetidamente una moneda, el primero gana si sale cara y el segundo si sale cruz. Han decidido que el primero que gane seis veces (consecutivas o no) se llevará el total de la apuesta. En un momento dado han salido (en cualquier orden) cinco caras y tres cruces y el juego debe ser interrumpido. ¿Cómo deben repartirse la apuesta?

5. Complete la siguiente tabla:

Significado de la Probabilidad	Campos de problemas	Elementos lingüísticos	Procedimientos y algoritmos	Definiciones y propiedades	Conceptos relacionados	Argumentos y demostraciones
Clásico	Cálculo de esperanzas y riesgos en juegos de azar				Esperanza Equitatividad Independencia	

Evaluación:

1. Para la evaluación de estas sesiones de clase se tendrán en cuenta la asistencia y participación del estudiante en la clase.

2. Las respuestas tanto de las preguntas de las actividades como de los ejercicios serán entregadas en hojas que debe contener los datos del estudiante: nombres, apellidos, asignatura, número de celular y código. En lo posible enumera las hojas y asegúrate que tu trabajo está muy bien ordenado.

3. La siguiente, es la rúbrica de evaluación del desarrollo de la guía 1. Asegúrate de cumplir con la totalidad de las actividades. Debes obtener como mínimo 70 puntos del puntaje total para aprobar.

CRITERIO	PUNTAJE
Demuestra honestidad, interés, creatividad y compromiso en el desarrollo de las actividades y/o ejercicios.	10 puntos
Expone sus ideas con un lenguaje adecuado de manera clara y organizada en las diferentes actividades y/o ejercicios.	5 puntos
Desarrolla las preguntas propuestas en la actividad 1 (La gran carrera de ciclistas)	15 puntos
Desarrolla las preguntas propuestas en la actividad 2 (Dados del póquer)	20 puntos

Desarrolla el ejercicio 1	10 puntos
Desarrolla el ejercicio 2	10 puntos
Desarrolla el ejercicio 3	10 puntos
Desarrolla el ejercicio 4	10 puntos
Desarrolla el ejercicio 5	10 puntos
TOTAL	100 puntos

Guía 3.

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Matemáticas

Simulación
Significado Frecuencial de Probabilidad

Asignatura:	Matemática Recreativa	Guía:	3
Docente:		Semestre:	
Estudiante:		Código:	

Objetivos:

1. Analizar el significado frecuencial de probabilidad a través de simulación.
2. Explorar los conceptos que conforman en el significado frecuencial de probabilidad.
3. Explorar los conceptos relacionados con el significado frecuencial de probabilidad.
4. Establecer la relación entre el número de intentos en el experimento y la probabilidad de ocurrencia de los sucesos.
5. Reconocer los campos de problemas, elementos lingüísticos, procedimientos y algoritmos, definiciones y propiedades, conceptos relacionados y argumentos que están involucrados en el significado frecuencial de probabilidad.

Temporalización: 2 horas

Contenidos: Significado frecuencial de Probabilidad, simulación, tablas de frecuencia, gráficos estadísticos.

Recursos necesarios: Los recursos necesarios para la realización de la actividad 1 son: simuladores, proyector para observar diapositivas y páginas web.

Metodología actividad 1: Se presentan los conceptos de la probabilidad frecuencial de manera informal, para luego hacer uso de algunos simuladores de azar.

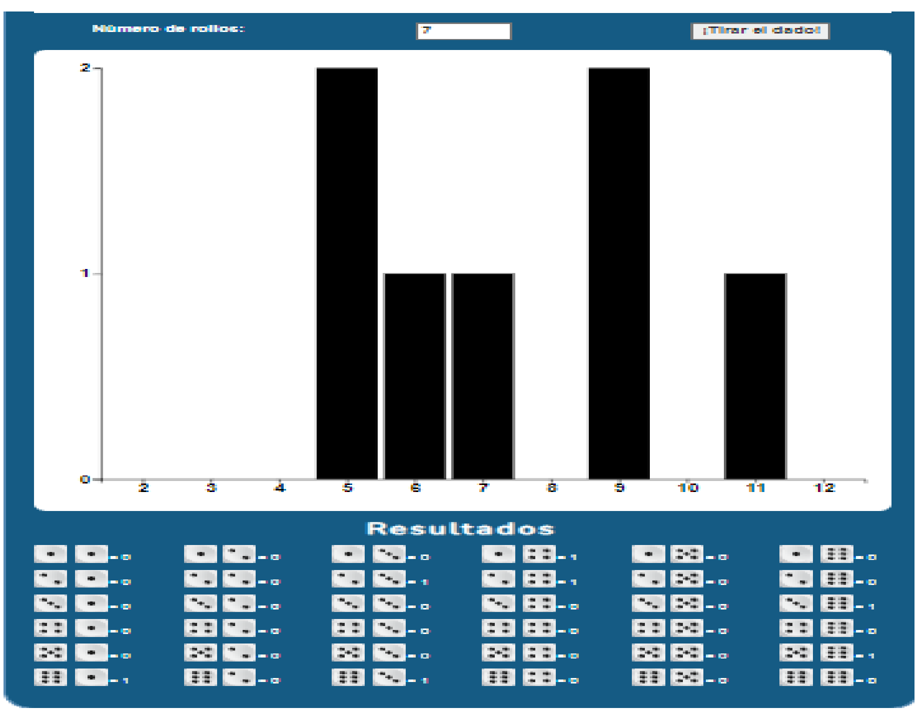
Número del ciclista	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Actividad 1. Experiencia con la simulación.

Simulación del lanzamiento de dos dados.

En el siguiente enlace, se encuentra un simulador de dos dados, donde se podrá elegir el número de lanzamientos a realizar, una vez efectuada la elección del número de lanzamientos, y seleccionando el botón “tirar el dado”, el simulador arrojará un diagrama de barras donde en el eje horizontal aparecerá la suma de las puntuaciones de los dados, en el eje vertical estará el número de veces que dichas sumas aparecieron, además en la parte inferior del diagrama estarán los sucesos elementales de los dos dados y cuantas veces ocurrieron en la simulación.

https://nces.ed.gov/nceskids/chances.asp



En la imagen se muestra la simulación con 7 tiradas.

Probabilidad de ocurrencia	0,0278	0,0556	0,0833	0,1111	0,1389	0,1667	0,1389	0,1111	0,0833	0,0556	0,0278
Probabilidad porcentual	2,78%	5,56%	8,33%	11,11%	13,89%	16,67%	13,89%	11,11%	8,33%	5,56%	2,78%

En la “Gran Carrera de Ciclistas” las cruces a colocar a cada ciclista dependían de la suma de las puntuaciones de dos dados, se calcularon las probabilidades de cada uno de los ciclistas, obteniendo los siguientes resultados:

Ejercicios:

1. Ingrese en el simulador el número de lanzamientos necesarios para que la probabilidad frecuencial de cada ciclista, se acerque a la probabilidad de la tabla anterior.
2. Escriba el número de lanzamientos que considero adecuado para la aproximación anterior y los resultados obtenidos en una tabla.
3. De una opinión del ejercicio realizado.

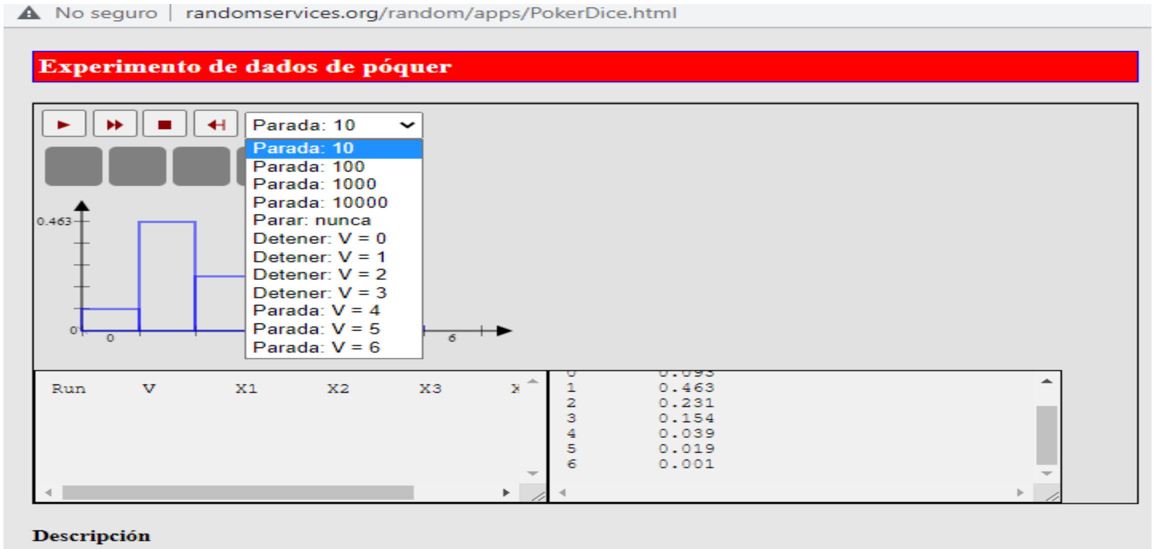
Simulación de los dados de Póquer

Para realizar la simulación del juego dados de Póquer, se ingresará al enlace a continuación:
http://www.randomservices.org/random/apps/PokerDice.html

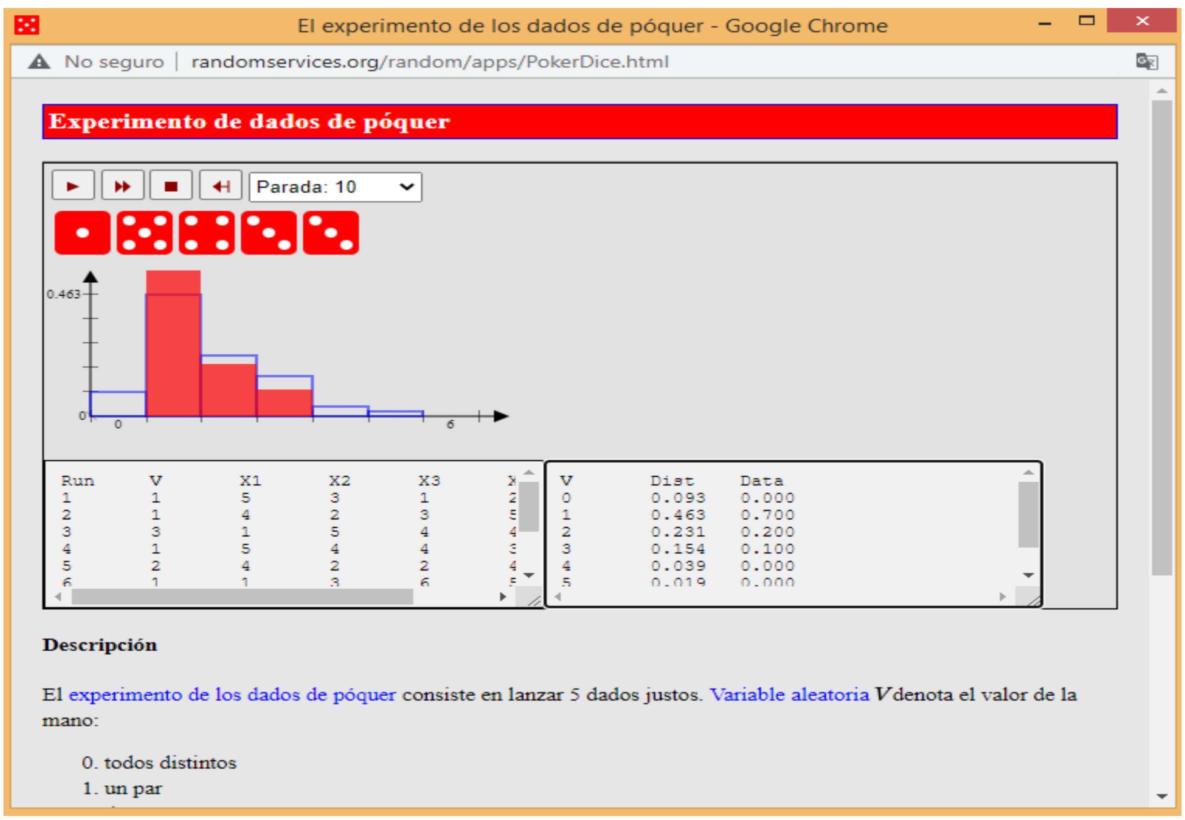
En esta simulación se encuentran distintas opciones a elegir, como: parar cuando se hayan completado 10, 100, 1000, 10000 lanzamientos o incluso nunca parar. También parar cuando se llegue algún tipo de mano determinada, recordemos que cada mano tiene un valor que va desde 0 hasta 6.

Adicional a ello en el simulador, se encuentra un diagrama de barras donde en el eje horizontal se encuentra el valor de las manos (0,1,2,3,4,5,6) y en el eje vertical la probabilidad de cada uno de los valores de las manos, cuyas probabilidades se resaltan con una línea azul.

En la parte inferior del diagrama de barras se encuentran dos tablas de datos donde se visualizan los resultados obtenidos y la descripción del juego.



Una vez ejecutado el simulador aparecerá en el diagrama de barras, unas barras rojas que mostraran la probabilidad frecuencial de cada una de las manos.



Ejercicios:

1. Ejecute el experimento de dados de póquer 1000 veces y compare en el diagrama la probabilidad en azul y la probabilidad frecuencial. Realice un comentario de lo acontecido.

2. En el experimento de dados de póquer, establezca el criterio de parada en el valor de V que se indica a continuación.
    a. V=3
    b. V=4
    c. V=5
    d. V=6

    Tenga en cuenta el número de lanzamientos que se requirió para llegar a la mano, y realice la probabilidad frecuencial. Compare este resultado con la probabilidad teórica de cada valor de la mano.

NOTA: En la web se cuenta con muchos recursos para realizar simulaciones, a continuación, se comparte enlaces de sitios donde se encuentra teoría, historia, actividades, datos curiosos, WebQuest, simuladores, entre otras herramientas para el desarrollo de contenidos estadísticos y de probabilidad.

- Estadística para todos. http://www.estadisticaparatodos.es/historia/historia.html
- Random (Aleatorio). http://www.randomservices.org/random/index.html
- Probabilidad y juego. https://www.juntadeandalucia.es/averroes/centros-tic/14002996/helvia/aula/archivos/repositorio/0/214/html/probabilidad/historia/historia1m.htm
- Centro nacional de estadísticas educativas. https://nces.ed.gov/nceskids/chances.asp
- Recursos Tic de educación. http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/3esomatematicas/3quincena12/3quincena12_presenta_1a.htm

Un poco de historia…

La correspondencia entre Pascal y Fermat

En 1654, Antoine Gombauld, conocido como Caballero de Méré planteó al matemático Blaise Pascal (1623-1662) un problema de reparto de apuestas similar a los ya mencionados.

Las cartas que sobre este problema intercambiaron en el año 1654 Pascal y el matemático Pierre de Fermat (1601-1665) sentaron las bases de la teoría de probabilidades. Ambos obtienen una solución correcta del problema del reparto de apuestas. De hecho, Pascal obtiene una solución general al problema apoyándose en resultados sobre el triángulo aritmético que había obtenido en 1653.

La siguiente contribución importante para la Teoría de la Probabilidad se debe a Christiaan Huygens (1629-1695) quien visitó Francia en 1655 atraído por las investigaciones recientes de Pascal y Fermat. Los resultados de sus reflexiones dieron nacimiento al tratado De Ratiociniis de Ludo Aleae que se publicó en 1657. En este trabajo Huygens resuelve el Problema de los Puntos de forma general con un método diferente a los empleados por Pascal y Fermat, introduciendo el primer concepto que distingue a la Teoría de Probabilidad de las otras ramas de la matemática: el concepto de valor esperado o esperanza matemática.

El matemático español Juan Caramuel (1606-1682) que estudió en las Universidades de Alcalá y Salamanca y se doctoró en Lovaina, aborda también, en un apartado titulado Kybeia (término griego que designa el juego de dados) de su obra Mathesis Biceps, el problema de la división de apuestas y describe todos los posibles resultados del lanzamiento de dos dados, en los siguientes términos: si se juega con dos dados, el número más pequeño será el dos, que en español se dice azar, o sea desafortunado, y el mayor será 12. ... El ternario se manifiesta cuando los dados marcan 1 y 2, o 2 y 1, luego puede salir de dos maneras.

Significado Frecuencial

La UNIR (2021) menciona que la ley de los grandes números, demostrada por Bernoulli en el s. XVII, establece la relación entre el número de intentos en el experimento y la probabilidad de ocurrencia de los sucesos. En la terminología actual, podemos considerar lo siguiente: La probabilidad de ocurrencia de un suceso puede estimarse por la frecuencia relativa del mismo suceso observado en un experimento. Está claro que cuantas más iteraciones realicemos en el experimento, mejor será la aproximación de la frecuencia relativa a la verdadera probabilidad del suceso en cuestión.

Probabilidad a posteriori (medida frecuentista, empírica o intuitiva de probabilidad): Es aquella resultante después de observar un fenómeno aleatorio en el largo plazo. Bajo este enfoque, la probabilidad de cualquier resultado de un fenómeno aleatorio es la proporción de veces que el resultado podría ocurrir en una larga serie de observaciones del fenómeno. En términos generales, se puede decir que, si un fenómeno aleatorio se observa un gran número de veces, digamos $\boldsymbol{n}$, de las cuales el evento A ocurrió $\boldsymbol{n}_{\mathrm{A}}$ veces, entonces la frecuencia relativa del evento A, $f_{\mathrm{A}} = \frac{n_A}{n}$, tiende a la probabilidad del evento A, $P(A)$.

En símbolos, $\lim_{n\to\infty} f_A = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n_A}{n}\right) \cong P(A)$. Es importante destacar que por la llamada "Ley de los grandes números", se espera que las probabilidades a posteriori vayan tornándose igual (tiendan) a las probabilidades a priori.

Por tanto, el significado frecuencial define la probabilidad como un número hipotético hacia el cual tiende la frecuencia relativa al estabilizarse.

La UNIR (2021) comenta que algunos problemas de esta interpretación son los siguientes:

- Nunca se obtiene el valor exacto de la probabilidad, sino una estimación.
- Algunos experimentos no se pueden replicar bajo las mismas condiciones exactamente.
- No es sencillo saber cuál es el número necesario de repeticiones hasta tener una buena estimación para la probabilidad.
- Algunos sucesos no son repetibles, especialmente en economía, historia, medicina, etc.

Otras críticas a la definición de probabilidad frecuencial:

El concepto de límite es irreal: La fórmula propuesta para el concepto, asume que la probabilidad de un suceso debe estabilizarse cuando repetimos el experimento infinitas veces. Es decir, cuando n tiende a infinito. Sin embargo, en la práctica es imposible repetir algo infinitas veces.

No asume una sucesión verdaderamente aleatoria: El concepto de límite, al mismo tiempo, supone que una probabilidad debe estabilizarse. Sin embargo, el mismo hecho de estabilizarse, matemáticamente, no permite asumir que la sucesión sea verdaderamente aleatoria. De alguna manera, indica que se trata de algo determinado.

Ejercicios:

1. Preguntas de opinión:
    a. ¿Cree usted que es necesario experimentar con la simulación para obtener un concepto adecuado de la probabilidad? Justifique su respuesta.
    b. ¿Para qué conceptos matemáticos (distintos a la probabilidad) cree usted que se pueda realizar simulación para lograr una mejor compresión?
2. Considere el juego DADOS A SEIS y suponga que ahora se pagan $1000 pesos por jugar y si gana obtiene $2500 pesos. Manuel tiene 200 mil pesos y decide invertirlos y paga 200 juegos de DADOS A SEIS. Él espera recuperar el dinero invertido y obtener algo de ganancia. ¿Apoyaría la decisión de Manuel? Justifique su respuesta.
3. Complete la siguiente tabla:

Significado de la Probabilidad	Campos de problemas	Elementos lingüísticos	Procedimientos y algoritmos	Definiciones y propiedades	Conceptos relacionados	Argumentos y demostraciones
Frecuencial			Registros de datos estadísticos a posteriori Ajuste de curvas matemáticas Análisis matemático Simulación		Frecuencia relativa Universo Variable aleatoria Distribución de probabilidad	

Evaluación:

1. Para la evaluación de estas sesiones de clase se tendrán en cuenta la asistencia y participación del estudiante en la clase.
2. Las respuestas tanto de las preguntas de las actividades como de los ejercicios serán entregadas en hojas que debe contener los datos del estudiante: nombres, apellidos, asignatura, número de celular y código. En lo posible enumera las hojas y asegúrate que tu trabajo está muy bien ordenado.
3. La siguiente, es la rúbrica de evaluación del desarrollo de la guía 1. Asegúrate de cumplir con la totalidad de las actividades. Debes obtener como mínimo 70 puntos del puntaje total para aprobar.

CRITERIO	**PUNTAJE**
Demuestra honestidad, interés, creatividad y compromiso en el desarrollo de las actividades y/o ejercicios.	10 puntos
Expone sus ideas con un lenguaje adecuado de manera clara y organizada en las diferentes actividades y/o ejercicios.	10 puntos
Desarrolla los ejercicios en la actividad 1 (Experiencia con la simulación)	40 puntos
Desarrolla el ejercicio 1	10 puntos
Desarrolla el ejercicio 2	20 puntos
Desarrolla el ejercicio 3	10 puntos
TOTAL	100 puntos

Guía 4.

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Matemáticas

Juegos con urnas, dados, monedas
Significado Subjetivo de Probabilidad

Asignatura:	Matemática Recreativa	Guía:	4
Docente:		Semestre:	
Estudiante:		Código:	

Objetivos:

1. Analizar el significado subjetivo de probabilidad a través de juegos con urnas, dados, monedas.
2. Explorar los conceptos que conforman en el significado subjetivo de probabilidad.
3. Explorar los conceptos relacionados con el significado subjetivo de probabilidad.
4. Hacer uso de diagramas de árbol para la solución de los problemas planteados.
5. Hacer uso del concepto de probabilidad condicional y el teorema de Bayes para solucionar los problemas propuestos.
6. Reconocer los campos de problemas, elementos lingüísticos, procedimientos y algoritmos, definiciones y propiedades, conceptos relacionados y argumentos que están involucrados en el significado subjetivo de probabilidad.

Temporalización: 2 horas

Contenidos: Significado subjetivo de Probabilidad, sucesos dependientes, probabilidad condicional, diagrama de árbol.

Recursos necesarios: Los recursos necesarios para la realización de la actividad 1 son: 2 urnas, 24 pelotas de diferentes colores, dos dados, una moneda, proyector para observar diapositivas.

Metodología actividad 1: Se presentan los conceptos de la probabilidad subjetiva de manera informal, para luego realizar la actividad 1.

Actividad 1. Juego con una moneda, un dado y dos urnas.

Inicialmente se forman cuatro equipos con los estudiantes. Una vez formados los cuatro equipos (Equipo A, equipo B, Equipo C, equipo D), se procede a mencionar las condiciones del juego:

Los equipos A y B se enfrentarán donde resultara un equipo ganador, luego los equipos C y D, los equipos ganadores de las rondas anteriores, se enfrentarán en una última ronda obteniendo un solo equipo ganador de los cuatro formados.

Descripción.

Hay dos urnas, donde una urna le corresponderá un equipo, cada urna contiene 12 pelotas de diferentes colores (3 azules, 3 moradas, 2 naranjas, 2 verdes, 1 verde fluorescente, 1 fucsia), también se jugará con un dado y una moneda.

¿Cómo ganar?

El juego consiste en, que de los dos equipos que se enfrenten, uno de ellos deberá obtener todas las pelotas del otro, para ganar la ronda, de la siguiente manera:

Por turnos saldrá un jugador de cada equipo, quienes decidirán entre la cara o la cruz de una moneda, para luego lanzarla, quien gane, lanzará un dado y la puntuación obtenida en el dado será el número de pelotas que deberá extraer de la urna del equipo contrario.

Existen dos reglas adicionales:

Si se saca la pelota verde fluorescente es permitido sacar una pelota extra.

Si se saca la pelota fucsia se pierde una pelota de las ya obtenidas.

Ejercicios:

1. Con los jugadores de cada equipo analizar los materiales, condiciones y reglas del juego anterior, para luego proponer un juego que contenga los mismos o más materiales, diferentes condiciones y reglas para ganar.
2. De las cuatro propuestas de juego que se obtendrán de los equipos, se llegara a un consenso para construir un nuevo juego, para luego jugarlo.
3. Se deberá contestar las preguntas propuestas para el nuevo juego.

Un poco de historia…

Bernoulli y Bayes

Fue Jacques Bernoulli (1656-1705) el primero en discutir la idea de que la probabilidad se calcule a priori, a partir de las simetrías del dispositivo que se utiliza en el experimento aleatorio, y que ésta se determine a posteriori después de observar el resultado de un gran número de experiencias.

En su tratado Ars Conjectandi de 1713, justificó la identificación de probabilidad y frecuencia mediante su Ley de los grandes números.

El reverendo Thomas Bayes (1702-1761), matemático inglés, dedicó su vida al estudio de las causas de los hechos.

Este estudio, casi teológico, dedicado a demostrar la existencia de un creador, a la búsqueda de una *Causa fundamental de las cosas*, motivó un trabajo publicado en 1763 sobre la probabilidad de las causas posibles a partir de acontecimientos observados, es decir, sobre la probabilidad condicionada. Su conocida fórmula obtiene, conocidos los efectos de una familia de causas y el efecto final, la probabilidad de que se haya dado una concreta entre esas causas.

El uso en la Ciencia del teorema de Bayes es frecuente, ya que permite cuantificar la probabilidad de una hipótesis en vista de la evidencia.

Es sabido que, en caso de que la evidencia sea confirmatoria, el apoyo que le presta a la hipótesis propuesta cuando dicha evidencia es considerada probable es muy pequeño; en cambio, ese apoyo es muy fuerte cuando la evidencia es poco probable.

Significado Subjetivo

La repetición de un experimento bajo las mismas condiciones es la base para las interpretaciones clásica y de frecuencia relativa de la probabilidad. Sin embargo, muchos fenómenos no se prestan para repetición, pero a pesar de esto requieren una noción de probabilidad. En este caso la probabilidad se interpreta como el grado de creencia personal con respecto a la ocurrencia de una afirmación.

En este significado se transforma probabilidades a priori (antes de realizar el experimento) en probabilidades a posteriori (una vez observadas sus consecuencias), incorporando la nueva información y revisando la probabilidad de un mismo suceso.

Aquí se involucra la regla de Bayes:

$$P\left({}^{A}/_{B}\right) = \frac{P\left({}^{B}/_{A}\right)P(A)}{P(B)}$$

Donde:

P(A): probabilidad de que suceda A

P(B): probabilidad de que suceda B

P(A/B): probabilidad de que suceda A, dado que ha acontecido B

P(B/A): probabilidad de que suceda B, dado que ha acontecido A

Esta fórmula nos permite calcular probabilidades condicionadas. Hablamos de la probabilidad de ocurrencia del suceso A, sabiendo que ocurre también el suceso B. Es decir, estamos estableciendo una diferencia entre la probabilidad del suceso A y la probabilidad de ocurrencia de ese mismo suceso, sabiendo que ha ocurrido otro.

Si consideramos un experimento en el que existe una partición del espacio muestral, A1, A2, …, An y un suceso B del que conocemos las probabilidades condicionadas P(B|A1), …, P(B|An), entonces podemos calcular la probabilidad de ocurrencia del suceso B mediante la fórmula dada por el Teorema de Probabilidad Total:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P\left(B/_{A_i}\right) P(A_i)$$

Ejercicios:

1. El Problema de Monty Hall es un problema de probabilidad que está inspirado por el concurso televisivo estadounidense Let's Make a Deal (Hagamos un trato), famoso entre 1963 y 1986. Su nombre proviene del presentador, Monty Hall.

   En este concurso, el concursante escoge una puerta entre tres, y su premio consiste en lo que se encuentra detrás. Una de ellas oculta un coche, y tras las otras dos hay una cabra. Sin embargo, antes de abrirla, el presentador, que sabe dónde está el premio, abre una de las otras dos puertas y muestra que detrás de ella hay una cabra. Ahora tiene el concursante una última oportunidad de cambiar la puerta escogida ¿Debe el concursante mantener su elección original o escoger la otra puerta? ¿Hay alguna diferencia?
   ¿Cuál sería la opción correcta?

   a) Quedarse con la puerta inicial
   b) Cambiar a la otra puerta
   c) Es irrelevante cambiar o no cambiar

   Para dar justificación a su elección debe dar una explicación gráfica, intuitiva y matemática.

   Sugerencias:

   Para la explicación matemática tenga en cuenta los siguientes sucesos:

   Suceso A: El jugador selecciona la puerta que contiene el coche en su selección inicial.

   Suceso B: El jugador selecciona una puerta que contiene una cabra en su selección inicial.

   Suceso C: El jugador gana el coche.

   Estamos interesados en calcular $P(C)$ para cada tipo de jugador (El jugador que nunca cambia de puerta, el jugador que siempre cambia de puerta).

   Para calcular $P(C), basta\ con\ notar\ que\ C = (C \cap A)\ U\ (C \cap B)\ ya\ que\ A \cap B = \emptyset\ y\ A\ U\ B = E\ (Espacio\ muestral)$.

Si está interesado en ver cómo funciona el juego, ejecute el juego de Monty Hall mediante el simulador que se encuentra en el siguiente link, realice 20 juegos donde seleccione alguna de las puertas, pero no cambie la puerta, luego realice 20 juegos donde siempre cambie la puerta que selecciono inicialmente, compare cuál de las estrategias le resulto mejor.

http://www.randomservices.org/random/apps/MontyHall2.html

2. Complete la siguiente tabla:

Significado de la Probabilidad	Campos de problemas	Elementos lingüísticos	Procedimientos y algoritmos	Definiciones y propiedades	Conceptos relacionados	Argumentos y demostraciones
Subjetivo			Teorema de Bayes Asignación subjetiva de probabilidades	Carácter subjetivo Revisable con la experiencia		

Evaluación:

1. Para la evaluación de estas sesiones de clase se tendrán en cuenta la asistencia y participación del estudiante en la clase.

2. Las respuestas tanto de las preguntas de las actividades como de los ejercicios serán entregadas en hojas que debe contener los datos del estudiante: nombres, apellidos, asignatura, número de celular y código. En lo posible enumera las hojas y asegúrate que tu trabajo está muy bien ordenado.

3. La siguiente, es la rúbrica de evaluación del desarrollo de la guía 1. Asegúrate de cumplir con la totalidad de las actividades. Debes obtener como mínimo 70 puntos del puntaje total para aprobar.

CRITERIO	PUNTAJE
Demuestra honestidad, interés, creatividad y compromiso en el desarrollo de las actividades y/o ejercicios.	10 puntos
Expone sus ideas con un lenguaje adecuado de manera clara y organizada en las diferentes actividades y/o ejercicios.	10 puntos
Desarrolla los ejercicios en la actividad 1	30 puntos
Desarrolla el ejercicio 1	30 puntos

Desarrolla el ejercicio 2	20 puntos
TOTAL	100 puntos

Guía 5.

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Departamento de Matemáticas

Juegos con cartas
Significado Axiomático de Probabilidad

Asignatura:	Matemática Recreativa	Guía:	5
Docente:		Semestre:	
Estudiante:		Código:	

Objetivos:

1. Analizar el significado axiomático de probabilidad a través de juegos con cartas.
2. Explorar las definiciones, axiomas y teoremas que conforman en el significado axiomático de probabilidad.
3. Explorar los conceptos relacionados con el significado axiomático de probabilidad.
4. Hacer uso de las definiciones, axiomas y teoremas dentro de la probabilidad axiomática para solucionar los problemas propuestos.
5. Reconocer los campos de problemas, elementos lingüísticos, procedimientos y algoritmos, definiciones y propiedades, conceptos relacionados y argumentos que están involucrados en el significado axiomático de probabilidad.

Temporalización: 2 horas

Contenidos: Definiciones, axiomas y teoremas dentro del Significado axiomático de probabilidad.

Recursos necesarios: Los recursos necesarios para la realización de la actividad 1 son: 5 barajas de cartas, proyector para observar diapositivas.

Metodología actividad 1: Se presentan las definiciones, axiomas y teoremas de la probabilidad axiomática de manera formal, luego se formarán grupos de 6 estudiantes para realizar la actividad 1.

Actividad 1. Póquer de sorteo

En el póquer de sorteo, a cada jugador se le reparte una mano de póquer (consta de 5 cartas) y hay una ronda inicial de apuestas (Los jugadores pueden no ir a la apuesta que un jugador realice, en ese momento quedaran fuera de la partida). Luego cada jugador deberá considerar si quedarse su mano inicial o descartar hasta 3 cartas y se le reparte esa cantidad de cartas del mazo restante, para formar una nueva mano, para luego hacer una última ronda de apuestas. Gana el jugador con la mejor mano.

A continuación, se muestra las distintas manos de Póquer, ordenadas de la mejor a la peor.

Ejercicios:

1. Identifique y escriba los conceptos de la probabilidad axiomática que se encuentran en el juego Póquer de sorteo.
2. Calcule el número de manos de póquer diferentes.

3. Consideremos los siguientes eventos: A: tener carta alta, B: tener un par, C: tener dos pares, D: tener un trio, E: tener escalera, F: tener color, G: tener full, H: tener póquer, I: tener escalera de color, J: tener escalera real. La probabilidad de ellos es:
$\mathrm{P(A)} \approx 0.501177$ $\mathrm{P(B)} \approx 0.422569$ $\mathrm{P(C)} \approx 0.047539$ $\mathrm{P(D)} \approx 0.021129$

   $\mathrm{P(E)} \approx 0.003925$ $\mathrm{P(F)} \approx 0.001965$ $\mathrm{P(G)} \approx 0.001441$ $\mathrm{P(H)} \approx 0.000240$

   $\mathrm{P(I)} \approx 0.000013$ $\mathrm{P(J)} \approx 0.000001$

   Encuentre la probabilidad de obtener una mano que sea un trío o mejor. Realice la solución de manera formal.

Un poco de historia…

De Laplace a Kolmogorov

En 1812 Pierre de Laplace (1749-1827) en su obra Teoría Analítica de las Probabilidades introdujo una gran cantidad de nuevas ideas y técnicas.

Antes de Laplace la teoría de la probabilidad se relacionaba solamente con el desarrollo de las matemáticas y de los juegos de azar. Laplace aplicó métodos probabilísticos a muchos problemas prácticos o científicos: la teoría de los errores, la matemática actuarial, la mecánica estadística, etc.

Como otras ramas de las matemáticas el desarrollo de la teoría de la probabilidad fue estimulada por sus aplicaciones en otras ciencias. Entre los matemáticos que contribuyeron a su desarrollo destacan Chebyshev, Markov y Kolmogorov.

Una de las dificultades en el desarrollo de esta teoría fue el obtener una definición precisa de probabilidad.

La búsqueda de esta definición duró casi tres siglos y fue resuelta finalmente en 1933 por el ruso Andrey Kolmogorov (1903-1987) que finalmente construye una teoría axiomática de la probabilidad.

Significado Axiomático

A lo largo del siglo XX diferentes autores contribuyeron a la formalización de una teoría de la probabilidad. Borel contemplo la probabilidad como un tipo especial de medida, mientras que Kolmogorov uso esta idea, aplicando la teoría de conjuntos y de la medida, para deducir una axiomática que sido aceptada en todas las escuelas, independientemente del significado filosófico otorgado a la naturaleza de la probabilidad.

Para formalizar la definición de probabilidad, a través de un conjunto de axiomas, presenta los conceptos básicos de la teoría de conjuntos (o sucesos), sobre los cuales se fundamenta la definición formal de probabilidad. Esta definición es tan general que permite incorporar las distintas interpretaciones de la probabilidad, mencionadas anteriormente.

A continuación, se presentarán las definiciones de la teoría de conjuntos, axiomas de probabilidad, teoremas y demás definiciones expuestas en el libro PROBABILIDAD Y ESTADISTICA Aplicaciones y métodos de George Canavos (1984/1988):

Definición 1. Si un experimento que está sujeto al azar, resulta de n formas igualmente probables y mutuamente excluyentes, y si n_A de estos resultados tienen un atributo A, la probabilidad de A es la proporción de n_A con respecto a n.

Definición 2. Si un experimento se repite n veces bajo las mismas condiciones y n_B de los resultados son favorables a un atributo B, el límite de $\frac{n_B}{n}$ conforme n se vuelve grande, se define como la probabilidad del atributo B.

Definición 3. El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio recibe el nombre de *espacio muestral.*

El conjunto de todos los posibles resultados puede ser finito, infinito numerable o infinito no numerable.

Definición 4. Se dice que un espacio muestral es *discreto* si su resultado puede ponerse en correspondencia uno a uno con el conjunto de los enteros positivos.

Definición 5. Se dice que un espacio muestral es *continuo* si sus resultados consisten en un intervalo de números reales.

Con respecto a los resultados de un espacio muestral, se pude estar particularmente interesado en un subconjunto de estos.

Definición 6. Un *evento (o suceso)* en el espacio muestral es un grupo de resultados contenidos en esté, cuyos miembros tienen una característica en común.

Por característica en común debe entenderse que únicamente un grupo de resultados en particular satisface la característica y los restantes, contenidos en el espacio muestral, no. Se dice que ha ocurrido un evento si los resultados del experimento aleatorio incluyen a algunos de los que definen al evento. Así el espacio muestral entendido como un evento, tendrá un 100% de ocurrencia, a esto se le denomina *evento seguro*.

Definición 7. El evento que contiene a ningún resultado del espacio muestral recibe el nombre de evento nulo o vacío.

Recordemos algunas definiciones de la teoría de eventos (o sucesos). Sean E_1 y E_2 cualesquiera dos eventos que se encuentran en un espacio muestral denotado por S.

Definición 8. El evento formado por todos los posibles resultados en E_1 o E_2 o en ambos, recibe el nombre de la unión de E_1 y E_2 y se denota por $E_1 \cup E_2$.

Definición 9. El evento formado por todos los resultados comunes tanto a E_1 como E_2 recibe el nombre de intersección de E_1 y E_2 y se denota por $E_1 \cap E_2$.

Definición 10. Se dice que los eventos E_1 y E_2 son mutuamente excluyentes o disjuntos sino tienen resultados en común; en otras palabras, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ un evento vacío.

Definición 11. Si cualquier resultado de E_2 también es resultado de E_1, se dice que el evento E_2 está contenido en E_1, y se denota por $E_2 \sqsubset E_1$.

Definición 12. El complemento de un evento E con respecto al espacio muestral S, es aquel que contiene a todos los resultados de S que no se encuentran en E, y se denota por $\bar{E}$.

La probabilidad es un número real que mide la posibilidad de que ocurra un resultado del espacio muestral, cuando se realiza un experimento. Por lo tanto, la probabilidad de un evento también es un número real que mide la posibilidad colectiva, de ocurrencia, de los resultados del evento cuando se lleve a cabo el experimento. En Canavos (1984/1988) se da la definición axiomática de probabilidad.

Definición 13. Sean S cualquier espacio muestral y E cualquier evento de este. Se llamará función de probabilidad sobre el espacio muestral S a P(E) si satisface los siguientes axiomas:

1. $P(E) \geq 0$
2. $P(S) = 1$
3. Si, para todos los eventos E_1, E_2, E_3, …,
   $E_i \cap E_j = \emptyset$ para toda $i \neq j$, entonces $P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots$

Las razones de estos tres axiomas se hacen evidentes, por ejemplo, cuando se analiza la probabilidad como una explicación de la frecuencia relativa. Es decir, la probabilidad de un evento refleja la proporción de veces que ocurre cuando se repite el experimento. Estos axiomas también son evidentes para la interpretación subjetiva de la probabilidad, para la cual cualquier grado de creencia se convierte en una razón. Entonces, la probabilidad se comporta como una escala, donde la probabilidad es un número entre cero y uno, y dado que es forzoso que ocurra un resultado cuando se lleva a efecto un experimento, la probabilidad de S es uno. Además, si no hay ningún resultado en común entre dos eventos E1 y E2, la probabilidad de que ocurra E_1 o E_2 es igual a la proporción de veces en que ocurre E_1 más la proporción de veces en que ocurra E_2.

Ahora veamos algunas consecuencias de estos tres axiomas.

Teorema 1. $P(\emptyset) = 0$.

Teorema 2. Para cualquier evento $E \subset S,\ 0 \leq P(E) \leq 1$.

Teorema 3. Sea S un espacio muestral que contiene a cualesquiera dos eventos A y B; entonces, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Definición 14. Sean A y B cualesquiera dos eventos que se encuentran en un espacio muestral S de manera tal que $P(B) > 0$. La probabilidad condicional de A al ocurrir el evento B, es el cociente de la probabilidad del conjunto de A y B con respecto a la probabilidad marginal de B; de esta manera se tiene que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \;\; P(B) > 0$$

Por simetría

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \;\; P(A) > 0$$

Definición 15. Sean A y B dos eventos cualesquiera de espacio muestral S. Se dice que el evento A es estadísticamente independiente del evento B si $P(A|B) = P(A)$.

Definición 16. Los eventos $A_1, A_2 \ldots A_k,$ de un espacio muestral S son estadísticamente independientes si y solo si la probabilidad conjunta de cualquier 2, 3 … k de ellos es igual al producto de sus probabilidades marginales.

De esta manera, los eventos A, B y C son estadísticamente independientes si y solo si

1. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
2. $P(A \cap C) = P(A)P(C)$
3. $P(B \cap C) = P(B)P(C)$
4. $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

Teorema 4. Si $A_1, A_2 \ldots A_n,$ son n eventos mutuamente excluyentes, de los cuales uno debe ocurrir, es decir $\sum_{i-1}^{n} P(A_i) = 1$, entonces.

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}, \;\; j = 1, 2 \ldots n$$

La anterior expresión fue desarrollada por Thomas Bayes (1702-1761) y se conoce como teorema de Bayes. A primera vista no es más que una aplicación de probabilidades condicionales. Sin embargo, ha sido clave en el desarrollo de la inferencia bayesiana en la que se emplea la interpretación subjetiva de probabilidad.

Ejercicios:

1. Realice la lectura de las definiciones, axiomas y teoremas expuestos en las páginas anteriores para realizar los siguientes ejercicios:
   a. Con la definición 2.14 demuestre que, para cualesquier dos eventos, A y B, $P(A|B) + P(\bar{A}|B) = 1$, con tal de que $P(B) \neq 0$.

b. Sean A y B dos eventos cualesquiera de S. Si A y B son mutuamente excluyentes, muestre que no pueden ser independientes. Deduzca cuando dos eventos independientes son, también, mutuamente excluyentes.

2. Complete la siguiente tabla:

Significado de la Probabilidad	Campos de problemas	Elementos lingüísticos	Procedimientos y algoritmos	Definiciones y propiedades	Conceptos relacionados	Argumentos y demostraciones
Axiomático	Cuantificar la incertidumbre de resultados en experimentos aleatorios abstractos				Espacio muestral Espacio de probabilidad Conjuntos de Borel	

Evaluación:

1. Para la evaluación de estas sesiones de clase se tendrán en cuenta la asistencia y participación del estudiante en la clase.
2. Las respuestas tanto de las preguntas de las actividades como de los ejercicios serán entregadas en hojas que debe contener los datos del estudiante: nombres, apellidos, asignatura, número de celular y código. En lo posible enumera las hojas y asegúrate que tu trabajo está muy bien ordenado.
3. La siguiente, es la rúbrica de evaluación del desarrollo de la guía 1. Asegúrate de cumplir con la totalidad de las actividades. Debes obtener como mínimo 70 puntos del puntaje total para aprobar.

CRITERIO	PUNTAJE
Demuestra honestidad, interés, creatividad y compromiso en el desarrollo de las actividades y/o ejercicios.	10 puntos
Expone sus ideas con un lenguaje adecuado de manera clara y organizada en las diferentes actividades y/o ejercicios.	10 puntos
Desarrolla los ejercicios en la actividad 1	30 puntos
Desarrolla el ejercicio 1	30 puntos
Desarrolla el ejercicio 2	20 puntos
TOTAL	100 puntos

ANEXO 2 Presentaciones de las sesiones.

A continuación, se facilita un enlace y un código QR que contienen todas las presentaciones realizadas para abordar cada una de las guías.

Enlace:

https://drive.google.com/drive/folders/1vzjrhssNzMn4C8fKpH6m3XYQ58WzVxt2?usp=share_link

Código QR:

ANEXO 3 Formulario Matemáticas Recreativas (Significados de la probabilidad).

A continuación, se presentan las preguntas que se realizaron al finalizar la intervención pedagógica:

Formulario Matemáticas Recreativas (Significados de la probabilidad)

Después de haber cursado la asignatura matemáticas recreativas, con el n de identificar el nivel de aceptación del curso y recibir sugerencias agradecemos el diligenciamiento de esta encuesta.

* Indica que la pregunta es obligatoria

1. ¿Ha cursado la asignatura de Estadística y probabilidad? *

Marca un solo óvalo

Marca solo un óvalo.

Si

No

2. Si la respuesta anterior fue si, por favor responda lo siguiente: ¿Lo visto en este curso afianza sus conocimientos abordados en el curso de Estadística y Probabilidad y lo visto en Matemáticas Recreativas?

3. ¿Qué opina de la metodología usada en esta parte el curso?

4. ¿Conocía sobre los 5 significados de la probabilidad? *

   Marca un solo óvalo

   Marca solo un óvalo.

   - Si
   - No

5. ¿Considera importante estudiar los 5 significados de la probabilidad? *

   Marca un solo óvalo

   Marca solo un óvalo.

   - Sí
   - No
   - Tal vez

6. Justifique su respuesta a la pregunta anterior *

7. ¿Cómo futuro docente incluiría alguna de las actividades que se realizaron para la * enseñanza de la probabilidad?

   Marca un solo óvalo

Marca solo un óvalo.

- Sí
- No
- Tal vez

8. Justifique su respuesta a la pregunta anterior *

9. Luego de ver el curso de matemáticas recreativas, ¿Cree que cambió el concepto * sobre probabilidad que tenía usted antes de éste?

Marca un solo óvalo

Marca solo un óvalo.

- Sí
- No
- Tal vez

10. Justifique su respuesta a la pregunta anterior *

11. ¿Considera que en los cursos como Estadística y Probabilidad se deberían incluir * actividades como las que se realizaron?

Marca un solo óvalo

Marca solo un óvalo.

- Sí
- No

12. Justifique su respuesta a la pregunta anterior *

13. Califique de 1 a 5 su experiencia en esta parte del curso * Marca un solo óvalo *Marca solo un óvalo.*

Muy mala

1

2

3

4

5

Muy buena

14. Compártenos comentarios y sugerencias *

Dado que las respuestas a la encuesta realizada a los estudiantes fueron extensas, se ha proporcionado un enlace y código QR para acceder a la información. Por favor, utilice el siguiente enlace o escanee el código QR para acceder a las respuestas de la encuesta:

Enlace:
https://docs.google.com/forms/d/1f0kfRKNAQdbtd70sDYMbJDhMVQk_RWB2CubXaMDo1jE/edit#responses

Código QR:

ANEXO 4 Diarios de campo.

En los diarios de campo se describe y analizan aspectos adicionales que surgieron durante la intervención pedagógica, más allá de lo expuesto en el capítulo 9. Si desea revisar dicha información, puede acceder al documento a través del siguiente enlace o escanear el código QR correspondiente:

Enlace:
https://drive.google.com/file/d/18TrkjBphYFGK4DdthtFHjSIHTRoX14eK/view?usp=share_link

Código QR: