Universidad
del Cauca

Sistematización de Práctica Pedagógica Investigativa

“ENSEÑANZA DE CONCEPTOS BÁSICOS DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA MEDIANTE OBJETOS MANIPULABLES”

Consuelo Samboni Piamba

Elmer Samboni Piamba

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN-CAUCA

2022

Sistematización de Práctica Pedagógica Investigativa

“ENSEÑANZA DE CONCEPTOS BÁSICOS DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA MEDIANTE OBJETOS MANIPULABLES”

Presentado por:

Consuelo Samboni Piamba

Elmer Samboni Piamba

Directora de práctica:

Dra. Martha Lucía Bobadilla Alfaro

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN-CAUCA

2022

Página de aceptación

Nota de Aceptación

5.0

Directora: Martha Lucia B

Dr. Martha Lucia Bobadilla Alfaro

Evaluadora: Yeny Leonor Rosero R

Mg. Yeny Leonor Rosero Rosero

Lugar y fecha de sustentación: Auditorio José María Otero, 1 de agosto de 2022.

Tabla de contenido

Introducción

El presente documento de sistematización de experiencias de la práctica pedagógica tiene como centro de interés la enseñanza-aprendizaje de la geometría analítica en el grado décimo (educación media) en la Institución Educativa Antonio García Paredes. La sistematización concebida como aquella interpretación critica de experiencias y como un proceso secuencial y ordenado que contempla varias etapas.

El desarrollo de la Práctica Pedagógica Investigativa estuvo motivado por la necesidad de involucrar estrategias didácticas para mejorar la enseñanza-aprendizaje de la geometría; teniendo en cuenta que existen numerosas investigaciones que invitan a reflexionar sobre las posibilidades de mejorar la enseñanza de la geometría con el uso de materiales didácticos manipulables.

Este trabajo, se centra en el uso de materiales didácticos manipulables para la enseñanza-aprendizaje de algunos temas de la geometría analítica; poniendo en práctica el modelo de Van Hiele y la metodología de Aula Taller, para los momentos de la planeación, la docencia directa y la evaluación o análisis de lo realizado en la intervención en el aula. En consecuencia, se realizó un esfuerzo para potencializar el aprendizaje activo de los estudiantes del grado décimo a través de guías didácticas y la interacción en el aula. Para la intervención en el aula, se tuvieron en cuenta aspectos de la metodología de Aula Taller tales como: el trabajo en equipo y las actividades de socialización. Desde esta perspectiva, se permite la libre expresión del estudiante y el trabajo autónomo, se fomenta la comprensión y construcción de sus conocimientos a través de la exploración y manipulación de algunas definiciones en relación a la línea recta y se puede identificar la influencia que tienen los materiales didácticos en diferentes momentos de la clase, así como en el desarrollo de las actividades propuestas por el docente en cada una de las guías.

Con este trabajo se fortaleció el uso de los materiales didácticos manipulables y las metodologías enmarcadas en el constructivismo; elementos útiles y necesarios en la planeación y diseño de las guías didácticas y en la intervención en el aula.

Este documento de sistematización está estructurado en 6 capítulos. El capítulo 1 aborda la presentación del establecimiento educativo, en donde se realizó la práctica docente; además, de la población participante y la temática en que se enmarca este trabajo.

El capítulo 2 contiene la justificación del por qué se decidió implementar una enseñanza que involucra el uso de materiales didácticos manipulables sustentados en modelo Van Hiele y de Aula Taller que defienden y brindan el soporte teórico para nuestra práctica docente. También, se definen los objetivos y se exponen como antecedentes de nuestra Práctica Pedagógica Investigativa un par de investigaciones relacionadas con la temática propuesta.

El capítulo 3 aborda la fundamentación teórica de los aspectos relacionados con el trabajo: el modelo de Van Hiele, la metodología aula taller y los materiales didácticos manipulables. Aspectos que permiten al docente determinar cómo organizar contenidos y actividades para la enseñanza-aprendizaje y la clasificación de los materiales; de esta manera, el docente puede hacer la elección pertinente para su práctica pedagógica. Para la práctica pedagógica se optó por vincular materiales manipulativos físicos (geoplano) y guías didácticas; dos instrumentos esenciales para alcanzar los objetivos planteados y mantener un trabajo ordenado y práctico durante la intervención en el aula. El capítulo 4 describe la metodología de sistematización de la Práctica Pedagógica Investigativa, que incluye la metodología de la docencia directa, el diseño de las guías y los materiales didácticos.

El capítulo 5 presenta la reconstrucción histórica de la práctica docente directa y su correspondiente análisis crítico; comenzando por la propia experiencia en el aula, las actividades que están planteadas en las guías didácticas previamente diseñadas y los registros sobre estas. Sobre lo primero, se hizo una descripción cronológica y ordenada de lo que sucedió en las sesiones de clase, pero clasificando las actividades y los momentos más significativos. Para el análisis crítico, se hizo una interpretación crítica del proceso vivido en el aula, teniendo en cuenta los objetivos del trabajo de práctica y los planteamientos y aspectos del modelo de Van Hiele, de la metodología aula taller y de los recursos didácticos manipulables. La parte del análisis crítico permite un nuevo conocimiento y contribuye al ejercicio de práctica profesional, en consecuencia, es la parte esencial de este trabajo. Por último, en el capítulo 6 se encuentran las conclusiones obtenidas durante el proceso de la práctica pedagógica.

Presentación

Descripción del Establecimiento Educativo

La práctica docente se llevó a cabo en la sede principal de la Institución Educativa Antonio García Paredes, ubicada en Popayán en la calle 17 No. 12-40 barrio la Ladera, que, a su vez, tiene cuatro sedes: Los Dos brazos, San Gabriel Arcángel, Manuel José Mosquera y el Túnel. Es una identidad oficial de calendario A, modalidad académica, de carácter mixto con jornadas mañana y tarde, su enfoque es humanista constructivista en los niveles de preescolar, básica y media. “El modelo constructivista está en definitiva centrado en el aprendiz, en sus experiencias previas, de las que hace nuevas construcciones cognitivas” (PEI, 2015:65). “Además, es necesario mencionar que, en la metodología constructivista, se considera que en los humanos el aprendizaje es siempre una construcción interior y subjetiva” (PEI, 2015:65).

El PEI de la institución, en si declara la importancia de su misión y su visión. Su misión, está encaminada a “formar educandos integrales con un enfoque humanista constructivista en los niveles de preescolar, básica y media, en la modalidad académica, potenciando talentos con procesos de calidad, que les permita enfrentar los retos de un mundo en evolución” (PEI, 2015:5) y su visión es:

> Ser certificada bajo estándares de calidad en la educación y reconocida por su alto rendimiento académico, formación humanista, sensibilidad científica, habilidades y destrezas comunicativas del egresado(a), que influirán en el desarrollo social, económico, político y cultural de la región y el país (PEI, 2015:5).

Población

Debido que la Institución Educativa Antonio García Paredes maneja jornadas de mañana y tarde, la intervención en el aula se realizó en la tarde en horario de clase, con estudiantes de género mixto del grado décimo, que estuvieron a cargo de la docente titular Yaddy Melissa Sánchez, para una totalidad de 28 estudiantes entre las edades de 15 a 18 años aproximadamente. Esta institución está rodeada por una población social de estratos uno, dos y tres con un contexto demarcado por aspectos de inseguridad, violencia, drogadicción, delincuencia común, problemas socio-afectivos, etcétera, mucha de esta población no cuenta con ayudas gubernamentales lo que de alguna manera no posibilita que emerjan en nuevos proyectos.

Temática

La práctica docente se planeó con base a la enseñanza de la línea recta y las cónicas, pero solo se ejecutó respecto a la línea recta vinculando recursos didácticos manipulables. Estos recursos tienen una gran influencia en la comprensión de conceptos de la geometría analítica; teniendo en cuenta que el conocimiento es más accesible si se logra la integración del sujeto con el contexto, porque le ayuda a construir su conocimiento partiendo de lo concreto a lo abstracto y de lo particular a lo general.

Justificación

Con el método tradicional o modelo de enseñanza tradicional, caracterizado por la marcada diferencia de roles entre estudiante y profesor; fundamentado sobre unas bases de transmisión y recepción de la información y los conocimientos; se corre el peligro de que el estudiante se convierta en un receptor pasivo de contenidos, ya que su función es intentar memorizar la información; por ende, su principal herramienta de aprendizaje es la memoria y la autodisciplina. Paralelamente se encuentra al docente en quien recae el peso del proceso educativo, él genera sus propias estrategias de enseñanza y expone ante el estudiante sus conocimientos; utiliza el examen como única herramienta para determinar si los estudiantes han adquirido los conocimientos.

El inconveniente que presenta el modelo de enseñanza tradicional es que está orientado a la memorización de la información y no a la comprensión, lo cual no suele ser favorable en el desarrollo de habilidades necesarias para desenvolverse en el mundo real, porque fomenta la comparación y la competición entre estudiantes, no estimula la curiosidad y la creatividad; la forma evaluativa genera tensión y miedo, además, el conocimiento adquirido mediante este método acaba por olvidarse con el tiempo. Por tanto, Torres (2010) afirma que:

> […] es necesario que los modelos sobre la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias, […] tomen en cuenta algunos factores, entre ellos: las características socioculturales y cognitivas de los alumnos, sus concepciones epistemológicas y destrezas meta cognitivas, las relaciones en el aula, los aspectos relacionados con la motivación, los recursos y, sobre todo, el contexto (p.140).

A pesar de su popularidad, el método tradicional no está libre de críticas tanto del cuerpo de docentes como de los estudiantes. Por consiguiente, trabajar con material didáctico manipulable se convierte en una propuesta y en una herramienta pedagógica que rompe los esquemas tradicionales de la enseñanza de las matemáticas en la educación media. Dentro de los establecimientos educativos existen recursos didácticos que favorecen y potencian la enseñanza; que cuando son utilizados con metodologías enmarcadas dentro del constructivismo, ricas en aprendizajes prácticos, logran fortalecer el desarrollo del conocimiento y el aprendizaje activo, ejercitan la inteligencia y estimulan los sentidos. Persiguiendo con esto fijar e interiorizar nuevos conceptos en sus diferentes niveles y momentos, de una forma dinámica y entretenida para los estudiantes.

Utilizar elementos didácticos manipulables permite el desarrollo de los estudiantes:

> […] el aporte más importante del uso de los REDIS en la formación docentes es que le permite, de manera sencilla, romper con el esquema del alumno pasivo al proporcionarle un ambiente que lo conduce a descubrir conocimientos, a desarrollar iniciativas y a construir concepto (García, et al., 2003: 101).

Si el uso de los Recursos Didácticos Manipulables (REDIS) permite romper con el esquema del alumno pasivo ¿Por qué es tan escasa la utilización de los materiales REDIS en el aula? En García, et al. (2003) se afirma, en términos generales, que el uso de recursos didácticos requiere tiempo, esfuerzo y dedicación para su elaboración. En consecuencia, muchas veces el docente se inclina por métodos centrados en el tradicionalismo, a lo que muchos critican porque de esta manera están debilitando un aprendizaje activo:

> El uso de buenos recursos didácticos requiere tiempo y esfuerzo para su preparación fuera de las horas de clase, trabajo que en general no es reconocido. La tendencia a economizar esfuerzo y tiempo, hace que predominen los métodos centrados en la instrucción del docente, aun cuando sepan que los resultados de sus esfuerzos son

> inferiores y que van en detrimento de un aprendizaje realmente activo basado en la interacción.
>
> Otra razón es la masificación, pues el uso de REDIS exige más atención individualizada y mayor disponibilidad de materiales, entonces se tiende a descartarlos para economizar y por el esfuerzo que, en conocimientos, tiempo y preparación, implica atender y orientar a los estudiantes de acuerdo con sus necesidades individuales (García, et al., 2003: 102).

Por esto, para nuestra práctica docente hemos contemplado una enseñanza alternativa a la tradicional, que involucre recursos didácticos manipulables, que ayuden a comprender que las matemáticas no son simplemente una memorización de reglas y algoritmos. Estos recursos serán utilizados como una estrategia para acompañar al estudiante en la construcción del conocimiento; mediante la metodología aula taller y el modelo de van Hiele.

Objetivos

Objetivo general

Potencializar el aprendizaje activo de conceptos básicos de la geometría analítica mediante el uso de recursos didácticos manipulables sustentados en el modelo de Van Hiele.

Objetivos específicos

Diseñar ambientes armónicos para promover el aprendizaje activo.

Diseñar guías didácticas utilizando el modelo de Van Hiele para promover el aprendizaje de conceptos básicos de la geometría analítica.

Diseñar materiales didácticos manipulables para reforzar el aprendizaje activo de conceptos básicos de la geometría analítica.

Fomentar una mejor comprensión de conceptos básicos de la geometría analítica.

Fomentar la finalidad de las técnicas del aprendizaje activo en la enseñanza de la geometría analítica.

Antecedentes

A continuación, se describen un par de investigaciones relacionadas con el modelo de Van Hiele, el aula taller y los recursos didácticos manipulables; temas que nos servirán de fundamento para la planeación y desarrollo de nuestra práctica docente.

Villarreal, et al. (2013) en su investigación "la enseñanza aprendizaje de la geometría analítica: una propuesta de desarrollo del pensamiento a partir del modelo de Van Hiele y la metodología de aula taller", muestran el diseño puesto en práctica y el análisis de una propuesta de enseñanza de la geometría analítica, con estudiantes que cursan primer año de ingeniería en el Politécnico Colombiano Jaime Isaza Cadavid. Para la enseñanza tienen como base los niveles de desarrollo del modelo Van Hiele y utilizan material didáctico diseñado dentro del aula taller, buscando con ello articular los conceptos matemáticos y el mundo real, recuperando el concepto de lugar geométrico.

Los resultados alcanzados, dan cuenta, no solo del proceso de enseñanza y aprendizaje sino, que trasciende a analizar las habilidades de pensamiento de los estudiantes participantes, inmersas en la ejecución de la propuesta. En sus conclusiones resaltan que el desarrollo de habilidades de pensamiento es un elemento esencial en el aprendizaje de los conceptos de la geometría, no considerar este elemento acarrea aprendizajes memorísticos y faltos de significatividad. Así mismo, declaran que la actividad aula taller activa la motivación intrínseca, atención, habituación y dinamiza la activación de las diversas habilidades del pensamiento.

Por su parte Pac (2014) refiere que la finalidad principal es indagar sobre la influencia que tiene la utilización de manipulables físicos, en la fijación de conceptos de geometría analítica, dando paso a la interacción del sujeto y el medio, interacción que permite la construcción de conceptos.

La metodología que se utilizó en la investigación es de tipo cuasi-experimental, y se aplicó con 53 alumnos del colegio Dr. Rodolfo Robles de la ciudad de Quetzaltenango-Guatemala, elegidos de forma aleatoria. En los resultados se demostró que el uso de manipulables influye de forma positiva ya que mejora la fijación de los conceptos de la geometría analítica, debido a que es ideal para motivar al estudiante dentro del salón de clases y crear una gran expectativa por parte de los alumnos, los cuales mejoraron en atención, confianza, conceptualización y desarrollo de algoritmos lógicos.

Por otro lado, el autor concluye, que los manipulables son un recurso poco utilizado por el maestro en las clases de matemáticas, que debería implementarse porque motiva a un aprendizaje más práctico, creativo y significativo; además, impulsa el trabajo individual y la interacción estudiante-profesor. A modo de recomendación, Pac (2014) manifiesta que al trabajar con manipulables es importante: primero, contar con una "dosificación" de tiempo; segundo, una buena planificación y finalmente abundante material para obtener una mejor interacción dentro del aula.

Marco Teórico

Aprendizaje Activo

Aunque no existe una definición puntual de Aprendizaje Activo este puede ser entendido como una estrategia centrada en el aprendizaje del estudiante a través de una experiencia de colaboración y reflexión individual de forma permanente. Koo (1999, citado en Díaz, 2015), hace una aproximación conceptual del aprendizaje activo como "aquel que se adquiere a partir de las propias experiencias, desde el contexto, el cual involucra elementos como la promoción de toma de decisiones y las experiencias significativas que se logran en conjunto" (p. 2).

En base a la definición que expone Koo, "las personas inmersas en un proceso de enseñanza-aprendizaje activo tienen la tarea de pasar de un papel pasivo en el proceso, a uno activo, en el que desde la realidad construyan su conocimiento" (Díaz, 2015:2). En este sentido, la estrategia de aprendizaje activo permite a los estudiantes hacer cosas y pensar en esas cosas que realiza, propiciando una actitud activa de los estudiantes en clase. Pero, tal como lo expone Sierra (2013), "para que exista aprendizaje activo los estudiantes deben hacer mucho más que simplemente oír; deben: leer, cuestionarse, escribir, discutir, aplicar conceptos, utilizar reglas y principios, resolver problemas" (p. 7).

Bonwell y Eison (1991, citado en Restrepo y Waks, 2018) refiere que:

> el aprendizaje activo se encuadra dentro de las metodologías de aprendizaje constructivista y consiste en utilizar técnicas de instrucción que involucren a l@s estudiantes en el proceso de su propio aprendizaje a través de actividades como escribir, leer, hablar, discutir, investigar, manipular materiales, realizar observaciones, recopilar y analizar datos, sintetizar o evaluar elementos relacionados con el contenido tratado en el aula, entre otros aspectos. De esta forma se involucra a l@s estudiantes de manera

> directa realizando actividades o dinámicas que los lleven a pensar en lo que están haciendo (p. 4).

Técnicas de aprendizaje activo. Los diferentes grupos de Técnicas de Aprendizaje Activo, se agrupan dependiendo de los autores y su finalidad, en este trabajo se acogió la clasificación que hace Restrepo y Waks (2018). A continuación, se describen algunas técnicas didácticas que propician el Aprendizaje Activo y responden a sus elementos:

Aprendizaje basado en problemas, técnica que utiliza problemas de la vida real para la construcción del conocimiento. Ribas (2004, citado en Díaz, 2015) expone que: "el problema es el eje alrededor del cual se construye el conocimiento y como objetivo la formación en competencias que desarrollen liderazgo, creatividad, pensamiento crítico y trabajo colaborativo" (p. 4).

Aprendizaje Basado en Proyectos: el protagonista es el estudiante, partiendo de sus intereses. Lacueva (1998, citado en Díaz, 2015) indica que:

> los beneficios de esta técnica en cuanto a la motivación que se da en el estudiante para participar en la formulación de preguntas, diseño y seguimiento de tareas y actividades con el fin de cumplir una meta, el cual se da a través de trabajo colaborativo, desarrollando compromiso en el proceso (p. 4).

Aprendizaje Servicio implica el proceso de enseñanza -aprendizaje combinado con el servicio a la comunidad, enfocando la responsabilidad social. Puig et al., (2007, citados en Díaz, 2015) exponen que esta técnica "integra aprendizaje y servicio en una sola propuesta pedagógica, buscando el desarrollo de capacidades para solucionar problemas en el contexto, para poner al servicio de otros talentos y capacidades" (p. 5).

Aprendizaje y enseñanza mutua: Huber (2008, citado en Díaz, 2015), resalta que:

> la importancia de esta técnica en cuanto a favorecer la cooperación, la comunicación y la retroalimentación lo cual es relevante en el Aprendizaje Activo en cuanto al trabajo en grupos, como clave para el logro de los aprendizajes, se observa que en cada una de las técnicas el trabajo en equipo es clave en su desarrollo (p. 5).

Comprensión

En la enseñanza de la Matemática es importante conocer cómo los estudiantes comprenden los contenidos. El concepto de comprensión ha tenido diferentes significados, en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN), la competencia y comprensión se relacionan, la primera responde al componente práctico y en la segunda:

> la comprensión se entiende explícitamente como relacionada con los desempeños de comprensión, que son actuaciones, actividades, tareas y proyectos en los cuales se muestra la comprensión adquirida y se consolida y profundiza la misma. En las dimensiones de la comprensión se incluye no sólo la más usual de los contenidos y sus redes conceptuales, sino que se proponen los aspectos relacionados con los métodos y técnicas, con las formas de expresar y comunicar lo comprendido (MEN, 1998:49).

Además, según Skemp (referido en Hernández et al., 2019) "la comprensión es un proceso continuo y creciente por el cual el alumno construye y relaciona progresivamente los diferentes elementos del significado que atañen al concepto" (p. 14) y Larrain (2016, citado en (Hernández et al., 2019) considera que: "un estudiante comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diversas prácticas, es decir, la capacidad se traduce en la realización de prácticas que son evaluables públicamente"(p. 14).

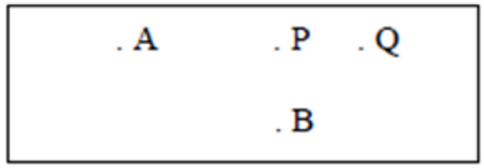
La Geometría

Naturaleza de los objetos geométricos. Antes de comenzar a involucrarnos en el mundo de la geometría y de ver cómo podemos ayudar a los alumnos a que aprendan geometría, vemos necesario aclarar de qué trata esta rama de las matemáticas y reflexionar sobre la naturaleza de sus objetos. El significado etimológico de la palabra geometría según Godino y Ruíz (2002) esta asociado con:

> la "medida de la tierra", nos indica su origen de tipo práctico, relacionado con las actividades de reconstrucción de los límites de las parcelas de terreno que tenían que hacer los egipcios, tras las inundaciones del Nilo. Pero la Geometría dejó hace mucho tiempo de ocuparse de la medida de la tierra. Con los griegos la geometría se interesó por el mundo de las formas, la identificación de sus componentes más elementales y de las relaciones y combinaciones entre dichos componentes (p. 456)

Más adelante, Godino y Ruíz (2002), exponen que la geometría se ocupa de una clase especial de objetos que designamos con palabras como, punto, recta, plano, triángulo, polígono, poliedro, etc. Estos entes geométricos son "considerados como abstracciones, conceptos, entidades ideales o representaciones generales de una categoría de objetos" (p. 456). Un punto, una línea, un plano, un círculo, etc., "no tienen ninguna consistencia material, ningún peso, color, densidad, etc." (p. 456). En consecuencia, la naturaleza de estos entes geométricos es distinta de los objetos perceptibles: mesa, árbol, etc.

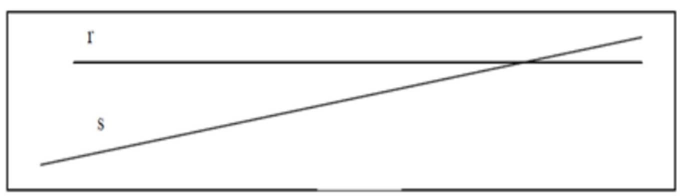
Puntos y rectas. En las definiciones presentadas por Euclides, "el punto es lo que no tiene partes" (Recalde, s.f: 12). Según Godino y Ruíz (2002), el punto, como objeto o figura geométrica, se considera que no tiene dimensiones y se usa para indicar una posición en el espacio y se representa con letras mayúsculas como se observa en la imagen.



Puntos

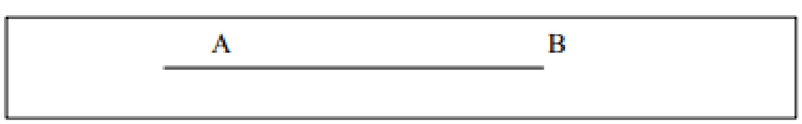
En las definiciones presentadas en el libro I de los elementos de Euclides, “una recta es la que yace por igual, respecto de los puntos que están en ella” (Recalde, s.f: 12). Según Godino y Ruíz (2002), al objeto o figura geométrica línea recta se le atribuyen unas características que realmente no tienen los trazos marcados en la imagen siguiente. Se considera que las rectas son ilimitadas por ambos extremos, así como que no tienen ningún espesor, lo que hace imposible "representar" las rectas. La característica de ser ilimitadas por ambos extremos se suele indicar marcando flechas en cada extremo.

En el cuadro siguiente decimos que hay representadas dos líneas rectas designadas con las letras r y s:



Rectas

Segmentos. En el siguiente cuadro decimos que está representado el segmento AB, conjunto de puntos comprendidos entre los puntos A y B, que incluye A y B, que se dice son los extremos del segmento.

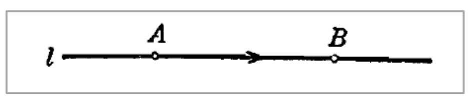


segmento

La distancia entre los puntos A y B se dice que es la longitud del segmento AB. Dos segmentos AB y CD se dice que son congruentes si tienen la misma longitud. Un segmento se puede definir también como la intersección de dos semirectas contenidas en una misma recta. Los segmentos pueden ser abiertos o cerrados según que en las semirectas se consideren incluidos o no los extremos.

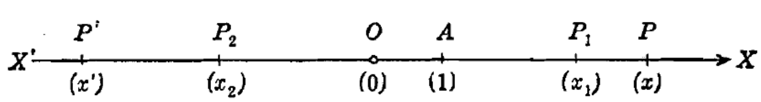
Según lo descrito por Ivorra (sin fecha, citado en Pac, 2014), en el siglo XVII Descartes evolucionó la geometría, al lograr transformar figuras geométricas a ecuaciones algebraicas y encontrar relaciones de correspondencia entre ellas.

Para los fines de la Geometría analítica añadiremos, al concepto geométrico de segmento, la idea de sentido o dirección. Desde este punto de vista consideramos que el segmento *AB* es generado por un punto que se mueve a lo largo de la recta l de A hacia B. Decimos entonces que el segmento AB está dirigido de A a B, e indicamos esto por medio de una flecha como se indica en la siguiente imagen (Lehmann, 1989).



Segmento dirigido

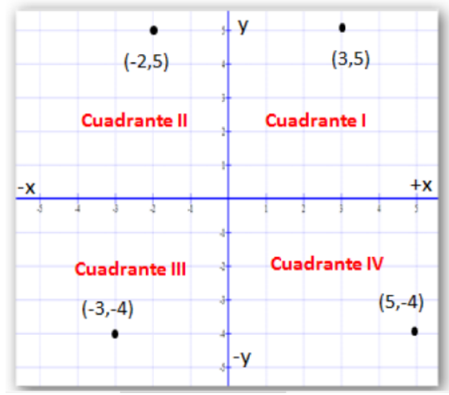
Hemos introducido los conceptos, de dirección con respecto a los segmentos rectilíneos. Ahora vamos a dar un paso más introduciendo la idea de correspondencia entre un punto geométrico y un número real.



Refiriéndonos a la figura anterior, la recta $X'X$ se llama eje y el punto O es el origen del sistema coordenado lineal. El número real x correspondiente al punto P se llama coordenada del punto P y se representa por (x) **.** Evidentemente, de acuerdo con las convenciones adoptadas, el origen O tiene por coordenada (0) y el punto A tiene por coordenada (1). El punto P con su coordenada (x) es la representación geométrica o gráfica del número real x , y la coordenada $(\boldsymbol{x})$ es la representación analítica del punto P. Ordinariamente escribiremos el punto P y su coordenada juntos, tal como sigue: $P(x)$.

Para Stewart et al., (2007, citados en Pac, 2014), el plano cartesiano es el vínculo entre el Álgebra y la geometría, a través del plano cartesiano se puede ver la relación existente entre dos variables y entender propiedades físicas de la geometría entre estas variables.

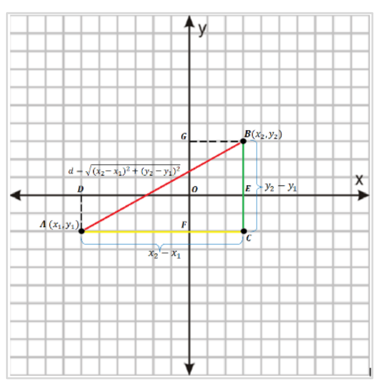
El plano cartesiano y la geometría analítica. Según Sullivan (2006, citado en Pac, 2014) el plano cartesiano está compuesto por dos rectas numéricas perpendiculares que se cortan en un único punto con coordenada $(\mathbf{0},\mathbf{0})$; una recta es horizontal $\boldsymbol{X}$ y la otra es vertical $\boldsymbol{Y}$, con valores asignados en las rectas las cuales van de menor a mayor, las cuales generan 4 cuadrantes. Cada cuadrante está compuesto por coordenadas que se expresan de la siguiente forma: Cuadrante I $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, cuadrante II $(-\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, cuadrante III $(-\boldsymbol{x},-\boldsymbol{y})$ y finalmente el cuadrante IV con coordenada (x, -y), ver la figura siguiente. Debido a lo descrito con anterioridad cada punto ubicado en el plano cartesiano tiene una coordenada “X” y una coordenada “Y” las cuales se ubican dentro de un paréntesis, así por ejemplo el punto A= (3, 5) está en el primer cuadrante, el punto B= (-2, 5) se ubica en el segundo cuadrante, el punto C = (-3, -4) y finalmente D (5, -4) se encuentra en el cuarto cuadrante.



Plano cartesiano y cuadrantes

Distancia entre dos puntos. Con base a Lehmann (1989), el punto $\boldsymbol{A}$ con coordenada$(\boldsymbol{x_{1,}y_1})$ y el punto $\boldsymbol{B}$ con coordenada $(\boldsymbol{x_{2,}y_2})$, son dos puntos del plano cualesquiera. Encontremos la distancia $\boldsymbol{d}$ del segmento $\boldsymbol{AB}$. Por $\boldsymbol{AB}$ tracemos las perpendiculares $\boldsymbol{BE}$ y $\boldsymbol{AF}$ a ambos ejes coordenados y sea $\boldsymbol{C}$ su punto de intersección, como se indica en la figura. Se considera el triángulo rectángulo $\boldsymbol{ACB}$. Por el teorema de Pitágoras, tenemos:

$$d^2 = (\overline{AB})^2 = (\overline{AC})^2 + (\overline{CB})^2$$



Ahora, las coordenadas de los puntos D, E, F y G son: $D(x_{1,}0)$, $E(x_{2,}0)$, $F(0, y_1)$ y $G(0_{,}y_2)$.Observe que $\overline{AC} = \overline{DE} = x_2 - x_1$, $\overline{CB} = \overline{FG} = y_2 - y_1$.

Sustituyendo estos valores en $d^2 = (\overline{AB})^2 = (\overline{AC})^2 + (\overline{CB})^2$obtenemos:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Elevando raíz cuadrada a ambos lados de la igualdad se tiene que:

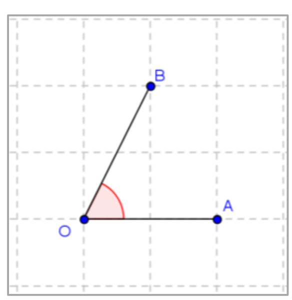
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Por tanto, la distancia $\boldsymbol{d}$ entre dos puntos $A(x_{1,}y_1)$ y $B(x_{2,}y_2)$ esta dada por la fórmula:

$$\boldsymbol{d} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

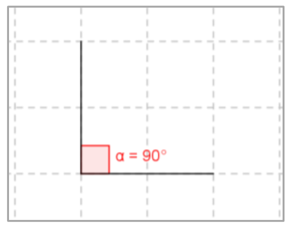
Ángulos. Según (Heredia, Frank , s.f.), un ángulo es la porción de plano limitada por dos semirrectas o rayos que tienen el mismo origen. Es la abertura formada por dos semirrectas con un mismo origen llamado “vértice”, las semirrectas se llaman “lados”, se designa por una letra mayúscula situada en el vértice. A veces se usa una letra griega dentro del ángulo. También podemos usar tres letras mayúsculas de manera que quede en el medio la letra que está situada en el vértice del ángulo. Son porciones de espacio encerradas entre dos líneas (lados del ángulo) que se cortan en un punto llamado vértice. Los ángulos permiten que se hagan una serie de operaciones con ellos (p. 1).

Clases de ángulos según su medida. Angulo agudo: Es aquel que mide menos de 90º.



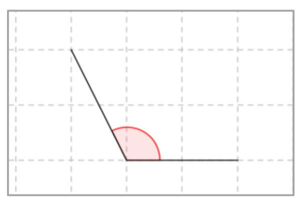
Ángulo agudo

Ángulo recto: Es aquel que mide igual a 90º.



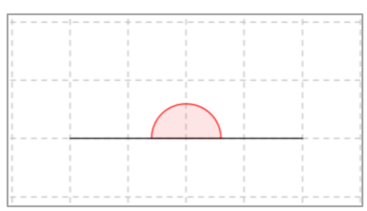
Ángulo recto

Ángulo obtuso: Es aquel que mide entre 90º y 180º.



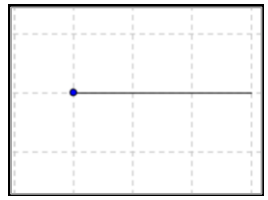
Ángulo obtuso

Ángulo llano: Es aquel que mide igual a 180º.



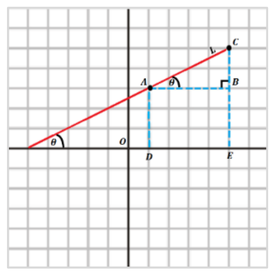
Ángulo llano

Ángulo nulo: Es aquel que mide 0º y



Ángulo nulo

Pendiente de una recta. Con base a Lehmann (1989), sea la recta $\overline{\boldsymbol{AC}}$ de la figura que se muestra, determinada por los puntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{C}$, y sea $\boldsymbol{\theta}$ su ángulo de inclinación.



Por A y C tracemos las perpendiculares CE y AD al eje X, y por A tracemos una paralela al eje X que corte a CE en B. El ángulo $\measuredangle CAB = \theta$ y por trigonometría tendremos que:

$$m = tan\theta = \frac{\overline{CB}}{\overline{BA}}$$

Las coordenadas de los puntos D, E y B son: $D(x_1, 0)$, $E(x_2, 0)$ y $B(x_2, y_2)$. Recordemos que: $\overline{CB} = y_2 - y_1$ y $\overline{BA} = \overline{ED} = x_2 - x_1$. Sustituyendo estos valores en $m = tan\theta = \frac{\overline{CB}}{\overline{BA}}$ tenemos:

$$m = tan\theta = \frac{\overline{CB}}{\overline{BA}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ con } x_2 \neq x_1$$

Así,

$$\mathrm{m} = \frac{\mathrm{y_2 - y_1}}{\mathrm{x_2 - x_1}}, \text{ con } \mathrm{x_2 \neq x_1}$$

Por tanto, si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ son dos puntos diferentes cualesquiera de una recta, la pendiente de la recta es:

$$\boldsymbol{m} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ con } x_2 \neq x_1$$

Modelo de Van Hiele

De acuerdo con (Crowley, 1987; Jaime, 1993, como se citó en Vargas, 2013), la teoría de Van Hiele o también llamada el modelo de Van Hiele, es una teoría de enseñanza y aprendizaje de la geometría, fue diseñada por Pierre María Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof, esposos y docentes (Holandeses) de matemáticas en secundaria y fue expuesta por ellos en 1957 como tesis doctoral en la universidad de Utrecht – Holanda.

El modelo de Van Hiele es la propuesta que describe la evolución del proceso de construcción del pensamiento geométrico. En los lineamientos curriculares del Ministerio de Educación Nacional (MEN), refieren que, "Van Hiele propone 5 niveles de desarrollo de pensamiento geométrico que muestran un modo de estructurar el aprendizaje de la geometría" (MEN, 1998). En otras palabras, el aprendizaje de la geometría se construye pasando por niveles de pensamiento. Según este modelo, se requiere una adecuada instrucción (fases) secuencial y ordenada por parte del docente para que los alumnos puedan pasar a través de los distintos niveles.

Según los lineamientos curriculares:

> La moderna investigación sobre el proceso de construcción del pensamiento geométrico indica que éste sigue una evolución muy lenta desde las formas intuitivas iniciales hasta las formas deductivas finales, aunque los niveles finales corresponden a niveles escolares

> bastante más avanzados que los que se dan en la escuela. El modelo de Van Hiele es la propuesta que parece describir con bastante exactitud esta evolución y que está adquiriendo cada vez mayor aceptación (MEN, 1998).

En consecuencia, el modelo de Van Hiele fue creado para el desarrollo didáctico de la geometría. Este modelo primero, se basa en el pensamiento del ser humano; segundo, los niveles no van asociados a la edad. Para explicar la evolución del pensamiento geométrico del estudiante se introducen 5 niveles, donde el estudiante se situará en un nivel dado al inicio del aprendizaje y según vaya asimilando los contenidos de dicho nivel podrá avanzar al siguiente.

Dependiendo de los autores, la división y nomenclatura establecida para los niveles ha ido variando en diferentes trabajos; para este trabajo, se ha considerado la división y nomenclatura que presentan Celma (2020), quien describen los cinco niveles de razonamiento geométrico de la siguiente manera:

Nivel 1: visualización o reconocimiento. En este nivel el estudiante entiende el objeto geométrico como un todo, es decir sin distinguir partes ni propiedades; reconoce y describe a través de los sentidos en especial de la vista y el tacto y puede compararlo con objetos familiares de su entorno. Además, el estudiante maneja un vocabulario matemático básico y utiliza términos de uso común para hablar sobre un objeto matemático.

Nivel 2: análisis. En este nivel el estudiante distingue las partes de los objetos geométricos y algunas de las propiedades particulares de ellos, pero no relacionan con otros objetos. Los estudiantes hacen definiciones basándose en las propiedades, pero sin agruparlas.

Nivel 3: orden y clasificación. En este nivel el estudiante relaciona abiertamente las propiedades de los objetos geométricos como características innatas para poder clasificarlos por familias. Las definiciones comienzan a cobrar sentido y reconoce que unas propiedades derivan de otras.

Además, como lo expresa Celma (2020) el estudiante:

> Es capaz de entender y seguir demostraciones, pero no comprende sus estructura. Es decir en este nivel el almunno comprende los sucesivos pasos de un razonamiento lógico formal pero no es capaz de asimilarlo en su globalidad. Por este motivo no capta la naturaleza axiomatica de la geometria (p. 17).

Nivel 4: deducción formal. En este nivel el estudiante realiza deducciones y demostraciones lógicas y sencillas, pues "entiende su necesidad como único medio para justificar la veracidad de una proposición planteada" (Celma, 2020:18), aquí el estudiante comprende cómo se puede llegar a los mismos resultados partiendo de demostraciones sencillas. Celma (2020) refiere que el estudiante "en este nivel entiende la naturaleza axiomática de las matemáticas (significado y uso de acciones, definiciones, teoremas, términos etcétera)" (p.18).

Nivel 5: rigor. Los estudiantes que alcanzan este nivel son capaces de describir situaciones geométricas con un lenguaje técnico matemático, pueden llevar acabó razonamientos abstractos sobre objetos geométricos sin necesidad de representarlos.

Además, el modelo de Van Hiele nos sirve como fundamento para organizar la enseñanza-aprendizaje de la geometría analítica. El elemento fundamental de este modelo no solo lo constituyen los niveles de razonamiento sino las fases de aprendizaje, como una propuesta metodológica que indican al docente cómo organizar contenidos y actividades que debe realizar un estudiante para adquirir las experiencias que le lleven a un nivel superior de razonamiento geométrico.

> Según García y Olga (2008, como se citó en Celma, 2020), el modelo de razonamiento geométrico que los Van Hiele (1986) explica cómo, en el proceso de aprendizaje de la geometría, el razonamiento geométrico de los estudiantes transcurre por una serie de niveles evolucionando desde niveles elementales de reconocimiento e identificación de las figuras geométricas hasta el desarrollo de razonamiento deductivos (p. 16).

En consecuencia, Vargas y Gamboa (2013, citados en Celma, 2020), exponen que, “el modelo categoriza el conocimiento escalonadamente en 5 niveles de razonamiento, secuenciales y ordenados” (p.17). “La capacidad de razonamiento no solo se refleja en la forma de resolver los problemas propuestos, sino también la forma de expresión y utilización de un vocabulario determinado” (Celma, 2020: 18).

> Jaime y Gutiérrez (1993, como se citó en Clema, 2020) afirman que, el modelo de Van Hiele también es reconocido por definir una línea instructiva o de actuación. Es decir, proporciona pautas a seguir por los profesores para favorecer el avance de los estudiantes en y entre los niveles de razonamiento geométrico. Estas pautas propuestas por Van Hiele reciben el nombre de “fases de aprendizaje” y buscan guiar el docente en el diseño y organización de las experiencias de aprendizaje adecuadas para el progreso del estudiante. Las fases no pertenecen a un determinado nivel, sino que en cada nivel la instrucción comienza con actividades de la primera fase y continua con actividades de las siguientes fases al completar estas secuencias de las 5 fases, el sujeto debe haber alcanzado el nivel de razonamiento siguiente (p. 19)

Gutiérrez y Jaime (2012) describen las cinco fases de aprendizaje propuestas por Van Hiele como sigue:

Primera fase: Información. En esta fase se invita al docente a informar e informarse. Informar sobre: el campo de estudio en el que van a trabajar, tipo de problemas que se van a plantear, materiales que se van a utilizar, entre otros. Además, los estudiantes aprenderán a manejar el material y adquirirán una serie de conocimientos básicos para iniciar una construcción del conocimiento matemático. Averiguar e informarse sobre: los conocimientos previos de los estudiantes alrededor del tema que se va abordar. Como sugerencia, en esta primera fase de aprendizaje mencionan: primero, que la experiencia extraescolar no debe despreciarse sino que puede ser utilizada como fuente de motivación; segundo, evitar repetir cosas que los estudiantes ya saben y por último puede presentarse el caso de trabajar en un tema que no es totalmente nuevo para el estudiante, por lo que, para una buena utilización del modelo de Van Hiele se invita, a que el profesor tenga claro, que grado de conocimiento tienen los estudiantes respecto a los contenidos del tema y el nivel de razonamiento capaces de mostrar.

Segunda fase: Orientación dirigida. En esta fase los estudiantes exploran el campo a trabajar, basados en investigaciones y empleando el material proporcionado por el profesor que ha secuenciado cuidadosamente. La finalidad principal en esta fase es conseguir que el estudiante descubra, comprenda y aprenda los conceptos, propiedades, figuras, etcétera, principales en el área de geometría. Van Hiele señala esta fase como fundamental, ya que en ella se construyen los elementos básicos de la red de relaciones del nivel correspondiente y si dichas actividades proporcionadas se seleccionan cuidadosamente, constituyen la base adecuada del pensamiento del nivel superior.

Tercera fase: Explicitación. El objetivo de esta fase es que los estudiantes sean conscientes de las características y propiedades aprendidas en la fase anterior. Además, se intenta que los estudiantes intercambien sus experiencias, comenten las regularidades que han observado y expliquen cómo se han resuelto las actividades en un contexto grupal.

Aquí es fundamental el diálogo entre los estudiantes, con intervenciones del profesor cuando se requiera o sea necesario. Este dialogo entre compañeros retroalimenta notablemente el conocimiento de cada uno de ellos, pues los obliga a ordenar sus ideas, analizarlas y expresarlas de forma comprensible para el resto de sus compañeros. De igual manera pone al descubierto los métodos y resultados incorrectos y afianza los correctos, luego llega el momento donde el profesor introduce el lenguaje teórico posible, correspondiente al nuevo nivel de razonamiento que están empezando a alcanzar.

Cuarta fase: Orientación libre. En esta fase los estudiantes deberán aplicar los conocimientos adquiridos para resolver actividades y problemas diferentes a los anteriores, y probablemente de mayor complejidad. Aquí el estudiante debe seguir perfeccionando su conocimiento o campo de estudio así sea que conozca gran parte de ello. Esto se consigue mediante el planteamiento de problemas nuevos y abiertos que puedan desarrollarse de diversas formas o que lleven a distintas soluciones. En estos problemas el estudiante aplica los conocimientos y la forma de razonar que ha adquirido en las fases anteriores. Además, estos problemas no tienen nada que ver con los ejercicios de "aplicación" tan frecuentes, presentados en los libros de texto de enseñanza sino actividades que involucren objetos y situaciones de la vida real. Lo anterior teje y fortalece las relaciones que se han venido formando en las fases anteriores.

Quinta fase: Integración. En esta fase el estudiante debe adquirir una visión general de los contenidos y métodos que tiene a su disposición, relacionando los nuevos conocimientos con los adquiridos en las fases anteriores; se trata de condensar en un todo lo que han explorado sus pensamientos. En esta fase el docente puede fomentar un trabajo que proporcione comprensiones globales, con la característica de que no aporte conceptos o propiedades nuevas al estudiante. El trabajo se trata de acumular, comparar y combinar cosas que el estudiante ha venido trabajando.

El paso por cada una de las fases y la observación de las mismas, potencia en gran medida, la posibilidad de que un estudiante avance del nivel en el que se encuentra y así pueda desarrollar habilidades y capacidad de razonamiento geométrico.

Aula taller

Es considerada como una metodología que organiza las actividades de aprendizaje, estructura la participación de los estudiantes y la transformación de los ambientes de aprendizaje. Pastel (1993, como se citó en Díaz y Sánchez, 2004) señala que:

> […] la metodología está fundamentada en formas activas de aprendizaje de tal amanera que permite a la persona, desarrollar la capacidad para informarse, comprender, analizar, criticar, evaluar, tomar decisiones y en términos generales, contar con las herramientas cognitivas necesarias para realizar una lectura crítica del entorno (p. 145).

Es decir, se busca favorecer el "aprender haciendo", para despertar la curiosidad en torno a un problema o concepto. Por otro lado, Jaramillo (2012, como se citó en Villarreal, et al., 2013) manifestó que "permite el trabajo en equipo, y utiliza material didáctico para la exploración de situaciones concretas, […] que conlleva al desarrollo de las habilidades de pensamiento y a la integración de los diferentes pensamientos matemáticos" (p. 4).

Además de las fases de aprendizaje planteada por Van Hiele, el aula taller presenta tres etapas: Inicial, desarrollo y actividades de cierre. Para la primera etapa el docente presenta y explica en que consiste el trabajo, motiva a los estudiantes para que participen en el proceso de todas las actividades y para que contribuyan con sus conocimientos y habilidades en el desarrollo de estas. Aquí también el estudiante tiene la oportunidad de preguntar dudas u observaciones sobre lo que se tiene que realizar o la forma de trabajo.

La segunda etapa se trata de guiar a los estudiantes en el desarrollo del conocimiento y está relacionada con llevar una serie de documentos como medio de control, que le permita al docente la supervisión de las actividades por equipo y en forma individual. El docente no explica el tema, solo guía a los estudiantes para que asimilen la información que se presenta en los textos informativos por si solos, que permitan la integración de conocimientos de forma individual y grupal con el objetivo de adquirir niveles superiores de conocimiento. Finalmente, para la tercera etapa, dependiendo del material preparado, se le debe permitir al estudiante elaborar, reelaborar y trabajar tanto en lo individual como en equipo, se debe procurar que las actividades lleven a la reelaboración. En esta etapa se pueden aplicar una variedad de técnicas sujetas a las características del tema como la exposición, la retroalimentación, la evaluación, etcétera (Jiménez, et al., 2019).

De acuerdo con lo expuesto por Jaramillo, el trabajo en equipo es de gran importancia ya que permite a los integrantes aprender a pensar y actuar con otros, permite al estudiante confrontar su pensamiento con el de sus compañeros y admitir puntos de vista diferentes, es decir, aceptar las diferencias, es un espacio en el que se elaboran normas de trabajo y donde el estudiante es capaz de admitir que necesita la ayuda de sus compañeros para aclarar dudas y otras situaciones de aprendizaje. Derivado de ello, las actividades que se diseñan dentro de esta metodología deben tener como centro a la persona, deben integrar la teoría y la práctica, la reflexión y la acción, por ende, quienes interactúan en este espacio asumen otros papeles al generarse diversas formas de comunicación. Por tanto, se considera que el aula taller es una metodología que se puede implementar en escuelas y colegios. En esta metodología Díaz y Sánchez refieren que: “el papel del docente es más gratificante que el que le atribuye la enseñanza tradicional, pues lo convierte en coordinador de procesos de enseñanza-aprendizaje, organizador de actividades y creador de situaciones de aprendizaje significativas" (2004:148).

Recursos didácticos

Al hablar de didáctica, se evocan ideas relacionadas con la enseñanza, pues la didáctica en gran parte es aceptada como el arte de enseñar. Entendiendo la enseñanza como un asunto práctico; donde interactúa el docente, el estudiante, el objeto de conocimiento y el contexto, la didáctica se encarga de orientar y dirigir las actividades de la enseñanza, lo anterior es una percepción tradicional.

Para Godino y Batanero (1996, como se cita en Anónimo, 2010):

> La didáctica de las matemáticas estudia los procesos de enseñanza-aprendizaje de los saberes matemáticos en los aspectos teóricos-conceptuales y de resolución de problemas tratando de caracterizar los factores que condicionan dichos procesos. Se interesa por determinar el significado que los alumnos atribuyen a los términos y símbolos matemáticos, a los conceptos y proposiciones, así como la construcción de estos significados como consecuencia de la instrucción (p. 40).

A su vez, Brousseau (1994, citado en anónimo, 2010) enriquece la definición de la didáctica de la matemática afirmando que es la "ciencia de las condiciones específicas de la difusión (impuesta) de los saberes matemáticos útiles a las personas y a las instituciones humanas" (p. 40). Además, este autor agrega que la didáctica de las matemáticas es: "es el estudio de la evolución de las interacciones entre un saber, un sistema educativo y los alumnos, con objeto de optimizar los modos de apropiación de este saber por el sujeto" (p. 40). También define la concepción fundamental de la didáctica de las matemáticas como: "una ciencia que se interesa por la producción y comunicación de los conocimientos matemáticos, en lo que esta producción y esta comunicación tienen de específicos de los mismos" (p. 40).

Cuando se estudian las diversas maneras de aprender del estudiante, sus potencialidades e intereses; se ve la necesidad de reconocer al docente como guía, orientador y facilitador de los contenidos curriculares, para que el estudiante procese e integre los contenidos desarrollados en el proceso enseñanza de modo autónomo. Para esto, el docente tiene la gran tarea de diseñar y seleccionar las estrategias didácticas apropiadas para sus estudiantes. De las muchas estrategias didácticas que existen, podemos nombrar los métodos didácticos, las técnicas de enseñanza-aprendizaje y los recursos didácticos.

Una concepción que se tiene frente a los recursos didácticos, es la de cualquier instrumento que facilita al docente explicar mejor un proceso educativo, para que los conocimientos lleguen de una manera más clara al estudiante. Es decir, ayudan al docente en su tarea de enseñar y facilitan al estudiante lograr los objetivos de aprendizaje.

Teniendo una percepción sobre recursos didácticos, es también necesario argumentar la idea del por qué estos se consideran didácticos:

> Se consideran didácticos porque el docente presenta una situación de aprendizaje distinta, por lo que capta la atención del alumno de manera tal que potencia la adecuación y estímulo de su respuesta con el fin de elevar la calidad y eficiencia de las acciones pedagógicas, presentándose como apoyos e instrumentos para elevar la motivación por aprender (González, 2015: 15).

En consecuencia, al hablar de recursos didácticos, estos son considerados como un apoyo pedagógico a partir del cual se proporciona al profesor una herramienta interactiva, se refuerza su función y se optimiza el proceso de aprendizaje. Además, para que sean efectivos estos recursos, deben estar acorde con el contexto educativo, es decir, que hagan aprender al estudiante, potencialicen su motivación y estén a su alcance para lograr maximizar su proceso de aprendizaje.

Para emplear los recursos didácticos en el proceso de enseñanza de la geometría analítica, es conveniente considerar su análisis y su clasificación y de esta manera determinar qué tipo de materiales didácticos utilizar.

Acogiendo la idea de Flores, et al. (2011, como se citó en Pac, 2014) primero es importante reconocer la diferencia entre recursos y materiales. Los recursos, son "materiales no creados con fines didácticos pero utilizados con ese fin"; los materiales, son creados "específicamente para la enseñanza de la matemática" (p.15).

Dependiendo de los autores, se clasifican los recursos didácticos de diversas maneras; para este trabajo, se ha considerado la clasificación que describe González (2015), la cual consta de dos tipos de recursos didácticos los mismos que son: materiales convencionales y materiales no convencionales.

Materiales convencionales.

Impresos como libros, fotocopias, periódicos, documentos, etcétera. "En ellos se fijan los conceptos y se desarrollan de forma extensa los contenidos", en consecuencia, deben ser el referente indiscutible de lo que se presenta en clase.

Tableros didácticos como la pizarra, "este medio se ha convertido en un icono imprescindible [...] dentro del aula". La planificación apropiada del empleo de los tableros didácticos los convierte en un medio eficaz de enseñanza-aprendizaje.

Manipulables como mapas conceptuales, papel, cubos de conexión entre otros. Son “un apoyo o herramienta para que el alumno ponga en práctica el contenido” (pp. 15-16).

Materiales no convencionales.

Imágenes fijas proyectables como las diapositivas y fotografías. “La diapositiva fue durante mucho tiempo la mejor forma de llevar al aula la realidad exterior”.

Audiovisuales como películas y videos.

Técnicas de simulación. “Se aproximan hipotéticamente a la realidad a través de experiencias directas como dramatizaciones, resolución de casos, entre otras” (pp. 15-16).

> Estos recursos generan que el alumno no se limite a memorizar, sino que constantemente estimule su conocimiento a través de la interacción y dinamismo que el docente les presenta, convirtiéndose este medio en una estrategia o herramienta de enseñanza que promueve o motiva el aprendizaje del alumno acorde a sus necesidades (González, 2015: 17).

Se reconoce, de esta manera, que el uso de los recursos didácticos favorece la interacción educativa y complementa la formación profesional del docente. Así, para que el estudiante logre un aprendizaje significativo se requiere que el docente se mantenga en constante adquisición de conocimientos y habilidades para contribuir a la creación de nuevas metodologías que sean rentables y aplicables al estudiante en su vida personal y académica. De esta manera motivar la enseñanza y aprendizaje en el aula.

Materiales manipulables

De manera general, dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje existen trabajos e investigaciones sobre materiales manipulables, que son pertinentes para la enseñanza de los conceptos geométricos, como alternativa para tomar contacto con las formas geométricas. Además, en este nivel de educación media también es importante y necesaria la manipulación para una mayor abstracción posterior de conceptos complejos. Al respecto Avella, (2012, como se citó en Fuentes y Fuentes, 2020) considera que:

> La construcción del conocimiento exige la creación de imágenes mentales en el proceso de interiorización y asimilación de los problemas, así como en el de la búsqueda de solución(es); la manipulación de objetos, la visualización de ciertas imágenes, la construcción de formas, etc., son un rico manantial de conjeturas y una herramienta de diagnóstico de las ideas y conocimientos previos que los estudiantes tienen ante una determinada tarea (p.10).

Complementando lo anterior, se ve la necesidad de precisar que las actividades no finalizan en la fase de manipulación, sino que también se procede a definir, deducir, resolver problemas de ejercitación y por último aplicarlos a la vida real. Además, los profesores deben incluir en sus unidades didácticas los diversos materiales de forma minuciosa para que el aprendizaje sea activo y significativo.

El material manipulable será entendido no solo como objetos físicos previamente diseñados, si no como un conjunto de instrumentos que buscan la participación visual, táctil, auditiva del estudiante, además, representan algún aspecto de la realidad matemática que, después se traduce en teoría; para contribuir en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Uicab, (s.f.) distingue dos tipos de materiales manipulables, los cuales se describen de la siguiente manera:

Manipulables tangibles: ábacos, geoplanos, balanzas, instrumentos de medida, piedrecillas u objetos, entre otros; colocan en juego la percepción táctil y desempeñan funciones simbólicas.

Manipulables grafico-textuales-verbales: graficas, símbolos, tablas, entre otros; donde participa la percepción visual y/o auditiva.

Uicab (s.f.) exponen algunas características de estos materiales manipulables como sigue:

El material concreto posee un alto nivel exploratorio. Este aspecto favorece la resolución de problemas, la discusión, la comunicación y la reflexión.

Los materiales concretos se convierten en un puente hacia el entendimiento de las ideas abstractas, cuando los estudiantes han trabajado con estos materiales por un tiempo considerable y han desarrollado el entendimiento de los conceptos matemáticos.

El material didáctico manipulable es un complemento, no sustituye otras formas de representación.

En general, el uso de recursos didácticos apoya el desarrollo de los estudiantes en varios aspectos: el pensamiento, el lenguaje oral y escrito, la imaginación, la socialización y el conocimiento de sí mismo y de los demás; de esta manera las bondades que presenta el material didáctico conllevan a que estos se conviertan en un recurso de apoyo para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Además, Uicab, (s.f.) refiere que:

> […] llevar al alumno (de diferentes edades) progresivamente a la construcción de una red de conceptos y procedimientos, y al dominio del lenguaje matemático, en consonancia con el conocimiento matemático formal. De aquí que se asuma una postura de que la orientación de la enseñanza y del aprendizaje este situada en un continuo que

vaya de lo manipulativo, practico y concreto hasta lo esencialmente simbólico, abstracto y formal (p.1011).

Para el uso de manipulables tangibles es necesario exponer las bondades, pero también es inevitable considerar aspectos que pueden conllevar a problemas o dificultades, entre ellos tenemos:

El docente: el docente debe poseer una formación científica y didáctica. Además, las concepciones que maneje sobre la matemática y su aprendizaje; se convierten en elementos centrales en el momento de utilizar un determinado material tangible, ya que podrá justificar la necesidad de emplear dicho material (Uicab, s.f.).

El estudiante: el interés, la motivación, la disciplina, el nivel y el excesivo número de estudiantes por clase; influyen en la decisión de utilizar materiales tangibles y en la organización del trabajo a realizar (Uicab, s.f.).

“El conocimiento matemático a estudiar plantea al profesor una seria de cuestiones metodológicas que pueden afectar la utilización de los materiales tangibles” (Uicab, s.f: 1012).

El diseño del material: para el diseño del material “es importante considerar el nivel al que va dirigido dicho material, las caracteristicas del grupo, la duracion de los modulos-clase, etcetera” (Uicab, s.f: 1012).

Los materiales manipulables se clasifican de acuerdo a diversos criterios:

Distinguiendo los momentos en los que los materiales manipulativos se pueden utilizar. Corbalán (s.f., como se citó en Prieto, s.f.) expone 3 momentos:

Pre-instruccional: “se utiliza al comienzo de la clase con el fin de introducir un concepto” (p.18)

Co-instruccional: “se utiliza para trabajar el concepto en el desarrollo de la clase” (p.18)

Post-instruccional: "se utiliza al final de la clase para repasar el concepto que se ha estado trabajando" (p.18)

Tipo de aprendizaje que se busca con la utilización de los materiales manipulativos:

Memorizar, retener y recuperar información.

Comprender, hacer relaciones.

Resolver problemas.

Aplicar algoritmos.

Ejercitarse, dominar la técnica.

Objetivos que se persiguen con la utilización de los materiales manipulativos:

Mostrar-observar.

Proponer-manipular.

Plantear-resolver problemas.

Buscar-desarrollar estrategias.

Barrantes y Balletbo (2011) en su trabajo consideran que existe una categoría denominada elementos manipulativos, en la que se trata a su vez tres tipos de elementos: los constructores, los construidos y los mecanismos.

Fortuny (1998, como se citó en Barrantes y Balletbo, 2012) señala que los materiales constructores se consideran "aquellos que sirven para hacer modelos diversos o bien para generar situaciones de aprendizaje" (p.145). Por otra parte, los materiales construidos, "son materiales que sirven directamente para observar y concretar conceptos, y profundizar en propiedades" (p.146). Por último, los materiales mecanismos son aparatos construidos con recursos del medio que sirven para visualizar imágenes o procesos.

Dentro de los materiales constructores se encuentra el papel, un material idóneo para hacer diversas construcciones y seguidamente realizar actividades; uno de los materiales construidos son los sólidos de madera o plástico conocidos por todos los profesores y estudiantes.

De acuerdo con lo que expresa Flores, et al. (2011), se puede concluir que en el estudio de las diferentes asignaturas siempre se va a requerir el uso tanto de recursos como de materiales, que se convierten en soporte para el proceso de enseñanza-aprendizaje. Aunque los recursos no están diseñados con fines educativos para el aprendizaje de un concepto determinado, son utilizados por el docente como apoyo dentro del aula; a diferencia de los materiales que, si están diseñados para la enseñanza de un contenido concreto, donde su versatilidad permite que puedan ser adaptados a otros contenidos para los que no fueron creados, por mencionar algunos los manipulativos.

Metodología

Metodología de sistematización

Existen diferentes concepciones de sistematización, las cuales conciben diversas formas de producir saber. Para el presente trabajo se reflexionó sobre la concepción que presenta Jara (s.f.), "la Sistematización de Experiencias produce conocimientos y aprendizajes significativos que posibilitan apropiarse de los sentidos de las experiencias, comprenderlas teóricamente y orientarlas hacia el futuro con una perspectiva transformadora" (p. 4).

Para el proceso de sistematización se contemplaron las siguientes fases:

Etapa 1: Revisión (PPI2): en esta fase se hizo una revisión documental alrededor del tema de interés, identificando y acogiendo trabajos e investigaciones relacionados al tema, que fueron esenciales para justificar la metodología de trabajo en el aula.

Etapa 2: Planeación (PPI2): en esta fase se dio paso a elegir, delimitar, definir y proveer las formas de trabajo para la práctica docente, para ello se tuvieron en cuenta una serie de aspectos: la población, los objetos matemáticos, la selección del material, el diseño de las guías, marco referencial y los objetivos.

Etapa 3: Implementación (PPI3-PPI4): la finalidad de esta fase fue colocar en práctica la metodología planeada para la docencia directa, que tiene como instrumentos de intervención las guías didácticas, las cuales involucran a los recursos didácticos como apoyo pedagógico.

Recolección de la información: se vio la necesidad de considerar los diferentes instrumentos que posibilitan la obtención de la información. Las guías didácticas, las fotografías, los videos, el diario de campo y los cuadernos de notas de los estudiantes y practicantes fueron los instrumentos necesarios y pertinentes para guardar los procesos que se vivieron en el aula.

Selección de la información: en este punto se ordenaron los momentos de las sesiones de clase, se clasificaron las actividades y la información, con el fin de hacer una reconstrucción histórica y un análisis crítico del proceso vivido en el aula.

Etapa 4: Conclusiones (PPI4): en esta fase de acuerdo a los resultados se elaboran unas conclusiones en caminadas hacia el cumplimiento de los objetivos y basados en la teoría, para terminar comunicando los aprendizajes.

Con base en lo que expone Jara (s.f.), la sistematización será llamada sistematización de experiencias, entendida como un proceso secuencial y ordenado que contempla varios momentos. La reconstrucción e interpretación critica de las experiencias generadas durante la práctica docente directa hace parte de una de las etapas de la sistematización en la cual se hará énfasis. En consecuencia, es la etapa más importante en este documento. Respecto a la interpretación crítica: primero, ayuda a descubrir la importancia de un plan metodológico o en otras palabras la lógica del proceso vivido en el aula; segundo, produce conocimientos y aprendizajes significativos que posibilitan apropiarse de la práctica docente: reflexionar sobre el que hacer en el aula y sobre las estrategias implementadas, no solo desde la parte empírica sino desde lo teórico.

Durante la etapa de implementación se empezó a recolectar la información y se hizo el análisis periódico de las sesiones de clase para hacer la reconstrucción y el análisis crítico de las experiencias vividas en el aula. Este ejercicio se hizo paralelo al proceso de la práctica docente directa. Para recolectar la información y tener registro de las experiencias, se utilizaron 4 instrumentos: las guías didácticas, los cuadernos de notas del estudiante, las fotos y el diario de campo. El diario de campo es un instrumento de recolección de información que permitió hacer registro ordenado y secuencial y dio cuenta del proceso que se hizo sesión a sesión. Con la información recolectada durante el proceso de intervención en el aula y la teoría que sustenta este trabajo se hizo una reconstrucción, un análisis crítico, se sacaron conjeturas y conclusiones direccionadas hacia los objetivos propuestos.

Docencia directa. Atendiendo el reglamento interno de la Institución Educativa Antonio García Paredes, la dinámica general de trabajo para el retorno a la presencialidad dependió de dos elementos: el horario de clase y las burbujas. En el horario de clase los días de la semana fueron identificados por día uno, día dos, día tres, día cuatro y día cinco y las burbujas que se formaron, son dos grupos en los que se ha dividido la totalidad de un curso. Por ejemplo, la burbuja uno de todos los grupos asistía a la institución los días martes y jueves y la burbuja dos de todos los grupos los días miércoles y viernes.

De acuerdo a lo anterior, las actividades fueron distribuidas en 9 semanas, los días miércoles y viernes en la jornada de la tarde. Es decir, con la burbuja número dos de los tres grupos del grado décimo, cada una con un promedio de ocho a diez estudiantes. En particular, el horario para las clases de matemáticas de la burbuja dos de todos los grupos del grado décimo se estableció en cinco semanas, organizadas como se indica: para el décimo uno la semana 1-3 el día miércoles de 1:00 - 2:30 PM y la semana 3-5 el día viernes de 1:00 - 2:30 PM; para el décimo dos la semana 1-2 el día viernes de 1:00 - 2:30 PM y la semana 4-5 el día miércoles de 2:30 - 4:20 PM contando con un descanso de 3:15-3:35 PM, finalmente para el décimo tres la semana 1-2 el día viernes de 2:30 - 4:20 PM contando con un descanso de 3:15 - 3:35 PM y la semana 4-5 de 1:00 - 2:30 PM. Por tanto, se trabajó de cuatro a seis horas semanales con una totalidad de 28 estudiantes.

Para la práctica docente se planeó trabajar: primero, en el campo de la línea recta: la distancia entre dos puntos, la pendiente de una recta, la ecuación de la recta, el paralelismo y la perpendicularidad; segundo, en el campo de las cónicas: la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola, cada tema con su respectiva guía didáctica. Las actividades planteadas en cada una de las guías se desarrollaron de manera presencial. De esta manera se dio continuidad al trabajo con guías que venía implementando la Institución, las cuales fueron publicadas en las páginas de la institución y en los respectivos grupos de WhatsApp para los casos presenciales y no presenciales.

Se inició el trabajo en el aula (sesiones de clases), presentando de manera general la estructura de la guía, con este proceso se buscaba informar a los estudiantes sobre el tema, la forma de trabajo y los materiales necesarios para el desarrollo de las sesiones. Luego, a través de la guía didáctica (orientación dirigida) los estudiantes exploran, comprenden y aprenden los conceptos, las propiedades, etcétera, principales dentro de la geometría. Este proceso se verifica al terminar cada una de las actividades presentadas en la guía mediante la socialización. A medida que se desarrollaron las actividades el estudiante utilizó lo que adquirió o comprendió en las socializaciones de las mismas, para resolver actividades que requerían de lo aprendido e involucraban nuevo lenguaje, mayor contenido y recursos didácticos (fase de orientación libre). Por último, con los conocimientos adquiridos, en cada guía se hace una conclusión del tema alrededor de la construcción de la ecuación de la línea recta y las cónicas. Adicional, como refuerzo se presentaron ejercicios y material complementario opcional para aplicar y profundizar en el tema.

Debido a la emergencia sanitaria sobre el COVID-19 y por motivos de fuerza mayor algunos estudiantes no podían iniciar el proceso de presencialidad, de tal manera que para el desarrollo de las guías se pensó y se acogió el trabajo virtual que venía implementando la institución, para aquellos estudiantes que no pudieran asistir, para lo cual se trazó lo siguiente: durante 9 semanas los días lunes se planeó un encuentro virtual, mediante las aplicaciones de Meet o WhatsApp, cada encuentro con una intensidad horaria de 2 horas aproximadamente, tratando de resolver todas las actividades de la guía, para tal fin se contaría con el acompañamiento de los practicantes. Para los días lunes también se establecieron asesorías para los estudiantes de la burbuja dos de todos los grupos del grado décimo, con el fin de resolver inquietudes entorno a la temática y escuchar comentarios que durante las sesiones de la semana no se realizaron. Para las explicaciones de los temas relacionados con la geometría se utilizó el programa de Paint y geoplanos virtuales.

Diseño de las guías didácticas. Para alcanzar los objetivos planteados dentro de este trabajo se elaboraron 9 guías didácticas por tema; 5 para el campo de la línea recta y 4 para el campo de las cónicas.

Todas las guías didácticas fueron diseñadas con la siguiente estructura:

Identificación.

Institucional.

Académica.

Estudiante.

Saludo de bienvenida.

Materiales.

Descripción de la guía.

Propósito.

Objetivo de la guía.

Objetivos por actividad**.**

Contenidos.

Introducción.

Actividades iniciales o diagnósticas.

Desarrollo.

Actividades de retroalimentación.

Actividades manipulables.

Conclusión.

Actividades de cierre (ejercicios y material complementario).

Las guías didácticas fueron una herramienta esencial para el trabajo de intervención en el aula y se presentan en los anexos. Las actividades que se plantearon en cada una de las guías están adecuadas y organizadas de acuerdo a los niveles y las fases de aprendizaje propuestas dentro del modelo de razonamiento de Van Hiele, con aspectos de la metodología aula taller y además como apoyo pedagógico se incluye actividades con procedimientos o instrucciones para el uso de material concreto, en particular el geoplano un material versátil diseñado para la enseñanza de un contenido; y el papel, un recurso idóneo para hacer diversas construcciones y realizar actividades. Cada actividad estuvo dirigida por dos practicantes con el acompañamiento de la docente titular de dicha Institución.

Cada guía incluye inicialmente actividades iniciales que también cumplen el objetivo de ser diagnósticas, así como actividades que involucran prácticas con material concreto, para el nivel 1, que al mismo tiempo permiten redescubrir expresiones matemáticas, para el nivel 2 y 3. Por tanto, las actividades no son exclusivas de un solo nivel, sino que giran en torno a los primeros 3 niveles.

Con el objetivo de motivar, conocer los conocimientos previos de los estudiantes y mejorar el nivel de percepción sobre el tema, se inició abordando actividades iniciales relacionadas con los conceptos que se iban a estudiar. Para lograr redescubrir elementos y expresiones matemáticas los estudiantes avanzaron hacia las actividades más complejas, las cuales involucraron el uso del geoplano. Luego, abordaron actividades de cierre donde resolvieron ejercicios y material complementario para reforzar el tema. Finalizada cada actividad los estudiantes tuvieron el espacio para socializar las respuestas y las experiencias que tuvieron en el desarrollo de las actividades, generando un debate que permitió la construcción colectiva de los conceptos.

Las actividades de tipo manipulable tuvieron el propósito de introducir a los estudiantes a los conceptos de la línea recta, desde una perspectiva práctica y visual. Además, estas actividades se adecuaron de tal forma que ofrecieran a los estudiantes un trabajo en equipo dinámico e interactivo, que les permitiera apreciar mediante el uso del geoplano la parte algebraica y gráfica correspondiente a los objetos matemáticos.

Las actividades de retroalimentación son preguntas que invitan a respuestas rápidas y crean así un “feedback” inmediato. Estas actividades son “una buena manera de mantener la atención focalizada de la o el estudiante durante la sesión en el aula” (Restrepo & Waks, 2018:12)

Diseño de los materiales didácticos. Para complementar las guías didácticas y el trabajo en el aula se construyeron 20 geoplanos de madera prensada. Cada geoplano presenta dimensiones de 35 x35 cms, en la parte interna del tablero se realizaron 506 agujeros que forman una cuadricula. Además, la separación horizontal y vertical de cada agujero es de $1\frac{1}{2}$ cms. Dado que el material era muy rígido al momento de introducir los pins se optó por realizar agujeros con el fin de facilitar al estudiante colocar los pins en el geoplano.

Los pins permitieron representar los puntos que se ubicaron en el geoplano, por ello se adquirieron 4 cajas de pins por 100 unidades. El hilo permitió unir los pins (puntos) ubicados en el geoplano de tal forma que simulara segmentos o rectas entre cada par de puntos, se contó con cuatro bolas de hilo de algodón de distintos colores, como se observa en la Figura 1. Por otra parte, los materiales como: regla, transportador, tijeras, papel y otros se dejaron a responsabilidad del estudiante. La regla permitió medir la distancia entre cada par de pins (puntos) y el trasportador permitió obtener la medida de los ángulos que se forman con el eje $\boldsymbol{X}$ y una recta (hilos). El material descrito se utilizó en todas las actividades manipulables que se presentaron en las guías didácticas y en las sesiones dentro del aula (Piña & Tigre, 2015).

Figura 1

Materiales

Nota. Elaboración propia.

Reconstrucción histórica y análisis crítico

Para la intervención en el aula se proyectaba ejecutar 9 guías didácticas, pero por el tiempo, la modalidad de trabajo y el ritmo de los estudiantes, solo fue posible desarrollar las primeras 2 guías, privilegiando el aprendizaje activo-significativo y la metodología planeada, más que cumplir con un cronograma.

La intervención en el aula se realizó a través de seis sesiones en las cuales se abordaron las guías didácticas: *la distancia entre dos puntos, la pendiente de una recta*, las cuales contienen una secuencia de actividades correspondientes a los niveles y fases del modelo de Van Hiele.

El modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele plantea lo siguiente mediante dos aspectos:

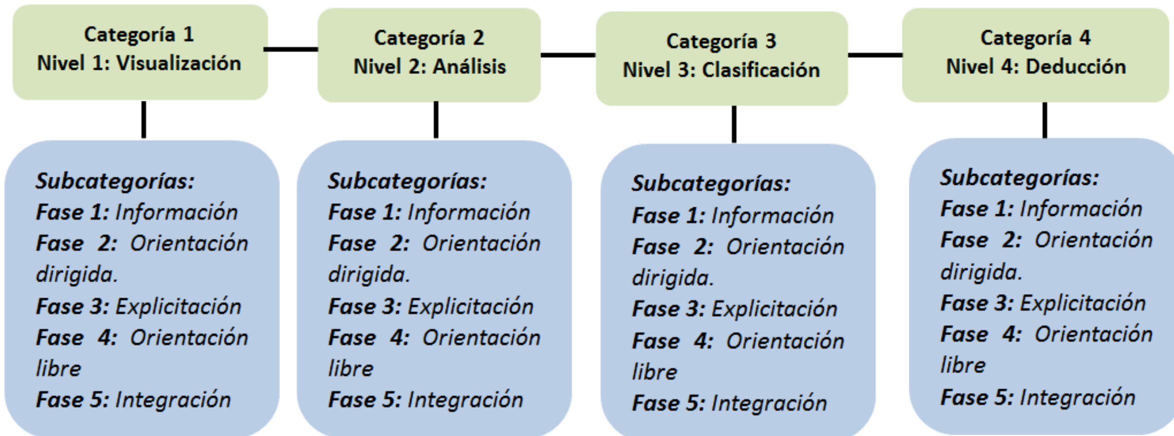
Identifica en cinco niveles (categorías) las diversas formas de razonamiento geométrico de los estudiantes y explica cómo se produce la evolución del mismo.

Establece unas fases (subcategorías) a seguir por los profesores con la finalidad de mejorar la calidad del razonamiento geométrico en el que se encuentran los estudiantes.

Los niveles y las fases de aprendizaje de Van Hiele fueron utilizadas para el diseño de las guías didácticas y el trabajo en el aula. En consecuencia, para el análisis crítico se recurriera a las mismas categorías y subcategorías. (Ver Figura 2)

Figura 2

Esquema del modelo de Van Hiele.



Fuente: Adaptado de (Cajas, 2020).

Según Jaime (1993, como se citó en Vargas, 2013).

> Dentro del modelo, las fases no son exclusivas de un nivel sino, en cada nivel, el estudiante comienza con actividades de la primera fase y continua así, de tal forma que al terminar la fase 5 debe haber alcanzado el nivel de razonamiento siguiente (p.84).

Al momento de diseñar las guías didácticas se acoge de alguna manera el planteamiento de Jaime y la secuencialidad ordenada, tanto de los niveles como de las fases. Nuestro objetivo es reforzar el nivel donde se encuentran los y las estudiantes y ayudarles a alcanzar el siguiente, no es identificar en qué nivel de razonamiento se halla; en consecuencia, las actividades de las guías no son exclusivas de un solo nivel, giran en torno a los primeros. Ahora bien, la travesía por cada una de estas fases y la observación de las mismas, potencia la posibilidad de que los estudiantes avancen del nivel en el que se encuentran y así puedan desarrollar sus habilidades y capacidad de razonamiento geométrico.

La guía didáctica referente al tema “distancia entre dos puntos” está conformada por 6 actividades:

Sesión 1	**Fecha:** 29/09/2021 **Fecha:** 20/10/2021 **Fecha:** 20/10/2021
Participantes: Décimo 1- Décimo 2 y Décimo 3. (Burbuja 2	

Orden de la sesión:

1. Verificación de asistencia.
2. Presentación de los practicantes, los estudiantes, la estructura de la guía referente al tema “distancia entre dos puntos” y los materiales de trabajo.
3. Desarrollo de la actividad 1 y socialización.
4. Desarrollo de la actividad 2 y socialización.

Actividad 1

Tipo de actividad: inicial y diagnostica.

La actividad 1 inicial se realizó de manera individual con el objetivo de indagar sobre los conocimientos previos de los estudiantes acerca de la concepción de distancia entre dos puntos, además de conectar el espacio de la clase con preguntas que requieren de experiencias de la vida cotidiana.

La actividad 1 se realiza de forma individual, en donde se responde a las siguientes preguntas:

1. ¿Qué instrumentos conocen para medir distancias? Y ¿Cuáles han sido las experiencias donde ha tenido que calcular distancias?
2. ¿Qué entiendes por distancia?

3. ¿Has escuchado hablar del tema distancia entre dos puntos, cuando, donde y como lo han trabajado?

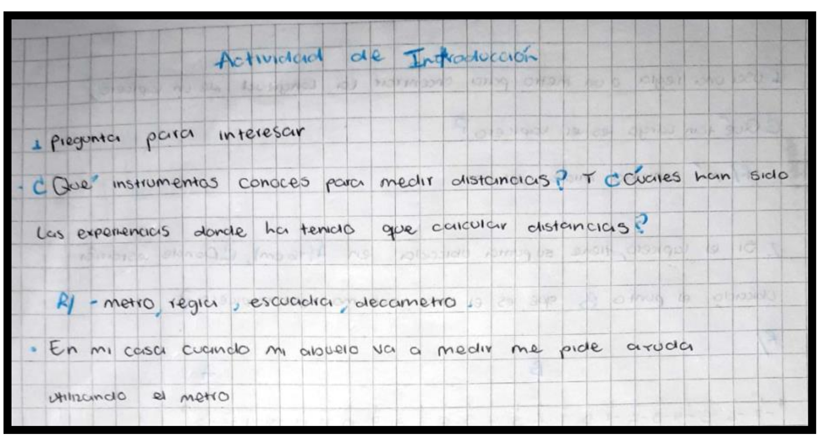
La actividad propuesta se finaliza realizando una socialización de las respuestas a las preguntas anteriores, poniendo sobre el escenario las diferentes apreciaciones del estudiante.

Con la finalidad de aclarar conceptos y definir nuevos términos en el vocabulario a utilizar de aquí en adelante, después de escuchar las respuestas verbales dadas por los estudiantes, de acuerdo a los planteamientos del modelo de Van Hiele, se describieron de manera oral los primeros elementos tales como punto y segmento con sus respectivas representaciones y notaciones como se indica en la guía.

A las preguntas orientadoras para interesar ¿Qué instrumentos conocen para medir distancias? y ¿Cuáles han sido las experiencias donde ha tenido que calcular distancias?, se encuentran respuestas repetitivas acerca de los instrumentos comunes utilizados por los estudiantes para medir distancias y con su propio lenguaje relacionan el tema con experiencias propias de la vida real. (Ver Figura 3)

Figura 3

Pregunta para interesar

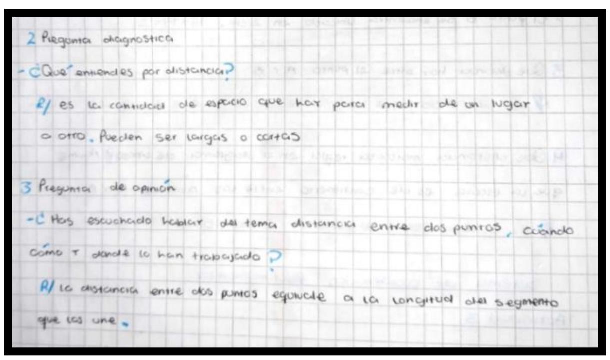


Nota. Respuesta a las preguntas para interesar correspondiente a la guía número 1. Elaboración propia.

Respecto al desarrollo de la pregunta diagnóstica ¿Qué entiendes por distancia? se evidencia que muchos no describen la distancia entre dos puntos como el valor numérico o valor absoluto de la longitud del segmento que une esos dos puntos, lo hacen más de forma coloquial con base en su experiencia; pero también existe un número determinado de estudiantes que para completar sus respuestas han tomado información de la web. Por otro lado, a la pregunta de opinión ¿Has escuchado hablar del tema distancia entre dos puntos, cuándo, dónde y cómo lo han trabajado? se reflejan respuestas dispersas e incompletas, manifestando no haber escuchado hablar sobre el tema. (Ver Figura 4)

Figura 4

Respuestas a la pregunta diagnóstica y de opinión.



2 Pregunta diagnostica

-¿Qué entiendes por distancia?

R/ es la cantidad de espacio que hay para medir de un lugar a otro. Pueden ser largas o cortas

3 Pregunta de opinión

-¿Has escuchado hablar del tema distancia entre dos puntos, cuándo cómo y dónde lo han trabajado?

R/ la distancia entre dos puntos equivale a la longitud del segmento que los une.

Nota. Respuesta a la pregunta diagnóstica y de opinión correspondientes a la guía número 1. Elaboración propia.

De manera general, durante el desarrollo de la actividad 1 se observa que a los chicos y chicas les cuesta expresarse, tal vez por timidez, porque no han tenido un total acercamiento a experiencias relacionadas con las preguntas que se formularon, o porque es una forma distinta de trabajo a la que está acostumbrado el estudiante. En conclusión, muchos reflejan un nivel básico en las competencias comunicativas y en el desarrollo oral.

Desde la implementación en el aula, se ve la necesidad de estimular, desarrollar y potenciar las competencias comunicativas a través de la pregunta, ya que esta permite generar espacios de desarrollo tanto individual como grupal; como lo expresa Reza (2006)

> En el proceso de comunicación diaria en el aula, el uso de las preguntas constituye uno de los procedimientos más eficaces puesto que facilita y promueve la participación del estudiante y su aprendizaje, en razón de que guían las discusiones, fijan la atención e ideas, aclaran planteamientos incorrectos, etcétera (p. 15)

En el trabajo de intervención en el aula se logró verificar lo que expresa Clemente, con una secuencia de preguntas contextualizadas se introduce al estudiante en el tema y en el arte de pensar y con ello se pudo comprobar que progresivamente hubo motivación, participación y aprendizaje. La actividad 1 cumple con el objetivo planteado ya que los estudiantes responden con libertad de expresión de acuerdo a su experiencia, lo que permite apoyar el grado de dominio del tema que tiene el estudiante y le ayuda a adquirir o perfeccionar los nuevos aprendizajes. Ahora, con el tipo de preguntas formuladas en esta actividad la reacción de los estudiantes a primera vista fue positiva debido a que requerían de una opinión personal.

Con la actividad 1 se cumple el objetivo previsto para la fase de información, ya que capta la atención del estudiante, empezando a tomar contacto con el nuevo tema de estudio, pero también reciben información necesaria para conocer los tipos de actividades que se van a resolver, las técnicas y materiales que se requieren y el campo de estudio que han iniciado; con esta actividad se encontró que los estudiantes hacen uso de palabras que han adquirido a lo largo de su experiencia, las cuales utilizan sin conocer su definición, tal es el caso del concepto de distancia, muchos no reflejan apropiación; este puede ser un indicador de las mínimas experiencias con estos elementos. Además, fuentes de información como el internet juegan un papel importante en el enriquecimiento de léxico de los estudiantes y en su conocimiento, los estudiantes apoyados en este medio en el momento de escribir sus respuestas utilizan palabras que no se dieron durante la sesión, ni en las anotaciones que tenían en su cuaderno durante la clase.

Actividad 2

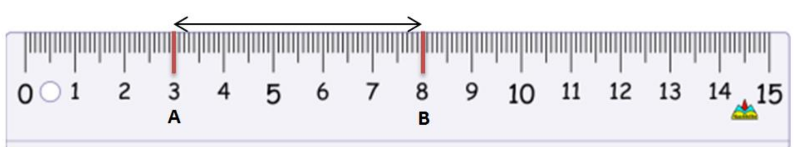
Tipo de actividad: manipulable

El propósito fue medir la distancia de un objeto, utilizando diferentes herramientas y se realiza de forma individual, planteando los siguientes interrogantes:

1. Usa una regla o un metro para encontrar la longitud de un lapicero, ¿Qué tan largo es el lapicero?
2. Si el lapicero, tiene su punta ubicada en A (16 cm), ¿Dónde estaría ubicado el punto B que es el otro extremo del lapicero?
3. ¿Qué distancia existe entre el punto A y el punto B?
4. ¿Qué distancia marca la regla en el diagrama de abajo? Asume que la escala es de un centímetro entre los números A y B.

Figura 5

La regla



*Nota. La regla como a*poyo visual para el desarrollo de la pregunta de la actividad 2correspondiente a la guía número 1. Adaptada desde la web.

La cuarta parte de la sesión referida en el orden del día, concluye con su respectiva socialización por parte de los estudiantes y se observa que causó un impacto positivo en los estudiantes, ya que de una forma práctica se iniciaron en el conocimiento de una temática nueva. En general, se reitera que los y las estudiantes tenían dificultad al expresarse, tal vez por timidez, por ser la primera sesión, por miedo a equivocarse al dar una respuesta o simplemente por el hecho de contar con la presencia de la docente titular durante la sesión. Sin embargo, en algunos casos se vio la necesidad de escoger de manera aleatoria a los estudiantes para conocer las respuestas a esta actividad, lo que muestra una participación medianamente activa.

Una vez finalizada esta experiencia, se realizó una exposición y verificación formal de las respuestas presentadas, por los estudiantes, a algunos de los interrogantes planteados en la actividad 2 y mediante un ejemplo que se proporciona en la guía. Esta exposición se hace con el objetivo de aportar a la adquisición de nueva terminología por parte de los estudiantes, tal como lo indica el modelo de Van Hiele.

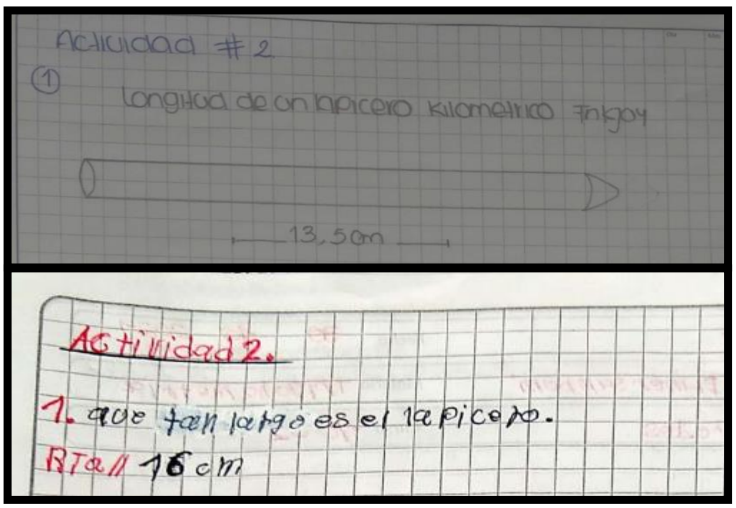
A pesar de que una vez finalizada la exposición no se plantearon interrogantes a los estudiantes; se considera que esta etapa es imprescindible para constatar si los elementos y conceptos tratados durante la sesión, fueron asimilados correctamente.

En cuanto a la pregunta ¿Qué tan largo es el lapicero?, todos los estudiantes hicieron uso de la regla para encontrar la longitud de su lapicero. Los mismos estudiantes respondieron que el largo de su lapicero oscila entre 13,5 cm a 16 cm aproximadamente.

Esta pregunta le permitió al estudiante justificar por su propio medio que la mayoría de las medidas no necesitan ser exactas, este hecho fue comprobado mediante la experimentación y verificado mediante la socialización. Esta pregunta es cerrada, porque limitó al estudiante y lo obligó a responder de manera directa, sin dejar explorar más allá de lo que podía responder (Ver Figura 6). Una manera de subsanar esta dificultad es reconocer como practicantes que antes de empezar el proceso de medir el lapicero con la regla, hizo falta primero pedir al estudiante describir los atributos o características del lapicero (longitud, capacidad, peso y superficie). Era necesario este ejercicio porque el estudiante distingue partes a través de los sentidos y utiliza términos de uso común para hablar sobre un objeto matemático y no hace explicitas las propiedades (Celma, 2020). En este sentido López (2018), refiere que "para iniciar un dialogo debate o reflexión, es necesario iniciar con preguntas abiertas" (párr. 4).

Figura 6

Longitud de un lapicero



Nota. Los estudiantes usaron la regla para encontrar la longitud de un lapicero y así dar respuesta a la pregunta 1 de la actividad 2 correspondiente a la guía número 1. Elaboración propia.

Respecto a la pregunta: si un lapicero, tiene su punta ubicada en A (16 cm), ¿Dónde estaría ubicado el punto B que es el otro extremo del lapicero? Como el contexto de la pregunta radica en encontrar los dos valores que puede tomar el punto B, se observó que algunos estudiantes no consideraron la situación de la pregunta y la respuesta anterior, esto por falta de atención o dificultades de interpretación lo que tuvo como consecuencia respuestas imprecisas a la pregunta. Otra de las hipótesis que se maneja es que la pregunta no fue lo suficientemente clara y especifica. Cuando el docente no contextualiza las preguntas, el estudiante no comprende una idea. López (2018), afirma que, “no se comprende del todo una idea hasta que entienda la pregunta de donde salio”(párr. 36).

A su vez, para complementar la idea que expone López se cita a Elder y Paul (2002) quienes argumentan que:

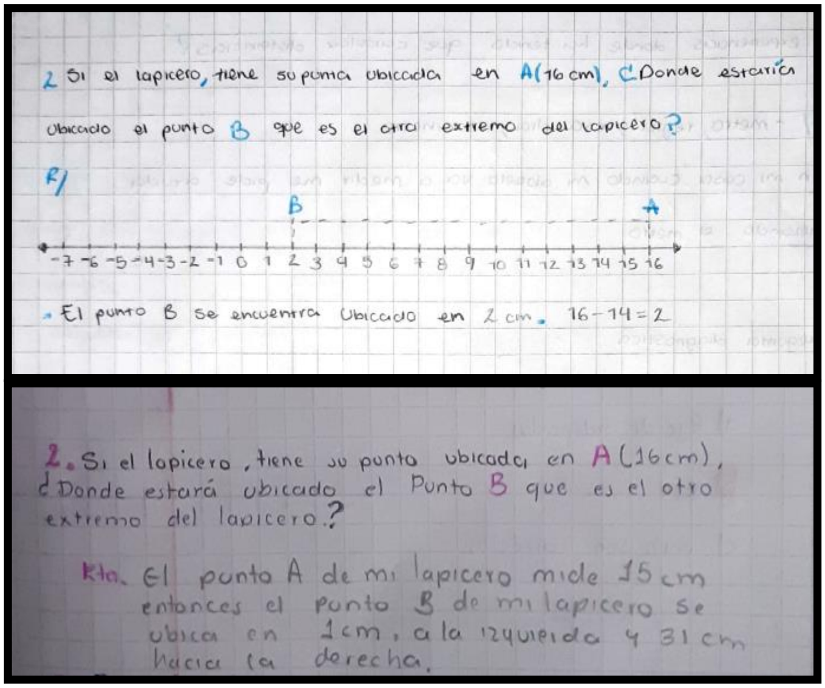
> Una mente sin preguntas es una mente que no está viva intelectualmente. El no (hacer preguntas) preguntas equivale a no comprender (lograr comprensión). Las preguntas superficiales equivalen a comprensión superficial, las preguntas que no son claras equivalen a comprensión que no es clara. Si su mente no genera preguntas activamente, usted no está involucrado en un aprendizaje (p. 5).

Para dar respuesta a la pregunta anterior varios de los estudiantes se vieron en la necesidad de leer comprensivamente la pregunta, señalar los datos para resolver la pregunta, diseñar un plan y ponerlo en práctica. Por tanto, se logró contribuir a la comprensión de algunos elementos y conceptos como el de longitud y segmento. Al mismo tiempo, las respuestas a esta actividad indican que, los estudiantes pueden seguir instrucciones. (Ver Figura 7)

Este tipo de momentos vividos en el aula nos pone a reflexionar sobre el desarrollo profesional como docentes de matemáticas, donde se destaca la competencia docente “mirar con sentido” la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. (Jacob, Lamb y Philipp, 2010, como se citó en Zapatera y Callejo, 2013), describen esta compentencia docente “mediante tres destrezas que debe desarrollor el profesor de matemáticas: (1) identificar las estrategias usadas por los estudiantes; (2) interpretar la compresión de los estudiantes y (3) decidir las acciones a desarrollar en la clase” (p. 536).

Figura 7

Correspondencia entre un punto geométrico y un número real.



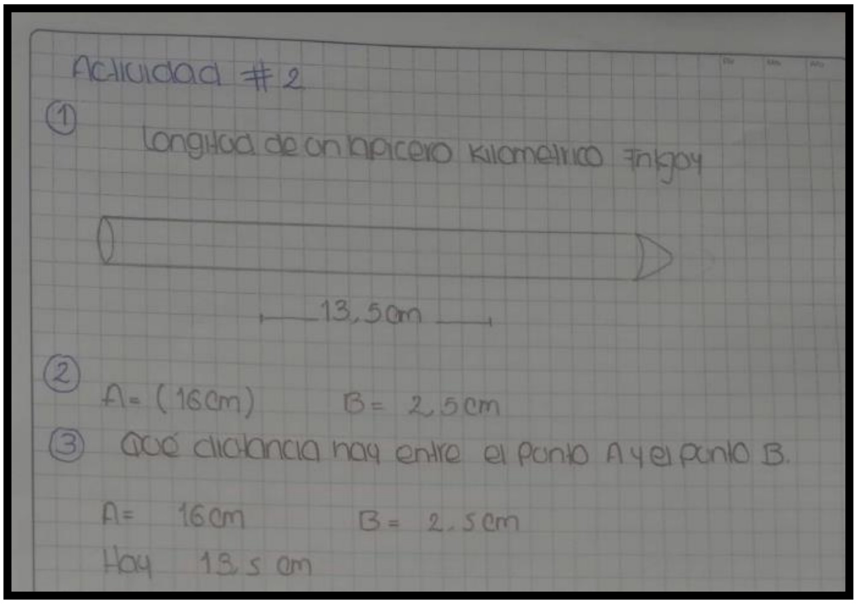
Nota. Con esta actividad se introduce implícitamente a los estudiantes la idea de correspondencia entre un punto geométrico y un número real, con ayuda de un lapicero. Elaboración propia.

La pregunta ¿Qué distancia existe entre el punto A y el punto B? se realizó con el fin de verificar si los estudiantes tenían claridad en identificar la distancia entre los puntos A y B, haciendo uso de los resultados encontrados en la pregunta que se observa en la Figura 7. Con el mismo objetivo se realiza la pregunta que se presenta junto a la Figura 5.

Para el interrogante ¿Qué distancia existe entre el punto A y el punto B?, algunos estudiantes recalcaron el hecho de que la distancia entre el punto A y el punto B coincide con la respuesta que se observa en la Figura 6 (Ver Figura 8). Por otro lado, hubo estudiantes que no consideraron la información de cada pregunta dando respuestas contradictorias. (Ver Figura 9)

Figura 8

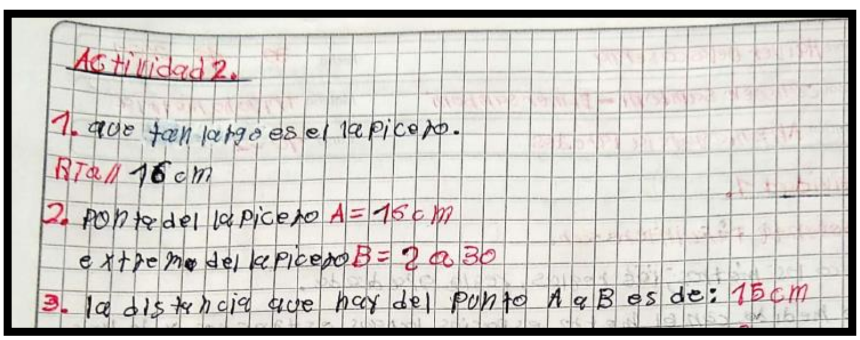
Longitud del lapicero



Nota. Los estudiantes hallan la distancia lineal entre los puntos A y B. Elaboración propia.

Figura 9

Longitud del lapicero



Nota. Los estudiantes hallan la distancia lineal entre los puntos A y B. Elaboración propia.

Para la pregunta ¿Qué distancia marca la regla en el diagrama? Los estudiantes por unanimidad repitieron que la distancia entre el punto A y el punto B mostrada en el diagrama es de 5 cm. De ello se puede deducir que los estudiantes comprendían que las longitudes de unidad en una regla deben ser contadas y no las marcas sobre cada número, aunque explícitamente no manifestaron este hecho, el resultado positivo muestra que si existe un dominio.

En general, la actividad 2 no solo es motivadora sino también introductoria respecto al tema y los manipulables. Para comprender e integrar las propiedades de los conceptos matemáticos es conveniente partir de actividades activas, divertidas y prácticas. Esta actividad hizo que los estudiantes pensaran, según John Dewey (1956, como se citó en Restrepo & Waks, 2018), “ofrecer algo que hacer a los(a) alumnos (as) que demande el pensamiento; y con el pensamiento el aprendizaje se da naturalmente” (p. 5). Además, facilitó momentos para aprender de manera autónoma y significativa ayudándoles a construir y perfeccionar sus propios conocimientos. El aprender no solo se evalúa mediante un examen teórico, sino también se puede recurrir a evaluar el interés, el trabajo colaborativo, el trabajo individual, desarrollo de las actividades etc.

En esta actividad fueron los mismos estudiantes los encargados de elegir el objeto e instrumento de medición, manejar dicho instrumento y pensar en las unidades que se estaban usando para medir. Lo anterior no pasaría si se habla de la medida de un objeto en el tablero como suele suceder en una clase tradicional, porque esta tiene limitaciones que impiden que el estudiante se involucre activamente en la actividad. Por esta razón se presentó a los estudiantes una actividad que para su desarrollo incluyó elementos básicos que tenían a su alcance, tales como: regla y lapicero.

Durante la experiencia se observó que los estudiantes no están familiarizados con este tipo de actividades, que aparentemente son tan elementales presentaron dificultades de aprendizaje que guardan relación con los procesos propios del pensamiento matemático: dificultad en la traducción de los sistemas de representación, esta dificulta fue observable al momento que los estudiantes cometieron el error de sustituir inadecuadamente parejas ordenadas en la fórmula de la distancia. Estas dificultades impiden la consecución total de los objeticos de aprendizaje previstos.

Con la actividad 2 se alcanza parcialmente el propósito de la fase de orientación dirigida, pues el estudiante exploró y descubrió el campo de trabajo a través de la información proporcionada por el practicante y la guía didáctica. Además, esta actividad es fundamental porque se proporcionaron los elementos básicos, pues todos los estudiantes contaban con las herramientas suficientes para abordar de manera satisfactoria la actividad propuesta. Del mismo modo contribuye a que el estudiante supere el nivel 1 de visualización y aborde el nivel de análisis dado que de una u otra manera se presentó un razonamiento matemático, para verificar las respuestas encontradas por los estudiantes a lo largo de la observación y manipulación.

Sesión 2	**Fecha:** 01/10/2021
Participantes: Décimo 1- Décimo 2 y Décimo 3. (Burbuja 2)	**Fecha:** 20/10/2021 **Fecha:** 20/10/2021

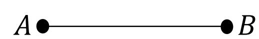
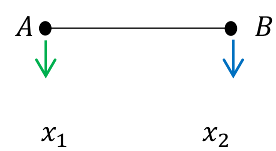
Orden de la sesión:

1. Verificación de asistencia.
2. Resumen de la sesión anterior.
3. Desarrollo de la actividad 3 y socialización.
4. Desarrollo de la actividad 4 y socialización.
5. Inicio al desarrollo de la actividad 5.

Con base a los criterios que plantea el modelo de Van Hiele, la segunda sesión se retoma haciendo una recapitulación de lo visto en la sesión anterior. Para ello, se elaboró un cuadro resumen que se presentó en el tablero, nuevamente con el fin de aclarar conceptos y definir nuevos términos en el vocabulario que seguirá apareciendo en las actividades posteriores (Ver Tabla 1).

Tabla 1

Estructura del cuadro resumen

Elementos geométricos	**Representación simbólica**	**Representación gráfica**
Punto	Una letra mayúscula.	A •
Segmento	AB	
Longitud	$\overline{AB} = x_2 - x_1$	 x_1: Punto inicial. x_2: Punto Final.
Distancia en un sistema coordenado lineal.	$d(AB) = \lvert\overline{AB}\rvert = \lvert x_2 - x_1\rvert$	

Fuente: elaboración propia.

Refiriéndonos al cuadro resumen, se han identificado las siguientes categorías: los elementos geométricos, (punto, segmento, longitud y distancia en un sistema coordenado lineal); los sistemas de representación simbólica y gráfica.

Se aprovechó la actividad 2 para involucrar el proceso de construcción de conocimiento, que permite hacer el paso de la geometría euclidiana, que aparentemente es más familiar para los estudiantes a la geometría analítica. Es un proceso de construcción de conocimiento porque está respetando ciertos niveles y cumple con las características de secuencialidad y orden que presenta los niveles, es decir los estudiantes recorren del nivel de visualización al nivel de análisis.

Por lo anterior se presenta el proceso de construcción de conocimiento:

Para fines del aprendizaje de la geometría analítica se añadió, al concepto euclidiano de segmento, la idea de sentido o dirección. El sentido de un segmento dirigido se indica siempre escribiendo primero el origen o punto inicial (Lehmann, 1989).

Para pasar de la recta numérica a la representación de un plano se implementó la actividad 2 y su respectivo resumen, en donde se realizaron y respondieron preguntas respecto a la representación de un sistema coordenado lineal. En este proceso se evidencia la necesidad de reforzar algunas temáticas que, aunque se han trabajado por la docente titular ya han sido olvidadas por el estudiante, reforzar tanto su definición como también ciertas propiedades elementales. Luego, se tomó como base que los estudiantes ya tenían una percepción sobre un plano cartesiano, entonces lo que se hizo fue plantear la actividad 3 para precisar elementos de un sistema coordenado bidimensional.

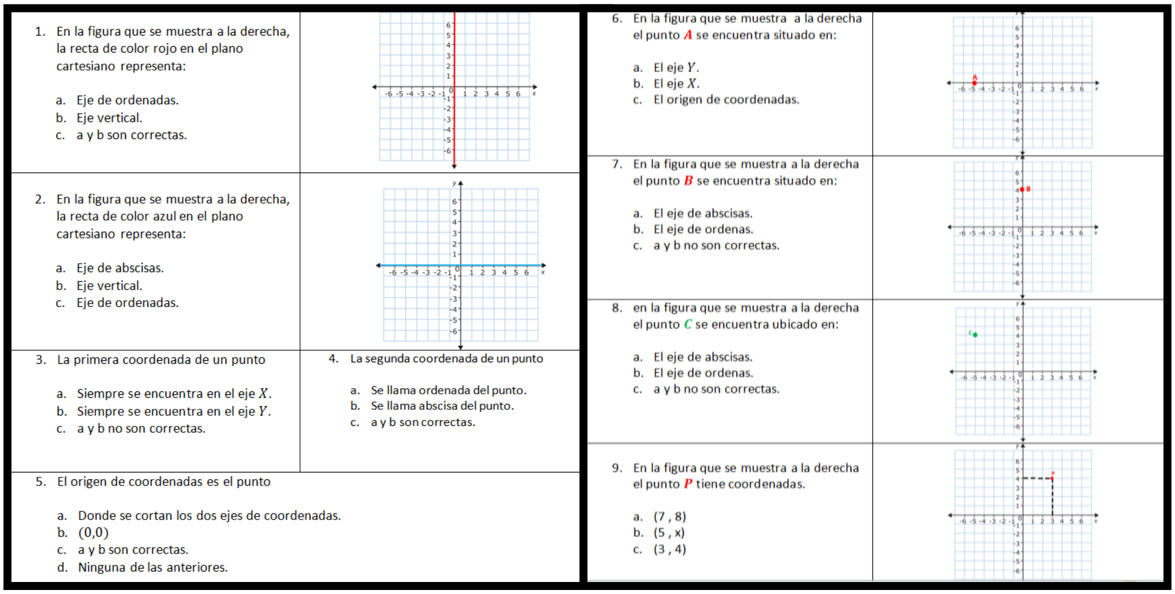
Actividad 3

Tipo de actividad: retroalimentación.

La actividad 3 se realiza de forma individual con el objetivo de determinar si los estudiantes están en la capacidad de identificar las partes que forman el plano cartesiano. Esta actividad es de selección múltiple con única respuesta (Ver Figura 10). Los estudiantes, según lo planeado, tuvieron un tiempo de 15 minutos para dar respuesta a los diferentes interrogantes programados. La actividad propuesta se finaliza realizando una socialización y verificación, tanto por parte de los estudiantes como de los practicantes.

Figura 10

Partes que forman el plano cartesiano


1. En la figura que se muestra a la derecha, la recta de color rojo en el plano cartesiano representa:
   a. Eje de ordenadas.
   b. Eje vertical.
   c. a y b son correctas.
2. En la figura que se muestra a la derecha, la recta de color azul en el plano cartesiano representa:
   a. Eje de abscisas.
   b. Eje vertical.
   c. Eje de ordenadas.
3. La primera coordenada de un punto
   a. Siempre se encuentra en el eje X.
   b. Siempre se encuentra en el eje Y.
   c. a y b no son correctas.
4. La segunda coordenada de un punto
   a. Se llama ordenada del punto.
   b. Se llama abscisa del punto.
   c. a y b son correctas.
5. El origen de coordenadas es el punto
   a. Donde se cortan los dos ejes de coordenadas.
   b. (0,0)
   c. a y b son correctas.
   d. Ninguna de las anteriores.
6. En la figura que se muestra a la derecha el punto A se encuentra situado en:
   a. El eje Y.
   b. El eje X.
   c. El origen de coordenadas.
7. En la figura que se muestra a la derecha el punto B se encuentra situado en:
   a. El eje de abscisas.
   b. El eje de ordenas.
   c. a y b no son correctas.
8. en la figura que se muestra a la derecha el punto C se encuentra ubicado en:
   a. El eje de abscisas.
   b. El eje de ordenas.
   c. a y b no son correctas.
9. En la figura que se muestra a la derecha el punto P tiene coordenadas.
   a. (7 , 8)
   b. (5 , x)
   c. (3 , 4)

Nota. Preguntas de selección múltiple con única respuesta. Adaptado desde la web.

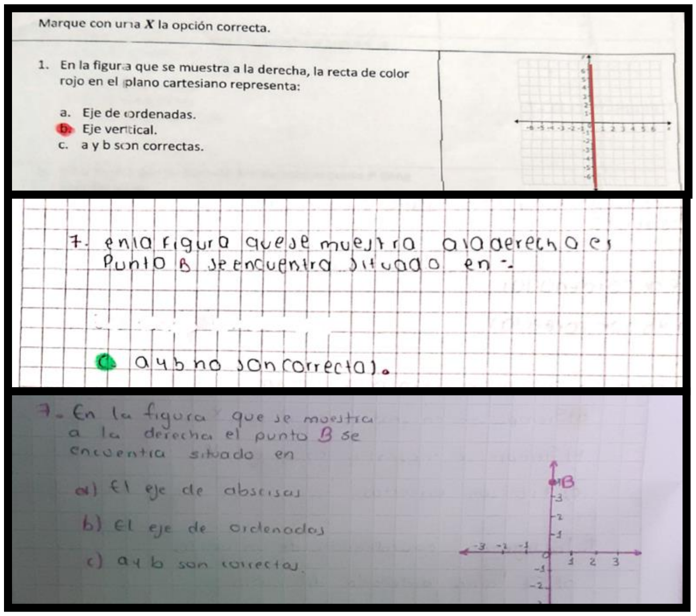
Para la socialización, se asigna de manera aleatoria una pregunta del cuestionario a cada estudiante, con el fin de llevar acabo paralelamente, su participación y verificación de las respuestas por parte de los practicantes.

Durante la intervención se pudo notar que los chicos y chicas si identificaron algunas partes que componen el plano cartesiano; sin embargo, existió una confusión en la distinción entre lo horizontal y lo vertical, entre el concepto de abscisa y ordenada; revelando el desconocimiento de estos dos conceptos. Debido a que la mayoría de las preguntas planteadas en el cuestionario acogen dichos términos y sobre todo porque son conceptos imprescindibles durante el proceso se vio la necesidad de explicar de manera general esta terminología. Sin embargo, este fue un aspecto que fácilmente fueron corrigiendo mediante la socialización.

Al desconocer los conceptos de abscisa y ordenada los estudiantes dan respuestas incompletas, incorrectas y en otros casos evitan marcar alguna de las opciones que tiene la pregunta.

Figura 11

Cuestionario sobre las partes que forman el plano cartesiano



Nota. Respuestas de 3 estudiantes a las preguntas 1 y 7 del cuestionario. Elaboración propia.

En la actividad 2 se han introducido implícitamente los conceptos de dirección y signo con respecto a los segmentos rectilíneos; también, se ha trabajado sobre la correspondencia entre un punto geométrico y un número real, para determinar la distancia entre dos puntos en un sistema unidimensional.

A partir de la actividad 2 se implementó la actividad 3, correspondiente a la fase de orientación dirigida, con la cual se da un paso más, debido a que se introduce la idea de correspondencia entre un punto geométrico y un número real en el plano cartesiano. De acuerdo con el modelo de Van Hiele, en la fase de orientación libre, los y las estudiantes recogen el vocabulario empleado en actividades preliminares y aplican lo que se ha trabajado en nuevas actividades.

En la actividad 3 los estudiantes identificaron las partes que forman el plano cartesiano. Este es el primer sistema coordenado usado en la geometría analítica plana, además, el más importante y familiar al estudiante desde su estudio previo de álgebra y trigonometría. Para reforzar la actividad 3, se propone la actividad 4 que tiene como objetivo ubicar las coordenadas en el plano cartesiano donde se encuentran los objetos y los personajes de diferentes series animadas (el chavo, Dragon Ball Z, Plantas vs Zombies, Doraemon y los Simpson), muy conocidas por gran parte de los estudiantes. Por tanto, con la actividad 3 y 4 los estudiantes aclararon dudas y fueron perfeccionando la ubicación de puntos en el plano cartesiano.

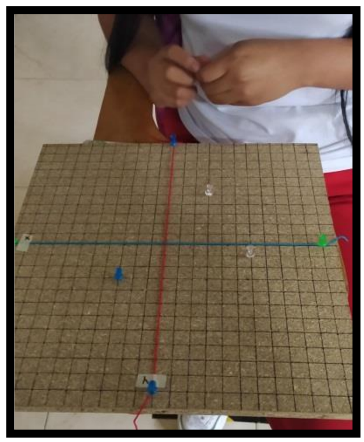
En la actividad anteriormente evocada, es importante resaltar que algunos de los estudiantes manifestaron no tener ningún tipo de acercamiento con las series animadas que se mostraron en la actividad; sin embargo, sus compañeros inconscientemente, como una estrategia de trabajo colaborativo, les indicaban la coordenada donde se encontraba ubicado el personaje. Teniendo en cuenta que en un principio fue difícil la participación voluntaria de los estudiantes; esta fue una de las actividades que obtuvo un notorio impacto en ellos, porque motivó su participación y permitió su expresión oral.

La penúltima parte de la segunda sesión se dedicó a la presentación del manejo básico del geoplano, el cual es fundamental para las actividades siguientes, ya que es un material que hace posible que el estudiante relacione de una forma visual e interactiva, los contenidos que habitualmente son presentados de manera tradicional en un tablero.

Debido a que las actividades de la guía referente al tema “distancia entre dos puntos” se desarrollaron de manera paralela con los grados décimo (uno- dos y tres) se vio la necesidad de incluir una nueva actividad, la cual no aparece registrada en la guía, para comprender la actividad 5. Por tanto, se inició con la entrega del material: el geoplano junto con los pines e hilos, a cada uno de los estudiantes presentes en la sesión. Una vez entregado el material, a modo de presentación, se dio una breve descripción sobre el geoplano; luego se procedió a trazar los ejes coordenados en el geoplano y por último, se realizó la siguiente práctica o actividad de familiarización con el geoplano: ubicar en el geoplano las coordenadas de los siguientes puntos: A(3,3), B(3,-4), C(-6,1), D(-3,-5), E(4,0), F(0,-3) (Ver Figura 12).

Figura 12

El geoplano



Nota. Los estudiantes ubicaron en el geoplano las coordenadas de diferentes puntos. Elaboración propia.

Lo anterior cumple con el objetivo que refieren Gutiérrez y Jaime (2012) en la descripción de la fase de información: "los alumnos aprenderán a manejar el material y adquirirán una serie de conocimientos básicos imprescindibles para poder empezar el trabajo matemático propiamente dicho" (p. 57). Además, la actividad propuesta permitió seguir preparando a los estudiantes en la ubicación de puntos esenciales para determinar la fórmula de la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano. No hay que negar que algunos errores fueran notorios. Se detectó que indicaron mal la posición de los puntos en el plano porque no etiquetaron los ejes coordenados y porque no tenían claro que, respecto del origen de coordenadas, el segmento derecho del eje X es positivo y el izquierdo es negativo; mientras que el segmento ascendente del eje Y es positivo y el segmento descendente es negativo.

También, se observó que cuando el estudiante ubicó por ejemplo el punto de coordenadas A(3,2), introdujo un pin para el valor de la abscisa y otro para el valor de la ordenada, de ante mano el análisis no está mal, pero el objetivo era que un pin representara al punto A con abscisa 3 y ordenada 2. Este fue un aspecto que se evidenció al abordar la actividad 5, por eso se vio sensato plantear la anterior actividad que aparentemente es muy sencilla, pero que fue perfecta para asistir este tipo de dificultades en los estudiantes.

Sin embargo, estos fueron aspectos que los estudiantes fueron corrigiendo a través de la práctica etiquetando con cinta de enmascarar los ejes coordenados, de tal manera que paulatinamente lograron subsanar esas dificultades. Para esta oportunidad citamos un caso en particular de una estudiante que no recurría a etiquetar con cinta los ejes coordenados porque los diferenciaba por el color de hilos que utilizaba para trazarlos.

Dado que el tiempo de trabajo presencial fue muy limitado, para terminar la sesión en primera instancia, se invitó a los y las estudiantes a leer la parte teórica y el procedimiento que caracteriza a la actividad 5 para dar inicio al desarrollo respectivo, así como se indica en la guía. Todo con el propósito de seguir practicando lo aprendido y redescubriendo nuevas expresiones matemáticas. Cabe mencionar que algunos integrantes de los grupos conformados se llevaron el geoplano para su casa con el fin de avanzar en la actividad propuesta y para tener un mejor manejo de este, lo que muestra su interés por la realización de las actividades.

Sesión 3	**Fecha:** 22/10/2021
Participantes: Décimo 1- Décimo 2 y Décimo 3. (Burbuja 2)	**Fecha:** 29/10/2021

	Fecha: 29/10/2021

Orden de la sesión:

1. Verificación de asistencia.
2. Desarrollo de la actividad 5 y socialización.
3. Asignación de ejercicios.

Actividad 5

Tipo de actividad: manipulable

La sesión inicia con la verificación de asistencia y recordando lo que caracteriza un triángulo rectángulo y la propiedad que se cumple en estos triángulos. Para la socialización (fase de explicitación) se procede a organizar los grupos de trabajo, a distribuir el material manipulable (geoplano, pins, hilo y cinta de enmascarar) y se asignaron un par de puntos diferentes de la Tabla 2, para cada grupo. Según lo planeado y como se observa en la guía 1, cada actividad cuenta con un tiempo determinado, en esta oportunidad se da un tiempo de aproximadamente 30 minutos, tiempo que se utilizó en la distribución de tareas y en el montaje del procedimiento. Según Restrepo y Waks (2018), “en el aprendizaje cooperativo hay una división de tareas, y por ello hay que dedicar un tiempo específico para aprender cómo trabajar eficazmente en grupo y poder determinar cómo cada participante puede ser útil y ayudar al trabajo grupal” (p. 15).

Los grupos se organizaron de manera libre (fase orientación libre) máximo de tres personas, los cuales siguieron un procedimiento descrito en la guía 1 para completar los datos correspondientes (Ver Tabla 2).

Tabla 2

Lecturas y cálculos

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{d_{med}}$ $\boldsymbol{cm}$	$\boldsymbol{d_{cal}}$ $\boldsymbol{cm}$
$(-6,-1)$	$(1,3)$		
$(0,0)$	$(-4,3)$		
$(-4,3)$	$(8,-9)$		
$(-6,-2)$	$(6,2)$		

Fuente: Tomada y adaptada de: (Piña & Tigre, 2015)

En la Tabla 2 que se muestra, A y B representan puntos en el plano, d_{med} representa la distancia medida en el geoplano desde el punto A al punto B con ayuda de una regla, y, d_{cal} representa la distancia calculada de manera analítica haciendo uso del teorema de Pitágoras.

La actividad 5 es de tipo manipulable y tiene como objetivo usar el teorema de Pitágoras para determinar la fórmula de la distancia entre dos puntos. Esta actividad permite el trabajo en equipo y un ambiente de integración y comunicación. Además, la actividad 5 permitió confirmar que, para una correcta organización y uso del geoplano, es importante planear actividades que cuenten con un procedimiento (Ver Figura 13).

Figura 13

Actividad manipulable

Procedimiento:

1. En el geoplano trazar los ejes coordenados.
2. En el geoplano ubique los puntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ con los pins. $\boldsymbol{A}$ será nuestro punto inicial y $\boldsymbol{B}$ nuestro punto final. Repetir lo anterior con cada uno de los puntos de la tabla.
3. Con ayuda de la regla medir la distancia entre cada par de puntos y completar la columna d_{med} en la tabla 1. (La escala del centímetro en la regla será de $1\frac{1}{2}cm$ en el geoplano)
4. Con hilo realice un triángulo rectángulo con cada par de puntos que se muestra en la tabla, luego utilizando el teorema de Pitágoras $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = d^2$ calculamos la distancia d_{cal} para los distintos datos de la tabla.

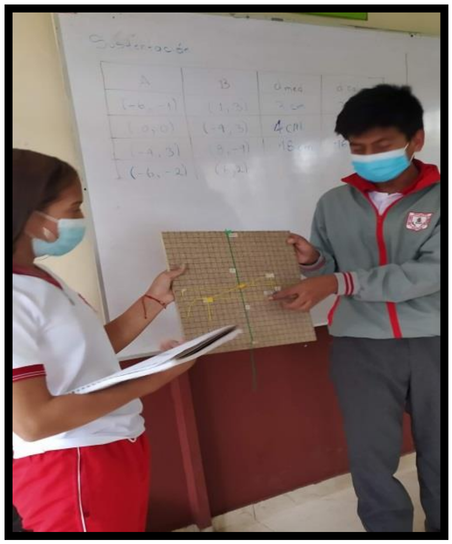
Nota. La actividad 5 correspondiente a la guía 1 es de tipo manipulable y se caracteriza por el procedimiento que describe para el uso del geoplano. Tomada y adaptada de: (Piña & Tigre, 2015).

Como se muestra en la Figura 14, los estudiantes mediante la técnica expositiva y con ayuda del geoplano, explicaron como siguiendo el procedimiento que caracteriza a esta actividad lograron llenar la tabla con la información requerida. Básicamente es la fase de retroalimentación y revisión del trabajo en equipo desarrollado por los estudiantes en compañía de los practicantes durante la sesión de clase.

El geoplano complementó las guías didácticas y el trabajo en el aula, se convirtió en un apoyo didáctico que motivó a los estudiantes al desarrollo disciplinado de cada una de las actividades. Se observó que este material ayudó a muchos estudiantes a fortalecer el trabajo individual, el trabajo en equipo y la expresión oral durante la exposición, donde más que recitar o memorizar fórmulas matemáticas los estudiantes tuvieron el espacio para recrear una situación, que numerosas veces en un libro se presenta de manera estática y limitada. Además, redescubrir fórmulas matemáticas. Tocar, construir y jugar con elementos tangibles no es solo para las primeras edades, hay que desterrar la idea de creer que los materiales manipulativos para aprender matemáticas u otras áreas del conocimiento son solo recursos adecuados para la educación inicial. Cuando los estudiantes manifestaron no haber trabajado con este tipo de material durante su educación básica, nos da pie para poner en tela de juicio que, si en la etapa de primaria hay pocos o ningún material manipulativo, en la etapa de secundaria posiblemente ninguno.

Figura 14

Socializaciones de los estudiantes



Nota. Los estudiantes socializaron la actividad 5 teniendo como instrumento didáctico el geoplano. Elaboración propia.

Concluida la socialización se procede a mostrar de manera general los argumentos, construcciones y expresiones algebraicas necesarias para deducir la fórmula de la distancia entre dos puntos. Como el estudiante no solo se debe quedar en la fase manipulativa, entonces se asignaron ejercicios para aplicar dicha fórmula con la finalidad de reforzar el aprendizaje, la disciplina y el compromiso de los estudiantes (fase de integración).

Sesión 4	**Fecha:** 27/10/2021
Participantes: Décimo 1- Décimo 2 y Décimo 3. (Burbuja 2)	**Fecha:** 05/11/2021

	Fecha: 05/11/2021

Orden de la sesión:

1. Verificación de asistencia.
2. Presentación de la estructura de la guía de trabajo referente al tema “pendiente de una recta”, lectura de los materiales necesarios para las sesiones de clase y la formación de los grupos de trabajo.
3. Desarrollo de la actividad 1 y socialización.
4. Desarrollo de la actividad 2.

En el diseño de las guías didácticas se ha considerado mantener un esquema general. Es decir, que para esta nueva guía referente al tema “pendiente de una recta” se conserva la actividad introductoria. La finalidad de la actividad introductoria es conocer acerca de los conocimientos previos de los estudiantes mediante una pregunta diagnóstica; motivarlos a través de una pregunta para interesar e introducirlos en el nuevo tema, de esta manera los estudiantes seguían en al proceso de construcción de conocimiento. La actividad 1 referente al tema referente a pendiente de una recta, cumple con el objetivo previsto para la fase información y dirigida.

Con el desarrollo de la primera guía referente al tema “distancia entre dos puntos” se logró observar que los estudiantes transcribían en su cuaderno de notas la mayoría de la información proporcionada en la guía. Aunque estamos en la era digital y los estudiantes pueden encontrar toda la información necesaria para desarrollar sus actividades, no se debe abandonar del todo el proceso de transcribir, porque este tiene ventajas: promueve la motricidad fina y la secuencialidad del movimiento en la escritura a mano hace que los estudiantes capten el contenido y lo recuerden mejor, y desventajas:

limita el tiempo para el estudiante e imposibilita avanzar en las actividades programadas. Por lo anterior, se decidió hacer una pequeña modificación, la cual consistió en llevar fotocopias a cada grupo de trabajo. Cada fotocopia tenía solamente las actividades, las cuales podían ser resueltas en la misma fotocopia. Con ello, la tarea del estudiante fue tener en su cuaderno de notas la parte teórica necesaria para desarrollar cada una de las actividades propuestas en la guía.

La guía didáctica referente al tema “pendiente de una recta” está conformada por cuatro actividades:

Actividad 1

Tipo de actividad: inicial y diagnóstica.

La actividad que se observa en la Figura 15 se realizó de forma grupal. Según lo planeado para el desarrollo de la actividad se toma un tiempo de diez minutos aproximadamente y se finalizó realizando una socialización de las respuestas a las preguntas, donde se logra observar que los estudiantes se desenvuelven mejor, lo cual se refleja en la forma de expresarse y de sustentar sus respuestas. En conclusión, aunque las sesiones de clase han sido pocas los estudiantes son más participativos en las actividades que requieren de la opinión personal, se evidencia que hacen las cosas con más confianza y rapidez. Además, se logra percibir el trabajo en equipo, cuando estudiantes que captan rápido las cosas, explicaron a sus compañeros y a otros grupos de trabajo.

Figura 15

Actividad de introducción

1. **Pregunta para interesar**
   Sabías que según el libro **Guinness de los Récords**, la calle más empinada del mundo se encuentra en la Isla Sur de Nueva Zelanda y es *Baldwin Street*. Esta calle presenta una inclinación de 19 grados.
   ¿Te imaginas como seria vivir en lo alto?
   ____
   ____

Imagen 1.
Calle Baldwin Street, *Isla Sur de Nueva Zelanda*

2. **Pregunta diagnostica**
   ¿Sabes cuál es la pendiente de la calle *Baldwin Street*?

Sí ☐ No ☐

¿Cuál?____
____

Nota. Captura de pantalla de la actividad 1 correspondiente a la guía número 2. Elaboración propia.

Después de escuchar los puntos de vista dados por los diferentes grupos de trabajo, es decir finalizada la actividad uno, se procedió explicando (fase de explicitación) a los estudiantes el concepto de inclinación considerando que la inclinación de una recta es el ángulo formado por esta recta y el eje X. Se utilizó el geoplano para ilustrar las clases o tipos de ángulos. Para graficar un ángulo agudo se inició trazando con hilo el eje de las abscisas y el eje de las ordenadas, se creó un segmento AB con extremos en los puntos $A(0,0)$ y $B(3,5)$. En este caso los pins permiten representar los puntos A y B que se ubicaron en el geoplano.

A manera de revisión de conocimientos se realizaron por parte de los practicantes las siguientes indicaciones e interrogantes:

Señalar con cinta de enmascarar el ángulo que se forma entre el eje horizontal X y el segmento que une los puntos A y B.

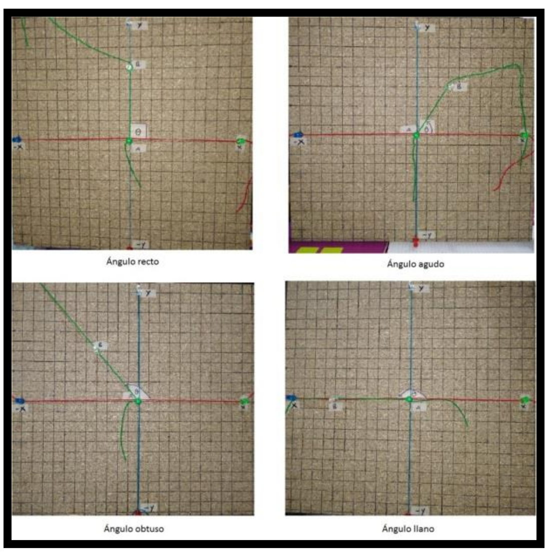
¿Qué notación se utiliza en la guía para representar un ángulo?

¿Qué nombre recibe la clase o tipo de ángulo que se formó? ¿Por qué recibe ese nombre?

Para graficar un ángulo recto, un ángulo obtuso y un ángulo llano se hace rotar el segmento AB desde B manteniendo fijo el punto A, de tal forma que para formar el ángulo recto el segmento que une el punto A con el punto B coincidiera con el eje de las ordenadas y para formar el ángulo llano el segmento que une el punto A con el B coincidiera con el eje de las abscisas. Finalmente se volvieron hacer las preguntas anteriormente indicadas y se trazó con cinta de enmascarar los tipos de ángulos que se formaron entre el segmento AB y el eje X (Ver Figura 16).

Figura 16

Tipos de ángulos



Nota. En el geoplano se ilustran los tipos de ángulos. Elaboración propia.

En general la información aportada por los estudiantes mediante las preguntas realizadas por los practicantes se resume en un cuadro (Ver Tabla 3).

Tabla 3

Estructura del cuadro resumen

LOS ÁNGULOS	
Tipos de ángulos	**Característica**
Recto	$\theta = 90°$
Agudo	$\theta < 90°$
Obtuso	$90° < \theta < 180°$
Llano	$\theta = 90°$

Fuente: Elaboración propia.

Con el cuadro resumen, se permite aclarar dudas en relación a los conceptos y definir nuevos términos que seguirán apareciendo en las actividades posteriores, y que son importantes que el estudiante conozca, en consecuencia, esta actividad satisface criterios que plantea el modelo de Van Hiele.

Actividad 2

Tipo de actividad: manipulable

Como parte final de la cuarta sesión, se dejó a los grupos de trabajo leer y desarrollar la actividad dos (fase de orientación libre). El propósito de esta actividad fue llenar una tabla con la información correspondiente y así determinar la expresión de la pendiente.

En esta sesión los grupos de trabajo no presentaron ninguna modificación, es decir, continuaron trabajando los mismos grupos que se formaron en la primera sesión y conservaron el número de integrantes por grupo (tres integrantes). Uno de los aspectos que caracteriza a esta actividad es el procedimiento que se describe en la guía que requiere el uso del geoplano, el cual los estudiantes deben seguir para completar los espacios de la tabla (Ver Figura 17).

Figura 17

Actividad manipulable

Completar los espacios de la tabla de acuerdo al procedimiento indicado.

A	***B***	θ	$Tan(\theta)$	Δx	Δy	m $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
$(0,2)$	$(4,0)$					
$(2,1)$	$(7,5)$					
$(-6,5)$	$(0,-3)$					
$(-4,-3)$	$(3,4)$					
$(-2,-3)$	$(2,5)$					

Procedimiento

i. En el geoplano con hilo trazar el eje de las abscisas y el eje de las ordenadas.
ii. Ubicar con los pins el primer par de puntos *A* y *B* de la tabla y unirlos mediante hilo.
iii. Con el graduador, **medir el ángulo θ** que se forma entre el eje horizontal X y el segmento que une los puntos *A* y *B*. Anotar el resultado en la columna θ de la tabla.
iv. **Calcular la tangente de θ.** Anotar el valor obtenido en la columna $Tan\theta$ de la tabla.
v. **Calcular Δx e Δy.** Anotar los valores obtenidos en las columnas Δx y Δy de la tabla. (Recordar que $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta y = y_2 - y_1$)
vi. Para el par de puntos *A* y *B*, **determinar el cociente** $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ al cual llamaremos pendiente y lo representamos como m. Anotar el valor obtenido en la columna m de la tabla.
vii. Repetir todo el proceso anterior con cada par de puntos, hasta completar la tabla.

Nota. La actividad 2 correspondiente a la guía 2 es de tipo manipulable y se caracteriza por el procedimiento que describe para el uso del geoplano. Tomada y adaptada de: (Piña & Tigre, 2015).

Una vez entregado el material de trabajo tal como geoplano, pins, transportador, hilo, y cinta de enmascarar, cada grupo procede a completar la tabla que se observa en la Figura 17. Se puede apreciar en la estructura de las guías que cada actividad cuenta con un tiempo explícito, aun así, los estudiantes requirieron más del tiempo acordado, ya que la manipulación de objetos tangibles requiere de tiempo, además surgieron dudas y preguntas al respecto las cuales fueron resueltas de forma personalizada.

Durante el desarrollo de la actividad los estudiantes por intuición realizaron los ejes coordenados en el geoplano, esto indica que el estudiante implícitamente es consiente que necesita construir el plano cartesiano para ubicar los puntos que se indican, y con ayuda del trasportador midieron el ángulo que se forma para los diferentes casos entre el segmento indicado y el eje X.

Debido a que las clases se dieron de manera presencial, como practicantes tuvimos la posibilidad de hacer una observación directa de los comportamientos y actitudes de los estudiantes frente a las actividades propuestas en el aula ,en este sentido, se observó que los estudiantes mostraron una mejor fluidez para expresar sus ideas, aunque se siguió poniendo en evidencia en algunos estudiantes el siguiente aspecto: leían el procedimiento descrito en la guía pero no con la intención de comprender, sino que estaban a la espera que los practicantes indicaran lo que se debía hacer, de este hecho se puede inferir que la dificultad para comprender y analizar los procedimientos se debe a la falta de capacidad lectora en los estudiantes, aspecto que puede influir en el bajo rendimiento escolar.

En consecuencia, se sugiere involucrar más actividades de este tipo que permiten fomentar en el estudiante el hábito por la lectura: interés en el tema, ampliar el vocabulario, comprender y analizar procedimientos y sobre todo entender las explicaciones de un determinado tema. La mejora de este aspecto no se consigue de inmediato, sino que se va alcanzando de forma progresiva. También se observa que los estudiantes sentían mayor confianza para hacer sus preguntas en el grupo de trabajo que en el grupo de clase. Del mismo modo, se evidencia en un gran número de estudiantes que se les dificultaba medir los ángulos en el geoplano empleando el transportador, esta fue una dificultad que se aclaró a medida que se asistía a cada grupo de manera personalizada.

Dado que hubo grupos de trabajo que no terminaron la actividad 2 de la guía 2 se dejó como tarea completar la tabla siguiendo el procedimiento descrito en la guía y organizar su respectiva socialización, por lo que, los estudiantes optaron por llevar a su casa un geoplano por grupo.

Sesión 5	**Fecha:** 10/11/2021
Participantes: Decimo 1- Decimo 2 y Decimo 3. (Burbuja 2)	**Fecha:** 17/11/2021 **Fecha:** 17/11/2021

Orden de la sesión:

1. Verificación de asistencia.
2. Socialización de la actividad 2.

Para la sesión 5 se dejó a los estudiantes socializar la actividad 2 (fase de explicitación), como una forma o estrategia de revisión de conocimientos adquiridos y de trabajo en clase y en casa.

Para la socialización se hizo lo siguiente:

Se dio un tiempo determinado para organizar los grupos y repartir el material de trabajo. En esta oportunidad no asistieron estudiantes de algunos grupos por problemas de salud, manifestando que precisamente quienes no asistieron tenían la copia donde venían trabajando. Por consiguiente, esos estudiantes se unieron a otros grupos para la socialización y dar cuenta del trabajo, por lo que estuvieron de acuerdo en el tiempo asignado, ya que les permitía organizar el rol que tomarían en el grupo al momento de socializar.

Como se observa en la Figura 18, se hizo una mesa redonda y se le otorgó a cada grupo un par de puntos de los cuales aparecen en la Figura 17. A partir de los puntos dados el estudiante describe y explica todo el procedimiento que siguió para completar la tabla.

Figura 18

Mesa redonda

Nota. Los estudiantes hicieron una mesa redonda para socializar la actividad 2 de la guía 2. Elaboración propia.

A diferencia de las primeras socializaciones, en este caso, los estudiantes ya sabían cómo era el proceso. Se evidenciaron grandes avances no solo en el estudiante sino en los practicantes, ya que por parte del estudiante hubo mejor organización, participación y fluidez al expresarse y los practicantes formularon diversas preguntas durante la socialización como una manera de acompañamiento, aclaración y verificación de conocimientos.

Las socializaciones cumplen con el objetivo de la fase 3 y como se observa en la Figura 2 y en la descripción teórica del modelo de Van Hiele, la fase tres debe estar siempre presente. Con la intención de refinar el vocabulario del estudiante, durante la secuencia didáctica presentada en la guía número 1 referente al tema la distancia entre dos puntos y la guía número 2 correspondiente al tema la pendiente de una recta, todas las actividades presentadas incorporan momentos de socialización para que los estudiantes dialoguen, expliquen sus resultados y planteen sus dudas. También, las explicaciones y los resúmenes presentados por parte del profesor contribuyen con el enriquecimiento del lenguaje matemático. Sin embargo, vale la pena tener en cuenta el siguiente planteamiento de Hoffer (s.f., como se citó en De la Torre, 2000) “la tercera fase de aprendizaje la de explicitación no debe confundirse con las explicaciones dadas por el maestro, pues lo esencial en esta fase son las observaciones que los estudiantes formulan explícitamente más que las lecciones que reciben” (p.125).

Durante la intervención en el aula y el desarrollo de cada una de las actividades siempre se tuvo presente la diferenciación que presenta Hoffer, pues cada actividad además de fomentar el trabajo en equipo cuenta con el espacio para que los estudiantes socialicen sus resultados y pronuncien sus dudas.

Sesión 6	**Fecha:** 12/11/2021
Participantes: Decimo 1- Decimo 2 y Decimo 3. (Burbuja 2)	**Fecha:** 17/11/2021 **Fecha:** 17/11/2021

Orden de la sesión:

1. Verificación de asistencia.
2. Socialización de la actividad 2. (Finalización)
3. Desarrollo de actividad 3 y socialización.

La sesión inició con el llamado a lista frecuente y por un tiempo de 10 minutos se atendió las preguntas, las apreciaciones y los comentarios de los estudiantes, tiempo que también fue utilizado para que los grupos de trabajo que tenían pendiente la socialización de la actividad 2 se reunieran y se organizaran. Esta sesión, en particular, se realizó durante las semanas de recuperación donde los estudiantes solo tenían las sesiones para organizar las guías de todas las materias y entregarlas en las fechas programadas.

Una vez finalizada las socializaciones y hechas las preguntas mencionadas en la sesión 4, se desarrolla la actividad 3 que tuvo como propósito completar un párrafo a partir de la información recolectada de los datos medidos y calculados en la tabla de la Figura 17 y mediante imágenes que apoyan y complementan el contenido, como se observa en la guía 2. La actividad 3 fortaleció el trabajo en equipo, pues se observó en cada grupo el debate entre los estudiantes para completar el párrafo.

Completado el párrafo, la discusión gira alrededor de las siguientes preguntas, las cuales permiten que los estudiantes verifiquen y corrijan el párrafo.

1. ¿Qué pasa con la pendiente cuando el ángulo de inclinación es agudo?
2. ¿Qué pasa con la pendiente cuando el ángulo de inclinación es obtuso?
3. ¿Qué relación existe entre la pendiente y el ángulo de inclinación?
4. ¿Cuándo el ángulo de inclinación es de noventa, cero o ciento ochenta, el valor de la pendiente es?
5. ¿Cuándo dos rectas en el plano cartesiano son paralelas y perpendiculares?

Como actividad final, los estudiantes resolvieron ejercicios que requerían de la aplicación de la fórmula de la pendiente. La finalidad de esta actividad es precisar que las actividades no finalizan con la fase de manipulación, sino como se observa en cada guía se considera necesario definir objetos matemáticos y deducir a partir de ello expresiones matemáticas (fase de integración).

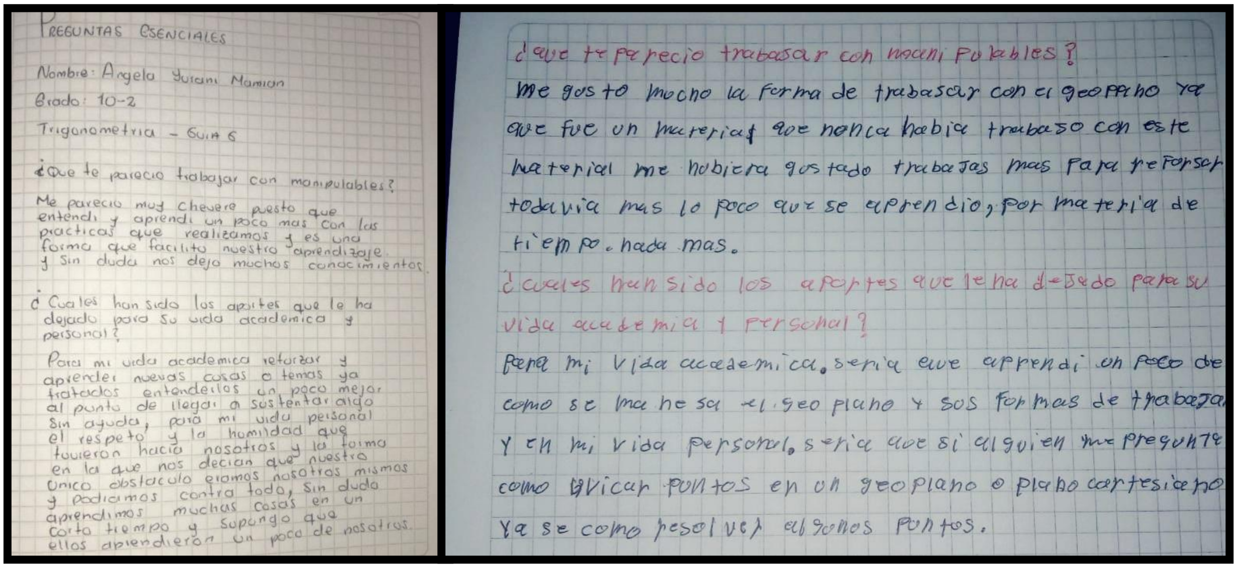
En este punto de la intervención en el aula, se han señalado argumentos para establecer la expresión para la pendiente y los estudiantes han aprendido a identificar los diversos tipos de pendiente de la recta.

En la presentación de cada guía, se exhiben 2 preguntas que se denominaron esenciales (¿A usted que le pareció trabajar con manipulables? ¿Cuáles fueron los aportes que le dejó las sesiones de clase para su vida académica y personal?), las cuales tienen como prerrequisito participar en todas las sesiones de clase, porque no pueden ser catalogadas como verdaderas o falsas ni ser respondidas con un sí o un no. Para conocer la opinión de los estudiantes acerca de los manipulables, en particular el geoplano, las preguntas esenciales fueron resueltas al final de la experiencia, cuando el estudiante recogió argumentos para justificar su respuesta.

A partir del trabajo en el aula y de las respuestas suministradas por los estudiantes se logra inferir que fue favorable trabajar con manipulables, pues los estudiantes manifestaron su agrado y su apego a una manera distinta de aprender matemáticas (aprender desde la experimentación), a través de una metodología distinta a la tradicional, haciendo uso de recursos didácticos manipulables y a partir de actividades que involucraron a los estudiantes en la construcción de su aprendizaje. Por otro lado, en las apreciaciones los estudiantes manifestaron el poco tiempo que se tuvo para trabajar con este tipo de materiales y exponen que se debería dar más espacio y mayor tiempo para trabajar con este tipo de materiales (Ver Figura 19).

Figura 19

Cuaderno de notas



Nota. Los estudiantes en su cuaderno denotas dieron respuestas a las 2 preguntas esenciales. Elaboración propia.

Respecto a la asistencia, la mayoría de los estudiantes que asistían a las clases presenciales fueron participes de todas las sesiones y actividades programadas, por lo que, no hubo ningún problema en el momento de registrar la asistencia y las apreciaciones del trabajo en clase y en casa. Mientras que hubo máximo tres estudiantes de diferente burbuja que no asistían paulatinamente a las sesiones, porque manifestaron que el confinamiento los obligo a alejarse de las actividades académicas. De acuerdo al modelo de Van Hiele, un estudiante para pasar a un nivel superior debe completar exitosamente todas las actividades del nivel inferior.

Conclusiones

Las guías didácticas que se diseñaron involucrando materiales didácticos manipulables y articulando las fases y los primeros 3 niveles del modelo de Van Hiele, fortalecieron la comprensión de los conceptos de la línea recta, debido a que:

Cada guía inicia con una actividad diagnóstica, la cual permitió conocer y hacer una valoración de los conocimientos previos de los(as) estudiantes, siendo este el punto de partida primordial para que el proceso de enseñanza-aprendizaje salga triunfante. Este tipo de actividades permiten la libre expresión del estudiante al socializar la información que cada estudiante tiene respecto a un tema, debatir los puntos de vista de cada uno e incorporar los nuevos conceptos. Estos aspectos son de gran ayuda para el docente porque le permite identificar qué tipo de habilidades y actitudes tienen los estudiantes, las falencias de los estudiantes en relación con los conceptos y en este sentido dinamizar el proceso de enseñanza- aprendizaje.

Con la aplicación del modelo de Van Hiele, se organizaron actividades que tuvieron presentes las propiedades del modelo: secuencialidad y especificidad del lenguaje. Con este proceso se logró una transición de los conceptos, desde lo concreto a lo abstracto y de lo particular a lo general; donde los elementos y las definiciones matemáticas fueron apareciendo de acuerdo a su necesidad, es decir de manera escalonada. Además, las actividades planteadas estuvieron acorde con la metodología constructivista de la Institución, debido a que el estudiante, sus conocimientos y experiencias previas, fueron los protagonistas para formar nuevas construcciones cognitivas.

Por medio del uso de los materiales didácticos manipulables, se logró incluir activamente a los estudiantes en la construcción de los conceptos de la línea recta, ya que cada guía contiene al menos una actividad con procedimientos para involucrar material físico (geoplano); lo cual le permite al estudiante avanzar y esgrimir argumentos a partir de la construcción de los conceptos de una manera visual, táctil, autónoma y dinámica. Así, las actividades con procedimientos son una guía orientadora que dan un carácter formal a una tarea y permiten evitar confusiones y mitigar posibles errores. Además, es importante destacar que las actividades con procedimientos funcionaron como un instrumento de control para el uso del material manipulativo. Por último, el uso de materiales manipulables apoyó a los estudiantes en las actividades de socialización, desarrollando aspectos como: lenguaje matemático, la imaginación, el respeto y el conocimiento de sí mismo y de los demás.

Debido a situaciones imprevistas como: la modalidad de trabajo establecida en la institución, el tiempo de las sesiones, el uso de materiales manipulables y el ritmo de los estudiantes; no se logró fomentar la comprensión y construcción de los conceptos de circunferencia, parábola e hipérbola, es decir, de las secciones cónicas. Estas situaciones nos llevaron a tomar la decisión de privilegiar la metodología planeada, más que cumplir con un cronograma, con el objetivo de fortalecer el aprendizaje activo-significativo de los estudiantes. No poder implementar las guías diseñadas para las secciones cónicas, deja en tela de juicio cuales hubieran sido los posibles resultados. Pero lo que sí es claro es que estas guías sirven como instrumento de orientación didáctica tanto para la educación presencial como para la no presencial. A su vez, ahorran tiempo y controlan el desarrollo de las actividades.

Se logró verificar dentro de la práctica docente realizada, que los recursos didácticos manipulables tuvieron un impacto positivo, dado que atrajo el interés de los estudiantes; acontecimiento que permitió observar el proceso evolutivo sesión a sesión, de igual manera examinar las falencias presentadas dentro de las actividades. Además, al involucrar materiales físicos en las actividades de socialización propuestas por el docente, se logró que el estudiante expresara las inquietudes sobre el tema, las estrategias para resolver las actividades y los roles que tomaron para comunicar los aprendizajes. Del mismo modo, permitió el trabajo en equipo, la fluidez de los estudiantes para manifestar los resultados de la actividad, y más que memorizar información y algoritmos, la idea fue describir y contar el proceso realizado con el uso de los materiales didácticos.

Con el proceso de Práctica Pedagógica se logró verificar que, aunque la planeación es una de las fases indispensables en el ejercicio docente, van a surgir situaciones imprevistas que de alguna manera afectan esa planeación, y es en este punto donde el docente debe ser capaz de tomar decisiones. Además, es importante aprender, a manejar el espacio, el tiempo y los recursos; debido a que no siempre se cuenta con espacios idóneos para desarrollar las actividades propuestas. Por tanto, este proceso contribuye de manera fundamental para el futuro ejercicio profesional de los maestros en formación.

Referencias Bibliográficas

Anónimo. (2010). Didactica de las matemáticas . *Revista digital de matemáticas*, 1-154.

https://www.mendoza.edu.ar/wp-content/uploads/2017/04/TEMAS-DE-DID%C3%81CTICA-Did%C3%A1ctica-de-la-Matem%C3%A1tica.pdf

Barrantes-López, M. y Balletbo-Fernández, I. (2012). Referentes principales sobre la enseñanza de la geometría en Educación Secundaria. Campo Abierto, 31 (2), 139-153.

https://www.researchgate.net/publication/350768970_Referentes_principales_sobre_la_ensenanza_de_la_geometria_en_Educacion_Secundaria

Bono-Cabré, R. (s.f.). *Diseños cuasi-experimentales y longitudinales.* (pp.1-85). Universidad de Barcelona.

https://www.questionpro.com/blog/es/investigacion-cuasi-experimental/

Cajas-Gomez, G. (2020). Unidád didáctica basada en el modelo de Van Hiele usando geogebra para el mejoramiento de la comprensión de las secciones cónicas en el grado décimo de la I.E. Don Bosco en Popayán. [Tesis de Magister,Universidad de Antioquia].

Celma-Tarragual, S. (2020). Propuesta didáctica para la enseñanza de geometría basada en el juego Quién es quién. [Trabajo de grado, Universidad de Zaragosa]. Repositorio Institucional Zaguán.

https://zaguan.unizar.es/record/95206/files/TAZ-TFG-2020-2988.pdf

De la Torre-Gómez, A. (2000). *Una aplicacion del modelo de Van Hiele al concepto de continuo.* (pp.115-139). Universidad de Antioquia.

Díaz, D. (2015). El aprendizaje activo orientado hacia la colaboración en estudiantes de grado segundo de básica primaria en lectoescritura inicial favoreciendo la competencia de trabajo en equipo. 1-88.

https://repositorio.tec.mx/ortec/bitstream/handle/11285/630021/Tesis%20Diana%20D%C3%ADaz%20Parra.pdf?sequence=2&isAllowed=y

Diaz-Obando, E. y Sánchez-Gonzáles, M. (2004). Desarrollo profesional en la Universidad Nacional: Construcción de un modelo para talleres pedagógicos. Educare, (5) 143-153.

https://www.revistas.una.ac.cr/index.php/EDUCARE/article/view/1056

Elder, L., & Paul, R. (2002). El arte de formular preguntas esenciales . *Foundation for Critical Thinking*, 1-539.

https://www.criticalthinking.org/resources/PDF/SP-AskingQuestions.pdf

Fuentes-Machado, E. y Fuentes-Machado, J. (2020). La implementación del uso de las TIC y la construcción de material manipulativo como estrategia lúdica para el aprendizaje de las matemáticas. [Tesis de especialización, Fundacion Universitaria Los Libertadores]. Repositorio Institucional Los Libertadores.

http://hdl.handle.net/11371/3307

García, B., Granier, M., Moreno, G., De Ochoa, I., Ramírez, N., Sequera, N., y Zuvia, M. (2003). Formación de docentes en el uso de recursos didácticos para construir conceptos iniciar con pequeñas metas. Educere, 6 (21), 100-106.

Godino, J., y Ruíz, F. (2002). Geometría y su didáctica para maestros. *Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. ISBN: 84-932510-1-1*, 1-164.

https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/4_Geometria.pdf

González, I. (2021, 23 de Noviembre). El recurso didáctico. Usos y recursos para el aprendizaje dentro del aula. Escritos en la Facultad.

https://fido.palermo.edu/servicios_dyc/publicacionesdc/vista/detalle_articulo.php?id_articulo=11816&id_libro=571

Gutiérrez, Á., y Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. Tecné, Episteme y Didaxis:TED, (32), 55-70.

http://www.scielo.org.co/scielo.php?pid=S0121-38142012000200005&script=sci_abstract&tlng=es

Heredia, Frank . (s.f.). Ángulos. 1-7.

https://www.academia.edu/8800870/%C3%81ngulos_en_Geometr%C3%ADa_Plana

Hernández, B., Valdés, B., y Vivar, E. (2019). Algunas consideraciones sobre la comprensión de los contenidos matemáticos. *Revista científico-educacional de la provincia Granma.*, 1-12.

https://revistas.udg.co.cu/index.php/roca/article/view/775/1403

Jara-Holliday, O. (s.f.). *Orientaciones téorico-prácticas para la sistematización de experiencias.* pp.1-17.

http://centroderecursos.alboan.org/ebooks/0000/0788/6_JAR_ORI.pdf

Jiménez-Calixto, L., Alarcón-Pérez, L., y Gutiérrez- Gutiérrez, B. (2019). El aula taller: una propuesta de innovación educativa para el desarrollo de ideas emprendedoras. Atlante.

https://www.eumed.net/rev/atlante/2019/05/aula-taller-propuesta.html//hdl.handle.net/20.500.11763/atlante1905aula-taller-propuesta

Lehmann, C. (1989). Geometría analítica. *Editorial limusa*, 1-516.

http://www.untumbes.edu.pe/vcs/biblioteca/document/varioslibros/0756.%20Geometr%C3%ADa%20anal%C3%ADtica.%20Lehmann.pdf

López, J. (2018). La importancia de formular buenas preguntas. *Eduteka*.

https://eduteka.icesi.edu.co/articulos/FormularPreguntas

MEN. (1998). Estandares basicos de competencias en matemáticas. 1-50.

https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Pac-Lopez, C. (2014). Manipulables físicos y fijación de conceptos de geometría analítica. Guatemala.[Tesis de Licenciatura, Universidad Rafael Landívar]

http://biblio3.url.edu.gt/Tesario/2014/05/86/Pac-Carlos.pdf

Piña-Criollo, B., y Tigre-Gómez, M. (2015). Material didáctico para: "Sistemas de coordenadas, gráfica de una ecuación, lugares geométricos y la recta" para el laboratorio de matemáticas de la Universidad de Cuenca. [Tesis de Licenciatura, Universidad de Cuenca]. Repositorio Institucional Universidad de Cuenca.

http://dspace.ucuenca.edu.ec/handle/123456789/24083

Prieto-Abarquero, B. (s.f.). Materiales manipulativos en el proceos de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. 18-21.

http://uvadoc.uva.es/handle/10324/7619

PROYECTO EDUCATIVO INSTITUCIONAL (P.E.I.). (2015). 1-151.

http://www.garciaparedes.net/vistas/pi.php

Restrepo, R., & Waks, L. (2018). Aprendizaje activo para el aula: una síntesis de fundamentos y técnicas. *Observatirio Unae*, 1-22.

https://unae.edu.ec/wp-content/uploads/2019/11/cuaderno-2.pdf

Reza-García, C. (2006). La importancia de las preguntas en el aprendizaje. Revista Cubana de Química, 18 (2), 15.

https://www.redalyc.org/pdf/4435/443543704006.pdf

Sierra, H. (2013). El aprendizaje activo como mejora de las actitudes de los estudiantes hacia el aprendizaje. 1-49.

https://academica-e.unavarra.es/bitstream/handle/2454/9834/TFM%20HELENA%20SIERRA.pdf

Torres-Salas, M. (2010). La enseñanza tradicional de las ciencias versus las nuevas tendencias educativas. Educare, 14 (1), 131-142.

https://www.redalyc.org/pdf/1941/194114419012.pdf

Uicab-Ballote, G. (s.f.). Materiales tangibles. Su influencia en el proceso enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Clame*, 1009-1012.

http://funes.uniandes.edu.co/5119/1/UicabMaterialesAlme2009.pdf

Vargas-Vargas, G. y Gamboa-Araya, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. Uniciencia, 27 (1), 74-94.

Villarreal-Fernández, J., Carmona-Mesa, J., y Arango-Rios, C. (2013). La enseñanza aprendizaje de la geometría analítica. Una propuesta de desarrollo del pensamiento a partir del modelo de Van Hiele y la metodología de aula taller.[Tesis en Educación. Universidad de los Andes]. Repositorio digital de documento en Educación Matemática.

http://funes.uniandes.edu.co/2217/

Zapatera, A., & Callejo, M. (2013). Cómo interpretan los estudiantes para maestro el pensamiento matemático de los alumnos sobre el proceso de generalización . *CORE*, 1-10.

https://core.ac.uk/download/pdf/162043006.pdf

Anexos

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="3"></td><td colspan="3">MUNICIPIO DE POPAYÁN
SECRETARIA DE EDUCACIÓN MUNICIPAL
INSTITUCIÓN EDUCATIVA ANTONIO GARCÍA PAREDES
DANE 119001002195 - NIT 800247992-4</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>**CODIGO**</td><td>**VERSIÓN**</td><td>**FECHA**</td></tr>
<tr><td colspan="3">**GUÍA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE: DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS.**</td></tr>
<tr><td colspan="2">ÁREA: MATEMÁTICAS</td><td>**ASIGNATURA: GEOMETRÍA**</td><td>**GRADO: DÉCIMO**</td><td>**AÑO LECTIVO: 2021**</td><td>**GUÍA N°1**</td></tr>
<tr><td colspan="6">NOMBRE DEL DOCENTE: CONSUELO SAMBONI – ELMER SAMBONI</td></tr>
<tr><td colspan="6">NOMBRE DEL ESTUDIANTE:</td></tr>
</table>

Estimados estudiantes de grado decimo, bienvenidos a la asignatura de Geometría.

Somos Consuelo Samboni Piamba-Elmer Samboni Piamba estudiantes de la universidad del Cauca, en este corto tiempo haremos parte del grupo de apoyo y seremos sus orientadores en el área de matemáticas durante el periodo 2021.

Leer detenidamente cada parte de la guía será vital para desarrollar cada una de las actividades propuestas. Recuerden, cada asignatura, ayuda a prepararnos académicamente para las etapas posteriores de la vida, pero también nos ayuda a ser ciudadanos con ganas de ser cada vez mejores, buscar retos y lograr vencerlos y sobre todo aprender de ellos.

"Nunca consideres el estudio como una obligación, sino como una oportunidad para penetrar en el bello y maravilloso mundo del saber." *Albert Einstein*

consuelosam@unicauca.edu.co - elmers@unicauca.edu.co 3206340260 - 3216459126

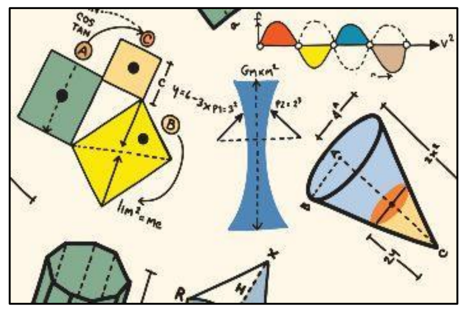
Eje temático	Tema	Materiales	Preguntas esenciales	Objetivo de la guía
Geometría Analítica.	Distancia entre dos puntos.	-Lápiz. -Papel (cuaderno). -Regla. -Metro. -Geoplano. -Pins. -Hilo.	¿Qué le pareció a usted trabajar con materiales manipulables? ¿Cuál fue para usted el aporte para su vida académica y personal?	Redescubrir la expresión para la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano.
Descripción de la guía:				

Es importante conocer y aplicar este tema “*distancia entre dos puntos*”, debido a que se puede emplear en diversas actividades de la vida cotidiana. Por ejemplo, conocer la distancia que hay entre una ciudad a otra, esto para determinar el tiempo y los costos de transporte, para las personas que practican deporte extremo como motocrós, les podría servir para conocer la distancia que hay desde el inicio hasta el final de la pista y de esta manera conocer el tiempo que los llevaría recorrer esa distancia, con el fin de mejorar y ser más rápidos. Por eso en esta guía vamos a conocer los conocimientos previos del estudiante, recordar el sistema de coordenadas y redescubrir la fórmula que representa la distancia entre dos puntos con el uso de algunos materiales didácticos como el geoplano.

La geometría analítica emplea métodos algebraicos y ecuaciones para el estudio de problemas geométricos. Estudia las figuras, sus distancias, sus áreas, los puntos de intersección, los ángulos de inclinación, etc. Además, permite la representación e interpretación geométrica del álgebra.

ACTIVIDAD INICIAL

Actividad 1



OBJETIVO: Indagar sobre los conocimientos previos de los estudiantes sobre la concepción de distancia entre dos puntos.

- **Tiempo:** 10 minutos.
- **Trabajo individual.**
- **Socialización:** 4 estudiantes.

1. Pregunta para interesar

¿Qué instrumentos conocen para medir distancias? Y ¿Cuáles han sido las experiencias donde ha tenido que calcular distancias?

----

2. Pregunta diagnóstica

¿Qué entiendes por distancia?

----

3. Pregunta de opinión

¿Has escuchado hablar del tema distancia entre dos puntos, cuando, donde y como lo han trabajado?

Puntos

En el cuadro adjunto hemos escrito las letras A, B, P, Q a la derecha de una diminuta marca redondeada. Decimos que dichas marcas son *puntos*. Igualmente diríamos que se trata de puntos si en lugar de usar una impresora láser para hacer la impresión usáramos un lápiz con una punta gruesa, o un lápiz imaginario que dibuja puntos tan finos que sean prácticamente imperceptibles.

.A .P .Q

.B

Fig. 1

El punto, como objeto o figura geométrica, se considera que no tiene dimensiones y se usa para indicar una posición en el espacio.

GEOPLANO

Es un material manipulativo utilizado en matemáticas, formado por un tablero de madera o plástico, con varios pivotes que forman una cuadrícula o circunferencia.

Puntos: Los clavos (pins) del geoplano representan puntos.

❖Segmentos

En el siguiente cuadro decimos que está representado el segmento *AB*, conjunto de puntos comprendidos entre los puntos *A* y *B*, que se dice son los extremos del segmento.

- La longitud de un segmento *AB* de denota por $\overline{AB}$.

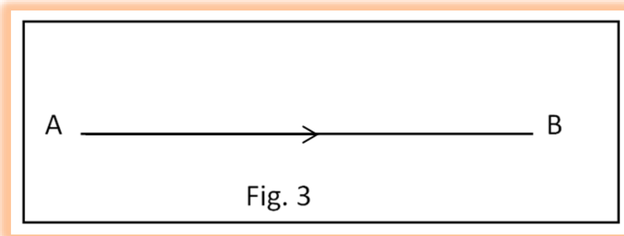


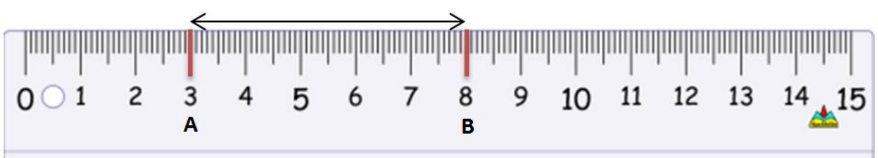
Fig. 3

Actividad 2

OBJETIVO: Medir la distancia de un objeto utilizando diferentes herramientas.

- **Tiempo:** 10 minutos.
- **Trabajo individual.**
- **Socialización:** 4 estudiantes.

1. Usa una regla o un metro para encontrar la longitud de un lapicero, ¿Qué tan largo es el lapicero?
2. Si el lapicero, tiene su punta ubicada en **A** (16 cm), ¿Dónde estaría ubicado el punto **B** que es el otro extremo del lapicero?
3. ¿Qué distancia existe entre el punto **A** y el punto **B**?
4. ¿Qué distancia marca la regla en el diagrama de abajo? Asume que la escala es de un centímetro entre los números A y B.



Veamos un ejemplo:

$$d = |\overline{AB}| = |3 - 0| = |3| = 3$$

O también

$$d = |\overline{BA}| = |0 - 3| = |-3| = 3$$

La distancia entre los puntos *A* y *B* se dice que es la longitud del segmento *AB*. Si representamos la distancia por *d,* podemos escribir:

$$d = |\overline{AB}| = |x_{2} - x_{1}|$$

O también

$$d = |\overline{BA}| = |x_{1} - x_{2}|$$

Nota: la longitud de un segmento $\overline{AB}$ es igual a la coordenada del punto final menos la del punto inicial.

SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES.

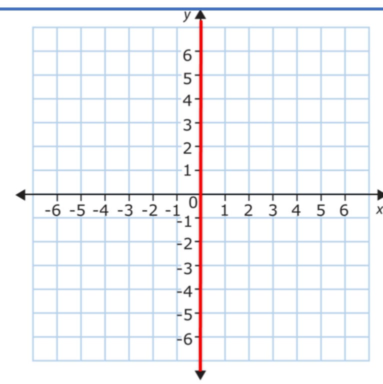
Actividad 3

OBJETIVO: Identificar las partes que forman el plano cartesiano.

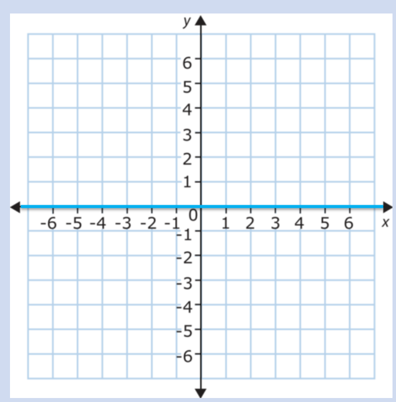
- **Tiempo:** 15 minutos.
- **Trabajo individual.**
- **Socialización:** 2 estudiantes.

Marque con una $\boldsymbol{X}$ la opción correcta.

<table>
<tr>
<td>
1. En la figura que se muestra a la derecha, la recta de color rojo en el plano cartesiano representa:

a. Eje de ordenadas.
b. Eje vertical.
c. a y b son correctas.
</td>
<td>


</td>
</tr>
<tr>
<td>
2. En la figura que se muestra a la derecha, la recta de color azul en el plano cartesiano representa:

a. Eje de abscisas.
b. Eje vertical.
c. Eje de ordenadas.
</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

3. La primera coordenada de un punto

   a. Siempre se encuentra en el eje $\boldsymbol{X}$.
   b. Siempre se encuentra en el eje $\boldsymbol{Y}$.
   c. a y b no son correctas.

   a.

4. La segunda coordenada de un punto

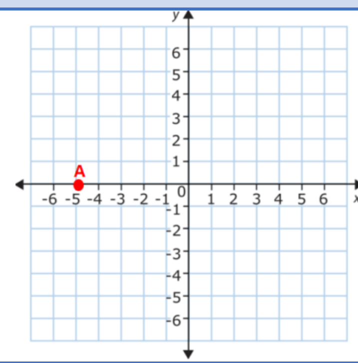
   b. Se llama ordenada del punto.
   c. Se llama abscisa del punto.
   d. a y b son correctas.

5. El origen de coordenadas es el punto

   a. Donde se cortan los dos ejes de coordenadas.
   b. $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$
   c. a y b son correctas.
   d. Ninguna de las anteriores.

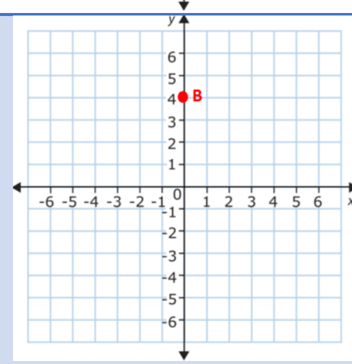
6. En la figura que se muestra a la derecha el punto $\boldsymbol{A}$ se encuentra situado en:

   a. El eje $\boldsymbol{Y}$.
   b. El eje $\boldsymbol{X}$.
   c. El origen de coordenadas.



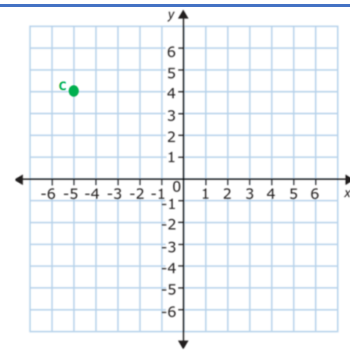
7. En la figura que se muestra a la derecha el punto $\boldsymbol{B}$ se encuentra situado en:

   a. El eje de abscisas.
   b. El eje de ordenas.
   c. a y b no son correctas.



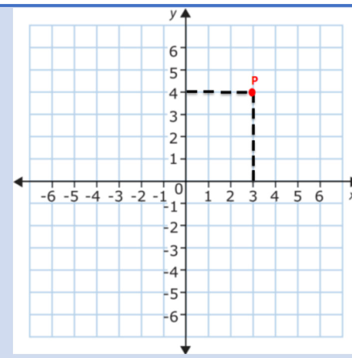
8. en la figura que se muestra a la derecha el punto ***C*** se encuentra ubicado en:

   a. El eje de abscisas.
   b. El eje de ordenas.
   c. a y b no son correctas.



9. En la figura que se muestra a la derecha el punto ***P*** tiene coordenadas.

   a. (7 , 8)
   b. (5 , x)
   c. (3 , 4)

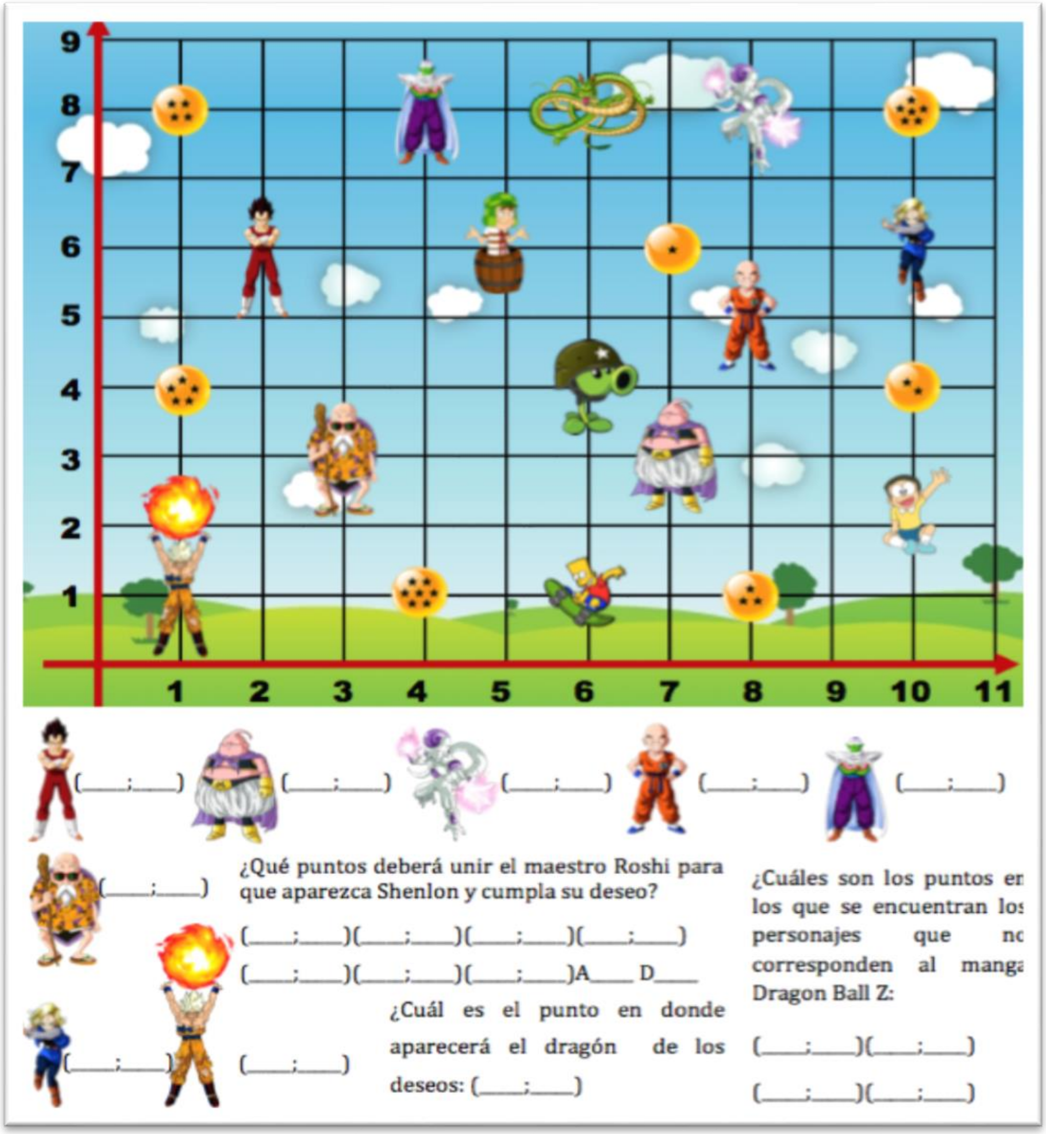


Actividad 4[1]

OBJETIVO: Ubicar las coordenadas donde se encuentran cada uno de los personajes y objetos dentro del plano cartesiano.

- **Tiempo:** 10 minutos
- **Trabajo individual.**
- **Socialización:** 1 estudiante.

[1] Tomado de: https://www.actiludis.com/2016/04/12/puntos-plano-cartesiano/plano-cartesiano-3/



INTRODUCCION AL TEMA

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

La distancia entre dos puntos cualesquiera es el valor absoluto de la longitud del segmento de recta que los une. Para determinar la longitud del segmento de recta que une los dos puntos se hace uso del Teorema de Pitágoras, el cual establece que la suma de los cuadrados de los lados perpendiculares de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la hipotenusa, como lo indica la figura 1.

Figura 1. *Teorema de Pitágoras*

Actividad 5

OBJETIVO: usar el teorema de Pitágoras para determinar la fórmula de la distancia entre dos puntos.

- **Tiempo:** 30 minutos.
- **Grupo de trabajo:** Formado por 3 estudiantes.
- **Socialización:** 3 grupos.

Procedimiento:

1. En el geoplano trazar los ejes coordenados.
2. En el geoplano ubique los puntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ con los pins. $\boldsymbol{A}$ será nuestro punto inicial y $\boldsymbol{B}$ nuestro punto final. Repetir lo anterior con cada uno de los puntos de la tabla.
3. Con ayuda de la regla medir la distancia entre cada par de puntos y completar la columna d_{med} en la tabla 1. (La escala del centímetro en la regla será de $1\frac{1}{2}cm$ en el geoplano)
4. Con hilo realice un triángulo rectángulo con cada par de puntos que se muestra en la tabla, luego utilizando el teorema de Pitágoras $(x_2 - x_1)^2$+$(y_2 - y_1)^2 = d^2$ calculamos la distancia d_{cal} para los distintos datos de la tabla.

   NOTA: $\Delta \boldsymbol{x} = x_2 - x_1$ y $\Delta y = y_2 - y_1$

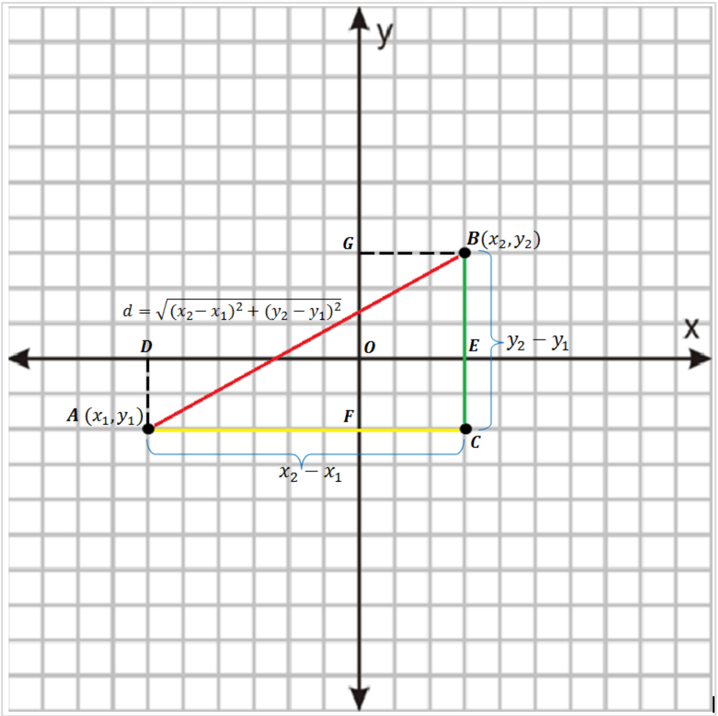
- "$\boldsymbol{x_1}$" es la abscisa del punto inicial.
- "$\boldsymbol{x_2}$" es la abscisa del punto final.
- "$\boldsymbol{y_1}$" es la ordenada del punto inicial.
- "$\boldsymbol{y_2}$" es la ordenada del punto final.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{d_{med}}$	$\boldsymbol{d_{cal}}$
		$\boldsymbol{cm}$	$\boldsymbol{cm}$
$(\boldsymbol{-6}, \boldsymbol{-1})$	$(1, 3)$		
$(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$	$(-4, 3)$		
$(\boldsymbol{-4}, \boldsymbol{3})$	$(8, -9)$		
$(\boldsymbol{-6}, \boldsymbol{-2})$	$(6, 2)$		

Pregunta:

- Se parecen las respuestas anteriores de la casilla d_{med} Y la casilla d_{cal} ? SI__ No__

CONCLUSIÓN "*DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS*"



Observa la imagen de la izquierda, el punto A con coordenada$(x_{1,}y_1)$ y el punto B con coordenada $(x_{2,}y_2)$, dos puntos del plano cualesquiera. Encontremos la distancia $\boldsymbol{d}$ del segmento AB.

Por AB tracemos las perpendiculares $BE\ Y\ AF$ a ambos ejes coordenados y sea C su punto de intersección, como se indica en la figura.

Se considera el triángulo rectángulo ACB. Por el teorema de Pitágoras, tenemos:

$$d^2 = (\overline{AB})^2 = (\overline{AC})^2 + (\overline{CB})^2$$

Ahora, las coordenadas de los puntos D, E, F y G son: $D(x_{1,}0)$, $E(x_{2,}0)$, $F(0, y_1)$ y $G(0_{,}y_2)$.Observe que $\overline{AC} = \overline{DE} = x_2 - x_1$, $\overline{CB} = \overline{FG} = y_2 - y_1$.

Sustituyendo estos valores en $d^2 = (\overline{AB})^2 = (\overline{AC})^2 + (\overline{CB})^2$obtenemos:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Elevando raíz cuadrada a ambos lados de la igualdad se tiene que:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Por tanto, la distancia $\boldsymbol{d}$ entre dos puntos $A(x_{1,}y_1)$ y $B(x_{2,}y_2)$ esta dada por la fórmula:

$$\boldsymbol{d} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Actividad 6

OBJETIVO: Resolver ejercicios que requieren la aplicación de la fórmula de la distancia.

- **Tiempo:** 20 minutos.
- **Grupo de trabajo:** formado por 3 estudiantes.
- **Socialización:** 2 grupos.

4.1 Determinar la distancia que existe entre los puntos A y B indicados en la tabla, con el uso de material didáctico (geoplano, pins y regla) y de manera analítica.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	Medida con el geoplano.	Resultado con el método analítico.
$(\mathbf{-3,3})$	$(5,3)$		
$(\mathbf{-2,4})$	$(-2,-3)$		

4.2 Si la distancia entre dos puntos *A* $(x_{1,}3)$ y *B* $(6,8)$ es de 13 unidades, determine los valores de x_1.

MATERIAL COMPLEMENTARIO (OPCIONAL).

- Animación en GeoGebra sobre la distancia entre dos puntos
  https://www.geogebra.org/m/tHdvzRvM

MUNICIPIO DE POPAYÁN
SECRETARIA DE EDUCACIÓN MUNICIPAL
INSTITUCIÓN EDUCATIVA ANTONIO GARCÍA PAREDES
DANE 119001002195 - NIT 800247992-4

CODIGO	VERSIÓN	FECHA

GUIA DIDACTICA PARA LA ENSEÑANZA- APRENDIZAJE DE: PENDIENTE DE UNA RECTA.

ÁREA: MATEMÁTICAS	**ASIGNATURA: GEOMETRÍA**	**GRADO: DÉCIMO**	**AÑO LECTIVO: 2021**	**GUÍA N°2**

NOMBRE DEL DOCENTE: CONSUELO SAMBONI – ELMER SAMBONI

NOMBRE DEL ESTUDIANTE:

Estimados estudiantes de grado decimo, bienvenidos a la asignatura de Geometría.

Somos Consuelo Samboni Piamba-Elmer Samboni Piamba estudiantes de la universidad del Cauca, en este corto tiempo haremos parte del grupo de apoyo y seremos sus orientadores en el área de matemáticas durante el periodo 2021.

Leer detenidamente cada parte de la guía será vital para desarrollar cada una de las actividades propuestas. Recuerden, cada asignatura, ayuda a prepararnos académicamente para las etapas posteriores de la vida, pero también nos ayuda a ser ciudadanos con ganas de ser cada vez mejores, buscar retos y lograr vencerlos y sobre todo aprender de ellos.

"No mires el reloj; haz lo mismo que él, ve avanzando"

Sam Levenson

consuelosam@unicauca.edu.co - elmers@unicauca.edu.co 3206340260 - 3216459126

Eje temático	**Tema**	**Materiales**	**Preguntas esenciales**	**Objetivo de la guía**
Geometría Analítica.	Pendiente de una recta.	-Lápiz. -Papel (cuaderno). -Regla. -Geoplano. -Pins. - hilos. -Tijeras. -Transportador. -Calculadora.	¿Qué le pareció a usted trabajar con materiales manipulables? ¿Cuál fue para usted el aporte para su vida académica y personal?	Establecer la expresión para la pendiente y conocer los tipos de pendiente de la recta.

Descripción de la guía:
¿Dónde podemos observar una pendiente en la vida diaria? Pues, una pendiente se encuentra en la inclinación de un techo, de una carretera o bien de una escalera apoyada en una pared. En matemáticas usamos el término pendiente para definir, de forma particular, el grado de inclinación de algo. Por eso en esta guía vamos a determinar la expresión para la pendiente de una recta y conocer los tipos de pendientes de las rectas.

ACTIVIDAD INICIAL

Actividad 1

OBJETIVO: conocer las ideas que expresa el estudiante mediante un par de preguntas.

- **Tiempo:** 10 minutos.
- **Trabajo individual.**
- **Socialización:** 4 estudiantes.

1. Pregunta para interesar

Sabías que según el libro **Guinness de los Récords**, la calle más empinada del mundo se encuentra en la Isla Sur de Nueva Zelanda y es *Baldwin Street***.** Esta calle presenta una inclinación de **19 grados.**

¿Te imaginas como seria vivir en lo alto?
____
____

Imagen 1.

Calle Baldwin Street***,*** *Isla Sur de Nueva Zelanda*

2. Pregunta diagnostica

¿Sabes cuál es la pendiente de la calle *Baldwin Street*?

Sí ☐ No ☐

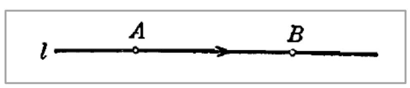
¿Cuál?____

____

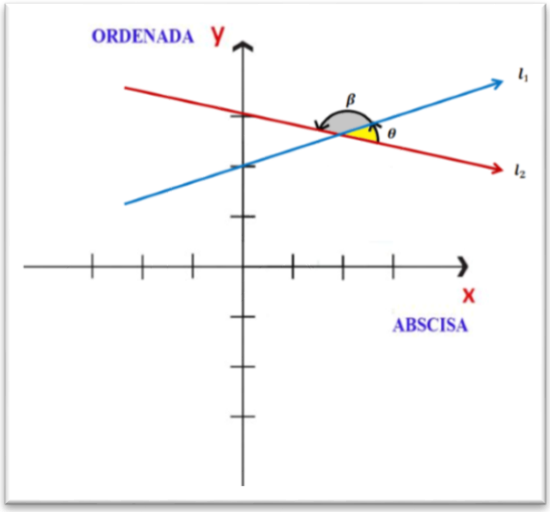
INTRODUCCION AL TEMA

Definición: sean $l_1 y\ l_2$ dos rectas. El ángulo entre $l_1 y\ l_2$ es θ que es aquel que lo forman las dos rectas.

NOTA: un segmento ***AB*** es generado por un punto que se mueve a lo largo de la recta l de A hacia B. Decimos entonces que el segmento AB está dirigido de A a B, e indicamos esto por medio de una flecha como se indica en la siguiente imagen.



Segmento dirigido



La inclinación: Es el ángulo medido en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, formado por una recta y el eje positivo X; de esta manera, toda recta horizontal en el plano tendrá una inclinación de $0°$ y toda recta vertical una inclinación de $90°$.

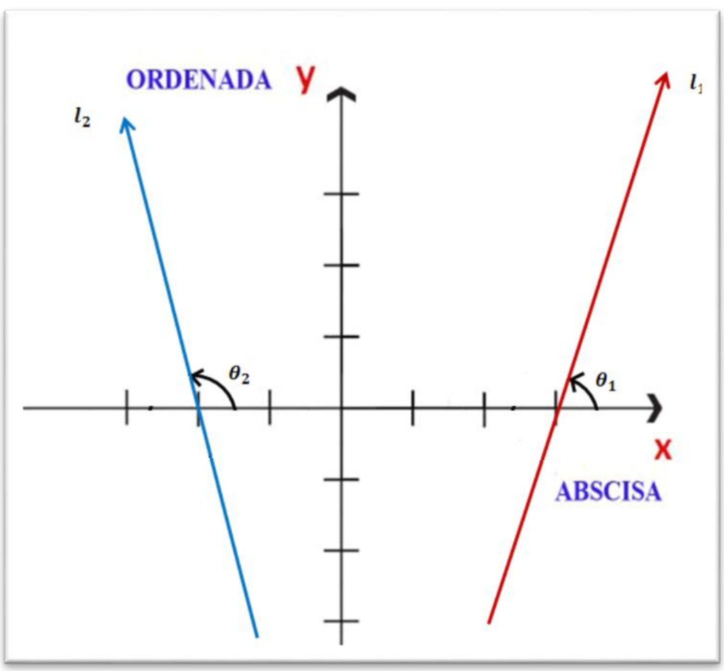


Figura 1. Inclinación de una recta.

En la ***figura 1*** observamos que el ángulo de inclinación de la recta l_1 es θ_1, y el de la recta l_2 es θ_2. Evidentemente, θ_1 o θ_2 pueden tener cualquier valor comprendido entre $0°\ y\ 180°$; es decir, su intervalo de variación está dado por:

$$\mathbf{0° \leq \boldsymbol{\theta} \leq 180°}$$

Actividad 2

OBJETIVO: llenar la tabla con la información correspondiente y así determinar la expresión de la pendiente.

- **Tiempo:** 35 minutos.
- **Grupo de trabajo:** Formado por tres estudiantes.
- **Socialización:** 2 grupos.

Completar los espacios de la tabla de acuerdo al procedimiento indicado.

A	*B*	$\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{Tan(\theta)}$	$\Delta \boldsymbol{x}$	$\Delta \boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{m}$ $\dfrac{\Delta \boldsymbol{y}}{\Delta \boldsymbol{x}}$
$(\mathbf{0},\mathbf{2})$	$(4,0)$					
$(\mathbf{2},\mathbf{1})$	$(7,5)$					
$(\mathbf{-6},\mathbf{5})$	$(0,-3)$					
$(\mathbf{-4},\mathbf{-3})$	$(3,4)$					
$(\mathbf{-2},\mathbf{-3})$	$(2,5)$					

Procedimiento

i. En el geoplano con hilo trazar el eje de las abscisas y el eje de las ordenadas.
ii. Ubicar con los pins el primer par de puntos *A* y *B* de la tabla y unirlos mediante hilo.
iii. Con el graduador, **medir el ángulo $\boldsymbol{\theta}$** que se forma entre el eje horizontal X y el segmento que une los puntos *A* y *B.* Anotar el resultado en la columna θ de la tabla.
iv. **Calcular la tangente de $\boldsymbol{\theta}$**. Anotar el valor obtenido en la columna $Tan\theta$ de la tabla.
v. **Calcular** $\Delta \boldsymbol{x}$ **e** $\Delta \boldsymbol{y}$. Anotar los valores obtenidos en las columnas Δx y Δy de la tabla. (Recordar que $\Delta \boldsymbol{x} = x_2 - x_1$ y $\Delta \boldsymbol{y} = y_2 - y_1$)
vi. Para el par de puntos *A* y *B*, **determinar el cociente** $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ al cual llamaremos pendiente y lo representamos como $\boldsymbol{m}$. Anotar el valor obtenido en la columna m de la tabla.
vii. Repetir todo el proceso anterior con cada par de puntos, hasta completar la tabla.

Nota:

- Dos rectas en el plano cartesiano son paralelas, si sus ángulos de inclinación son iguales.
  Si trazamos dos rectas l_1 con ángulo de inclinación θ_1 y l_2 con ángulo de inclinación θ_2 en el plano se tiene que $\theta_1 = \theta_2$, por lo tanto $tan\theta_1 = tan\theta_2$, luego las pendientes de las rectas son iguales.
  Conclusión: si dos rectas son paralelas, entonces sus pendientes son iguales.

- Dos rectas l_1 con pendiente m_1 y l_2 con pendiente m_2 son perpendiculares, si el producto de sus pendientes es m_1 y m_2 respectivamente es -1, es decir $m_1 * m_2 = -1$.

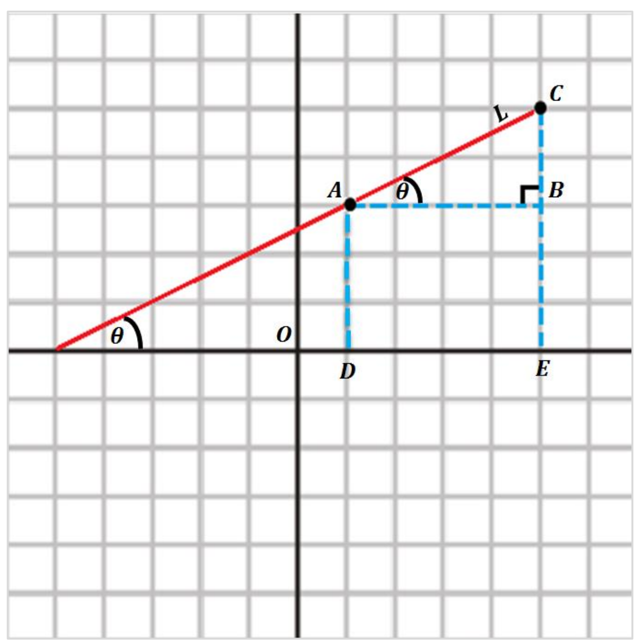
CONCLUSIÓN "*PENDIENTE* DE UNA RECTA"

Actividad 3

OBJETIVO: establecer la expresión para la pendiente y determinar si la pendiente es positiva, negativa o bien si no está definida de acuerdo al ángulo de inclinación de la recta.

- **Tiempo:** 20 minutos.
- **Grupo de trabajo:** Formado por tres estudiantes.
- **Socialización:** 1 grupo.

Consideremos la recta $\overline{AC}$ de la figura que se muestra a la derecha, determinada por los puntos A y C, y sea θ su ángulo de inclinación. Por A y C tracemos las perpendiculares CE y AD al eje X, y por A tracemos una paralela al eje X que corte a CE en B.



El ángulo $\measuredangle CAB = \theta$ y por trigonometría tendremos que:

- $m = tan\theta = \frac{\overline{CB}}{\overline{BA}}$

Las coordenadas de los puntos D, E y B son: $D(x_1, 0)$, $E(x_2, 0)$ y $B(x_2, y_2)$.

Recordemos que: $\overline{CB} = y_2 - y_1$ y $\overline{BA} = \overline{ED} = x_2 - x_1$.

Sustituyendo estos valores en $m = tan\theta = \frac{\overline{CB}}{\overline{BA}}$ tenemos:

$m = tan\theta = \frac{\overline{CB}}{\overline{BA}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, con $x_2 \neq x_1$

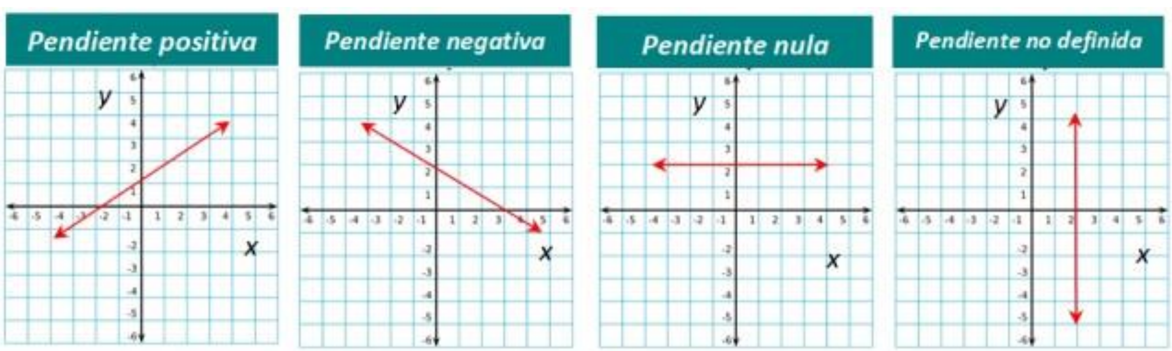
Así, $\mathrm{m} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, con $x_2 \neq x_1$

Por tanto, si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ son dos puntos diferentes cualesquiera de una recta, la pendiente de la recta es:

$$\boldsymbol{m} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ con } x_2 \neq x_1$$

- ❖ Llenar los espacios en blanco con las palabras o fórmulas matemáticas que dan sentido al párrafo. (**sugerencia:** tener en cuenta la actividad dos y las imágenes que se presentan)

a. Debido a la ____________________ de los datos medidos y calculados se puede afirmar que las expresiones $m = tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ son __________________ y representan la _________________ de la recta.



b. Cuando la inclinación de la recta es aguda, entonces __________________________.
c. Cuando la inclinación de la recta es obtusa, entonces _________________________.
d. Cuando la inclinación de la recta es de 90°, entonces __________________________.
e. Cuando la inclinación de la recta es de 180°, entonces _________________________.

Actividad 4

OBJETIVO: Resolver ejercicios que requieren la aplicación de la fórmula de la pendiente.

- ➢ **Tiempo:** 20 minutos.
- ➢ **Grupo de trabajo:** Formado por tres estudiantes.
- ➢ **Socialización:** 1 grupo.

1. ¿Cuál es la pendiente de una recta que pasa por los puntos *A* (2,4) y *B* (8, -4)? Determinar de **manera analítica** y con el **uso de material didáctico** (Geoplano, pins, hilo y transportador).
2. Determinar la inclinación con respecto a la horizontal de una carretera cuya pendiente es de 0,32.

3. ¿cuál es la pendiente de la calle *Baldwin Street*?

MATERIAL COMPLEMENTARIO (OPCIONAL).

- Animación en GeoGebra sobre la pendiente de una recta https://www.geogebra.org/m/ZVgnB73N

MUNICIPIO DE POPAYÁN
SECRETARIA DE EDUCACIÓN MUNICIPAL
INSTITUCIÓN EDUCATIVA ANTONIO GARCÍA PAREDES
DANE 119001002195 - NIT 800247992-4

CODIGO	VERSIÓN	FECHA

GUIA DIDACTICA PARA LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE: ECUACIÓN DE LA RECTA.

ÁREA: MATEMÁTICAS	ASIGNATURA: GEOMETRÍA	GRADO: DÉCIMO	AÑO LECTIVO: 2021	GUÍA N°3

NOMBRE DEL DOCENTE: CONSUELO SAMBONI – ELMER SAMBONI

NOMBRE DEL ESTUDIANTE:

Estimados estudiantes de grado decimo, bienvenidos a la asignatura de Geometría.

Somos Consuelo Samboni Piamba-Elmer Samboni Piamba estudiantes de la universidad del Cauca, en este corto tiempo haremos parte del grupo de apoyo y seremos sus orientadores en el área de matemáticas durante el periodo 2021.

Leer detenidamente cada parte de la guía será vital para desarrollar cada una de las actividades propuestas. Recuerden, cada asignatura, ayuda a prepararnos académicamente para las etapas posteriores de la vida, pero también nos ayuda a ser ciudadanos con ganas de ser cada vez mejores, buscar retos y lograr vencerlos y sobre todo aprender de ellos.

"Nuestra mayor debilidad radica en renunciar. La forma más segura de tener éxito es siempre intentarlo una vez más"

Thomas Edison

consuelosam@unicauca.edu.co - elmers@unicauca.edu.co 3206340260 - 3216459126

Eje temático	Tema	Materiales	Preguntas esenciales	Objetivo de la guía
Geometría Analítica.	Ecuación de la recta.	-Lápiz. -Papel (cuaderno). -Regla. -Geoplano. -Cuerdas elásticas. -Graduador. -Calculadora. -Hoja de papel cuadriculada.	¿Qué le pareció a usted trabajar con materiales manipulables? ¿Cuál fue para usted el aporte para su vida académica y personal?	-Revisar la ecuación de una recta dado un punto y la pendiente. -Establecer la expresión algebraica que determina a una recta, dada su pendiente y un

				punto de la forma $(a, 0)$ o $(0, b)$. -Revisar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos dados.

Descripción de la guía:

"La ecuación de la recta es la expresión algebraica que determina una recta". En esta guía se busca desarrollar actividades que permitan identificar como esta ecuación se puede representar de diferentes maneras en este caso: ecuación de la recta en la forma punto-pendiente, ecuación de la recta en la forma pendiente-intercepto y ecuación de la recta que pasa por dos puntos distintos, además se acompañara estas actividades con el geoplano y algunos ejercicios que ayuden al estudiante afianzar el tema.

ACTIVIDAD INICIAL

Actividad 1

OBJETIVO: conocer cuáles son las intuiciones que tiene el estudiante sobre línea recta y dibujar una recta con una pendiente dada en forma de razón.

- **Tiempo:** 10 minutos.
- **Trabajo individual.**
- **Socialización:** 2 estudiantes.

1. Pregunta diagnostica

¿Qué sabe usted o entiende sobre la línea recta?

____
____

2. Sesión de entrenamiento

Cada estudiante en una hoja de papel cuadriculada, siguiendo el procedimiento descrito a continuación graficara una recta que tiene una pendiente de $-\frac{3}{4}$.

Procedimiento.

a) Ubicar un punto *A* en el plano. (el plano entendido como la hoja cuadriculada)

b) Trasladarse el número de unidades del denominar, en este caso 4 unidades, hacia la izquierda del punto *A* y marcar un punto *B*.

c) Desde el punto *B* desplazarse hacia arriba las unidades que indica el numerador, en este caso 3 unidades y marcar un punto *C.*

d) Trazar una recta que pase por los puntos *A* y *C*, esta será la recta de pendiente $-\frac{3}{4}$

Nota: para el caso de la pendiente positiva, en el numeral **b)** nos trasladamos hacia la derecha.

❖ Línea recta

En el cuadro siguiente decimos que hay representadas dos **líneas rectas** designadas con las letras r y s:

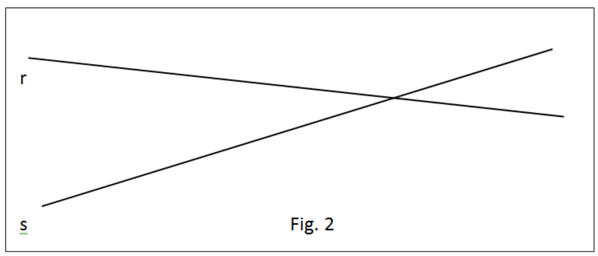


Fig. 2

Pero al objeto o figura geométrica *línea recta* se le atribuyen unas características que realmente no tienen los trazos marcados en el cuadro. Se considera que las rectas son ilimitadas por ambos extremos, así como que no tienen ningún espesor, lo que hace imposible "representar" las rectas. La característica de ser ilimitadas por ambos extremos se suele indicar marcando flechas en cada extremo. Otras experiencias que sugieren la *idea* de recta pueden ser un hilo tirante, el borde de una regla, etc.

GEOPLANO

Recordemos que es un material manipulativo utilizado en matemáticas, formado por un tablero de madera o plástico, con varios pivotes que forman una cuadrícula o circunferencia.

Líneas: La unión de puntos que forman el geoplano representa líneas.

INTRODUCCIÓN AL TEMA

ECUACION DE UNA RECTA QUE PASA POR UN PUNTO Y TIENE UNA PENDIENTE DADA.

"Llamamos línea recta al conjunto de todos los puntos tales que tomados dos puntos diferentes cualesquiera $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, el valor de la pendiente m calculada por medio de la formula $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $x_1 \neq x_2$ resulta siempre constante".

La recta que pasa por un punto dado $A(x_1, y_1)$ y que tiene una pendiente dada m, tiene por ecuación:

$$\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Actividad 2

OBJETIVO: verificar la ecuación de la recta en la forma pendiente-intercepto.

- **Tiempo:** 40 minutos.
- **Grupo de trabajo:** Formado por 2 estudiantes.
- **Socialización:** 4 estudiantes.

Llenar la tabla de acuerdo al procedimiento indicado. Al finalizar las actividades se escogerá algunas parejas de manera aleatoria para socializar los resultados obtenidos.

Ecuación forma: $\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{m_{med}}$	Ecuación obtenida $\boldsymbol{y - y_1 = m_{med}(x - x_1)}$
$\boldsymbol{y - 10 = -2(x - 0)}$	$(0, 10)$		
$\boldsymbol{y - 10 = -\frac{4}{3}(x + 13)}$	$(-13, 10)$		
$\boldsymbol{y + 15 = 2(x + 5)}$	$(-5, -15)$		
$\boldsymbol{y + 13 = \frac{5}{2}(x - 0)}$	$(0, -13)$		

$\boldsymbol{y-2=-\frac{1}{3}(x-0)}$	$(0,2)$		
$\boldsymbol{y+14=7(x-2)}$	$(2,-14)$		
$\boldsymbol{y+15=5(x+15)}$	$(-15,-15)$		

Procedimiento.

a. En el geoplano, ubicar con un pin el punto de la primera ecuación dada en la tabla anterior.
b. Colocar el extremo de una cuerda elástica en el pin que representa el punto de la ecuación.
c. Tensionar la cuerda elástica o hilo, manteniendo la pendiente para dicho punto
d. Marcar con hilo un pin, luego coloca es pin en un punto donde pase la cuerda. Finalmente, los pins deben quedar unidos con la cuerda.
e. Colocar el graduador en el pin que representa el punto A, medir la inclinación θ_{med} de la cuerda y determinar m_{med}.
f. Rescribir la ecuación en la forma $y-y_1=m_{med}(x-x_1)$. Para el caso en el que el punto este sobre el eje Y, escribir la formula despejando y en términos de x.
g. Repetir todo el proceso hasta completar la tabla anterior.

ECUACIÓN DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS.

Por geometría euclidiana se sabe que dos puntos determinan una recta; si estos puntos tienen como coordenadas $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$, la recta que pasa por ellos puede representarse mediante la expresión matemática:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

Actividad 3

OBJETIVO: Comprobar de manera manipulativa y analítica la expresión de la ecuación de la recta.

- **Tiempo:** 30 minutos.
- **Grupo de trabajo:** Formado por 3 estudiantes.
- **Socialización:** 2 grupos.

Procedimiento.

a. Ubique en el plano una recta que pasa por el punto $(-6,-4)$ con pendiente $\frac{3}{2}$.
b. Ubique en el plano una recta que pasa por los puntos $(-5,-7)$ y por el punto $(2,1)$.
c. Ubique en el plano una recta que pasa por los puntos $(-7,1)$ y por el punto $(1,4)$.
d. Ubique en el plano con pendiente $-\frac{2}{3}$ y que pasa por el punto $(5,3)$.
e. Pasa por la ordenada -6 y pendiente $\frac{3}{5}$.
f. Pasa por la abscisa 7 y pendiente 4.
g. Abscisa 5.
h. Ordenada 3.
i. Pasa por el origen y por $(5,5)$.
j. Pasa por el origen y por $(-2,-7)$.

De los ítems b, c, d, e y j sacar la ecuación de la recta que se obtiene.

CONCLUSIÓN" *ECUACIÓN DE LA RECTA"*

- Cuando el punto dado esta sobre el eje y, es decir su coordenada es $(0,b)$, la ecuación se puede escribir de la forma ordinaria $y = mx + b$ y representa la ecuación de la recta dada su pendiente $\boldsymbol{m}$ y su ordenada en el origen $\boldsymbol{b}$.

  Ejemplo: $y = 2x - 1$

- En algunas ocasiones la ecuación de la recta la podemos encontrar de manera general y es de la forma: $Ax + By + C = 0$. Con $A, B \neq 0$.

  Ejemplo: $5\text{x} - 7\text{y} - 11 = 0$.

- También podemos conseguir la ecuación de la recta de la forma: $Ax + By = -C$. Con $A, B \neq 0$.

  Ejemplo: $9\text{x} - \text{y} = 3$.

- La ecuación $x = 4$ representa una recta vertical que cruza el eje de las X en el punto (4,0). Similarmente, la ecuación $y = -3$ es una recta horizontal que cruza al eje de las Y en $(0,-3)$.

NOTA: Para los dos primeros ejemplos la pendiente se calcula de la forma $\text{m} = -\frac{\text{A}}{B}$.

Actividad 4

OBJETIVO: Resolver ejercicios que requieren la aplicación de la fórmula de la pendiente.

- **Tiempo:** 40 minutos.
- **Grupo de trabajo:** Formado por 2 estudiantes.
- **Socialización:** 4 estudiantes.

Ejercicios:

1. Halle la ecuación de la recta que pasa por $A(-6,-3)$ y tiene ángulo de inclinación de $45°$.
2. Halle la ecuación de la recta que pasa por $A(4,2)$ y $B(-5,7)$.
3. Una recta de pendiente 2 pasa por el punto $A(-1,4)$. Halle la ecuación de la recta en forma general y ordinaria.

MATERIAL COMPLEMENTARIO (OPCIONAL).

- Animación en GeoGebra sobre una recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada https://www.geogebra.org/m/GGMjTQNQ.

- Animación en GeoGebra sobre una recta que pasa por dos puntos dados https://www.geogebra.org/m/JVsVERe9.

	MUNICIPIO DE POPAYÁN **SECRETARIA DE EDUCACIÓN MUNICIPAL** INSTITUCIÓN EDUCATIVA ANTONIO GARCÍA PAREDES DANE 119001002195 - NIT 800247992-4			
	CODIGO	**VERSIÓN**	**FECHA**	
	GUIA DIDACTICA PARA LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE: PARALELISMO.			
ÁREA: MATEMÁTICAS	**ASIGNATURA: GEOMETRÍA**	**GRADO: DÉCIMO**	**AÑO LECTIVO: 2021**	**GUÍA N°4**
NOMBRE DEL DOCENTE: CONSUELO SAMBONI – ELMER SAMBONI				
NOMBRE DEL ESTUDIANTE:				

Estimados estudiantes de grado decimo, bienvenidos a la asignatura de Geometría.

Somos Consuelo Samboni Piamba-Elmer Samboni Piamba estudiantes de la universidad del Cauca, en este corto tiempo haremos parte del grupo de apoyo y seremos sus orientadores en el área de matemáticas durante el periodo 2021.

Leer detenidamente cada parte de la guía será vital para desarrollar cada una de las actividades propuestas. Recuerden, cada asignatura, ayuda a prepararnos académicamente para las etapas posteriores de la vida, pero también nos ayuda a ser ciudadanos con ganas de ser cada vez mejores, buscar retos y lograr vencerlos y sobre todo aprender de ellos.

"El éxito es la suma de pequeños esfuerzos repítelos día tras día"

Robert Collier.

consuelosam@unicauca.edu.co - elmers@unicauca.edu.co 3206340260 - 3216459126

Eje temático	**Tema**	**Materiales**	**Preguntas esenciales**	**Objetivo de la guía**
Geometría Analítica.	Rectas paralelas.	-Lápiz. -Papel (cuaderno). -Regla. -Geoplano. -Hilos -Pins. -Graduador. -Colores. -Calculadora.	¿Qué le pareció a usted trabajar con materiales manipulables? ¿Cuál fue para usted el aporte para su vida académica y personal?	Reconocer las características que cumplen las rectas paralelas a partir de sus ecuaciones.

Descripción de la guía:
En la vida diaria existen muchos ejemplos de rectas paralelas tales como los lados opuestos del marco rectangular de un espejo o bien los estantes de un librero, etcétera.
A través de esta guía se espera que el estudiante logre comprender las condiciones necesarias y suficientes para que dos rectas sean paralelas. Para ello se han organizado una serie de actividades que relacionan los conocimientos previos que tiene el estudiante sobre el tema, los elementos que se han trabajado con anterioridad como la ecuación que representa la línea recta, así mismo haciendo uso del geoplano el estudiante graficará ecuaciones lineales en el plano y finalmente se proponen una serie de ejercicios que involucran lo aprendido.

ACTIVIDAD INICIAL

Actividad 1

OBJETIVO: recordar los elementos de la ecuación que representa la línea recta y conocer las ideas previas que expresa el estudiante.

- **Tiempo:** 10 minutos.
- **Trabajo individual.**
- **Socialización:** 2 estudiantes.

Preguntas diagnósticas.

- En la ecuación de la recta expresada de la forma ordinaria como: $y = mx + b$. ¿Cuál es el significado de m y b?
  m:____.
  b:____.
- Cuando la pendiente es positiva el ángulo de inclinación es ____________, es decir $0° \leq \theta < 90°$.
- Cuando la pendiente es negativa el ángulo de inclinación es ____________, es decir $90° < \theta < 180°$.

- ¿Cuáles de las calles enumeradas en la imagen son paralelas?

  ____

  ____

- Nombre la característica esencial de porque las carreras que se muestran en la imagen son paralelas.

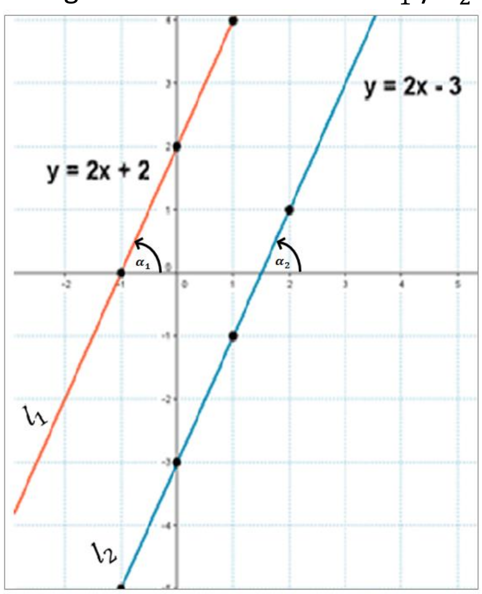
  ____

  ____

INTRODUCCIÓN AL TEMA

En la figura que sigue, observaras dos rectas l_1 y l_2 que tienen la forma:

$l_1: y = 2x + 2$ Y $l_2: y = 2x - 3$, ambas ecuaciones escritas de la forma pendiente ordenada o forma ordinaria, cuyos ángulos de inclinación son α_1 y α_2 respectivamente.



Actividad 2

OBJETIVO: intuir el concepto de paralelismo a partir de la actividad propuesta.

- **Tiempo:** 30 minutos.
- **Trabajo individual.**
- **Socialización:** 3 estudiantes.

Cada estudiante en el Geoplano realiza la actividad 2 siguiendo el procedimiento descrito a continuación.

Procedimiento.

1. En el Geoplano con cuerdas elastinas o hilo, dibujar un sistema de coordenadas rectangulares.
2. Dibujar dos rectas paralelas, utilizando para cada una distintos colores de pins y desígnelas por l_1 y l_2.
3. Designar por α_1 y α_2 los ángulos de inclinación de las rectas l_1 y l_2, respectivamente.
4. ¿Es $\alpha_1 = \alpha_2$? ¿Por qué?
5. ¿$tan\alpha_1 = tan\alpha_2$? ¿Por qué?
6. ¿Qué podemos decir acerca del valor de sus pendientes?
7. Enuncie la condición que deben cumplir dos rectas l_1 y l_2, para que sean paralelas.

Actividad 3

OBJETIVO: graficar en el plano ecuaciones lineales.

- **Tiempo:** 35 minutos.
- **Trabajo individual.**
- **Socialización:** 6 estudiantes.

Para la actividad **3.1** el estudiante hará uso de su tablero manipulable, hilos de diferentes colores o ligas elásticas para graficar ecuaciones. Anotar cada proceso y resultado en su cuaderno.

3.1 Grafique en el plano las siguientes ecuaciones:

a. $\mathrm{y} = 5\mathrm{x} - 2$
b. $\mathrm{y} = 5\mathrm{x} + 2$
c. $y = 5\mathrm{x} + 5$
d. $\mathrm{y} = 5\mathrm{x} - 5$

Para la actividad **3.2** el estudiante dibujara en su cuaderno dos planos. En cada uno de los planos graficara las rectas que se presentan a continuación.

3.2 Graficar en cada uno de los planos las siguientes rectas:

Plano uno

a. $y = 2x - 7$
b. $y = 2x - 3$
c. $y = 2x + 3$

Plano dos

a. $y = \frac{3}{2}x$
b. $y = \frac{3}{2}x + 6$
c. $y = \frac{3}{2}x - 5$

Pregunta:
¿Qué cambia y qué tienen en común las ecuaciones de las rectas que graficó en su tablero manipulable, las ecuaciones de las rectas del plano uno y del plano dos?

CONCLUSIÓN *“RECTAS PARALELAS”*

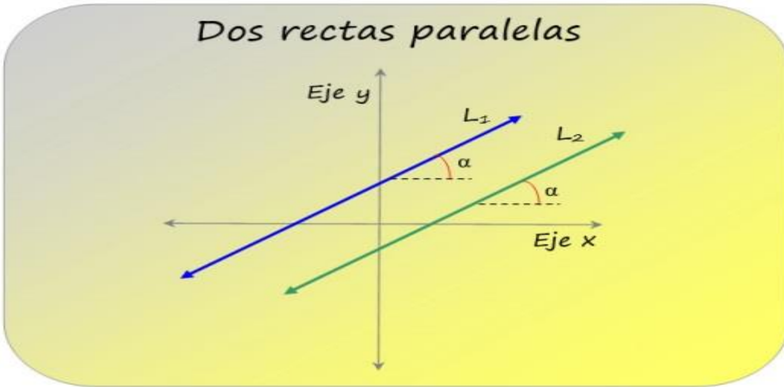
Actividad 4

OBJETIVO: sintetizar el tema “rectas paralelas”.

- **Tiempo:** 10 minutos.
- **Trabajo individual.**
- **Socialización:** 4 estudiantes.

Lea el párrafo que aparece abajo y complete los espacios en blanco con las palabras que faltan:

Las **rectas paralelas** son aquellas rectas que tienen la misma ______________, por ejemplo las rectas escritas de la forma pendiente ordenada siguientes: $y = mx + c,\ y = mx + d$, son rectas paralelas, debido a que ambas tiene una pendiente _______, y lo único que cambia es el valor de su __________________.



En conclusión, las rectas $l_1 \colon y = m_1x + c$ y $l_2 \colon y = m_2x + d$ son paralelas si ____= ____.

NOTA:

- Si dos rectas son paralelas entonces tiene la misma pendiente.
- Si dos rectas tienen la misma pendiente entonces son paralelas.
- Si l_1 y l_2 son paralelas simbólicamente las representamos de la siguiente manera $l_1 \parallel l_2$.

Actividad 5

Resolver los siguientes ejercicios.

- **Tiempo:** 15 minutos.
- **Trabajo individual.**
- **Socialización:** 3 estudiantes.

1. Calcula una recta paralela a la recta $l_1 \colon y = \frac{3}{2}x + 2$ que pase por el punto $(-2, 1)$.
2. Entre estas las rectas $l_1 \colon y = \frac{4}{3}x - \frac{6}{5}$, $l_2 \colon 3x - 4y + 2 = 0$ y $l_3 \colon 8x - 6y - 3 = 0$, ¿Cuál de estas rectas no es paralela a las otras dos?
3. Calcula k para que las rectas $l_1 \colon kx + 4y - 1 = 0$ y $l_2 \colon 5x + 6y - 1 = 0$ sean paralelas.

MATERIAL COMPLEMENTARIO (OPCIONAL).

- Animación en Geogebra sobre dos rectas paralelas https://www.geogebra.org/m/sbrkur6q.

MUNICIPIO DE POPAYÁN
SECRETARIA DE EDUCACIÓN MUNICIPAL
INSTITUCIÓN EDUCATIVA ANTONIO GARCÍA PAREDES
DANE 119001002195 - NIT 800247992-4

CODIGO	VERSIÓN	FECHA

GUIA DIDACTICA PARA LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE: PERPENDICULARIDAD.

ÁREA: MATEMÁTICAS	**ASIGNATURA: GEOMETRÍA**	**GRADO: DÉCIMO**	**AÑO LECTIVO: 2021**	**GUÍA N°5**
NOMBRE DEL DOCENTE: CONSUELO SAMBONI – ELMER SAMBONI				
NOMBRE DEL ESTUDIANTE:				

Estimados estudiantes de grado decimo, bienvenidos a la asignatura de Geometría.

Somos Consuelo Samboni Piamba-Elmer Samboni Piamba estudiantes de la universidad del Cauca, en este corto tiempo haremos parte del grupo de apoyo y seremos sus orientadores en el área de matemáticas durante el periodo 2021.

Leer detenidamente cada parte de la guía será vital para desarrollar cada una de las actividades propuestas. Recuerden, cada asignatura, ayuda a prepararnos académicamente para las etapas posteriores de la vida, pero también nos ayuda a ser ciudadanos con ganas de ser cada vez mejores, buscar retos y lograr vencerlos y sobre todo aprender de ellos.

"Pregúntate si lo que estás haciendo hoy te acerca al lugar en el que quieres estar mañana"

Walt Disney.

consuelosam@unicauca.edu.co - elmers@unicauca.edu.co 3206340260 - 3216459126

Eje temático	**Tema**	**Materiales**	**Preguntas esenciales**	**Objetivo de la guía**
Geometría Analítica.	Rectas perpendiculares.	-Lápiz. -Papel (cuaderno). -Regla. -Geoplano. -Hilo. -Pins. -Graduador. -Colores. -Calculadora.	¿Qué le pareció a usted trabajar con materiales manipulables? ¿Cuál fue para usted el aporte para su vida académica y personal?	Reconocer las características que cumplen las rectas perpendiculares a partir de sus ecuaciones.

Descripción de la guía:
Las rectas perpendiculares al igual que las rectas paralelas están en todos lados. La grafica de una recta paralela y perpendicular en un papel es una manera de representación dentro de las matemáticas; que permite relacionar lo abstracto con lo real, desde la forma en que se cruzan las calles a la intersección de las líneas coloreadas de una camisa a cuadros.
Con esta guía se tiene como intención que el estudiante comprenda las condiciones necesarias y suficientes para que dos rectas sean perpendiculares. Para lograr el objetivo de esta guía se han planteado un conjunto de actividades que involucran los conocimientos previos de cada estudiante, los elementos que se han trabajado en clases anteriores y finalmente una serie de ejercicios para poner en práctica lo que se ha aprendido durante la sesión.

ACTIVIDAD INICIAL

Actividad 1

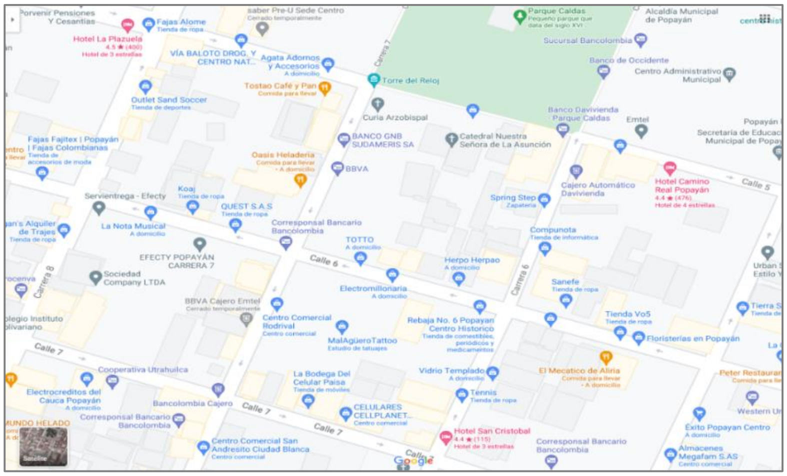
OBJETIVO: conocer las ideas que expresa el estudiante sobre rectas perpendiculares mediante un par de preguntas.

- **Tiempo:** 10 minutos.
- **Trabajo individual.**
- **Socialización:** 4 estudiantes.

Pregunta para interesar

1. ¿Cómo son entre si las paredes del salón, es decir cuáles son perpendiculares y cuales paralelas?
____
____

Pregunta diagnostica



2. Identifiquen en la figura las calles y carreras que son perpendiculares entre sí.

____

____

3. Caractericen el concepto de perpendicularidad

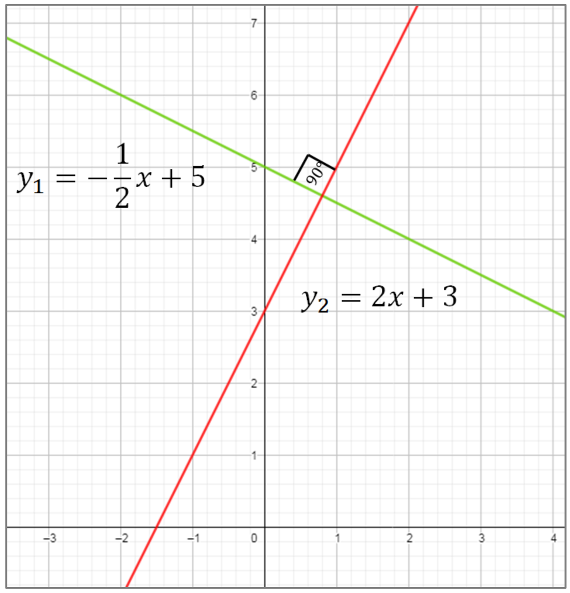
____

____

INTRODUCCIÓN AL TEMA

En la figura que sigue, observaras dos rectas l_1 de color verde y l_2 de color rojo que tienen la forma:

$l_1 \colon y_1 = -\frac{1}{2}x + 5$ y $l_2 \colon y_2 = 2x + 3$, ambas ecuaciones escritas de la forma pendiente ordenada, estas rectas se cortan entre sí en un punto formando cuatro ángulos iguales, siendo cada uno un ángulo recto, es decir, que mide 90°.



Actividad 2

OBJETIVO: deducir las condiciones de perpendicularidad.

- **Tiempo:** 30 minutos.
- **Trabajo individual.**
- **Socialización:** 4 estudiantes.

Cada estudiante en el Geoplano realiza la actividad 2 siguiendo el procedimiento descrito a continuación.

Procedimiento.

1. En el Geoplano con cuerdas elastinas o hilo, dibujar un sistema de coordenadas rectangulares.
2. Dibujar dos rectas perpendiculares, utilizando para cada una distintos colores de pins y desígnelas por l_1 y l_2.
3. Designar por α_1, α_2, α_3 y α_4 los ángulos que se forman entre las rectas l_1 y l_2.
4. ¿Cuál es la medida del ángulo α_1, α_2, α_3 y α_4?
5. Enuncie la condición que deben cumplir dos rectas l_1 y l_2, para que sean perpendiculares.

Actividad 3

OBJETIVO: graficar en el geoplano ecuaciones lineales.

- **Tiempo:** 30 minutos.
- **Trabajo individual.**
- **Socialización:** 4 estudiantes.

Para la actividad **3.1** haga uso de su geoplano, hilos de diferentes colores o ligas elásticas para graficar las siguientes ecuaciones. Anotar cada proceso y resultado en su cuaderno.

3.1 Grafique en el plano las siguientes ecuaciones**:**

a. $y = 3x - 5$, $\qquad y = -\frac{1}{3}x - \frac{8}{3}$

b. $y = \frac{5}{4}\mathrm{x} + 2$, $\qquad y = -\frac{4}{5}x + \frac{29}{5}$

Para la actividad **3.2** dibuje en su cuaderno dos planos. En cada uno de los planos grafique las rectas que se presentan a continuación.

3.2 Graficar en cada uno de los planos el par de rectas que se presentan a continuación.

Plano uno

a. $y = \frac{3}{2}x - 7$, $\qquad y = -\frac{2}{3}x - 3$

Plano dos

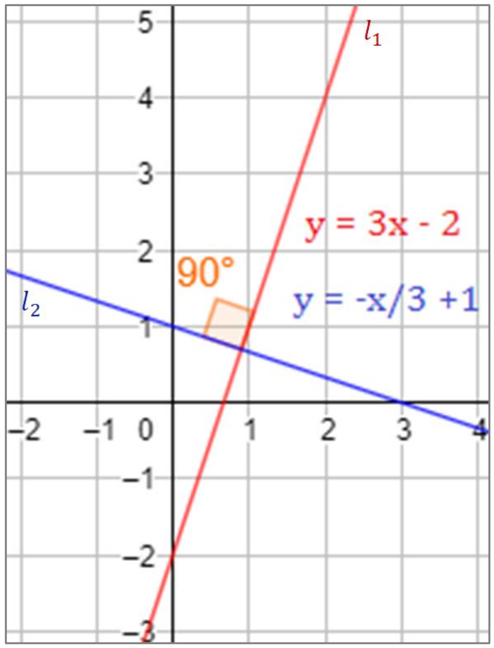
b. $y = 3x - 5$, $\qquad y = -\frac{1}{3}x$

3.3 Observa cuidadosamente las pendientes del par de rectas (ítem **3.1a**, **3.1b**, **3.2a** y **3.2b**), completen la siguiente tabla y respondan las preguntas.

Ecuaciones	$\boldsymbol{m_1}$	$\boldsymbol{m_2}$	$\boldsymbol{m_1 * m_2}$
$\boldsymbol{y = \frac{1}{5}x - 2}$			
$\boldsymbol{y = -5x + 1}$			
$\boldsymbol{y = -\frac{2}{5}x + 2}$			
$\boldsymbol{y = \frac{5}{2}x + 1}$			
$\boldsymbol{y = \frac{3}{2}x - 7}$			
$\boldsymbol{y = -\frac{2}{3}x - 3}$			
$\boldsymbol{y = 3x - 5}$			
$\boldsymbol{y = -\frac{1}{3}x}$			

Preguntas:

1. ¿Cómo son el par de rectas de los ítems **3.1a** y **3.1b?**
2. ¿Cómo son el par de rectas de los ítems **3.2a** y **3.2b**?
3. ¿Qué conclusión puede sacar de la tabla anterior?



Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes m_1 y m_2 respectivamente es -1, es decir $m_1 * m_2 = -1$.

En particular en la imagen anterior, si tomamos $m_1 = 3$ y $m_2 = -\frac{1}{3}$ su producto seria $(3) * \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$. Por lo tanto, la recta l_1 es perpendicular a recta l_2.

NOTA:

- Si dos rectas son perpendiculares, entonces el producto de sus pendientes es igual a -1.
- Si el producto de las pendientes de dos rectas es igual a -1, entonces las rectas son perpendiculares.
- Si l_1 y l_2 son perpendiculares simbólicamente las representamos de la siguiente manera $l_1 \perp l_2$.

Actividad 4

Resolver los siguientes ejercicios.

- **Tiempo:** 10 minutos.
- **Trabajo individual.**
- **Socialización:** 3 estudiantes.

1. Encuentra la ecuación de la recta perpendicular a la recta cuya ecuación es $-4x - 5y = 7$ y pasa por el punto $(-2,3)$.
2. Determinar si la recta l_1 que pasa por los puntos $A(-2, 3)$ y $B(3, 5)$ es perpendicular a la recta l_2 que pasa por $C(2, -1)$ y $D(-4, 14)$.

MATERIAL COMPLEMENTARIO (OPCIONAL).

- Animación en Geogebra sobre dos rectas perpendiculares https://www.geogebra.org/m/nxXyaypQ.

MUNICIPIO DE POPAYÁN
SECRETARIA DE EDUCACIÓN MUNICIPAL
INSTITUCIÓN EDUCATIVA ANTONIO GARCÍA PAREDES
DANE 119001002195 - NIT 800247992-4

CODIGO	VERSIÓN	FECHA

GUIA DIDACTICA PARA LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE: CIRCUNFERENCIA

ÁREA: MATEMÁTICAS	ASIGNATURA: GEOMETRÍA	GRADO: DÉCIMO	AÑO LECTIVO: 2021	GUÍA N°6

NOMBRE DEL DOCENTE: CONSUELO SAMBONI – ELMER SAMBONI

NOMBRE DEL ESTUDIANTE:

Estimados estudiantes de grado decimo, bienvenidos a la asignatura de Geometría.

Somos Consuelo Samboni Piamba-Elmer Samboni Piamba estudiantes de la universidad del Cauca, en este corto tiempo haremos parte del grupo de apoyo y seremos sus orientadores en el área de matemáticas durante el periodo 2021.

Leer detenidamente cada parte de la guía será vital para desarrollar cada una de las actividades propuestas. Recuerden, cada asignatura, ayuda a prepararnos académicamente para las etapas posteriores de la vida, pero también nos ayuda a ser ciudadanos con ganas de ser cada vez mejores, buscar retos y lograr vencerlos y sobre todo aprender de ellos.

"Tus talentos y habilidades irán mejorando con el tiempo, pero para eso has de empezar"

Martin Luther King.

consuelosam@unicauca.edu.co - elmers@unicauca.edu.co 3206340260 - 3216459126

Eje temático	Tema	Materiales	Preguntas esenciales	Objetivo de la guía
Geometría Analítica.	Circunferencia.	-Papel (cuaderno-cartulina). -Lápiz. -Colores. -Tijeras. -Compás. -Regla. -Graduador. -Calculadora. -Geoplano. -Pins.	¿Qué le pareció a usted trabajar con materiales manipulables? ¿Cuál fue para usted el aporte para su vida académica y personal?	-Conocer la definición de la circunferencia. -Identificar los elementos de la circunferencia. -Deducir la ecuación de la circunferencia

		-Hilo.		en el plano cartesiano.

Descripción de la guía:

Después de la recta, la línea más familiar para el estudiante es la circunferencia, pues la conoce desde sus primeros estudios de Geometría elemental. De manera general, en esta guía se deducirá la ecuación de la circunferencia a partir de su definición, pero antes como primera actividad nuevamente se tendrán en cuenta los conocimientos previos del estudiante, así como se tuvieron en cuenta para el estudio de la distancia entre dos puntos, la pendiente de una recta, la ecuación de una recta, el paralelismo y la perpendicularidad. Seguidamente, aparecen un acumulado de actividades con objetivos particulares encaminados a reunir características y elementos necesarios para deducir la ecuación de una circunferencia y finalmente se proponen algunos ejercicios para que el estudiante aplique lo aprendido en la resolución de los mismos.

ACTIVIDAD INICIAL

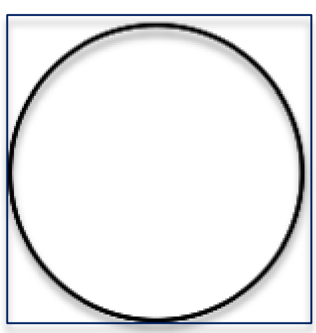
Actividad 1

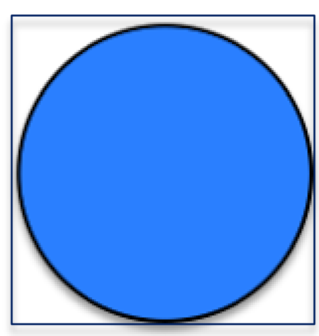
OBJETIVO: conocer las ideas que expresa el estudiante y mejorar el nivel de percepción de los estudiantes sobre los conceptos que se van a estudiar.

- **Tiempo:** 10 minutos.
- **Trabajo individual.**
- **Socialización:** 4 estudiantes.

Pregunta diagnostica

¿Qué nombre reciben las siguientes figuras?





______________________ ______________________ ______________________

¿Qué sabe usted sobre sobre las figuras anteriores?

____
____

¿Ha escuchado hablar de donde nace la circunferencia?

____
____

Actividad 2

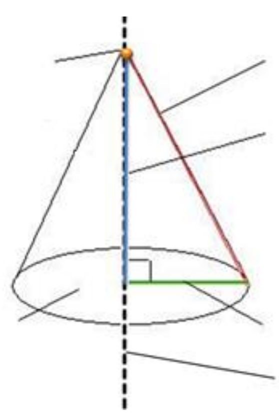
OBJETIVO: acercar al estudiante al conocimiento de la circunferencia a partir de la construcción de un cono.

- **Tiempo:** 10 minutos.
- **Trabajo individual.**
- **Socialización:** todos.

Para efectuar el reconocimiento de la circunferencia, cada estudiante construirá un cono en casa.

- Enumere las características principales del cono que usted elaboro.
  1. ____
  2. ____
  3. ____
  4. ____
  5. ____

- En la imagen que sigue a continuación, identifique los elementos del cono.



CONCEPTOS GENERALES

CONO: El cono es una figura geométrica tridimensional que se constituye al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.

Elementos del cono

- **Eje**: Es la recta imaginaria sobre la cual se ubica el cateto alrededor del cual gira el triángulo rectángulo que forma el cono.
- **Base:** Es el círculo sobre el cual se forma el cuerpo del cono.
- **Radio:** es el segmento que une el centro a cualquier punto de dicha circunferencia.
- **Directriz:** Es el perímetro de la base del cono.
- **Generatriz:** Es la recta que une el vértice con cualquier punto de la directriz. Además, es la hipotenusa del triángulo rectángulo que se está girando para formar el cono.
- **Vértice del cono:** Es el punto exterior la directriz donde coinciden todas las generatrices de la figura.
- **Altura:** Es el segmento perpendicular que une vértice y la base. Coincide con el cateto alrededor del cual rota el triángulo para generar el cono.

Actividad 3

OBJETIVO: observar de manera concreta la característica que debe tener el corte en el cono para generar la circunferencia.

- **Tiempo:** 20 minutos.
- **Trabajo individual.**
- **Socialización:** 4 estudiantes.

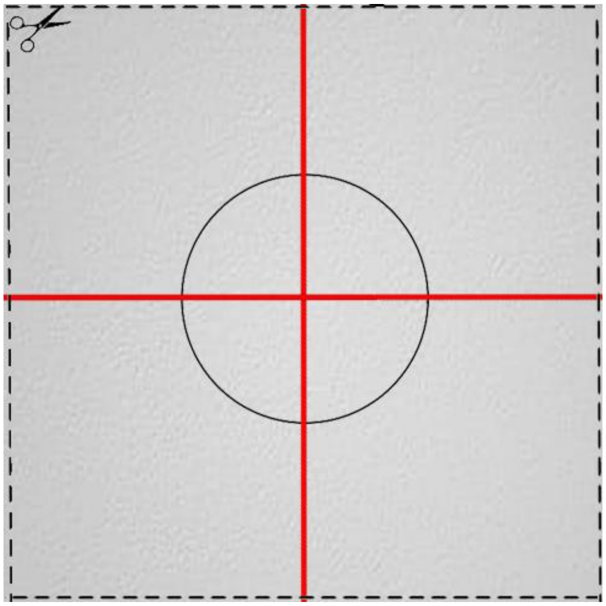


Imagen 1

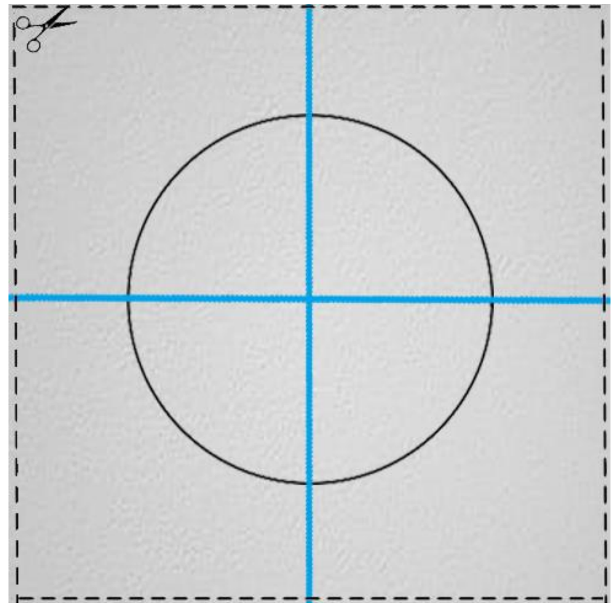


Imagen 2

Recorta la imagen 1 y 2, luego representa la situación que se muestra en la imagen 3 y conteste las siguientes preguntas:

Imagen 3

Nota: El cuadrado representa un plano cortando al cono.

Preguntas:

- ¿Qué entiende por corte trasversal?
- ¿Qué tipo de figura se puede obtener cortando un cono circular recto con un plano en forma trasversal? Describir la figura obtenida.

Actividad 4

OBJETIVO: Graficar circunferencias haciendo uso del compás, con el fin reconocer sus elementos.

- **Tiempo:** 20 minutos.
- **Trabajo individual.**

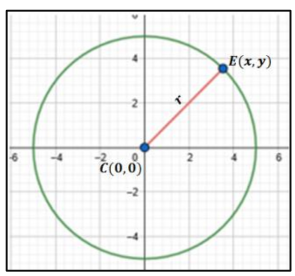
- **Socialización:** 4 estudiantes.

En tu cuaderno, dibuja un plano cartesiano y grafica las siguientes circunferencias:

- Centro $A(0,0)$ y radio $r = \ 2$.
- Centro $B(2,0)$ y radio $r = 3$.
- Centro $C(-3,2)$ y radio $r =$
- Sea $D(4,0)$ centro de la circunferencia y $E(\_,\_)$ un punto de la circunferencia. ¿Cuál es el radio $r = \_?$

ELEMENTOS DE LA CIRCUNFERENCIA

- **Centro:** es el punto fijo que se encuentra a la misma distancia (es equidistante) de todos los puntos de la circunferencia.
- **Radio:** es un segmento que une el centro con un punto de la circunferencia.
- **Cuerda:** es un segmento que une dos puntos de la circunferencia.
- **Diámetro:** es una cuerda que pasa por el centro. Su longitud es el doble de la longitud de un radio.
- **Arco:** es la parte de la circunferencia comprendida entre dos puntos.
- **Semicircunferencia:** es un arco igual a la mitad de la circunferencia.



Actividad 5

OBJETIVO: Caracterizar y establecer algunas de las propiedades generales de la circunferencia con centro en $(0,0)$.

- **Tiempo:** 20 minutos.
- **Trabajo individual.**
- **Socialización:** 4 estudiantes.

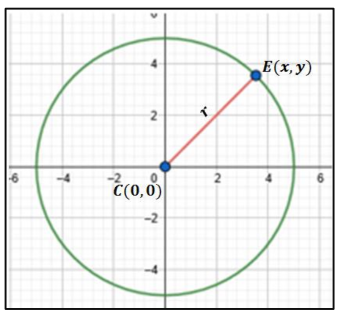
Procedimiento: **(Circunferencia con centro en $(\mathbf{0},\mathbf{0})$)**

1. Utilice el Geoplano para ubicar un punto fijo en la coordenada $(0,0)$.

2. Ubique otro punto en la coordenada $(5,0)$.
3. Amarre con un hilo o cuerda elástica los dos puntos fijos de tal manera que la distancia quede fija. La distancia de la coordenada $(0,0)$ a la coordenada $(5,0)$ se llama ***radio de la circunferencia.***
4. Calcular la longitud del radio de la circunferencia, cuyos puntos son $(0,0)$ y $(5,0)$.
5. Ubique los puntos con coordenadas $(0,-5)$ y $(0,5)$.
6. Amarre con un hilo o cuerda elástica a los dos puntos fijos de tal manera que la distancia quede fija. La distancia de la coordenada $(0,-5)$ a la coordenada $(0,5)$ se llama ***diámetro de la circunferencia.***
7. Hallar el diámetro de la circunferencia, cuyos puntos son $(0,-5)$ y $(0,5)$.
8. Coloque alrededor del centro un total de 10 pins de forma aleatoria, conservando el radio de la circunferencia.

DEFINICIÓN DE CIRCUNFERENCIA

La circunferencia es una figura plana y cerrada que se caracteriza porque todos los puntos que la conforman se encuentran a la misma distancia del centro. Dicha distancia constante se denomina radio.



ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA CON CENTRO EN (0,0)

Veamos un ejemplo:

Encuentra la ecuación general de una ciercunferencia con centro en el origen $C(0,0)$.y que pasa por el punto $P(4,2)$.

Se calcula el radio usando la formula de la distancia entre dos puntos:

$$r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$r=\sqrt{(4-0)^2+(2-0)^2}$$
$$r=\sqrt{(4)^2+(2)^2}$$

$$r = \sqrt{16+4}$$
$$r = \sqrt{20}$$

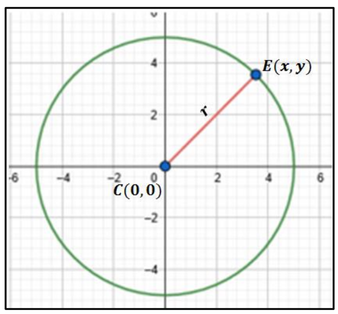
En la ecuación se necesita el valor r^2, no es necesario calcular la raiz cuadrada.

Así que la ecuación general dela circunferencia es:

$$x^2 + y^2 = (\sqrt{20})^2$$
$$x^2 + y^2 = 20$$

Ahora vamos a deducir la ecuación de una circunferencia a partir de su definición.

Para determinar la ecuación de una circunferencia con **centro en $\boldsymbol{C(0,0)}$** y **radio $\boldsymbol{r}$**, procedemos de la siguiente manera:



1. Tomamos un punto $P(x,y)$cualquiera de la circunferencia.
2. Por definición de circunferencia sabemos que la distancia de cualquier punto al centro es el radio y teniendo el centro $\boldsymbol{C(0,0)}$ de la circunferencia tenemos que:
3. $d = |\overline{CP}| = r$, el radio $\boldsymbol{r}$ equivale al valor de la distancia entre el centro y el punto P.
4. $\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = r$, si elevamos al cuadrado a ambos lados de la igualdad obtenemos:

$$\boldsymbol{r^2 = x^2 + y^2}$$

Ecuación canónica de la circunferencia con centro en (0,0).

Actividad 6

OBJETIVO: Caracterizar y establecer algunas de las propiedades generales de la circunferencia con centro en (h,k).

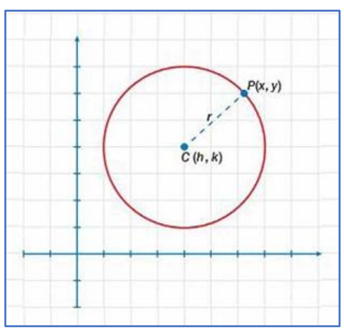
La notación (h, k) es utilizada para dar las coordenadas de la abscisa y la ordenada del centro de la circunferencia, el valor de $\boldsymbol{x}$ se relaciona con $\boldsymbol{h}$ y el valor de $\boldsymbol{y}$ se relaciona con $\boldsymbol{k}$.

Procedimiento: **(Circunferencia con centro en (h,k))**

1. Utilice el Geoplano para ubicar un punto fijo en la coordenada $(4, -3)$.
2. Ubique otro punto en la coordenada $(8, -3)$.
3. Amarre con un hilo o cuerda elástica los dos puntos fijos de tal manera que la distancia quede fija. La distancia de la coordenada $(4, -3)$ a la coordenada $(8, -3)$ se llama ***radio de la circunferencia.***
4. Calcular la longitud del radio de la circunferencia, cuyos puntos son $(4, -3)$ y $(8, -3)$.
5. Ubique los puntos con coordenadas $(4,1)$ y $(4, -7)$.
6. Amarre con un hilo o cuerda elástica los dos puntos fijos de tal manera que la distancia quede fija. La distancia de la coordenada $(4,1)$ a la coordenada $(4, -7)$ se llama ***diámetro de la circunferencia.***
7. Hallar el diámetro de la circunferencia, cuyos puntos son $(4,1)$ y $(4, -7)$.
8. Coloque alrededor del centro un total de 10 pins de forma aleatoria, conservando el radio de la circunferencia.

ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA CON CENTRO EN (0,0)

De igual manera procedemos para determinar la ecuación de una circunferencia con centro en $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$y radio $\boldsymbol{r}$, procedemos de la siguiente manera:



1. Tomamos un punto $P(x, y)$cualquiera de la circunferencia.
2. Por definición de circunferencia sabemos que la distancia de cualquier punto al centro es el radio y teniendo el centro $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$ de la circunferencia tenemos que:
3. $d = |\overline{CP}| = r$, el radio $\boldsymbol{r}$ equivale al valor de la distancia entre el centro y el punto P.

5. $\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$ si elevamos al cuadrado a ambos lados de la igualdad obtenemos:

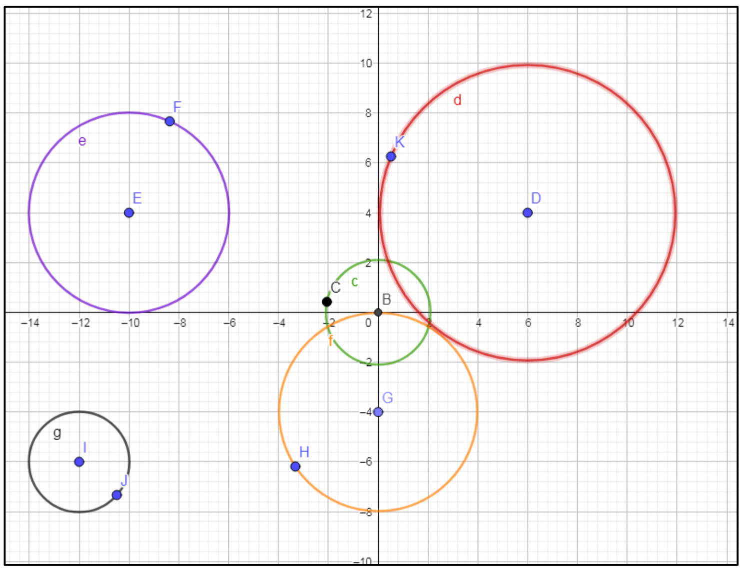
$$\boldsymbol{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2}$$

Ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en (h,k).

OBJETIVO: Resolver ejercicios que requieren la aplicación de la fórmula de la circunferencia.

Ejercicios:

1. Escriba la ecuación correspondiente para cada uno de las circunferencias que se muestran en la imagen.



2. Escribir la ecuación de la circunferencia de centro $C\ (-3,-5)$ y radio 7.
3. Los extremos de un diámetro de una circunferencia son los puntos $A(2,3)$ y $B(-4,5)$. Hallar la ecuación de la curva.

MUNICIPIO DE POPAYÁN
SECRETARIA DE EDUCACIÓN MUNICIPAL
INSTITUCIÓN EDUCATIVA ANTONIO GARCÍA PAREDES
DANE 119001002195 - NIT 800247992-4

CODIGO	**VERSIÓN**	**FECHA**

GUIA DIDACTICA PARA LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE: CIRCUNFERENCIA

ÁREA: MATEMÁTICAS	**ASIGNATURA: GEOMETRÍA**	**GRADO: DÉCIMO**	**AÑO LECTIVO: 2021**	**GUÍA N°7**
NOMBRE DEL DOCENTE: CONSUELO SAMBONI – ELMER SAMBONI				
NOMBRE DEL ESTUDIANTE:				

Estimados estudiantes de grado decimo, bienvenidos a la asignatura de Geometría.

Somos Consuelo Samboni Piamba-Elmer Samboni Piamba estudiantes de la universidad del Cauca, en este corto tiempo haremos parte del grupo de apoyo y seremos sus orientadores en el área de matemáticas durante el periodo 2021.

Leer detenidamente cada parte de la guía será vital para desarrollar cada una de las actividades propuestas. Recuerden, cada asignatura, ayuda a prepararnos académicamente para las etapas posteriores de la vida, pero también nos ayuda a ser ciudadanos con ganas de ser cada vez mejores, buscar retos y lograr vencerlos y sobre todo aprender de ellos.

"No te preocupes por los fracasos, preocúpate por las oportunidades que pierdes cuando ni siquiera lo intentas."
Jack Canfield

consuelosam@unicauca.edu.co - elmers@unicauca.edu.co 3206340260 - 3216459126

Eje temático	**Tema**	**Materiales**	**Preguntas esenciales**	**Objetivo de la guía**
Geometría Analítica.	Parábola.	-Papel (cuaderno -cartulina). -Lápiz. -Colores. -Tijeras. -compás. -Regla. -Graduador. -Calculadora. -Geoplano.	¿Qué le pareció a usted trabajar con materiales manipulables? ¿Cuál fue para usted el aporte para su vida académica y personal?	-Conocer la definición de la parábola. -Identificar los elementos de la parábola.

		-Pins. -Hilo.		-Deducir la ecuación de la parábola en el plano cartesiano.

Descripción de la guía:

En estudios previos el estudiante conoció dos líneas: la línea recta y la circunferencia. Las dos líneas en cierta parte ya han sido estudiadas desde el punto de vista analítico. Ahora comenzamos el estudio de ciertas curvas planas no incluidas, en un curso de Geometría elemental. Empezaremos con la curva conocida con el nombre de parábola.
En esta guía se deducirá la ecuación de la parábola a partir de su definición. Para ello, se han planteado una serie de actividades que involucran objetos manipulables, así como en las guías anteriores. Además, estas actividades tienen objetivos particulares en caminados a reunir características y elementos necesarios para deducir la ecuación de una parábola y finalmente se proponen algunos ejercicios para que el estudiante aplique lo aprendido en la resolución de los mismos.

ACTIVIDAD INICIAL

Actividad 1

OBJETIVO: conocer las ideas que expresa el estudiante y mejorar el nivel de percepción de los estudiantes sobre los conceptos que se van a estudiar.

- **Tiempo:** 10 minutos.
- **Trabajo individual.**
- **Socialización:** 4 estudiantes.

Observa las construcciones que se presentan en la imagen que sigue y responda:

Pregunta para interesar

- ¿Cuáles de estas construcciones reconoce?
  ____
  ____

Pregunta diagnostica

- ¿Qué sabe o ha escuchado de estas construcciones?
  ____
  ____
- ¿Qué figuras geométricas identificas?
  ____
  ____

Actividad 2

OBJETIVO: observar de manera concreta la característica que debe tener el corte en el cono para generar la parábola.

- **Tiempo:** 20 minutos.
- **Trabajo individual.**
- **Socialización:** 4 estudiantes.

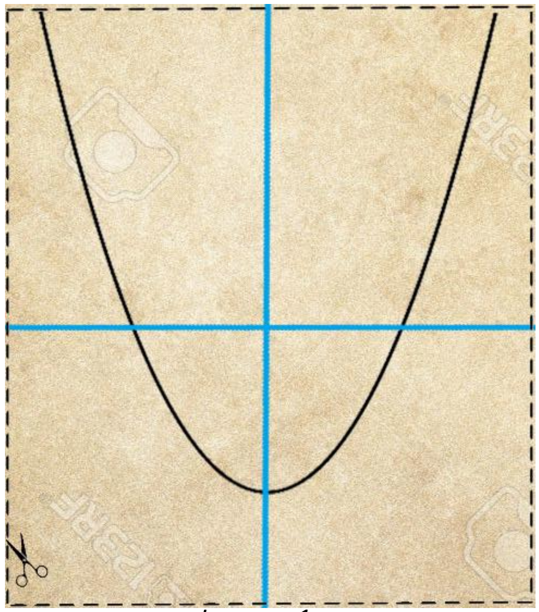


Imagen 1

Recorta la imagen 1 y representa la situación que se muestra en la imagen 2.

Imagen 2

Nota: El rectángulo representa un plano cortando al cono.

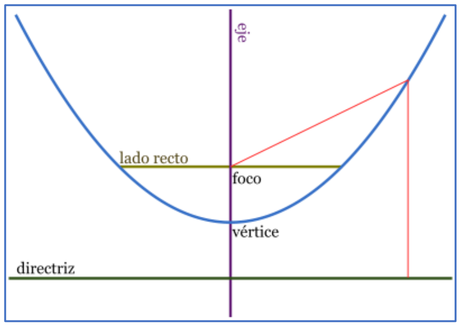
Preguntas:

- ¡Recuerdas! ¿Cómo era un corte oblicuo?
- ¿Qué tipo de figura se puede obtener cortando un cono circular recto con un plano en forma oblicua? Describir la figura obtenida.

ELEMENTOS DE LA PARÁBOLA

- **Eje y vértice:** la recta perpendicular a la directriz y que pasa por el foco es el eje de la parábola. Este eje corta a la parábola en un único punto llamado vértice.

- **Foco:** es un punto fijo que se denota por F y esta sobre el eje.
- **Directriz:** es una recta fija que no pasa por el foco y es perpendicular al eje. Se denota por d.
- **Cuerda focal:** es un segmento que une dos puntos de la parábola y que pasa por el foco.
- **Lado recto:** es una cuerda focal perpendicular al eje.



Actividad 3

OBJETIVO: graficar parábolas con el fin reconocer cada uno de sus elementos.

- **Tiempo:** 20 minutos.
- **Trabajo individual.**
- **Socialización:** 4 estudiantes.

En tu cuaderno, dibuja un plano cartesiano y grafica las siguientes parábolas:

- Vértice $A(0,0)$, Foco $(0,-3)$ y eje $x=0$. ¿Cuál será la ecuación de la directriz?
- Vértice $A(2,4)$, directriz $x=-2$ y eje $y=4$. ¿Cuál es la coordenada del foco?

Actividad 4

OBJETIVO: Primera aproximación a la parábola a partir de la construcción con hilo en el geoplano.

- **Tiempo:** 20 minutos.
- **Trabajo individual.**
- **Socialización:** 4 estudiantes.

Procedimiento: (Parábola *con vértice en el origen (0,0) y eje un eje coordenado)*

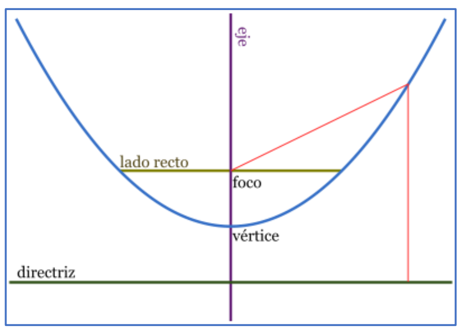
1. Trazar en el geoplano el eje X y el eje Y.
2. Ubicar con pins las siguientes coordenada $(0,-5),(1,-4),(2,-3),(3,-2),(4,-1),(5,0),(6,1),(7,2),(8,3),(9,4)\ y\ (10,5)$, de

igual manera las coordenadas $(-1,-4),(-2,-3),(-3,-2),(-4,-1),\ (-5,0),$ $(-6,1),(-7,2),(-8,3),(-9,4)y\ (-10,5)$.

3. Atar un extremo del hilo al último pin de uno de los segmentos y pásalo por el primer pin del segmento contrario, luego por el penúltimo pin del primer segmento y seguidamente por el segundo pin del segmento contrario. Así sucesivamente hasta completar todos los pins.
4. En este caso el eje Y coincide con el ***eje de la parábola.***
5. Ubicar dos pins en las coordenadas $(10,-5)y\ (-10,-5)$. La recta que pasa por estos puntos se conoce como ***directriz.***
6. Ubicar con un pin la coordenada $(0{,}0)$ que representa el ***vértice*** de la parábola.
7. Ubicar un pin en la coordenada $(0,5)$ que representa el ***foco*** de la parábola.
8. ¿Qué relación existe entre el vértice- foco y el vértice-directriz?
9. Atar un hilo en los pins $(10,5)\ y\ (-10,5)$, esta recta se conoce como ***lado recto.***

Definición de la parábola

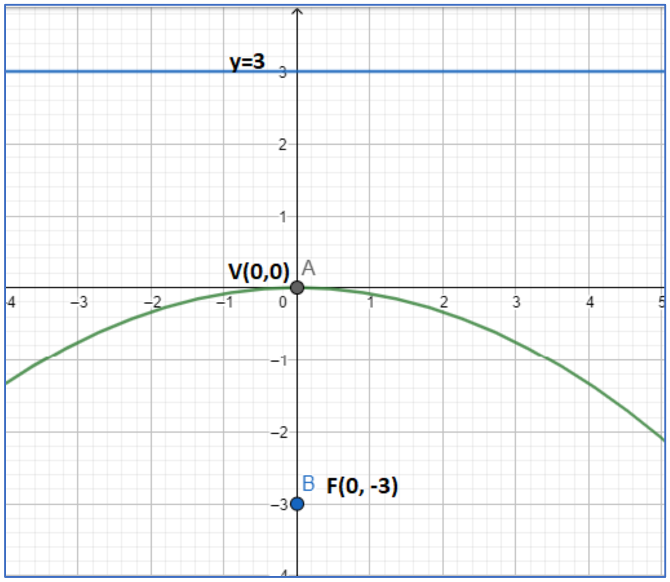
Una parábola es el conjunto de puntos del plano tales que sus distancias a una recta fija que llamaremos ***directriz*** y aun punto fijo que llamaremos ***foco*** son iguales.



Dedución de la ecuación de una parábola con vértice en $\boldsymbol{C}(\mathbf{0},\mathbf{0})$, eje un eje coordenado, su foco y su directriz.

Veamos un ejemplo:

Halle la ecuación de la parábola de vertice en le origen y el $F(0,-3)$.



$P = -3$

Ecuación:

$$x^2 = 4py$$
$$x^2 = 4(-3)y$$
$$x^2 = -12y$$

Por lo tanto, la ecuación de la parábola es:

$$x^2 = -12y$$

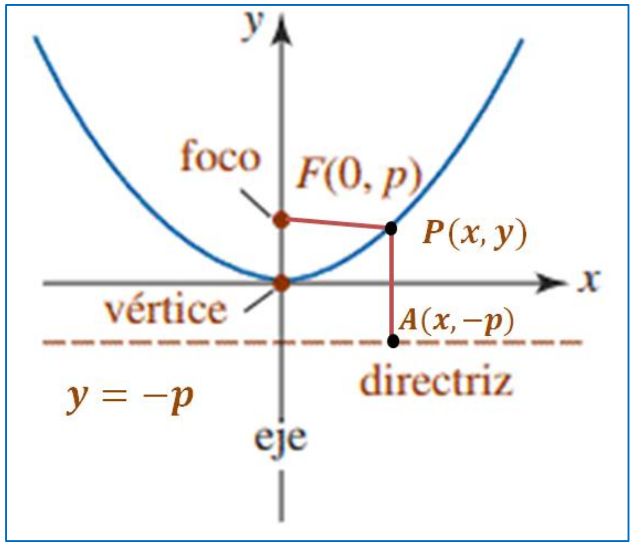
OBJETIVO: deducir la ecuación de una parábola.

Ahora vamos a deducir la ecuación de la parábola a partir de su defición.

Si consideramos solamente las parábolas que abren hacia arriba o hacia abajo entonces la directriz sera una recta horizontal de la forma $\boldsymbol{y = c}$, con $c \in \mathbb{R}$.

Digamos que:

Vertice: $\boldsymbol{V(0,0)}$
Eje de la parábola: $\boldsymbol{eje\ y}$
Directriz: $\boldsymbol{y = c}$
Foco: $\boldsymbol{F(0,p)}$
$\boldsymbol{P(x_0, y_0)}$ es cualquier punto en la parábola.



Cualquier punto, $\boldsymbol{P(x_0, y_0)}$ en la parábola satisface la definicion de parábola, asi que hay dos distancias para calcular:

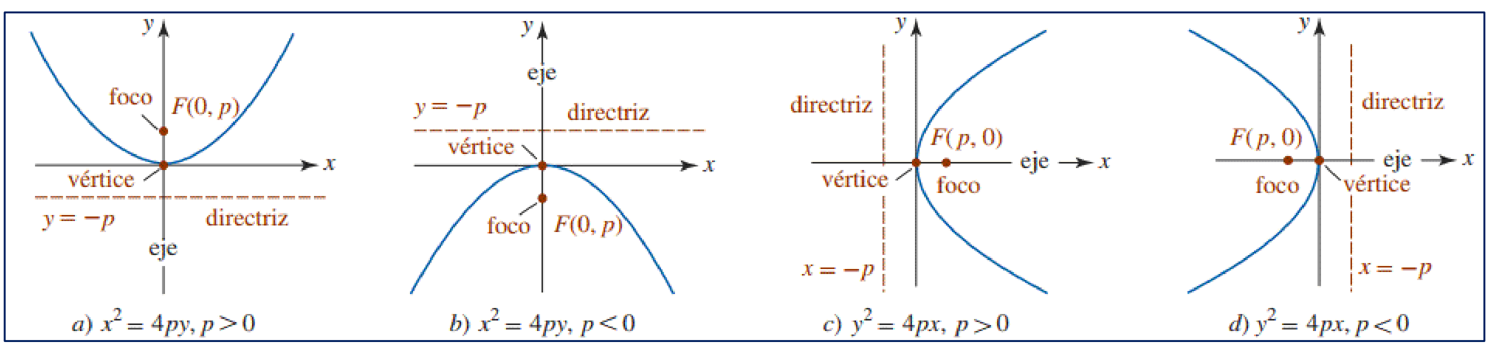
1. Distancia entre el punto en la parábola al foco.
2. Distancia entre el punto en la parábola a la directriz.

Para deducir la ecuación de la parábola, se aplica la ecuación de distancia entre dos puntos, para ello se iguala las dos expresiones anteriores es decir:

- $|\overline{PF}| = |\overline{PA}|$.
- $\sqrt{(0-x)^2 + (p-y)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (-p-y)^2}$ sustituimos en la formula de la distancia.
- $(\sqrt{(0-x)^2 + (p-y)^2})^2 = (\sqrt{(x-x)^2 + (-p-y)^2})^2$ sí elevamos al cuadrado a ambos lados de la igualdad obtenemos:
- $(0-x)^2 + (p-y)^2 = (x-x)^2 + (-p-y)^2$
- $x^2 + p^2 - 2py + y^2 = p^2 + 2py + y^2$ desarrollamos cada uno de los binomios al cuadrado.
- $x^2 + p^2 + y^2 - p^2 - y^2 = 2py + 2py$ organizamos términos semejantes y realizamos operaciones aritméticas y obtenemos:

$$\boxed{x^2 = 4py}$$

Otros casos:



Nota: Cuando $p = 0$ no hay lugar geométrico.

Actividad 5

OBJETIVO: establecer la ecuación de la una parábola con vértice en un punto (h, k)

La notación (h, k) es utilizada para dar las coordenadas de la abscisa y la ordenada del centro de la circunferencia, el valor de $\boldsymbol{x}$ se relaciona con $\boldsymbol{h}$ y el valor de $\boldsymbol{y}$ se relaciona con $\boldsymbol{k}$.

Conservar la gráfica de la actividad anterior para realizar la siguiente actividad.

Procedimiento: (*Parábola con vértice en (h,k) y eje paralelo a un eje coordenado)*

1. Mover el eje $\boldsymbol{X}$ 10 unidades hacia abajo y el eje $\boldsymbol{Y}$ 10 unidades a la izquierda respectivamente.
2. ¿Cuál es la coordenada donde ahora se encuentra el vértice y el foco?
3. ¿Cuál es la ecuación de la recta que representa la directriz?
4. ¿Cuál es la ecuación de la recta que representa el eje de la parábola?
5. ¿Qué pasa con la relación entre el vértice- foco y la directriz?
6. ¿Qué conclusión puedes dar de la gráfica respecto a la anterior?

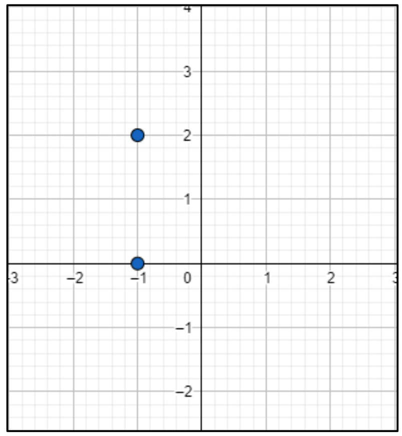
Veamos un ejemplo:

Las ecuaciones de una parábola con vértice en (h, k) son:

- Si es horizontal: $(y - k)^2 = 4p(x - h)$
- Si es vertical: $(x - h)^2 = 4p(y - k)$

En primer lugar, represento en la gráfica los puntos del vértice y del foco.

- $V(-1{,}0)$
- $F(-1{,}2)$



Puedo comprobar que el foco está situado en la vertical del vértice, por lo tanto, ya sé que se trata de una parábola vertical y que la ecuación que le va a corresponder es del tipo $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

El valor de p es la distancia que hay entre el vértice y el foco. La distancia que hay es de 2 unidades y como se mueve hacia arriba, en el sentido positivo del eje y su signo será positivo, luego $p = 2$

Ahora calculo el lado recto de la parábola, para saber cuánto abre. El lado recto es el valor absoluto de $4p$.

Lado recto: $LR = |4p| = |4 * 2| = |8| = 8$

El lado recto tiene un valor de 8 unidades. El centro del lado recto es el foco, luego se extiende 4 unidades a la derecha del foco y 4 unidades a la izquierda del foco.

Para calcular la ecuación de la parábola sustituyo los valores que he obtenido en la ecuación y tendré la ecuación de la parábola.

Parábola con vértice en (h, k) vertical: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

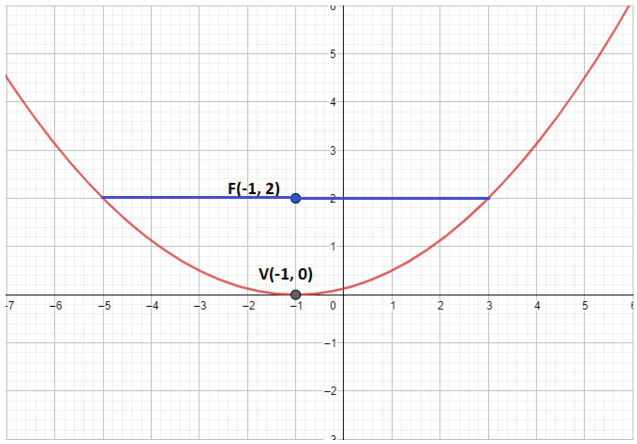
Sustituyo los datos obtenidos en la ecuación:

Parábola con vértice en $(-1{,}0)$, foco $(-1{,}2)$ y $p = 2$, vertical: $(x - (-1))^2 = 4 * 2(y - 0)$

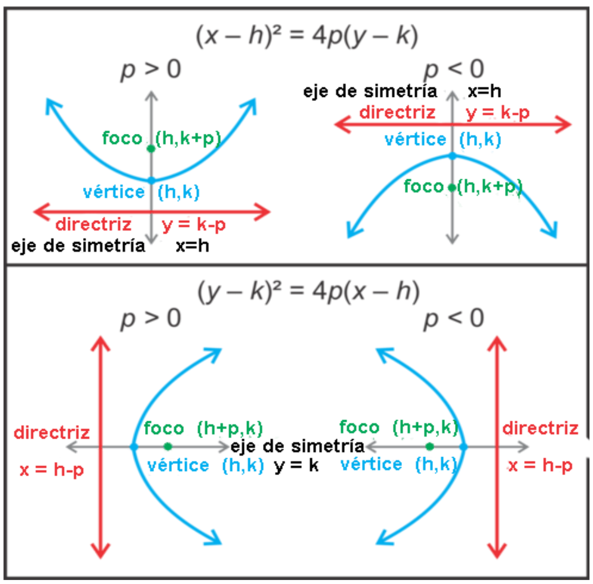
$$(x + 1) = 8y$$

Esta es la ecuación ordinaria.

Representación grafica



Otros casos



Ejercicios:

OBJETIVO: Resolver ejercicios que requieren la aplicación de la fórmula de la parábola.

Graficar y calcular el perímetro, el vértice, el foco, la directriz y el eje de simetría de las siguientes parábolas

- $x^2 = -8y$
- $x^2 - 5y = 0$
- $(y-1)^2 = 6(x+2)$
- $(x+1)^2 = 2(y+3)$
- $y^2 + 8x + 16 = 0$

	MUNICIPIO DE POPAYÁN **SECRETARIA DE EDUCACIÓN MUNICIPAL** INSTITUCIÓN EDUCATIVA ANTONIO GARCÍA PAREDES DANE 119001002195 - NIT 800247992-4			
	CODIGO	**VERSIÓN**	**FECHA**	
	GUIA DIDACTICA PARA LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE: ELIPSE			
ÁREA: MATEMÁTICAS	**ASIGNATURA: GEOMETRÍA**	**GRADO: DÉCIMO**	**AÑO LECTIVO: 2021**	**GUÍA N°8**
NOMBRE DEL DOCENTE: CONSUELO SAMBONI – ELMER SAMBONI				
NOMBRE DEL ESTUDIANTE:				

Estimados estudiantes de grado decimo, bienvenidos a la asignatura de Geometría.

Somos Consuelo Samboni Piamba-Elmer Samboni Piamba estudiantes de la universidad del Cauca, en este corto tiempo haremos parte del grupo de apoyo y seremos sus orientadores en el área de matemáticas durante el periodo 2021.

Leer detenidamente cada parte de la guía será vital para desarrollar cada una de las actividades propuestas. Recuerden, cada asignatura, ayuda a prepararnos académicamente para las etapas posteriores de la vida, pero también nos ayuda a ser ciudadanos con ganas de ser cada vez mejores, buscar retos y lograr vencerlos y sobre todo aprender de ellos.

"El hombre nunca sabe de lo que es capaz hasta que lo intenta"

Charles Dickens.

consuelosam@unicauca.edu.co - elmers@unicauca.edu.co 3206340260 - 3216459126

Eje temático	Tema	Materiales	Preguntas esenciales	Objetivo de la guía
Geometría Analítica.	Elipse.	-Papel (cuaderno-cartulina). -Lápiz. -Colores. -Tijeras. -compás. -Regla. -Graduador. -Calculadora. -Geoplano.	¿Qué le pareció a usted trabajar con materiales manipulables? ¿Cuál fue para usted el aporte para su vida académica y personal?	-Conocer la definición de la elipse. -Identificar los elementos de la elipse. -Deducir la ecuación de la elipse en el plano cartesiano.

		-Pins. -Hilo.		
Descripción de la guía: **Desde el punto de vista analítico, continuamos con el estudio de ciertas curvas planas no incluidas, en un curso de Geometría elemental. Para esta oportunidad seguimos con la curva conocida con el nombre de elipse.** **En esta guía se deducirá la ecuación de la elipse a partir de su definición. Para ello, se han planteado una serie de actividades que involucran objetos manipulables, así como en las guías anteriores. Además, estas actividades tienen objetivos particulares en caminados a reunir características y elementos necesarios para deducir la ecuación de una elipse y finalmente se proponen algunos ejercicios para que el estudiante aplique lo aprendido en la resolución de los mismos.**				

ACTIVIDAD INICIAL

Actividad 1

OBJETIVO: conocer las ideas que expresa el estudiante y mejorar el nivel de percepción de los estudiantes sobre los conceptos que se van a estudiar.

- **Tiempo:** 10 minutos.
- **Trabajo individual.**
- **Socialización:** 4 estudiantes.

Pregunta para interesar

¿Sabías que en arquitectura se utilizan con mayor frecuencia arcos con forma elíptica como los que se presentan a continuación?

Banco Comercial de Mauricio

Estadio Ciro López

Preguntas diagnosticas

- ¿Ha escuchado hablar sobre la elipse?

____
____

- ¿Puede decir de donde nace la elipse?

____
____

Pregunta de opinión

- ¿Qué te parece trabajar sobre la elipse?

____
____

Actividad 2

OBJETIVO: observar de manera concreta la característica que debe tener el corte en el cono para generar una elipse.

- **Tiempo:** 20 minutos.
- **Trabajo individual.**
- **Socialización:** 4 estudiantes.

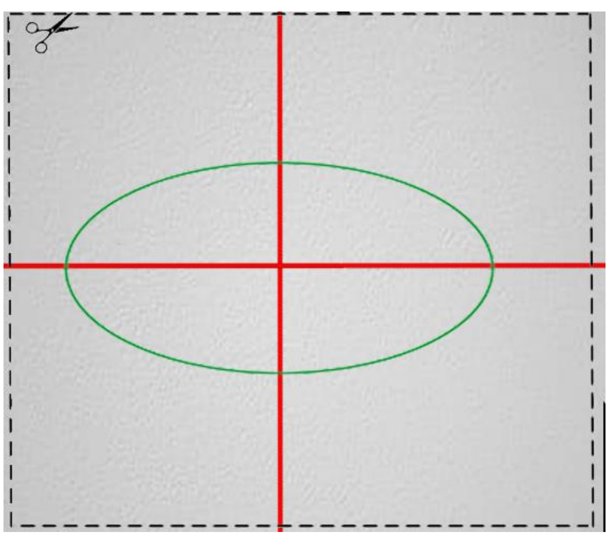


Imagen 1

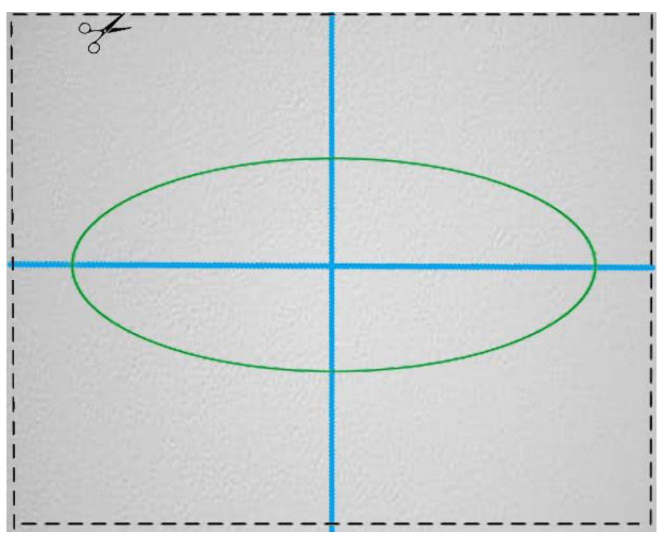


Imagen 2

Recorta la imagen 1 y 2, luego representa la situación que se muestra en la imagen 3.

Imagen 3

Nota: El cuadrado representa un plano cortando al cono.

- ¿Qué entiende por corte oblicuo?
- ¿Qué tipo de figura se puede obtener cortando un cono circular recto con un plano de forma oblicua? Describir la figura obtenida.

Actividad 3

OBJETIVO: Primera aproximación a la elipse a partir de la construcción con hilo en el geoplano. (Método del jardinero)

- **Tiempo:** 20 minutos.
- **Trabajo individual.**
- **Socialización:** 4 estudiantes.

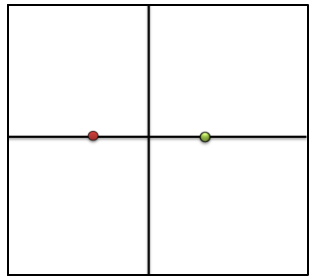
Construcción de la elipse.
Existen varios métodos de construir una elipse; en este caso veremos el método del jardinero, el cual requiere de objetos cotidianos.

Método del jardinero.
Quizá el más sencillo y antiguo, ya que fue descubierto por los hermanos Muhammad, Ahmad y al-Hasan Banú Musá ibn Shakir en el siglo IX, que lo publicaron en el libro *Kitab al-shakl al-mudawwar al-mustatil (Book on an oblong round figure).*

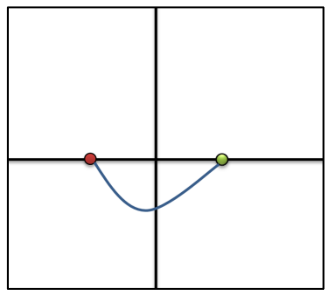
Procedimiento: **(Elipse con centro en el origen (0,0) y ejes de coordenadas los ejes de la elipse)**

1. En el centro de una hoja de block, trazar el eje X y el eje Y. La coordenada $(0,0)$ será el ***centro de la elipse.***
2. Colocar la hoja de block sobre el geoplano.

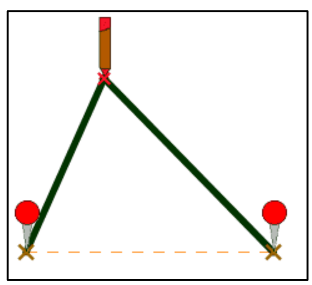
3. Colocar dos pins no muy lejanos sobre el eje X. La distancia de los pins al centro debe ser igual como se muestra en la imagen que sigue. En este caso los pins representan los ***focos* de la elipse.**



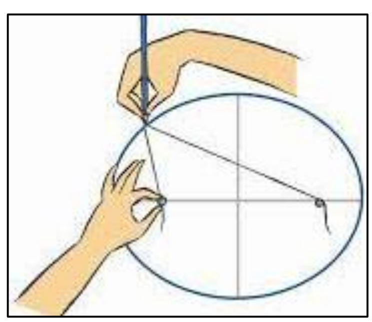
4. Atar en los pins los dos extremos de una ***cuerda*** (Hilo) no tensa, como se muestra en la imagen que sigue.



5. Colocar un lápiz sobre la cuerda de manera que esta quede tensa, como se muestra en la imagen que sigue.



6. Desplazar el lápiz por el papel, manteniendo la cuerda tensa de tal manera que se va trazando una elipse.



7. Marcar con colores los puntos donde la elipse corta al eje X. Estos reciben el nombre de **vértices.**

8. Marcar con colores el segmento que une los dos vértices sobre el eje X. Este recibe el nombre de **eje mayor.**
9. Marcar con colores los puntos donde la elipse corta al eje Y. Estos reciben el nombre de **vértices.**
10. Marcar con colores el segmento que pasa por el centro de la elipse y es perpendicular al eje mayor. Este segmento se llama **eje menor**.
11. ¿Qué conclusión puedes sacar respecto a la medida del centro a cada uno de los focos y del centro a cada uno de los vértices?
12. ¿Cuál es la medida del eje mayor y del eje menor?

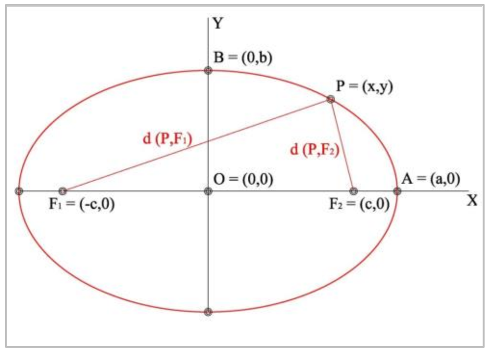
Elementos de la elipse.

Focos: son los puntos fijos. Designemos por $\boldsymbol{F}\ y\ \boldsymbol{F}'$ a los focos de una elipse.

Ejes y vértices
La recta que pasa por los focos tiene varios nombres; veremos que es conveniente introducir el término de eje focal para designar esta recta.
-eje focal: es la recta que pasa por los focos. El eje focal corta a la elipse en dos puntos, llamados **vértices**. Designemos por $\boldsymbol{V}\ y\ \boldsymbol{V}'$ a los vértices de la elipse.
-eje mayor: es el segmento que une los vértices $\boldsymbol{V}\ y\ \boldsymbol{V}'$.
La recta que pasa por el centro de la elipse y es perpendicular al eje focal tiene varios nombres; encontraremos conveniente introducir el término eje normal para designarla.
-eje normal: es la recta que es perpendicular al eje focal y pasa por el centro de los focos. El eje normal corta a la elipse en dos puntos. Designemos por $\boldsymbol{A}\ y\ \boldsymbol{A}'$ a los puntos de corte del eje normal con la elipse.
-eje menor: es el segmento que une los puntos $\boldsymbol{A}\ y\ \boldsymbol{A}'$.

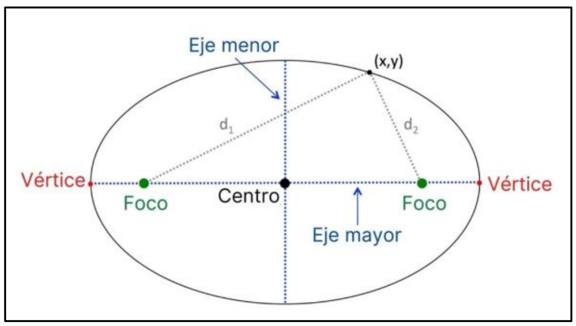
Cuerda: es un segmento que une dos puntos diferentes cualesquiera de la elipse.
Cuerda focal: es una cuerda que pasa por uno de los focos.
Lado recto: es una cuerda focal, perpendicular al eje focal.

Nota: Evidentemente como la elipse tiene dos focos, tiene también dos lados rectos.



Definición de una elipse

Una elipse es el conjunto de puntos del plano tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante mayor que la distancia entre ellos.



OBJETIVO: deducir la ecuación de una elipse.

Dedución de la ecuación de una elipse con centro $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ y focos $\boldsymbol{F_1(c,0)}$ y $\boldsymbol{F_2(-c,0)}$ con eje mayor el eje X.

Según la definición:

1. $|PF_2| + |PF_1| = k$ donde k constante.
2. $\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$ con $2a > 2c$
3. $(\sqrt{(x+c)^2+y^2})^2 = (2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2})^2$
4. $(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\left(\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right) + (x-c)^2 + y^2$
5. $x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$
6. $2cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} - 2cx$
7. $4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$
8. $\left(a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 = (a^2 - cx)^2$
9. $a^2((x-c)^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$

10. $a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$
11. $a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$
12. $a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$
13. $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$, $\quad Sea\ b^2 = a^2 - c^2$
14. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ Dividimos sobre a^2b^2, $(a, b \neq 0)$ y obtenemos:

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Esta es la ecuación ordinaria de una elipse cuyo centro está en el origen de coordenadas y sus ejes mayor y menor están sobre los ejes coordenados X e Y respectivamente.

Observacion:

- $b^2 = a^2 - c^2$
- La longitud del eje mayor es $2a$ y la del eje menor $2b$.

Veamos un ejemplo:

Encuentre vertices, focos, eje mayor, eje menor y sus longitudes para:

$9x^2 + 4y^2 = 36$

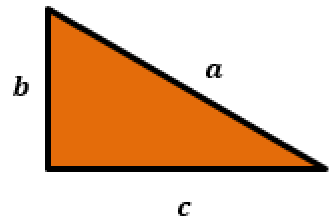
$\dfrac{9x^2 + 4y^2}{36} = \dfrac{36}{36}$

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ Ecuación ordinaria de la elipse.

$a^2 = 9$, entonces $a = 3$.
$b^2 = 4$, enconces $b = 2$

Centro: $C\ (0{,}0)$
Eje mayor: $eje\ y$
Eje menor: $eje\ x$
Longitud del eje mayor: $2a = 2(3) = 6$
Longitud del eje menor: $2b = 2(2) = 4$

Utilizando pitagoras obtenemos:



$$c^2 + b^2 = a^2$$

Luego,

$$c^2 + (2)^2 = (3)^2$$

$$c^2 + 4 = 9$$
$$c^2 = 9 - 4$$
$$c^2 = 5$$
$$c = \sqrt{5}$$

Focos: $F_1(0, \sqrt{5})$ y $F_2(0, -\sqrt{5})$

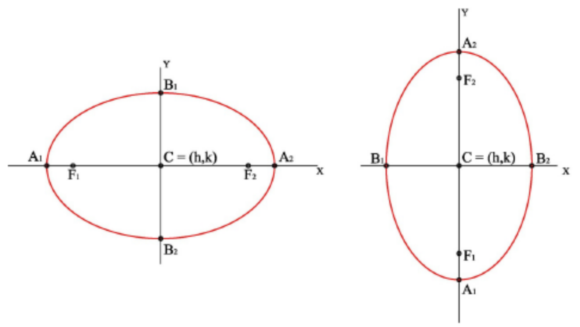
Vertices: $V_1(0, -3),\ V_2(0,3), V_3(-2,0)\ y\ V_4(2,0)$

En el caso de que la elipse tenga su centro en el punto (h, k) y sus ejes sean paralelos a los ejes de coordenadas, su ecuación es:

$$\boldsymbol{\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$

Elipse con centro en el punto (h, k) y sus ejes paralelos a los ejes de coordenadas.

A continuación, se escriben las ecuaciones y se resumen los principales elementos de una elipse de ejes paralelos a los ejes coordenados.



Elipse bien posicionada con centro en $C = (h, k)$		
Eje mayor	Horizontal	Vertical
Ecuación	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
Vértices	$A_1 = (h-a, k)$ $A_2 = (h+a, k)$ $B_1 = (h, k+b)$ $B_2 = (h, k-b)$	$A_1 = (h, k-a)$ $A_2 = (h, k+a)$ $B_1 = (h-b, k)$ $B_2 = (h+b, k)$
Focos	$F_1 = (h-c, k)$ $F_2 = (h+c, k)$	$F_1 = (h, k-c)$ $F_2 = (h, k+c)$

Ejercicios:

OBJETIVO: Resolver ejercicios que requieren la aplicación de la fórmula de la elipse.

Calcular los ejes, focos, excentricidad y representar gráficamente cada una de las siguientes elipses:

1. $2x^2 + 10y^2 = 20$
2. $50x^2 + 32y^2 = 800$
3. $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$
4. $\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$

MUNICIPIO DE POPAYÁN
SECRETARIA DE EDUCACIÓN MUNICIPAL
INSTITUCIÓN EDUCATIVA ANTONIO GARCÍA PAREDES
DANE 119001002195 - NIT 800247992-4

CODIGO	VERSIÓN	FECHA

GUIA DIDACTICA PARA LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE: LA HIPÉRBOLA.

ÁREA: MATEMÁTICAS	ASIGNATURA: GEOMETRÍA	GRADO: DÉCIMO	AÑO LECTIVO: 2021	GUÍA N°9

NOMBRE DEL DOCENTE: CONSUELO SAMBONI – ELMER SAMBONI

NOMBRE DEL ESTUDIANTE:

Estimados estudiantes de grado decimo, bienvenidos a la asignatura de Geometría.

Somos Consuelo Samboni Piamba-Elmer Samboni Piamba estudiantes de la universidad del Cauca, en este corto tiempo haremos parte del grupo de apoyo y seremos sus orientadores en el área de matemáticas durante el periodo 2021.

Leer detenidamente cada parte de la guía será vital para desarrollar cada una de las actividades propuestas. Recuerden, cada asignatura, ayuda a prepararnos académicamente para las etapas posteriores de la vida, pero también nos ayuda a ser ciudadanos con ganas de ser cada vez mejores, buscar retos y lograr vencerlos y sobre todo aprender de ellos.

"Nunca consideres el estudio como una obligación, sino como una oportunidad para penetrar en el bello y maravilloso mundo del saber." *Albert Einstein*

consuelosam@unicauca.edu.co - elmers@unicauca.edu.co **3206340260 - 3216459126**

Eje temático	Tema	Materiales	Preguntas esenciales	Objetivo de la guía
Geometría Analítica.	Hipérbola	-Papel (cuaderno-cartulina). -Lápiz. -Colores. -Tijeras. -compás. -Regla. -Graduador. -Calculadora. -Geoplano. -Pins. -Hilo.	¿Qué le pareció a usted trabajar con materiales manipulables? ¿Cuál fue para usted el aporte para su vida académica y personal?	-Conocer la definición de la hipérbola. -Identificar los elementos de la hipérbola. -Deducir la ecuación de la hipérbola en el plano cartesiano.

Descripción de la guía:

Desde el punto de vista analítico, continuamos con el estudio de ciertas curvas planas no incluidas, en un curso de Geometría elemental. Para esta oportunidad seguimos con la curva conocida con el nombre de hipérbola. En esta guía se deducirá la ecuación de la hipérbola a partir de su definición. Para ello, se han planteado una serie de actividades que involucran objetos manipulables, así como en las guías anteriores. Además, estas actividades tienen objetivos particulares en caminados a reunir características y elementos necesarios para deducir la ecuación de una hipérbola y finalmente se proponen algunos ejercicios para que el estudiante aplique lo aprendido en la resolución de los mismos.

Actividad 1

OBJETIVO: conocer las ideas que expresa el estudiante y mejorar el nivel de percepción de los estudiantes sobre los conceptos que se van a estudiar.

- **Tiempo:** 10 minutos.
- **Trabajo individual.**
- **Socialización:** 4 estudiantes.

Pregunta para interesar

La siguiente curva de la familia de las secciones cónicas que vamos a estudiar es la hipérbola. Antes de entrar en su definición, elementos y propiedades, vemos que, tal y como sucedía con la elipse, la hipérbola está también presente a nuestro alrededor.

¿Sabías que una lámpara con pantalla cónica o troncocónica, con la inclinación precisa puede proyectar en la pared, de forma muy nítida, una hipérbola como se observa en la imagen?

Pregunta diagnostica

¿Ha escuchado hablar sobre el concepto de hipérbola?

____
____

Actividad 2

OBJETIVO: Primera aproximación a la hipérbola a partir mediante doblado de papel.

- **Tiempo:** 20 minutos.
- **Trabajo individual.**
- **Socialización:** 4 estudiantes.

Se puede trazar una hipérbola mediante doblado de papel (papiroflexia), que consiste en hacer que los dobleces sean las tangentes de la curva. Veamos cómo hacerlo:

Procedimiento:

1. En una hoja de block dibujar una circunferencia. Para el caso de la elipse se marca un punto dentro de la circunferencia, en este caso lo haremos fuera de la ella.

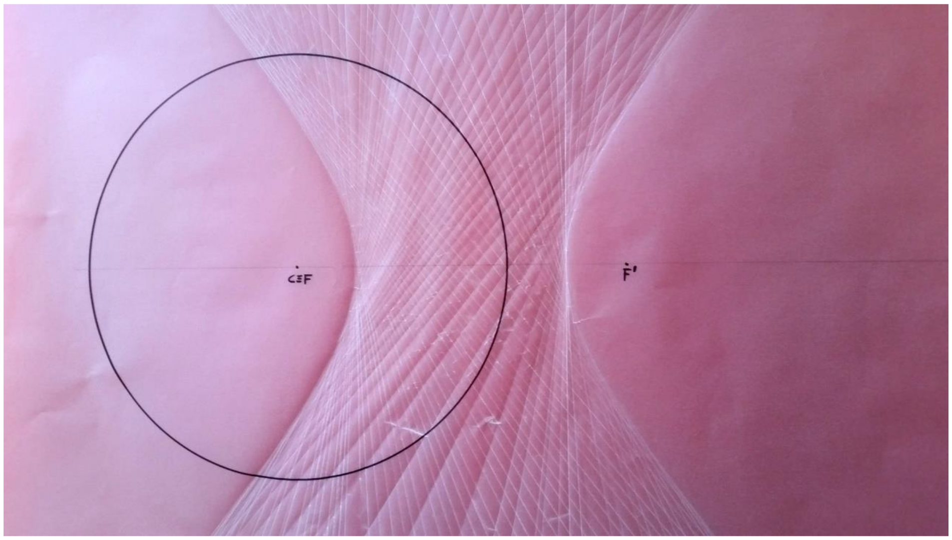
2. Comenzar a hacer dobleces al papel de manera que haga coincidir el punto que se ha señalado con la circunferencia.

3. Se marca bien el doblez y a continuación se desdobla, para seguidamente hacer coincidir nuevamente el punto sobre la circunferencia, en un lugar distinto del anterior, y se repite la operación.

4. Al desplazar el punto a lo largo de toda la circunferencia y al marcar los dobleces resultantes, se obtiene una serie de tangentes que envuelven a la hipérbola, tanto a una rama como a la otra, y que dejarán a ésta perfectamente definida en el papel.

5. La hipérbola queda generada como envolvente de las tangentes. El punto que se desplaza por la circunferencia será un foco, y el otro es el centro de la propia circunferencia.

El procedimiento descrito anteriormente se ve reflejado en la siguiente imagen:



Elementos de la elipse.

- **Vértices, ejes y centro.**

La recta que pasa por los focos corta a la hipérbola en dos puntos, llamados vértices y se llama eje principal.

El punto medio del segmento que une los vértices es el centro de la hipérbola.

El segmento que une los vértices se llama eje mayor y su medida es $2a$.

La recta que pasa por el centro y es ortogonal al eje principal de la hipérbola se llama eje secundario. Este eje no corta a la hipérbola, que tiene dos ramas, una a cada lado del eje. El segmento de medida a, mitad del eje mayor se llama semieje mayor.

- **Focos**

Son dos puntos distintos prefijados, situados sobre el eje principal, ambos a la misma distancia c del centro. Llamamos distancia focal a la distancia entre los dos focos, es decir, $2c$. Al eje principal se le llama también eje focal y al secundario, eje no focal.

- **Eje menor**

Es el segmento que une los puntos B1 y B2, obtenidos por intersección de la circunferencia de centro uno de los vértices y radio c, con el eje secundario de la hipérbola.

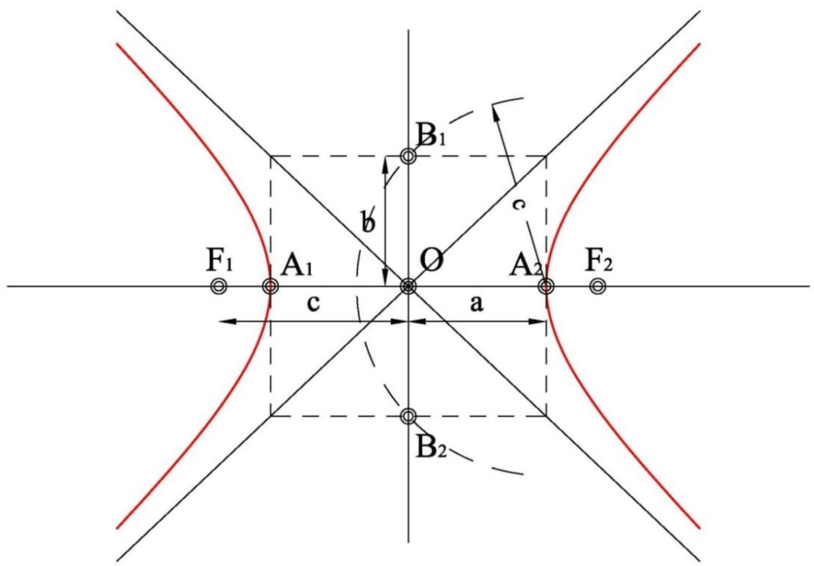
- **Asíntotas**

Son dos rectas que pasan por el centro de la hipérbola y hacia las que se aproximan progresivamente las ramas de la misma, sin llegar a tocarla.

Las ecuaciones de estas dos rectas se obtienen teniendo en cuenta que sus pendientes son $\frac{b}{a}$ y $-\frac{b}{a}$ (ver figura). Así pues, para una hipérbola cuyo centro esté en el punto (h, k) y su eje principal sea paralelo al eje X, las ecuaciones de sus asíntotas serán:

$$y - k = \frac{b}{a}(x - h)$$

$$y - k = -\frac{b}{a}(x - h)$$



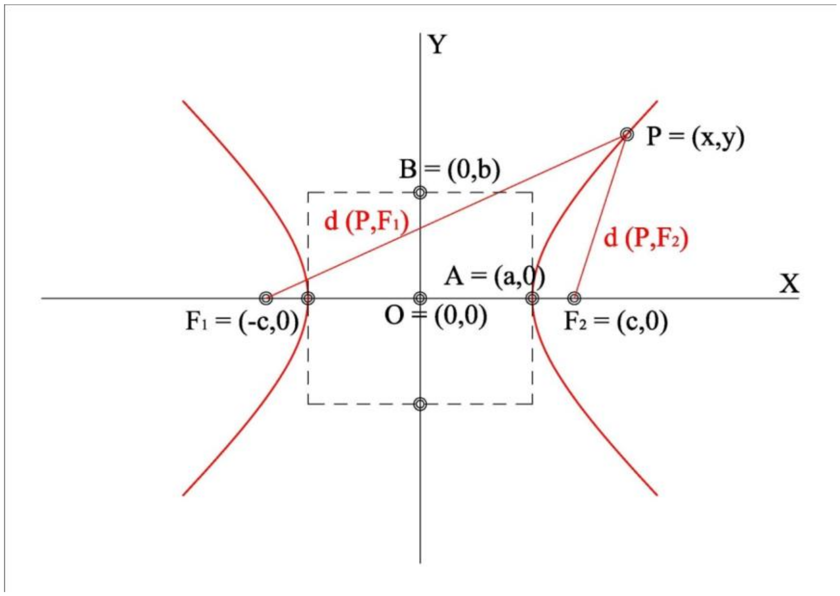
Nota: la hipérbola es una curva con dos ramas infinitas y es simétrica respecto a sus ejes.

Definición de hipérbola

Se llama hipérbola al conjunto de puntos del plano tales que, el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, prefijados llamados focos, es constante.

OBJETIVO: deducir la ecuación de una hipérbola.

ECUACIÓN ORDINARIA DE LA HIPÉRBOLA.



Determinemos la ecuación de una hipérbola cuyo centro se encuentra en el origen de coordenadas $O = (0{,}0)$, sus ejes coinciden con los ejes coordenadas y sus focos estén sobre el eje X. Sea $2c$ la distancia focal, y a y b las medidas de sus semiejes mayor y menor respectivamente.

El punto $P = (x, y)$ estará en la hipérbola si:1

$$|d(P,\ F_1) - d(P,\ F_2)| = k$$

Es decir

$$|d[(x, y), (-c, 0)] - d[(x, y), (c, 0)]| = k$$

Donde $k = constante$

Realizando esta operación con el vértice $A = (a, 0)$ obtenemos que $k = 2a$:

$$|d[(a, 0), (-c, 0)] - d[(a, 0), (c, 0)]| = |c + a - (c - a)| = 2a$$

La expresión de las distancias planteada es:

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

Pasando el segundo sumando ala derecha y elevando al cuadrado ambos términos, obtenemos la siguiente expresión:

$$(\sqrt{(x + c)^2 + y^2})^2 = (\pm 2a + \sqrt{(x - c)^2 + y^2})^2$$

Operando y reduciendo:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2+[(x-c)^2+y^2]\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Simplificando:

$$4cx-4a^2=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$cx-a^2=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Elevando de nuevo al cuadrado y operando se tiene:

$$c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4$$

$$x^2(c^2-a^2)-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

Y como $b^2=c^2-a^2$, sustituyendo en la expresión anterior obtenemos:

$$x^2b^2-a^2y^2=a^2b^2$$

Dividiendo ambos términos de la igualdad por a^2b^2 $(a,b\neq 0)$, obtenemos la ecuación reducida de una hipérbola que tiene su centro en el origen de coordenadas y sus ejes, principal y secundario, coinciden con los ejes *X* e *Y,* respectivamente.

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}}$$

Veamos un ejemplo:

Dada la ecuación $9x^2-4y^2=36$, encuentre vértices, focos, longitud del eje conjugado, longitud del eje transversal y asíntotas.

$9x^2-4y^2=36$

$\dfrac{9x^2-4y^2}{36}=\dfrac{36}{36}$

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ Ecuación ordinaria de la hipérbola.

$a^2=4$, entonces $a=2$

$b^2=9$, entonces $b=3$

Centro: $C(0,0)$

Vértices: $V_1(2,0)$, $V_2(-2,0)$, $V_3(0,3)$ y $V_4(0,-3)$

Focos:

$c^2=a^2+b^2$

$c^2 = (2)^2 + (3)^2$

$c^2 = 4 + 9$

$c^2 = 13$

$c = \sqrt{13}$

$F_1(\sqrt{13}, 0)$ y $F_2(-\sqrt{13}, 0)$

Longitud del eje conjugado: $2b = 2(3) = 6$.

Longitud del eje transversal: $2a = 2(2) = 4$.

Asíntotas:

$9x^2 - 4y^2 = 0$

$9x^2 - 4y^2 = (3x - 2y)(3x + 2y) = 0$

$(3x - 2y) = 0$

$3x - 2y = 0$

$3x = 2y$

$$\boxed{\frac{3}{2}x = y}$$

Luego:

$3x + 2y = 0$

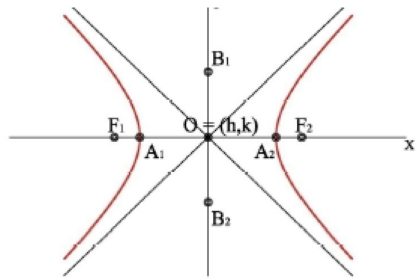
$3x = -2y$

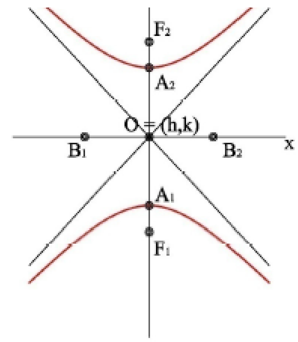
$$\boxed{-\frac{3}{2}x = y}$$

En el caso de que la hipérbola tenga su centro en el punto (h, k) y sus ejes sean paralelos a los ejes coordenados X e Y, la ecuación obtenida quedaría de esta forma:

$$\boxed{\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})^2}{\boldsymbol{a}^2} - \frac{(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k})^2}{\boldsymbol{b}^2} = \mathbf{1}}$$

A continuación, se escriben las ecuaciones y se resumen los principales elementos de una hipérbola.





Hipérbola bien posicionada con centro en $O = (h, k)$		
Eje principal	Horizontal	Vertical
Ecuación	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
Vértices	$A_1 = (h-a, k)$ $A_2 = (h+a, k)$ $B_1 = (h, k+b)$ $B_2 = (h, k-b)$	$A_1 = (h, k-a)$ $A_2 = (h, k+a)$ $B_1 = (h-b, k)$ $B_2 = (h+b, k)$
Focos	$F_1 = (h-c, k)$ $F_2 = (h+c, k)$	$F_1 = (h, k-c)$ $F_2 = (h, k+c)$
Asíntotas	$y = k \pm \frac{b}{a}(x-h)$	$y = k \pm \frac{a}{b}(x-h)$

Ejercicios:

OBJETIVO: Resolver ejercicios que requieren la aplicación de la fórmula de la hipérbola.

1. Determinar la ecuación de la hipérbola con focos en $(-1{,}2)$ y $(5{,}0)$, y vértices en $(0{,}2)$ y $(4{,}2)$. Dibujarla. Calcular sus asíntotas.
2. Halar los valores a y b de la hiperbola, sabiendo que su ecuación es $16x^2 - y^2 = 144$.