LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE ALGUNAS FUNCIONES MEDIANTE El USO DE LA TEORÍA DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

Dayanna Andrea Muñoz Burbano

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN-CAUCA

LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE ALGUNAS FUNCIONES MEDIANTE El USO DE LA TEORÍA DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

Presentado por:

Dayanna Andrea Muñoz Burbano

Directora de práctica:

Dra. Martha Lucía Bobadilla Alfaro

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN-CAUCA

Contenido

Página de aceptación

calificación 5.0

Directora: ______________________

Dr. Martha Lucía Bobadilla Alfaro

Evaluadora: Yeny Leonor Rosero R.

Mg. Yeny Leonor Rosero Rosero

Lugar y Fecha de Sustentación: Auditorio José María Otero y 14 de junio de 2023

Introducción

En la formación como Licenciados en Matemáticas de la Universidad del Cauca se incluye un ciclo de cursos correspondientes a la Práctica Pedagógica, los cuales están articulados unos a otros y distribuidos en cuatro fases: en la primera, se realiza un acercamiento a las herramientas con las cuales se va a hacer la recolección de datos; en la segunda, se hace un reconocimiento de la institución en la cual se va a realizar la docencia directa y en donde se elabora un plan de intervención con una temática determinada; en un tercer momento se hace la intervención directa en el aula por parte del practicante; el proceso culmina con la sistematización de la experiencia obteniendo como resultado el presente documento de sistematización sobre la Práctica Pedagógica.

En este documento se presentan todos los elementos requeridos para el diseño y planeación de la Práctica Docente entendida como la intervención en el escenario de Práctica Pedagógica: descripción del establecimiento educativo, la pregunta de investigación, la justificación, los objetivos planteados, los antecedentes, el marco teórico, la metodología, recuento histórico, análisis crítico y conclusiones.

La intervención se realizó en el curso de Cálculo con estudiantes de grado 11 de la Sede Manuela Beltrán, donde se trabajó con la Teoría de Registro de Representaciones Semióticas (TRRS), planteada por Raymond Duval identificando las características y propiedades de cada registro de representación semiótica, natural, grafico, tabular y de lengua natural, de las funciones lineal, cuadrática y exponencial. Cabe resaltar que en algunos ejemplos que se mencionan en el marco teórico y en algunas actividades planteadas para ser desarrolladas en el aula de clase, se hace uso del registro simbólico. Para efectos de metodología nos apoyamos en el software Geogebra y secuencias didácticas.

Al respecto conviene decir que esta teoría no se configura como una estrategia metodológica para desarrollar procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, sino como una teoría que fundamenta el análisis del pensamiento matemático desde registros de representación semiótica al análisis del funcionamiento cognitivo del pensamiento en matemáticas. El uso de esta teoría, planteada por Duval, R. para el análisis de registros, sugiere mostrar las actividades cognitivas: tratamiento y conversión, como transformaciones de registros y no como actividades que realizan los estudiantes. En este sentido, es claro que el trabajo mediante diferentes representaciones semióticas es viable para desarrollar las actividades cognitivas de tratamiento y conversión, pero estas se examinan en los propios registros de representación.

Ahora bien, las secuencias didácticas permitieron una evaluación de inicio, desarrollo y cierre: la evaluación diagnóstica sirvió para definir los conocimientos previos de las estudiantes, sus competencias con respecto al currículo que se pretendía desarrollar y sus necesidades; la evaluación formativa durante el desarrollo tuvo por finalidad promover la participación de las estudiantes, entregándoles información que permitía retroalimentar su desempeño durante el proceso de aprendizaje; la evaluación al cierre tuvo por finalidad entregar información sobre los logros alcanzados por las estudiantes finalizada cada secuencia.

1. Presentación

1.1 Descripción del establecimiento educativo

La Práctica Docente se llevó a cabo en la sede Manuela Beltrán de la Institución Educativa Técnica Tomas Cipriano de Mosquera, ubicada en la calle 11 No. 21-00 barrio Retiro Alto. Es una entidad oficial de calendario A, de carácter femenino con jornadas mañana y tarde en los niveles de preescolar, básico y medio. Su modelo metodológico es tradicional.

> El modelo tradicional concibe al estudiante como un ser pasivo, es decir, un receptor pasivo del conocimiento y objeto de la acción del maestro. El conocimiento se considera como algo que ya está dado y determinado por un sabedor exclusivo que es la teoría y/o el docente. (Vives, 2016, pág. 4)

Este modelo considera que el mejor método de educación es aquel en donde el profesor es el centro del proceso de enseñanza y trasmite sus conocimientos de forma directa a sus alumnos, en donde la evaluación es reproductiva y enfoca sus resultados a las calificaciones obtenidas.

Dentro de su misión, la Institución:

Tiene el compromiso vital y permanente con el desarrollo social, comunitario y humanístico basado en una educación crítica responsable y creativa, posibilitando la formación integral e impulsando el conocimiento de la ciencia, la tecnología y la cultura, puestas al servicio de la sociedad para propender por el mejoramiento de la calidad de vida individual y colectiva. (Mosquera, 2021)

Su visión es: *tratar de ser una de las mejores de Popayán, ofrecerá una educación integral con proyección a la comunidad, orientada hacia la satisfacción de las necesidades educativas de la población escolar. Se espera que sus egresadas participen y aporten positivamente en procesos sociales, culturales, políticos y económicos produciendo cambios en la conducción del país*. (Mosquera, 2021)

1.2 Descripción de la población

Las estudiantes de la Sede Manuela Beltrán son adolescentes procedentes de algunos barrios de la columna 7: Retiro Alto, Retiro Bajo, La Ladera, Solidaridad, Tomás Cipriano y La Campiña. La práctica docente se llevó a cabo con 21 estudiantes mujeres de grado 11°, la edad de ellas oscila entre 16-18 años y son pertenecientes a los estratos 1 y 2.

Cabe resaltar que, para el análisis se tomaron 12 de los 21 resultados y se han modificado los nombres de las estudiantes por los siguientes: Michel, Valery, María, Lina, Isabel, Lucy, Mariana, Sofía, Camila, Fernanda, Eilenn y Angie.

1.3 Temática

Se trabajó en el curso de cálculo con las funciones lineales, cuadráticas y exponenciales; haciendo énfasis en sus diferentes Representaciones. Su enseñanza se fundamentó en la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Raymond Duval. Se diseñaron e implementaron secuencias didácticas, en las cuales se propusieron actividades para ser desarrolladas mediante guías, con el uso del software Geogebra.

2. Planteamiento del problema

En el ejercicio de la educación formal en Colombia, específicamente en la básica primaria y básica secundaria, se pone a primera vista el alcance de las funciones en los procesos educativos. Las múltiples investigaciones que se han realizado alrededor de su aprendizaje permiten vislumbrar la importancia de su apropiación y aplicación en diversos contextos, tanto en la vida escolar como en el entorno cotidiano.

Es por eso que en los lineamientos curriculares del Ministerio de Educación Nacional MEN (1998) se establece que las funciones tienen un papel importante en el desarrollo del pensamiento variacional y en los sistemas algebraicos y analíticos. Las funciones tienen un amplio campo de acción puesto que: *permiten analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas.* (MEN, 1998, pág. 49).

Al respecto conviene decir que, haciendo la reflexión desde experiencias compartidas de docentes y desde una experiencia propia como estudiante en la Sede Manuela Beltrán, se pueden detectar dificultades de las estudiantes en: leer e interpretar una gráfica, pasar de una representación a otra, identificar variable dependiente e independiente, identificar si un punto pertenece o no pertenece a la gráfica, identificar intervalos y ajustar escalas, entre otras. Además, tal como lo expresan Córdoba, Díaz, Haye & Montenegro (2013, pág.4): *de entre las distintas posibilidades de representación de los conceptos referidos a las funciones en general, es tradicional que las algebraicas y las gráficas sean de las más usadas en las clases de matemática*. Es por eso que el uso de los demás registros de representación semiótica, como por ejemplo el registro de lengua natural, causa dificultad en los estudiantes ya que su uso en el aula es muy poco o se evita.

De otro lado, Ascárate & Piquet (1990) mencionan que a través del tiempo se presenta una constante: en la escuela se evidencia el interés de los maestros por mostrar la representación algebraica del concepto, dejando de lado las otras representaciones que permiten abordarlo de manera significativa para que sea aprendido por los estudiantes. Consecuencia de esta situación, es que los estudiantes, en muchos casos, solo tienen la posibilidad de repetir rutinas sobre objetos algebraicos que poco sentido tienen para ellos. Lo que lleva a vislumbrar que en los estudiantes existen dificultades para relacionar las diferentes formas de representación de una función por algunos factores como: falta de herramientas que faciliten la visualización de las gráficas correspondientes a las funciones; el desconocimiento de las representaciones de la función y, por ende, la desconexión para pasar de una representación a otra.

De hecho, esas dificultades que se dan en la educación media persisten hasta la educación universitaria. Aquellas pueden ser por un lenguaje no adecuado o por la enseñanza o transmisión de conocimiento utilizado por el docente de manera errónea, lo que lleva al estudiante a no interpretar fácilmente los planteamientos matemáticos. Hay que mencionar que la preparación y el conocimiento del docente es de suma importancia, ya que los vacíos que este pueda tener son transmitidos a sus estudiantes. Mancera & Neira (2018). Además, que el docente tiende a privilegiar el proceso matemático que el estudiante más domine o con el que se sienta más cómodo; en el caso de las funciones esto puede llevar al alumno a que no identifique los demás registros de representación, de manera que no podrá transitar fácilmente entre ellos.

Varias investigaciones apuntan a la comprensión del concepto de función desde sus diversas representaciones. En los resultados de estas investigaciones, se muestra que los estudiantes no logran establecer relaciones entre una función y estas. Por ejemplo, el paso de la representación verbal a la algebraica, o viceversa, siempre genera dificultad. En este sentido Peralta (2003) manifiesta que *las dificultades para convertir una representación en otra pueden interpretarse como resultado de una conceptualización deficiente del objeto bajo estudio.*

2.1 Pregunta de investigación

Con base en lo anterior es conveniente determinar ¿Cómo la Teoría de Registros de Representación Semiótica permite identificar el conocimiento de las funciones: lineal, cuadrática y exponencial?

3. Justificación

En el modelo de enseñanza tradicional, fundamentado sobre unas bases de trasmisión y recepción de la información y los conocimientos, se corre el peligro de que el estudiante se convierta en un receptor pasivo de contenidos, guiado por el docente, en quien recae el peso del proceso educativo. Este modelo, a pesar de su popularidad y que varias instituciones la emplean, no está libre de críticas tanto del cuerpo de docentes como de los estudiantes, así como de varios investigadores.

La Institución Educativa Técnica Tomás Cipriano de Mosquera, Sede Manuela Beltrán, emplea como modelo de enseñanza el tradicional. Los docentes afirman que bajo este modelo se han tenido buenos resultados. Sin embargo, es necesario el uso de herramientas didácticas y fundamentos teóricos que reafirmen el aprendizaje de los conceptos matemáticos.

El aprendizaje de las funciones ha sido objeto de variadas investigaciones, que tal como lo manifiesta Cano (2012) se han visto animadas por tres factores importantes: por la importancia de dicho concepto matemático, por la persistencia de serias dificultades en la comprensión de este concepto por parte de los estudiantes de educación media y por su complejidad.

Ahora bien, Duval afirma que las matemáticas se distinguen de otras áreas del conocimiento, entre otros aspectos, en que el único acceso a ellas es de naturaleza semiótica, vía la representación. Desde esta perspectiva, se postula que las representaciones en matemáticas son de naturaleza semiótica y que toda actividad matemática implica el recurso a representaciones semióticas, porque los objetos estudiados no son accesibles perceptiva o instrumentalmente, como en otros ámbitos de conocimiento científico.

Sin embargo, los docentes evidencian que los estudiantes manifiestan dificultades al relacionar las diversas representaciones semióticas de una función. Por esa razón, se hace importante la enseñanza de este concepto desde distintas perspectivas, en las cuales las estudiantes tengan la oportunidad de realizar diferentes tareas como graficar, modelar y comunicar; aunque las estudiantes, en la mayoría de los casos, prefieren trabajar con la representación gráfica y les cuesta extrapolarla a las representaciones algebraica, verbal y tabular.

Cuando a las estudiantes se les permite ver las diversas representaciones de una función, se les brindan herramientas para identificar y argumentar, no solo qué es lo que cambia sino también cómo cambia. Para lograr esto, es necesario procurar tareas de interpretación y de conversión, mediante las cuales puedan construir un aprendizaje significativo de dicho concepto.

De acuerdo con la TRRS, la manera cómo un individuo se acerca a un nuevo objeto o a la elaboración mental de su conceptualización, requiere del uso de símbolos que estimulan impulsos en el cerebro, generando conocimiento o apropiación; estos estímulos se plasman por medio de las representaciones semióticas que corresponden a formas de presentación y representación de los objetos o de los conceptos. Hacer uso de estas, ha concedido beneficios en la enseñanza y aprendizaje, porque facilita la generación de representaciones mentales, la cual se definirá en el marco teórico, del estudiante y así puede establecer el acercamiento a la concepción, mediante el uso correlacionado entre estas diversas representaciones; pues tal como lo expresa (Duval, 1999) todo conocimiento es inseparable de los fenómenos de representación.

Al lado de ello, el uso de Geogebra como recurso TIC como lo mencionan Gamboa y Prada (2018) ha producido cambios significativos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, en particular, en las funciones. Al resolver problemas relacionados con el concepto de función hacemos múltiples procesos: factorizamos, sustituimos, operamos; pero, no somos conscientes de las diversas representaciones con las que estos procesos se relacionan.

Utilizar Geogebra como recurso en este proceso, permite que los estudiantes observen diferentes representaciones de la función y reconozcan sus características. En particular con este software se obtiene, por ejemplo, la representación gráfica de la función que se desea estudiar, por lo que una buena interpretación de la imagen obtenida será un primer paso para lograr determinar las características y elementos de la función en cuestión. Esto nos invita a producir un cambio con respecto a la metodología tradicional, donde el proceso de enseñanza-aprendizaje es más más dinámico.

Al respecto conviene decir que, en las investigaciones que hay sobre la importancia del uso de las TIC en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se evidencia un interés significativo en el uso de la tecnología y particularmente en este software, en este caso particular, en la enseñanza de algunas funciones. La tecnología está a nuestra mano, por esto debemos aprovecharla al máximo y más aún en la enseñanza de las matemáticas, que es considerada como un área compleja, pero esencial para nuestras vidas. En particular, las funciones facultan a los estudiantes para abordar situaciones cotidianas de manera que las modelen e interpreten. Por ejemplo: determinar y predecir el movimiento de un objeto en el tiempo; el consumo de gasolina de acuerdo con los kilómetros recorridos y el costo de fabricación dependiendo de las unidades fabricadas, entre otros.

En la mayoría de los trabajos que se han realizado sobre la importancia del uso de Geogebra se exponen estrategias por medio de la cual se propone diseñar modelos didácticos e interactivos, incorporando este software para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje y la apropiación del concepto de función; con el objetivo de que, junto con las correspondientes características de sus representaciones semióticas, los estudiantes interpreten y analicen de una mejor forma dicho concepto. De esta manera, se proponen alternativas para contribuir con la solución del problema que, al parecer, no ha logrado resolver el método tradicional.

Es por lo anterior que, para la planeación y el desarrollo de la práctica docente, se contempló una enseñanza distinta al modelo tradicional. Una enseñanza fundamentada en los registros de representaciones semióticas de algunas funciones, apoyada en el uso de secuencias didácticas y el uso de Geogebra, para corroborar que la enseñanza de las matemáticas no se puede reducir simplemente a memorización de reglas y algoritmos.

4. Objetivos

4.1 Objetivo general

- ✓ Facilitar el conocimiento de algunas funciones mediante el uso de diferentes registros de representación semiótica.

4.2 Objetivos específicos

- ✓ Facilitar a las estudiantes la identificación de las diversas representaciones semióticas de las funciones: lineal, cuadrática y exponencial.
- ✓ Identificar qué entienden las estudiantes por función a través de sus diversas representaciones.
- ✓ Establecer con cuál de las representaciones de función las estudiantes tienen mayor familiaridad y por qué.
- ✓ Establecer las relaciones entre las diferentes representaciones de las funciones lineal, cuadrática y exponencial, y transitar entre ellas; mediante el uso de Geogebra.

5. Antecedentes

El proceso de enseñanza-aprendizaje de algunas funciones ha sido objeto de múltiples y variadas investigaciones; las cuales giran en torno a temáticas como: su construcción conceptual, sus diversas representaciones, dificultades de aprendizaje y el diseño de estrategias didácticas para su enseñanza, entre otras.

En Díaz (2008) *"El concepto de función: investigaciones y enseñanza"* se registran los resultados de una investigación documental donde se mencionan algunos trabajos que han tenido como objeto, estudiar las dificultades y errores conceptuales que tienen los estudiantes en el aprendizaje del concepto de función. Dificultades que van desde la complejidad del concepto, sus representaciones y la forma en que es enseñado, hasta su utilización en campos diferentes a la matemática; lo cual indica que la enseñanza del concepto de función ha sido abordada desde diversos enfoques, en los cuales se han identificado las dificultades por las que atraviesan los estudiantes durante el aprendizaje de dicho concepto.

De igual forma, Córdoba, Díaz, Haye & Montenegro (2013) en la investigación "*Dificultades de los alumnos para articular Representaciones Gráficas y Algebraicas de funciones lineales y cuadráticas*", realizaron un estudio de carácter exploratorio con estudiantes del primer semestre de ingeniería; con el fin de identificar las dificultades que impiden relacionar las dos representaciones. Tal es el caso de la transición del registro gráfico al algebraico, lo que representa una gran dificultad para los estudiantes convirtiéndose en un obstáculo para el aprendizaje de las funciones.

Sagñay (2017) en "*La utilización de Geogebra, como recurso didáctico en el aprendizaje de funciones, para el décimo año de la Unidad Educativa Amelia Gallegos Díaz"* expone que los temas relacionados con funciones requieren que el estudiante observe gráficos para identificar las correspondientes características de la función que representa. En el tablero no se pueden apreciar claramente estas características y es por ello que, es provechoso utilizar el software GeoGebra como recurso didáctico para el aprendizaje de las funciones. Otro punto interesante de esta investigación está relacionado con la falta de estrategias didácticas y la innovación metodológica por parte del docente, ocasionando que el estudiante demuestre poco interés por el aprendizaje matemático.

Así mismo, Buitrago (2012) menciona algunos aportes muy interesantes y significativos en el uso de las TIC para la enseñanza de las matemáticas y cómo estas herramientas tecnológicas nos pueden complementar nuestra forma de enseñar, para hacerla más dinámica y estratégica logrando que a los estudiantes se les facilite el aprendizaje de las funciones por medio del software GeoGebra.

Martínez (2013) en su trabajo *"Apropiación del concepto de función usando el software Geogebra"*, expone una estrategia por medio de la cual diseña modelos didácticos e interactivos, incorporando GeoGebra para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje y la apropiación del concepto de función; para lograr que los estudiantes interpreten y analicen de una mejor forma el término función y todas sus características. Como resultado, se obtuvo que es necesario en el proceso de enseñanza de funciones, retomar con mayor énfasis el concepto de función como relación de magnitudes o representación de una ley de variación, permitiendo romper la barrera que sesga dicho concepto a solo una imagen visual o curva generada o una expresión analítica aislada; por tal motivo, las aplicaciones y solución de las situaciones problemas planteadas en los diferentes módulos propuestos con el software Geogebra son una estrategia didáctica valiosa para tal fin.

En la investigación de Garijo (2014) *"Enseñanza de funciones y gráficas en 1º bachillerato basado en el uso de Geogebra"*, se observa la implementación y el diseño de una propuesta didáctica para enseñar funciones y graficas a los alumnos de 1° grado de bachillerato de la modalidad de ciencia y tecnología de una manera mucho más práctica y visual, basada en el uso del software GeoGebra como recurso didáctico. En esta propuesta se supone el primer cambio hacia el cambio metodológico dando respuesta a la necesidad de incorporar las TIC en el proceso de enseñanza-aprendizaje en el aula.

6. Marco Teórico

6.1 Teoría de los registros de representación semiótica de Duval

Duval (1999) define al “signo” como el objeto, fenómeno o hecho que, por una relación natural o convencional, representa o evoca otro objeto, fenómeno o hecho; precisando que su papel principal no es ponerse en lugar de objetos matemáticos, sino de proporcionar la capacidad de sustituir algunos signos por otros.

Por otra parte, la semiótica de Peirce se inserta dentro de una teoría del conocimiento. Según este filósofo norteamericano, el signo es la única vía de acceso a la realidad y nuestro conocimiento de él. Con esto, toda la atención se centra en la semiótica, lo cual da lugar a una definición triádica del signo: el signo propiamente dicho (representamen*)*; aquello que representa (objeto) y la instancia intermediaria que conecta a ambos (interpretante*)*. Cada uno de estos elementos, puede ser a su vez, un signo. Rara vez estos tipos de signos se encuentran aislados y, según Peirce, el signo más perfecto es aquel que mezcla los tres tipos.

De otro lado, un “registro” está constituido por signos que se pueden comprender como simbolizaciones, figuras, trazos, íconos, todos ellos asociados entre sí de dos maneras: internas, según el contexto y la red semántica a que pertenezca; externa, según reglas de combinaciones de signos, reglas que son propias de la red semántica en juego. Si bien coordinar y distinguir los distintos registros es inherente a las actividades del hacer matemático, las acciones y respuestas de los estudiantes no son bien elaboradas ni realizadas. Es por eso que se quiere poner en evidencia el rol que representan estos registros para el aprendizaje del concepto de función y sus aplicaciones, con el apoyo de recursos computacionales que dinamicen el trabajo del lápiz y papel.

Ahora, Alzate & Eugenio (2006) definen a las "representaciones" en función de su utilidad para la comunicación de los procedimientos realizados, estableciendo que para pensar y razonar sobre ideas matemáticas es necesario hacerse una representación interna de forma que la mente tenga posibilidad de operar con ellas. Para comunicar estas ideas es preciso representarlas externamente para que sea posible dicha comunicación.

Duval (1999) define a las "representaciones" como *"algo que se pone en lugar de otro algo"*. Menciona que las respuestas pueden ser diversas y van a depender de si se consideran las representaciones con respecto a un individuo concreto, a sus experiencias a sus estructuras mentales o a los objetos de conocimiento. Así, las representaciones pueden ser creencias, concepciones o concepciones erróneas individuales a las que cada quien accede a través de sus producciones verbales o esquemáticas.

Ahora bien, en el proceso de enseñanza-aprendizaje, en especial para las matemáticas, este autor divide a las representaciones en dos tipos: "representaciones internas" (mentales) y "representaciones externas" (visibles y observables públicamente), considerando que estas últimas son por naturaleza semióticas, ya que se producen mediante un sistema de signos y son accesibles a todos los sujetos capaces de interpretar este sistema. Refiriéndose al aprendizaje de la matemática, establece que la diversificación de representaciones semióticas de un mismo objeto aumenta la comprensión por parte de los estudiantes. Las representaciones externas: enunciados, fórmulas y gráficas, entre otros, son el medio por el cual las personas exteriorizan sus imágenes haciéndolas accesibles.

Para Duval (2012) estos dos tipos de representación se relacionan recíprocamente, sugiere que no deben ser consideradas como dominios diferentes, ya que el desarrollo de las representaciones internas, las cuales son un conjunto de imágenes y conceptualizaciones que un individuo puede tener sobre un objeto o situación, se da mediante la interiorización de las representaciones semióticas de un objeto y sus respectivas trasformaciones, incrementando de este modo en el sujeto la capacidad cognitiva y, en consecuencia, sus representaciones mentales.

En la perspectiva semiótica-cognitiva, adoptada por la TRRS, se plantea abordar los problemas de aprendizaje de las matemáticas a partir de esos distintos tipos de signos que se usan en la práctica matemática, considerándose que el modo de acceso a los objetos matemáticos, a diferencia de los objetos de otros campos de conocimiento científico, nunca puede ser directo mediante la percepción, sino haciendo uso necesariamente de las Representaciones de tales objetos. Así, en esta teoría es clave la noción de "semiótica". Según Duval (1995) se llama semiótica a la aprehensión o la producción de una representación.

El aporte de la semiótica consiste en ampliar el entorno de aprendizaje para incluir signos, símbolos y reglas establecidas como poderosas características que influyen sobre la enseñanza-aprendizaje. Perales (2006). Este abordaje se justifica porque los objetos, o conceptos matemáticos, se construyen a partir de diferentes sistemas de representación semiótica: natural, gráfico y algebraico, entre otros.

En la actualidad, el estudio de aspectos asociados con la semiótica se está desarrollando en y a partir de diversos campos y disciplinas científicas; concretamente, se ha avanzado en el estudio de los sistemas semióticos específicos de cada disciplina, reconociendo como sistema semiótico por excelencia al lenguaje natural. Duval, con su enfoque estructural-funcional, acentúa que todo comienzo en las matemáticas transita desde una adaptación paulatina e individual de sistemas semióticos de representación, para lo cual reconoce la importancia de emprender semióticamente la comunicación de las matemáticas.

Dicho lo anterior, define a las "representaciones semióticas" como el conjunto de signos que son el medio de expresión de las representaciones mentales para hacerlas visibles a otras personas.

La TRRS permite analizar las representaciones, que los alumnos y los docentes, emplean para resolver un problema. Su postura señala que es esencial para la actividad matemática que se puedan movilizar varios signos en el curso de una misma acción, o bien, que se pueda elegir un signo en vez de otro.

Este autor habla de los registros de representación y de los sistemas que las producen, los cuales determinan el contenido de la representación. Cada representación no presenta las mismas propiedades o características del objeto. Además, según la naturaleza del sistema productor de la representación, y el modo fenomenológico de producción de éstas, se habla entonces de representaciones semióticas, cuya producción es intencional, para distinguirlas de las representaciones neurales, cuya producción no es intencional sino automática, en tanto se involucran procesos motores y neuronales. Desde esta perspectiva se postula que, las representaciones en matemáticas son de naturaleza semiótica y que toda actividad matemática implica el recurso de representaciones semióticas.

En cuanto al aprendizaje la teoría es radical, plantea que cuando se le brinda al estudiante una pluralidad de representaciones del mismo objeto matemático, se están brindando mayores posibilidades de comprensión de ese objeto; pero, enfatiza también que no basta la multi-representación, es decir no es suficiente con representar de diversas maneras un objeto o concepto, si no se garantiza mediante el trabajo cognitivo, el reconocimiento del mismo en los diferentes registros.

Es claro que una multi-representación es deseable, tanto para el docente como para el estudiante, en las aulas en las que generalmente se trabaja con un modelo tradicional que todavía mantiene el esquema: definición, ejemplos y ejercicios. Cada objeto o concepto tiene su representación así que, el postular las diversas representaciones para un mismo objeto es ya importante y significativo. Lo que realmente se debe destacar, es que la variedad de representaciones en las que se puede presentar un objeto permite extraer distintas características o elementos diferenciadores del objeto que se pretende representar, o mejor, diferentes "unidades significantes", entendiéndose por unidad significante a toda unidad que depende del léxico del registro. Pero Duval (1999) va más allá, afirma que la enseñanza debe basarse y propiciar la articulación de los registros, trabajar la conversión, favorecer el tránsito entre unas y otras y, reconocer el mismo objeto en todas ellas.

Esta teoría tiene un enfoque cognitivo que, en el caso particular de la enseñanza de algunas funciones, incide favorablemente en una mejor comprensión de su naturaleza y de sus propiedades.

Los argumentos al respecto se resumen en:

- ✓ No puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto (o concepto) matemático de su representación. Las representaciones no son los objetos, pero ayudan a entenderlos. La expresión 0,25 es también 25%, también es 1⁄4, pero estamos hablando de números racionales, por ejemplo.

Pero, son sus diferentes registros de representación los que nos ayudan a entender el concepto matemático de número racional.

- ✓ Existen representaciones mentales, conjuntos de imágenes, conceptos, nociones, ideas y creencias; que cada persona puede tener sobre un objeto o situación, e incluso sobre aquello con lo cual está asociado; por lo que las representaciones son una ayuda del objeto cuando no hay un significante perceptible; dice Duval, las imágenes mentales "se la juegan" como interiorizaciones de representaciones externas y a veces como interiorización de las percepciones.
- ✓ Las representaciones semióticas son un medio del cual dispone cada individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, o sea, visibilizarlas a los demás; son importantes en la comunicación y necesarias para la propia actividad matemática.
- ✓ Las diferentes representaciones no pueden oponerse como dominios totalmente distintos, diferentes o independientes. Es la pluralidad de los Sistemas Semióticos la que permite una diversificación tal de las representaciones del objeto, que ayuda a la cognición del estudiante y, por lo tanto, de sus representaciones mentales.

6.1.1 Registros de representación semiótica.

Según Testa (2016) existen diversos registros de representación semiótica, tales son:

- ✓ *Registro de Lengua Natural (RLN):* se corresponde con la lengua materna. El registro de lengua natural permite introducir definiciones, así como hacer descripciones o designaciones.

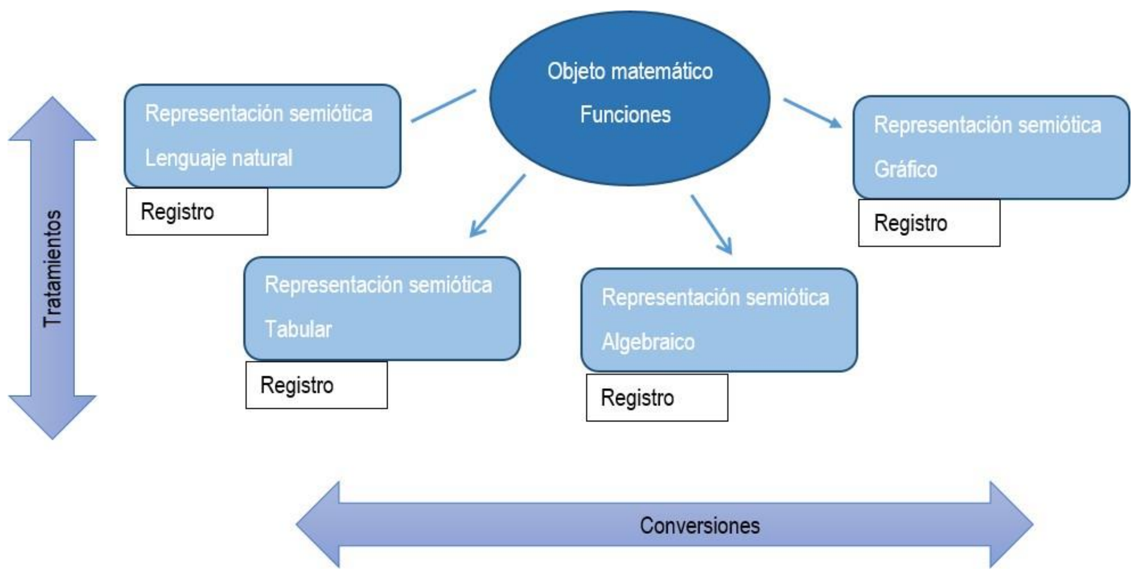
- ✓ *Registro Numérico (RN):* trata, por ejemplo, el sistema de numeración decimal, permite realizar operaciones de cálculo y aplicar propiedades como la distributiva, y conmutativa, entre otras; necesarias para la resolución de diversas tareas. Las representaciones de tipo numérico, del mismo modo que otro tipo de representación, permiten apreciar características y elementos identificados de los objetos matemáticos a los que hace referencia, así como vincularlos y relacionarlos con representaciones gráficas y geométricas.
- ✓ *Registro Tabular (RT):* facilita el estudio de los objetos matemáticos a los que representa, mediante la organización de los datos en filas y de columnas, lo que permite establecer relaciones y realizar comparaciones, por medio de una tabla o lista de pares ordenados que hace corresponder un valor de la variable x con un valor de y.
- ✓ *Registro Algebraico (RA):* registro a través del cual se pueden expresar generalizaciones y señalar características particulares del objeto que representa, por medio de una ecuación de dos variables.
- ✓ *Registro Gráfico (RGr):* engloba al plano cartesiano y sus elementos, los cuales permiten observar gráficamente una función y su relación entre variables, con puntos sobre una gráfica en un plano cartesiano en el cual los valores de x son expresados por el eje horizontal (Eje de las abscisas) y los valores de x por el eje vertical (Eje de las ordenadas).
- ✓ *Registro Simbólico (RS):* cuya representación se da en el lenguaje de Conjuntos, por lo cual se estudia desde la representación simbólica de conjuntos por extensión o comprensión.

En el desarrollo de la práctica docente se hizo énfasis en los registros: lengua natural, tabular, algebraico y gráfico. Cabe señalar que en algunos puntos de algunas secuencias didácticas se hizo uso del registro simbólico para dar explicación de la actividad que se iba a trabajar, dado que, si se hacía uso del registro algebraico en ciertos puntos, se tenía que pasar por el simbólico.

Ahora bien, en la siguiente figura, se muestra cómo se abordó el objeto matemático función.

Figura 1

Mapa mental de la TRRS



Nota. Creación propia

Es así como cada registro de representación semiótica presenta características y propiedades determinadas de un objeto matemático, el uso de unas y otras es evidencia de que el estudiante ha logrado un aprendizaje de un objeto matemático.

Veamos algunas de las características que presenta cada registro:

- ✓ *Registro de Lengua Natural (RLN):* es un tipo de registro que permite al individuo hacer descripciones, asignar características cualitativas o cuantitativas, además de marcar la pauta para dar un primer acercamiento a la definición del objeto matemático en mención. Por ejemplo: una función es una relación entre un conjunto A y un conjunto B, en donde a cada elemento del conjunto A, le corresponde uno y sólo un elemento del conjunto B.
- ✓ *Registro Algebraico (RA):* se pueden identificar algunas propiedades y elementos:
    - Relación algebraica entre las variables que intervienen
    - Dominio
    - La variable y está en función de la variable x.
    - Concavidad
    - Crecimiento y decrecimiento
- ✓ *Registro Tabular (RT):* se visualiza la relación entre dos variables, es común ordenarlas en una tabla en la que se asignen diferentes valores para cada una de ellas. Además, antes de pasar a la representación gráfica se puede hacer uso de la tabular, haciendo que el estudiante ubique de manera más rápida los puntos en el plano cartesiano. Por ejemplo, para pasar a la representación gráfica de la función cuya representación algebraica es $f(x) = (x-4)^2 + 2$ se puede hacer uso de la Tabla 1:

Tabla 1

Representación tabular de la función f(x)

x	$f(x)$
-4	66
-3	51

0	18
2	6
3	3
4	2

- ✓ *Registro Gráfico (RGr):* en este registro se pueden identificar algunos elementos y propiedades:
    - Dominio y rango.
    - Cortes con los ejes.
    - Pendiente.
    - Funciones crecientes y funciones decrecientes.
    - Punto máximo, punto mínimo y concavidad.
    - Variaciones, relaciones y tendencias entre sus variables, dependientes e independientes.
    - Las gráficas describen relaciones entre dos variables.
    - Se puede analizar cómo varía la variable dependiente y, al aumentar, o disminuir, la variable independiente x.

6.1.2 Dos tipos de transformaciones de representaciones semióticas.

En Duval (2012) a la actividad ligada a la producción de una representación se le llama "semiosis", mientras que a la aprehensión conceptual de los objetos matemáticos se le denota como "noesis". Un registro de representación debe permitir las tres actividades cognitivas ligadas a la semiosis: la formación de una representación identificable, tratamiento y conversión. La primera actividad está relacionada con la expresión de una representación mental y las otras dos actividades están relacionadas con la transformación de las representaciones en el mismo o diferente registro.

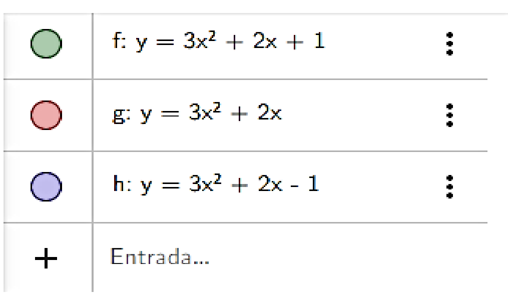
En la medida en que la actividad matemática consiste intrínsecamente en la transformación de representaciones, se hace evidente esos dos tipos de transformaciones de representaciones semióticas que son radicalmente diferentes pero que en una actividad matemática se complementan.

Por un lado, los “tratamientos” son transformaciones de representaciones que ocurren dentro del mismo registro. Por ejemplo: realizar un cálculo mientras se permanece estrictamente en el mismo sistema de notación para representar los números; resolver una ecuación o sistema de ecuaciones y completar una figura usando criterios de conectividad o simetría en el registro gráfico, entre otros. Eso da importancia al papel intrínseco de los sistemas semióticos en los procesos matemáticos. Los tratamientos que se pueden realizar dependen principalmente de las posibilidades de transformación semiótica que son específicas para el registro utilizado.

En la Figura *2* se observa un primer ejemplo de un tratamiento de la función $3x^2 + 2x + 1$.

Figura 2

Tratamiento de una función lineal en el registro de representación algebraico



Nota. Creación propia

Oro ejemplo:

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

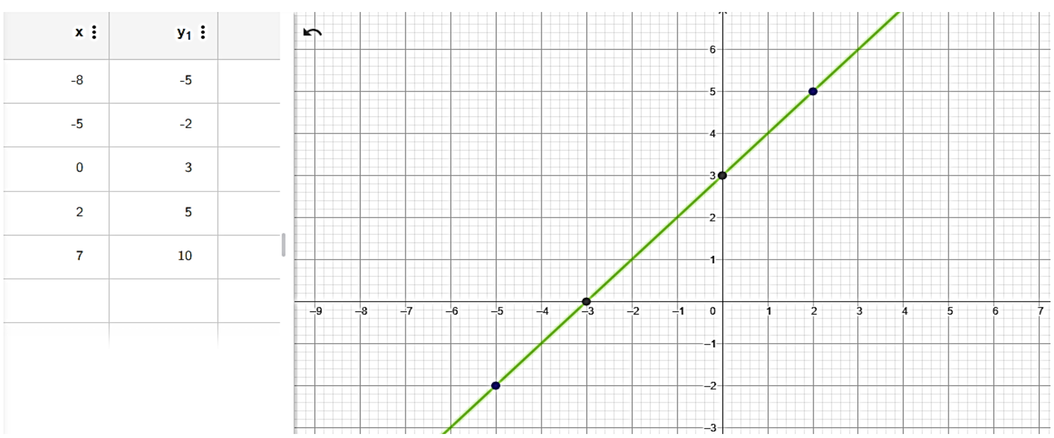
$$= (x - 1)(x - 2)$$

De otro lado, las “conversiones” son transformaciones de representación que consisten en cambiar un registro sin cambiar los objetos denotados. Por ejemplo: pasar de la representación algebraica a su representación gráfica y pasar del enunciado de una relación en lenguaje natural a su notación usando letras o símbolos, entre otros. La conversión, que es una transformación en la representación, es más compleja que el tratamiento porque cualquier cambio de registro requiere primero que entre dos representaciones, cuyos contenidos con frecuencia no tienen nada en común, se reconozca al mismo objeto representado.

A continuación, veamos un ejemplo de una conversión. En este caso se tiene una conversión de la representación tabular a la gráfica y de la algebraica a la gráfica.

Figura 3

Conversión de la representación tabular a la gráfica

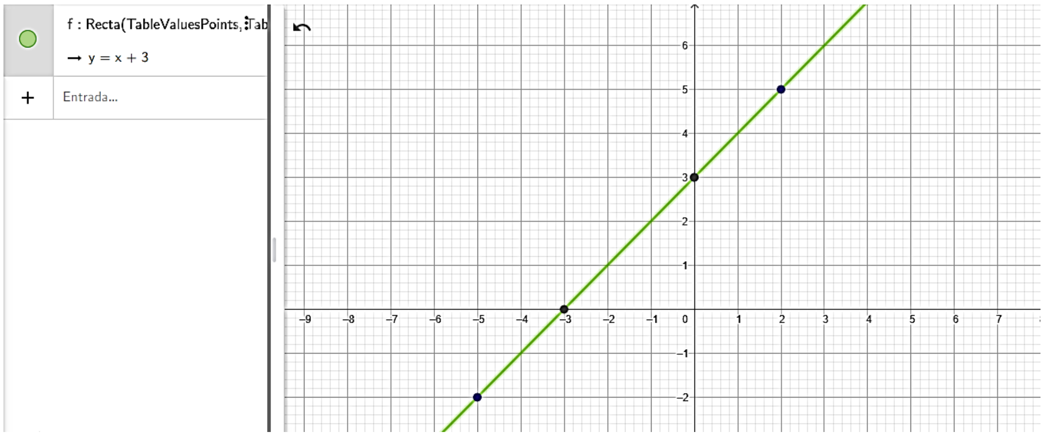


x	y_1
-8	-5
-5	-2
0	3
2	5
7	10

Nota. Creación propia

Figura 4

Conversión de la representación algebraica a la gráfica



Nota. Creación propia

6.1.2.1 Importancia de la conversión para la comprensión.

Con el contenido matemático conceptual y las representaciones semióticas, la conversión emerge como el resultado de la comprensión conceptual. A este respecto Duval (1999) postula dos requisitos de la actividad matemática:

- ✓ Las representaciones semióticas deben ser usadas necesariamente.
- ✓ Los objetos matemáticos representados nunca deben confundirse con el contenido de las representaciones semióticas utilizadas.

Por lo anterior se afirma que sin mediaciones semióticas no es posible la actividad matemática. Pero, hay que resaltar que el papel principal no es solo representar los objetos matemáticos, sino trabajar en ellos y con ellos. Por ejemplo, el papel principal del sistema de Representación de las funciones no es solo representarlas, sino poder distinguir las características y elementos que se presentan en cada una de ellas.

Por otro lado, el contenido de cada representación semiótica no depende solo de los conceptos o de los objetos representados, sino también de los sistemas semióticos de representación empleados. Y es aquí donde la mayoría de estudiantes se enfrentan con problemas, porque cambiar de un sistema a otro significa cambiar el contenido de la representación sin cambiar las propiedades matemáticas representadas. Los problemas de comprensión con los que tropiezan la mayoría de los estudiantes también son muy específicos del aprendizaje de las matemáticas, porque la transferencia de conocimientos y la comprensión siempre implican la conversión de representaciones, de hecho, el isomorfismo matemático entre dos representaciones no siempre involucra su isomorfismo cognitivo y por tanto no puede ser reconocido, fácilmente, por los estudiantes.

Es por que la comprensión no significa dar un salto desde el contenido de la representación hasta el concepto puramente matemático representado, consiste más bien, en relacionar diversos contenidos de representación del mismo concepto. Así, lo más importante para la enseñanza de las matemáticas no es la elección del mejor sistema de representación, sino lograr que los estudiantes sean capaces de relacionar diversas maneras de representar los contenidos matemáticos.

6.2 Problemas específicos a los cambios de registros

La importancia del cambio de registros es necesaria para comprender los contenidos, como en muchas disciplinas del conocimiento, esencialmente en las matemáticas, donde podemos encontrar distintas combinaciones entre ellas: frases en lengua natural, fórmulas literales, expresiones en lenguaje formal, figuras geométricas o gráficos cartesianos. Duval (1999) menciona la actividad cognitiva de conversión de las representaciones como si fuera una actividad natural o adquirida desde los primeros grados de la enseñanza por todos los estudiantes. ¿Y es cierto o no? Pero haciendo énfasis en los cambios de registros, según el autor en referencia, la actividad de conversión es menos inmediata y menos simple de lo que se cree, es decir, el pasaje de un sistema de representación a otro, o la movilización de varios sistemas de representación en el transcurso de un mismo recorrido intelectual, para nada son evidentes o espontáneos para la mayoría de los estudiantes. Esta dificultad se presenta por la no congruencia entre las distintas representaciones de un mismo objeto.

Ocurre lo contrario cuando los registros de representación, tanto el de partida como el de llegada, son congruentes, en este caso el pasaje de una representación a otra se hace de manera espontánea. Como lo mencionan Pecharroman, Arce, Conejo y Ortega (2018) esta congruencia se refiere a:

- ✓ Correspondencia semántica entre las unidades significantes que la constituyen.
- ✓ Igual orden posible de estas unidades en las dos representaciones.
- ✓ Convertir una unidad significante en la representación de partida en una sola unidad significante en la representación de llegada.

6.2.1 Representaciones congruentes.

Se llaman representaciones congruentes a aquellas representaciones que satisfacen las siguientes condiciones:

- ✓ Existe correspondencia semántica entre las unidades significantes que las constituyen.

La correspondencia semántica se da cuando a cada unidad significante simple de una representación, le es asociada una unidad significante elemental.

- ✓ Igual orden posible de aprehensión de unidades en las dos Representaciones.
- ✓ Convierte una unidad significante en la representación de partida, en una sola unidad significante en la representación de llegada.

Ejemplo:

a) Considérese la siguiente expresión en representación de lenguaje natural: *el conjunto de puntos cuya ordenada es superior a la abscisa.*

En este caso, para llevar a cabo la actividad cognitiva de conversión solo basta establecer una correspondencia término a término entre las unidades significantes respectivas, para obtener la expresión en representación simbólica: $y > x$.

b) Sea la función lineal $y = 2x$. En este caso se tiene una recta cuya pendiente es $m = 2$, indica que la curva se traza desde el tercer cuadrante al primer cuadrante. Por tanto, dada la relación existente entre la representación gráfica y el signo positivo de su pendiente, se determina que ésta es de naturaleza creciente. Ahora, supóngase que se formula una pregunta a un grupo de estudiantes, relacionada con la monotonía de la función. Por supuesto, la gran mayoría de los educandos dará una respuesta en favor de una monotonía creciente, ya que la correspondencia término a término entre las unidades significantes, así como también, la congruencia entre el esquema de la curva y a la noción intuitiva de crecimiento ligada a la postura de la curva, permiten establecer este tipo de relación.

c) La representación algebraica de la función lineal $f(x) = x$ cuya representación en el plano cartesiano es una línea recta que forma la bisectriz del tercer y primer cuadrante, es decir, es monótona creciente. Luego si se pregunta a un grupo de estudiantes sobre su monotonía, la gran mayoría respondería que se trata de una función creciente, puesto que hay una congruencia entre la representación gráfica de la función y la percepción de la noción de crecimiento asociada con el hecho de que la gráfica sube. El éxito de las respuestas se debe a que la ayuda visual de la función dibujada brinda la información correcta de la naturaleza del contenido matemático.

6.2.2 Representaciones no congruentes.

Se llaman representaciones no congruentes a aquellas que no satisfacen alguna de las condiciones ligadas a la congruencia.

Ejemplo:

a) Considérese la función dada por la ecuación $y = 2x + 5$. Si se le solicita a un grupo de estudiantes realizar la representación gráfica de dicha función a partir de la función lineal $y = 2x$, se podrá notar que dicho proceso resulta ser complejo y engorroso para algunos de ellos, dado que al sumarle 5 a la ecuación $y = 2x$, existe la tendencia a pensar que la curva representativa de la misma debe estar trasladada cinco unidades hacia la derecha del eje X y no hacia arriba, ya que los estudiantes, comúnmente, relacionan el signo + como una operación que debe efectuarse a lo largo del eje positivo de las x.

b) Si se toma la función $f(x) = x^2$ cuya representación gráfica es una parábola centrada en el origen, además es simétrica con respecto al eje Y positivo y se pide dibujar la parábola que representa la función $f(x) = (x+1)^2$, muchos estudiantes fracasan debido a que se trata de una parábola que está trasladada a la izquierda de la dada anteriormente, además la nueva función tiene un vértice de coordenadas $(-1{,}0)$. Pero como el estudiante ve el signo + de la expresión entonces piensa y dibuja la nueva parábola a la derecha de la dada.

En resumen, Duval (1999) plantea que la distribución de los aciertos y los fracasos que se observan en los cuestionarios de evaluación, permiten verificar que la congruencia o la no congruencia corresponden a factores fuertes para el acierto o el fracaso en las preguntas que implican un cambio de sistema semiótico de representación.

Según este autor, las aprehensiones de las representaciones semióticas requieren de la discriminación de unidades significativas en el registro donde se produce la representación. Esta discriminación de unidades significantes de una representación se logra por medio de la observación de las variaciones que se producen tanto en el registro de partida como en el de llegada. Los estudiantes no presentan mayor dificultad al pasar del registro algebraico de una función cualquiera al registro gráfico correspondiente, pero el paso inverso si genera cierta dificultad. En el primer caso hay reglas establecidas tanto en el registro de partida como en el de llegada, y los estudiantes fácilmente asocian una dupla de números con un punto en el plano cartesiano, pero para la conversión inversa, sólo se puede hacer con cálculos pesados para los estudiantes, por lo que se encontrarán con dificultades en el proceso.

7. Metodología

El trabajo mediante diferentes representaciones semióticas es viable para desarrollar las actividades cognitivas de tratamiento y conversión, examinándolos en los propios registros de representación de las funciones lineal, cuadrática y exponencial.

Este documento hace alusión a los diferentes registros de representación semiótica de algunas funciones, y al diseño e implementación de secuencias didácticas en las cuales se propusieron actividades para ser desarrolladas mediante con el uso del software Geogebra.

El diseño de la propuesta pedagógica está basado en el uso de diversos sistemas de representación semiótica; se hizo uso del registro del lenguaje natural para situar el objeto matemático en un contexto familiar a la alumna, se fomentó la conversión de este registro hacia el registro tabular, gráfico y algebraico, o viceversa. También, se diseñaron secuencias didácticas, en donde las estudiantes a través de la construcción de los registros: natural, tabular, gráfico y algebraico, enfatizaron e hicieron una distinción entre las diferentes maneras de representar el objeto función, ampliando la comprensión de algunas funciones y se usó Geogebra para permitir la identificación de la visualización de las representaciones gráficas de las funciones.

A continuación, se describe de manera global lo que se debía evidenciar en cada nivel de desempeño. Las actividades de evaluación y otras, fueron evaluadas con la rúbrica propuesta en la Tabla 2**:**

Tabla 2

Rúbrica

Nivel	Estudiante ubicada en este nivel	Camino de aprendizaje
Superior	En los registros de representación usados para el desarrollo de la actividad se identifica que la estudiante ha logrado la actividad cognitiva, haciendo uso de los 4 diferentes registros.	Desarrolla el camino de aprendizaje sin dificultades.
Alto	En los registros de representación usados para el desarrollo de la actividad se identifica que la estudiante ha logrado la actividad cognitiva, haciendo uso de algunos registros.	Desarrolla el camino de aprendizaje sin mayores dificultades, especialmente referidos a algunos de los registros de representación.
Básico	En los registros de representación usados para el desarrollo de la actividad se identifica que la estudiante ha logrado la actividad cognitiva, haciendo uso de los registros gráfico y algebraico.	Desarrolla el camino de aprendizaje con algunas dificultades, especialmente referidos a los registros de lengua natural y tabular.
Bajo	En los registros de representación usados para el desarrollo de la actividad se identifica que la estudiante logra la actividad cognitiva, pero solo hace uso del registro algebraico.	No desarrolla el camino de aprendizaje ya que no relaciona las diversas representaciones del mismo concepto.

Nota. Creación propia

Esta rúbrica fue para las actividades que se plantearon en cada función.

7.1 Diseño de las secuencias didácticas

La intervención en el aula se realizó mediante la aplicación de secuencias didácticas, la cual en términos de Díaz (2013), es el resultado de establecer una serie de actividades de aprendizaje que tengan un orden interno entre sí: inicio, desarrollo y cierre. En este sentido, para este trabajo se propuso partir de la consideración de los saberes previos de las estudiantes, o se dio una introducción del tema a trabajar, para luego vincular los problemas que ponen en juego dichos saberes previos. La secuencia didáctica desarrollada tuvo como finalidad, que las estudiantes representen por medio de diferentes sistemas semióticos, algunas funciones, para así lograr una comprensión más significativa de dicho eje conceptual.

Estas permitieron una evaluación de inicio, desarrollo y cierre: la evaluación diagnóstica al inicio de la secuencia didáctica sirvió para definir los conocimientos previos de las estudiantes, sus competencias con respecto al currículo que se pretendía desarrollar y sus necesidades; la evaluación formativa durante el desarrollo de la secuencia didáctica tuvo por finalidad promover la participación de las estudiantes, entregándoles información que permitía retroalimentar su desempeño durante el proceso de aprendizaje; la evaluación al cierre tuvo por finalidad entregar información sobre los logros alcanzados por las estudiantes finalizada cada secuencia.

Cabe resaltar que, en un principio se diseñó un cronograma de actividades en el que se consideraba trabajar una actividad por clase, por ejemplo, para la función lineal, como tuvo 4 secuencias didácticas, se esperaba que en 4 clases se terminaran las series de actividades planteadas, sin embargo, debido a inconvenientes que se presentaron durante la ejecución de la Práctica Docente, por ejemplo, la semana de vacaciones del mes de octubre, lunes festivos, actividades de la sede, solo se trabajaron 3, de las 4, funciones matemáticas: lineal, cuadrática y exponencial, la logarítmica no se pudo ejecutar por cuestiones de tiempo.

Durante algunas sesiones de clase se establecieron actividades de manera grupal o individual, en donde posteriormente se socializaban los resultados de las estudiantes. En las clases, en la mayoría del tiempo, se hacía uso del tablero, uso de Geogebra y acompañamiento a las estudiantes.

Veamos un ejemplo de una de las secuencias didácticas, para la función lineal (ver anexo #1):

- ✓ ***Inicio:*** se realizaron dos actividades: una actividad llamada Actividad Recta, en donde se recordaron dos fórmulas: cómo encontrar la pendiente dados dos puntos y la ecuación punto pendiente, esto porque posteriormente, en una actividad, se necesitaba hacer uso de esa fórmula y, la segunda actividad que fue la diagnóstica.
- ✓ ***Desarrollo:*** se realizó una actividad, Planes de voz, en donde se hizo uso de lo visto en las actividades de inicio.
- ✓ ***Cierre:*** se realizó una evaluación en donde se constataba si las estudiantes lograron o no el objetivo de la actividad.

Para la función cuadrática (ver anexo #2) se tuvo como inicio una introducción al tema, de manera digital, donde se indagó por aspectos como: la ubicación de cantidades enteras en el plano cartesiano; la identificación de variables dependientes e independientes y la representación de una situación de cambio por medio del registro elegido libremente por las estudiantes: tablas, gráficas o ecuaciones. Como desarrollo y cierre, se tuvieron dos actividades denominadas Actividad Integral 1 y 2; el término integral se eligió ya que, como solo se trabajaron 2 actividades, se quería reunir un poco de lo que se había leído en la introducción teórica.

Para la función exponencial (ver anexo #3), se tenían planeadas 11 secuencias didácticas, de las cuales, por cuestiones de tiempo, se ejecutaron 8. La selección de estas 8 serie de actividades fue porque eran más generales y trabajan más cosas que las otras 3.

7.2 Uso de Geogebra

Dentro de la metodología, en ciertas actividades, se hizo uso de la aplicación Geogebra, esto para permitir identificar a las estudiantes la visualización de las funciones que se estaban trabajando en ese momento. El utilizar Geogebra como recurso en el proceso enseñanza-aprendizaje, permite que observen diferentes representaciones de una función, reconociendo sus características. Una buena interpretación de la imagen obtenida sería un primer paso para lograr determinar las características y elementos de una función; era el caso de la determinación del dominio, pendiente, el rango, los ceros, vértice y su crecimiento, entre otros; la representación gráfica facilita la visualización de estos elementos.

8. Recuento histórico y análisis

Al aplicar las actividades descritas y teniendo en cuenta que el objetivo general era facilitar el aprendizaje de algunas funciones mediante el uso de la teoría de los registros de representación semiótica, se ilustran a continuación los resultados de este proceso para su respectivo análisis.

8.1 Recuento histórico y análisis de la función lineal

8.1.1 Actividad recta.

El objetivo de esta actividad era recordar e identificar algunos elementos de la recta.

En el Punto 1, Figura 5 de esta actividad, se les pedía llegar a una representación algebraica de una función dada a partir de dos puntos dados, pero, todas las estudiantes graficaron y luego utilizaron la representación algebraica para verificar que, en efecto, los puntos pertenecían a la gráfica de la función. Se pedía encontrar la ecuación punto pendiente; se daba explícitamente, un punto y el otro estaba enunciado de la forma $f(1) = 6$. Algunas estudiantes no lograron identificar el punto $(1,6)$, como ya tenían la representación gráfica, decidieron tomar otro punto cualquiera de la recta. Es decir, se logra la actividad cognitiva de transformación del registro de representación gráfica al algebraico.

Figura 5

Punto 1. Actividad Recta

1. Cálculo de una función a partir de dos puntos

Ejemplo:

Calcula la función lineal que cumple $f(3) = 5$ y pasa por el punto $(1, -1)$.

Dados dos puntos por los que pasa la función, podemos calcular la pendiente m de la función:
Dados dos puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ la pendiente m de la función se calcula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

¿Cómo saber si la función es lineal o afín? Calculamos la ecuación de la recta:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

O sea,

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

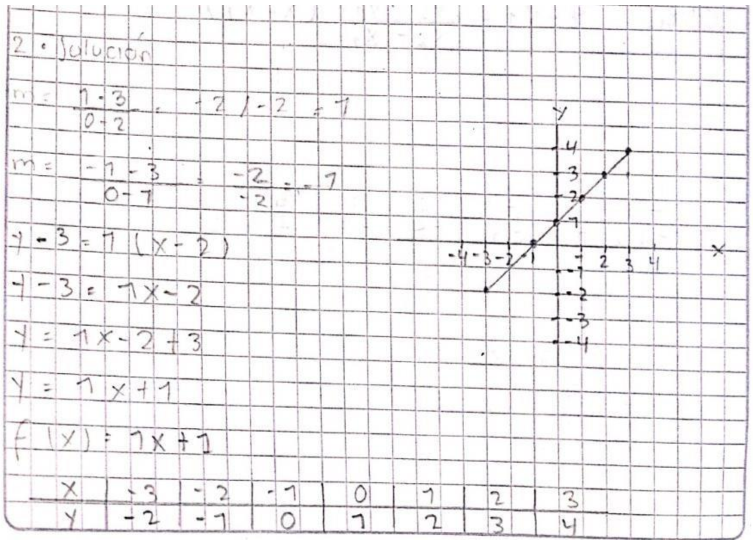
Entonces, $m = 3$.

La función es, $f(x) = 3x - 4$.

Respecto a este punto, cabe resaltar que la palabra *calcular* se refiere a hacer operaciones matemáticas necesarias para averiguar el resultado, el valor o la medida de algo en expresión numérica, por ejemplo, calcular la pendiente de la recta que representa la función y, en lo que se quería precisar era en la representación algebraica de la función a encontrar. Por lo que la expresión adecuada sería: *hallar la ecuación de una función dados dos puntos.*

Figura 6

Respuesta de Ángela



Al respecto conviene decir que las dificultades que se identifican en los registros de representación son los efectuados en el registro algebraico y en las conversiones que impliquen la representación natural. Las dificultades en las conversiones que impliquen la representación natural pueden ser debido a que en las clases de matemáticas no se hace énfasis en el uso de esta representación.

8.1.2 Actividad 1. Evaluación diagnóstica.

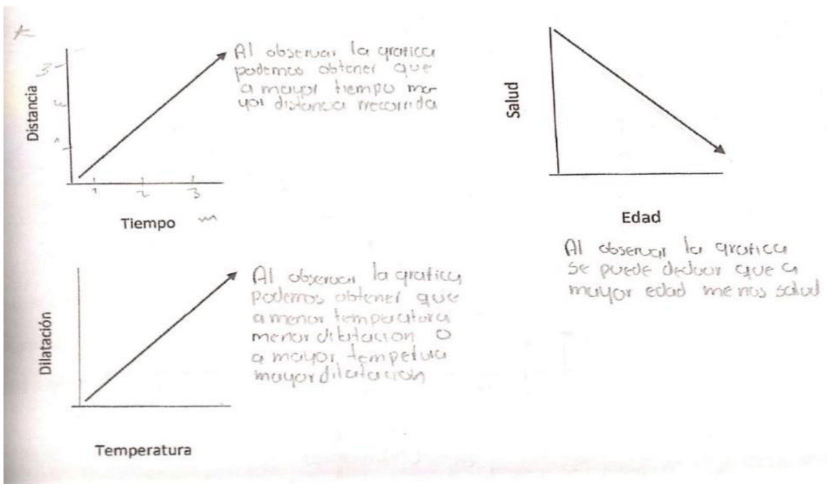
En esta actividad se propuso como objetivo el identificar fortalezas y debilidades en las estudiantes para realizar un primer acercamiento de las representaciones semióticas de la función lineal.

En el punto 3 de esta actividad, como ya distinguían las funciones afines de las lineales, recordaban cual era la pendiente de la función, cómo debía ser la recta si la pendiente era negativa o positiva, es decir, recordando lo visto en la actividad de la recta, se logra identificar las conversiones del registro algebraico al gráfico.

En cuanto a preguntas que pedían identificar la variable dependiente e independiente, se pudo observar que todas las estudiantes sabían diferenciar, en la representación gráfica y algebraica, estas variables. En sus respuestas, como se dieron en el registro de lengua natural, se pudo observar que las dificultades que se encontraban en este registro se estaban solventando. Veamos el resultado en Figura 7:

Figura 7

Respuesta de Sherin



8.1.3 Actividad 2. Problema planes de voz.

En esta actividad se propuso como objetivo lograr que las estudiantes distinguieran los diferentes registros y transitaran entre ellos.

Las estudiantes trabajaron de acuerdo a lo pedido en la actividad: observar las representaciones gráficas de las 3 compañías dadas, compararlas y luego resolver las preguntas, Figura 8.

Figura 8

Preguntas. Actividad 2

Preguntas:

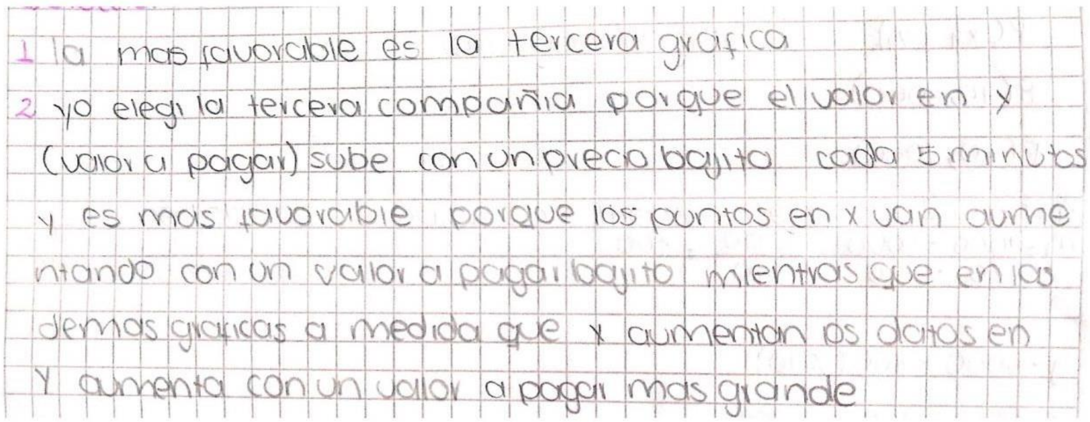
1. Si usted tuviera que tomar la decisión y determinar cuál de ellos es más favorable, intuitivamente ¿Qué plan tomaría?
2. ¿Qué razones justificarían que el plan elegido corresponde a la decisión más acertada? Explique por qué ese y no otro.
3. Para el punto anterior tenga en cuenta los siguiente: la inclinación de la recta que representa cada compañía, permite comparar los valores de sus pendientes. En este caso, identifique la recta que se encuentra más inclinada y considérela como una razón importante para su elección. Para ellos, halle la pendiente de cada recta.
4. Encuentre una expresión algebraica que le permita determina el valor a pagar para un número n de minutos del plan elegido.

En esta actividad se hizo uso de lo visto en la actividad de la recta (pendiente).

Para las estudiantes, observar la representación gráfica de las tres compañías les ayudó a tomar una decisión, primeramente, intuitiva, justificando las razones del plan elegido. Establecieron comparaciones cualitativas entre gráficas, pero, no identificaron la relación entre la pendiente y el aumento en el precio a pagar. Veamos algunas respuestas:

Figura 9

Respuesta de Sofía

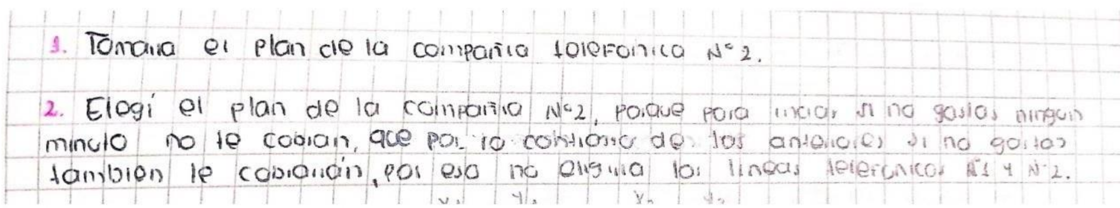


1 la mas favorable es la tercera grafica

2 yo elegi la tercera compañia porque el valor en y (valor a pagar) sube con un precio bajito cada 5 minutos y es mas favorable porque los puntos en x van aumentando con un valor a pagar bajito mientras que en las demas graficas a medida que x aumentan los datos en Y aumenta con un valor a pagar mas grande

Figura 10

Respuesta de Isabel

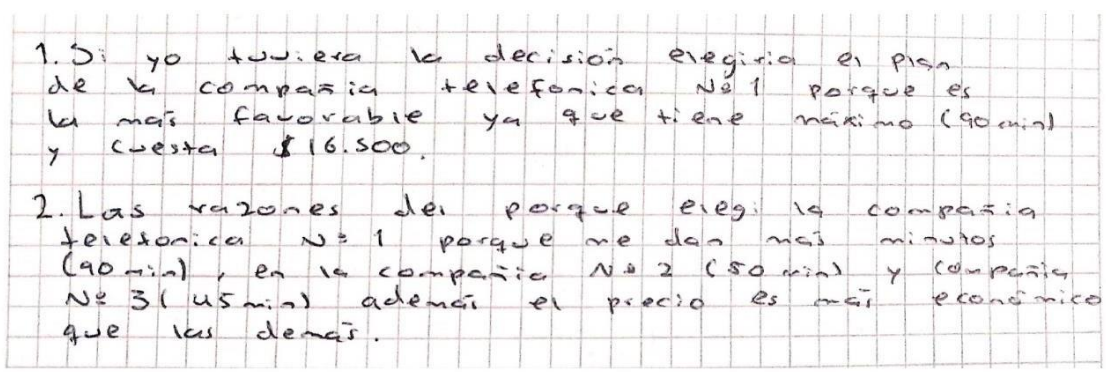


1. Tomaria el plan de la compañia telefonica N° 2.

2. Elegí el plan de la compañia N°2, porque para iniciar si no gasto ningun minuto no le cobran, que por lo contrario de los anteriores si no gastas tambien le cobraran, por eso no eligiria las lineas telefonicas N°1 y N°2.

Figura 11

Respuesta de Eilenn



1. Si yo tuviera la decisión elegiria el plan de la compañia telefonica N° 1 porque es la más favorable ya que tiene máximo (90 min) y cuesta $16.500.

2. Las razones del porque elegi la compañia telefonica N° 1 porque me dan más minutos (90 min), en la compañia N° 2 (50 min) y compañia N° 3 (45 min) además el precio es más económico que las demás.

El problema consistía en comparar en el registro gráfico los planes de voz que ofrecían tres compañías, para elegir el más favorable, tomando a las estudiantes como clientes. En el punto 4, las estudiantes establecieron una relación entre la información que ofrecía la representación gráfica y algebraica. Es decir, identificaron las unidades significantes de la representación inicial de la gráfica; por ejemplo, determinar cuál era el costo mínimo de cada compañía, para vincularla en otro registro.

En la Tabla 3 se presentan las respuestas de las estudiantes, donde se muestran las unidades significantes consideradas por ellas para decidir sobre el plan de minutos más conveniente. En la primera columna aparecen estos elementos importantes que las estudiantes traen a colación cuando justifican el plan elegido; en la segunda se presentan algunos ejemplos de las respuestas dadas por ellas en las cuales se resaltan sus argumentaciones; en la tercera se muestra el número de estudiantes vinculado con cada unidad significante.

Pregunta 1 y 2: Si usted tuviera que tomar la decisión y determinar cuál de ellos es más favorable, intuitivamente, ¿Qué plan tomaría?, ¿Qué razones justificarían que el plan elegido, corresponde a la decisión más acertada?

Tabla 3

Unidades significantes que consideraron las estudiantes

Unidades significantes	**Tipo de respuesta**	**N° de est.**
Estudiante que consideró el valor inicial para tomar la decisión. Es decir, lo que ocurre cuando no se consume minutos.	Camila: "la compañía número 2, porque se observa que mientras no gastes minutos no te lo van a cobrar, mientras que en las otras si te cobran así no gastes minutos". María: "escogería la compañía telefónica 2 porque podés mirar que si tu no hablas no te cobran, mientras en las otras dos compañías así no hables te cobran".	6

Unidades significantes	Tipo de respuesta	N° de est.
	Lina: "elegí el plan de la compañía N°2, porque para iniciar si no gastas ningún minuto no te cobran, que por lo contrario de los anteriores si no gastas también te cobrarían, por eso no elegiría las líneas telefónicas N°1 y N°2".	
Estudiantes que relacionan la inclinación de la recta, la pendiente, para tomar la decisión.	Lucy: "tomaría la compañía número 2, ya que el punto 3 dice que la gráfica que esté más inclinada la puedo considerar, por lo tanto, escogí la telefonía número 2, donde la recta está más inclinada".	1
Estudiante que tomó la decisión a partir de casos particulares. Es decir, recurrió a un número de minutos y el precio a pagar por ellos para decidir.	Mariana: "elegiría la compañía telefónica N°1, porque me dan más minutos (90 min), en la compañía N°2 (50 min) y la compañía N°3 (45 min). Además, el precio es más económico que las demás.	2
Estudiante que relacionó los minutos con el valor a pagar.	Fernanda: "tomaría la compañía N°1 porque nos ofrece más minutos a un bajo precio. Lo contrario de las otras compañías, nos ofrecen menos minutos a un precio más costoso".	1
	Angie: "el plan más favorable seria la compañía #1, porque nos ofrece más	1

Unidades significantes	Tipo de respuesta	N° de est.
	minutos a un bajo precio y en cambio las demás no, ya que ofrecen menos minutos”.	
	Michel: “yo elegí la tercera compañía porque los puntos en x van aumentando con un valor a pagar bajito, mientras que en las demás gráficas a medida que x aumenta, y aumenta con un valor a pagar más grande”.	1

Nota. Creación propia

Número de estudiantes que eligieron la compañía N°1: 4
Número de estudiantes que eligieron la compañía N°2: 7
Número de estudiantes que eligieron la compañía N°3: 1

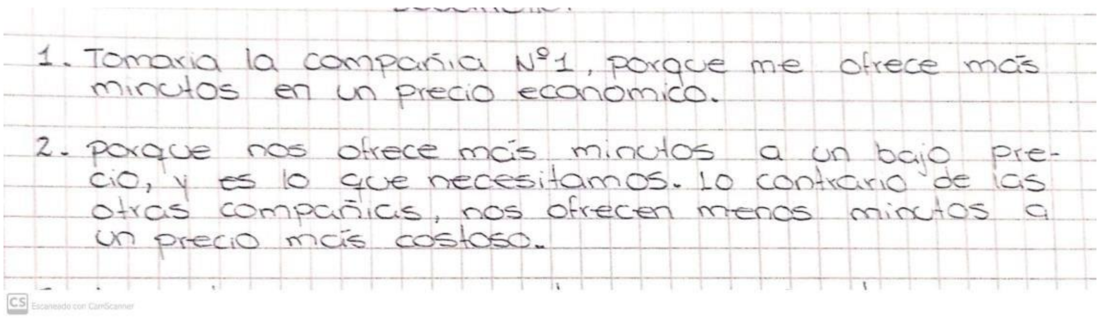
Aunque la unidad significante de la representación gráfica correspondía a la inclinación de la recta, se evidencia que en el problema las estudiantes relacionaron el número de minutos y el valor a pagar por ellos, pues las respuestas dadas hacen referencia al cambio en el precio con respecto al tiempo posible a utilizar.

Cabe señalar que el plan más favorable era el de la compañía telefónica N°1, sin embargo, las estudiantes tomaron las siguientes decisiones:

Las justificaciones de las estudiantes que eligieron el Plan N°1, ver Figura 12, son del tipo: “*porque en la compañía N°1 me dan más minutos que en las demás compañías y, además es más económico*” o bien “*porque en las otras compañías se tiene un valor muy costoso*”. Las estudiantes que escogieron la compañía N°1 escogieron la compañía adecuada, pero en sus justificaciones se puede observar que no tienen en cuenta la inclinación de la recta como un punto importante para la elección. Prueba de ello se muestra en la tabla anterior y en la siguiente imagen:

Figura 12

Justificación propuesta por una estudiante que decide a partir de la relación minutos-valor a pagar



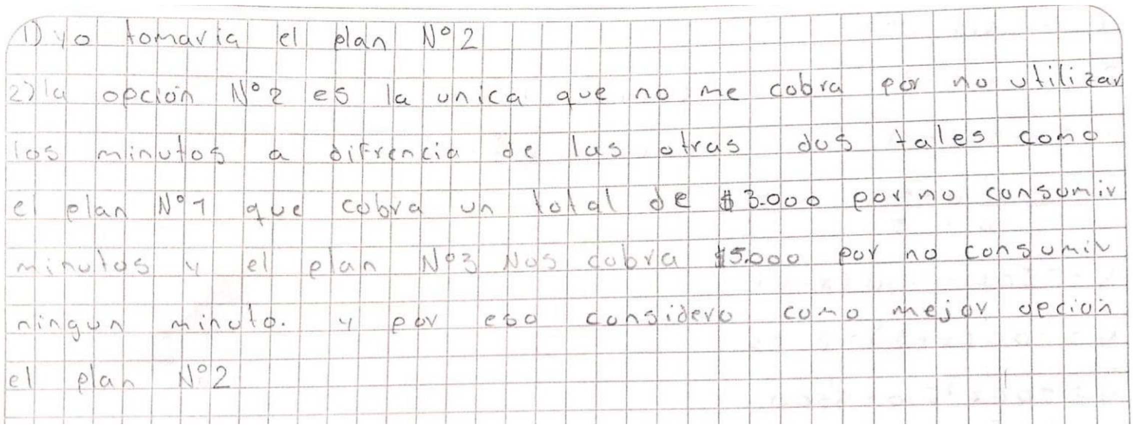
1. Tomaria la compañia N°1, porque me ofrece más minutos en un precio economico.
2. porque nos ofrece más minutos a un bajo precio, y es lo que necesitamos. Lo contrario de las otras compañias, nos ofrecen menos minutos a un precio más costoso.

Las justificaciones de las estudiantes eligieron el Plan N°2, ver Figura 13, son del tipo: "*porque es más favorable empezar a pagar menos valor*", "*cuando no se consume minutos, no se paga*", "*porque sale mejor pagar $1500 por 5 minutos que pagar $5500 por los mismos 5 minutos*" o bien "*porque las otras compañías son más caras desde que comienza hasta que termina*". Es decir, la mayoría de las estudiantes no asociaron la unidad significante inclinación de la recta, con la posibilidad de pagar menos dinero.

Prueba de ello, se muestra en la tabla anterior y en la siguiente imagen:

Figura 13

Justificación de estudiante que responde a partir del valor inicial

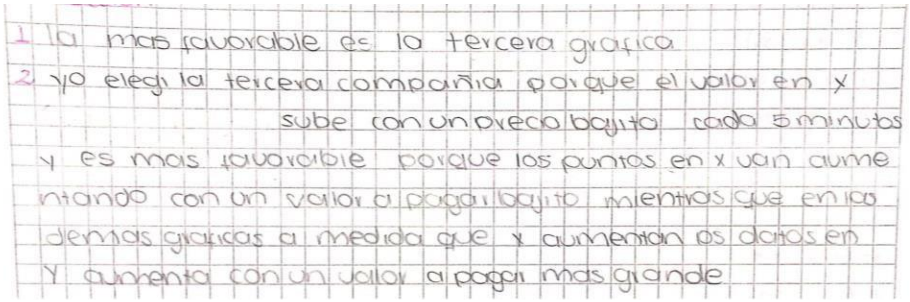

1) yo tomaria el plan N°2
2) la opción N°2 es la unica que no me cobra por no utilizar los minutos a difrencia de las otras dos tales como el plan N°1 que cobra un total de $3.000 por no consumir minutos y el plan N°3 Nos cobra $5.000 por no consumir ningun minuto. y por eso considero como mejor opción el plan N°2

De este modo, puede notarse que las unidades significantes consideradas por aquellas que eligieron la compañía 2, fueron: "*si no se consume, no se paga*", "*empezar a pagar menos*", "*son más caras desde que comienza*"; unidades que no correspondían con las que son cognitivamente pertinentes para tomar una decisión. En este sentido, hubo poca interpretación de la implicación y relación entre los parámetros m y b de la representación gráfica, que garantizaban elegir el plan más conveniente.

La estudiante que eligió el Plan N°3, ver Figura 14, justificó análogamente a las demás estudiantes, relacionando el número de minutos con el valor a pagar.

Figura 14

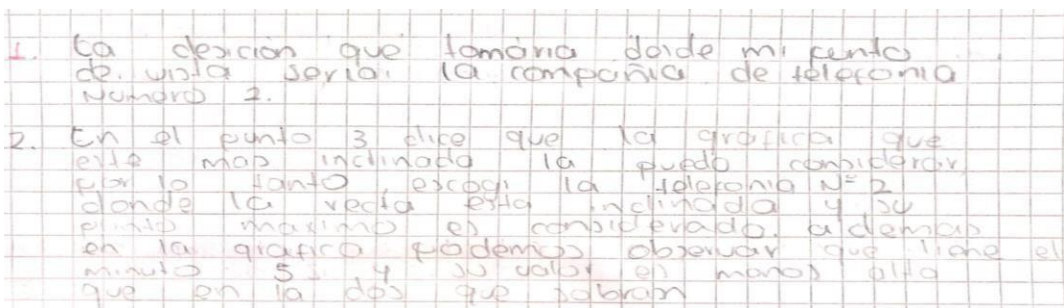
Justificación de la estudiante relacionando número de minutos con valor a pagar


1 la mas favorable es la tercera grafica
2 yo elegi la tercera compañia porque el valor en x sube con un precio bajito cada 5 minutos y es mas favorable porque los puntos en x van aumentando con un valor a pagar bajito mientras que en las demas graficas a medida que x aumentan os datos en Y aumenta con un valor a pagar mas grande

No obstante, la única estudiante que consideró la inclinación de la recta para tomar la decisión eligió la compañía telefónica número 2, Figura 15. Lo que indica el desconocimiento de la implicación del parámetro m en la representación gráfica.

Figura 15

Justificación de la estudiante que tuvo en cuenta la inclinación de la recta


1. La desición que tomaria desde mi punto de vista seria la compañia de telefonia Numero 2.
2. En el punto 3 dice que la grafica que este mas inclinada la puedo considerar, por lo tanto escogi la telefonia N° 2 donde la recta esta inclinada y su punto maximo es considerado. ademas en la grafica podemos observar que tiene el minuto 5 y su valor es menos alto que en las dos que sobran

En el punto 4, las estudiantes debían encontrar una representación algebraica que representara la situación. Es decir, una expresión que dé cuenta del precio a pagar con relación al número de minutos utilizados para el plan elegido. Se presenta a continuación en la Tabla 4, el número de estudiantes que alcanzó a determinar el valor de la pendiente a partir del registro gráfico.

Tabla 4

Resultados de estudiantes que intentan determinar la pendiente y la representación algebraica de la función

Unidades significantes	Tipo de respuesta	N° estud.	%
Identificó dos puntos correctos en la representación gráfica y determinó el parámetro m entre los minutos – precio.	Relaciona el tiempo como variable independiente. Compañía N°1: $P_1(10,4500)$, $P_2(60, 12000)$, $m = 150$ Compañía N°2: $P_1(10,3000)$, $P_2(40, 12000)$, $m = 300$ Compañía N°3: $P_1(5,5500)$, $P_2(40, 9000)$, $m = 100$	12	100%
Identificó dos puntos correctos en la representación gráfica, pero no determinó la representación algebraica correcta. Es decir, presentó dificultades en los tratamientos en la representación algebraica.	Compañía N°1: $f(x) = x + 5998$ Compañía N°2: $f(x) = x + 8970$ Compañía N°2: $f(x) = 300x + 1200$ Compañía N°3: $f(x) = x + 5495$	2	19,05%

Nota. Creación propia

En la Tabla 5 se presenta el número de estudiantes que determinó la representación algebraica.

Pregunta 3: Encuentre una expresión algebraica que le permita determinar el valor a pagar para un número n de minutos del plan elegido.

Tabla 5

Resultados de estudiantes que determinan la representación algebraica

Unidades significantes	Operación cognitiva	N° de estud.	%
Estudiantes que encuentran una representación algebraica correcta.	Funciones escritas por una estudiante: N°1. $f(x) = 150x + 3000$ N°2. $f(x) = 300x$ N°3. $f(x) = 100x + 5000$	10	80,95%
Estudiantes que logran determinar una representación algebraica, pero no corresponde con la representación gráfica.	Las transformaciones de registro no muestran la misma información del registro inicial, el gráfico, es decir, en este punto, les costó coordinar ambos registros.	2	19,05%

Nota. Creación propia

En la Tabla 5 se puede apreciar que el 19,05% de las estudiantes tuvo dificultad para encontrar una expresión general que representara de manera correcta el plan elegido. Esta pregunta requería en las estudiantes determinar los parámetros m y b para realizar la conversión al registro algebraico.

Pese a que el 80,95% de las estudiantes no logró identificar las unidades significantes en la representación gráfica, pertinentes para determinar el valor de la pendiente m, se pudo obtener un gran porcentaje que logró una congruencia entre los parámetros “unidades visuales” en la representación gráfica y, los mismos parámetros en la representación algebraica de manera explícita.

El 19,05% se dió porque no se cumplió el criterio de correspondencia semántica, es decir, con respecto a las dificultades que se tuvieron al identificar, interpretar y relacionar las unidades significantes en el registro gráfico analizado en la actividad Planes de voz, se nota que para las estudiantes hubo poca relación entre la inclinación de la recta (cambio en el precio con respecto al cambio en minutos) y el parámetro m (proporción entre el precio sobre el número de minutos) en la representación algebraica. Por lo que resultan respuestas relacionadas con expresiones sin pendiente o la elección de representaciones gráficas que pasan por el origen y que en la representación algebraica aparecen con una constante b, entre otros.

8.1.4 Actividad 3. Evaluación.

Esta actividad tuvo como objetivo evaluar la capacidad de las estudiantes para distinguir los diferentes sistemas de registros y examinar la conversión entre ellos.

En ciertos puntos algunas estudiantes no sabían cuál era la respuesta correcta, así que empezaron a descartar opciones, teniendo en cuenta lo que se pedía, dominio o rango, de manera que se cumpliera en la representación gráfica dada, por lo que se pudo identificar los tratamientos en la representación gráfica.

Hasta este punto se puede notar que las estudiantes tienen mayor familiaridad con la representación gráfica, esto puede deberse a: la identificación de ciertos elementos de la recta, como la pendiente por ejemplo, si es positiva o negativa, lo pueden ver con facilidad en este registro; el registro gráfico, junto con el algebraico, son las más usadas desde el colegio hasta la universidad, así que, si las estudiantes van a dar una respuesta, acuden primeramente a la representación gráfica para sentirse más seguras de lo que hacen.

El punto 4 Figura 16, se dividía en dos partes, ambos ejercicios consistían en la identificación de la conversión del registro de lengua natural al algebraico:

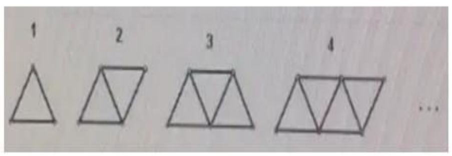
Figura 16

Punto 4. Actividad 3

4. Para cada una de las situaciones propuestas a continuación, proponga una representación algebraica que la represente.

a. La longitud de un lote de forma rectangular es tres veces su ancho.

b. Claudia construye figuras geométricas usando palitos de madera del mismo tamaño. Para cada lado del triángulo equilátero utiliza un palito. Las figuras que construye las ubica en fila, como se observa en la figura:



- Su compañero Julio afirma: "En la figura 4, Claudia ha usado 9 palitos de madera, entonces, por regla de tres simple, en la figura 8 usará el doble; o sea 18 palitos de madera"

  ¿La proposición expresada por Julio es verdadera o falsa? ¿Por qué?
- Encuentra una expresión algebraica que permita obtener el número de palitos que tendrá la figura "n" de la secuencia.
- Representa en el plano cartesiano la función obtenida en el punto anterior. Para ello, te puedes ayudar construyendo, en primer lugar, una representación tabular.

- ✓ En la primera parte las estudiantes identificaron cual era la representación algebraica de la representación natural dada.
- ✓ En la segunda parte, se pedía la representación gráfica y tabular. Para la solución las estudiantes decidieron acudir al registro figural, el dibujo. Pudieron ver que en cada figura, gráfica y registro se añadían dos palitos, por lo que, algunas sabían cuántos palitos había en la figura 8; sin embargo, realizaron los triángulos, que denominaron como la representación gráfica, para verificar el resultado.

En cuanto a la representación algebraica, se realizó mediante ensayo y error, teniendo en cuenta que cada figura añadía dos palitos, así que se hizo mención de que en la representación algebraica debía ir un dos multiplicando la variable, que sería el número de la figura. Posteriormente, se realizó la representación gráfica, con ayuda de la representación algebraica y tabular. Aquí podemos ver que las estudiantes también tienen familiaridad con la representación tabular; de hecho, la representación algebraica, tabular y gráfica, son las más usadas por las estudiantes, es por eso que las actividades cognitivas entre estas representaciones no causan mayor dificultad.

8.2 Recuento histórico y análisis de la función cuadrática

8.2.1 Actividad integral N° 1.

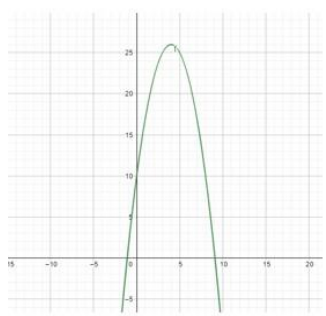
Esta actividad tuvo como objetivo movilizar la noción función cuadrática.

En el punto 10, Figura 17, se presentaron varias dificultades en la conversión del registro gráfico y algebraico, al de lengua natural.

Figura 17

Punto 10. Actividad Integral N°1

10. Sea la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ y cuyo gráfico es como se muestra en la siguiente figura:



Considere la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ vinculada a la función, y la información brindada anteriormente para responder los siguientes ítems:

a) ¿"a" puede tomar cualquier valor real diferente de cero? ¿Por qué?

b) ¿"c" puede tomar cualquier valor real? ¿Porque?

c) ¿El discriminante de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ puede ser positivo?

En este apartado, se tiene el análisis de la secuencia de actividades presentada en dos momentos con su respectivo análisis preliminar y los resultados obtenidos. Es bueno mencionar que las secuencias didácticas tuvieron como finalidad que las estudiantes realizaran una interpretación global de las propiedades de la representación en el registro gráfico de la función cuadrática para identificar la coordinación de este registro con el algebraico y de lengua natural, todo esto desde la perspectiva desarrollada por Duval y con la ayuda del software Geogebra.

En las actividades se debía movilizar la noción función cuadrática, teniendo como base los conocimientos previos de las estudiantes enfocados en la asociación semiótica de los parámetros "a", "b" y "c" de la representación algebraica vinculada a la función cuadrática con las variables visuales, por ejemplo: concavidad e intersección de la curva con el eje Y de la representación gráfica de la función. Además, de la relación del discriminante de la representación algebraica con los puntos de corte de la representación gráfica de la función cuadrática.

En este punto 10, se esperaba que:

- ✓ En un primer momento las estudiantes, conforme a las indicaciones de los ítems y la información dada, pudieran establecer asociaciones semióticas entre las unidades significantes de la representación gráfica de la función cuadrática con las de su representación algebraica. Al movilizar la noción del objeto matemático mediante la coordinación de los registros algebraico y gráfico, se lograría establecer una comprensión cualitativa en relación a las unidades significantes entre estos dos registros.
- ✓ Luego, se examinaría la conversión de los registros gráfico y algebraico, al de lengua natural, la cual estaría apoyada en los registros iniciales.

Además, los ítems estuvieron acompañados con la pregunta “¿Por qué?”, para que las estudiantes justificaran sus respuestas con tratamientos dentro de los dos registros iniciales, por lo que esta pregunta permitió identificar si la conversión al registro de lengua natural estuvo basada o no en un reconocimiento cualitativo.

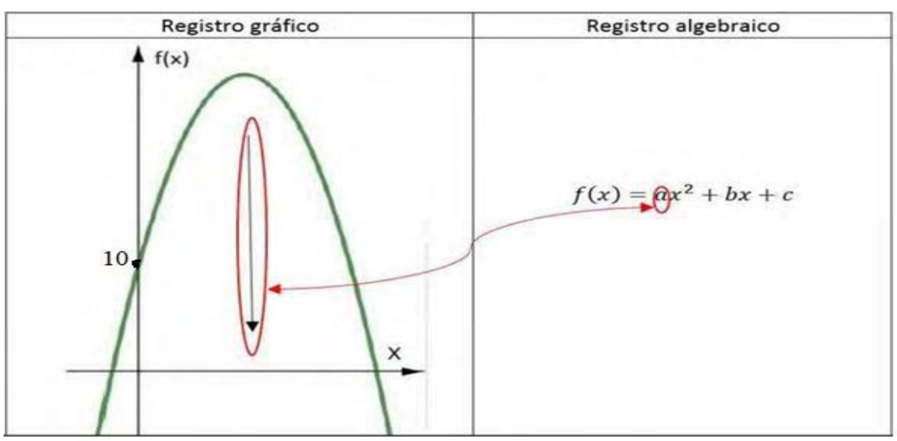
Veamos los ítems propuestos:

a) ¿“□” puede tomar cualquier valor real diferente de cero? ¿Por qué?

En este ítem, por medio de una asociación semiótica, se relaciona la variable visual concavidad de la curva de la función cuadrática $f(x)$ con la unidad significante pertinente, parámetro "a", de la representación algebraica $f(x) = ax^2 + bx + c$. Además, por medio de la coordinación entre los registros iniciales, se reconoció el mismo objeto matemático en los dos registros, gráfico y algebraico Figura 18. Posteriormente, se examinó la realización de la conversión de los registros gráfico y algebraico, al de lengua natural.

Figura 18

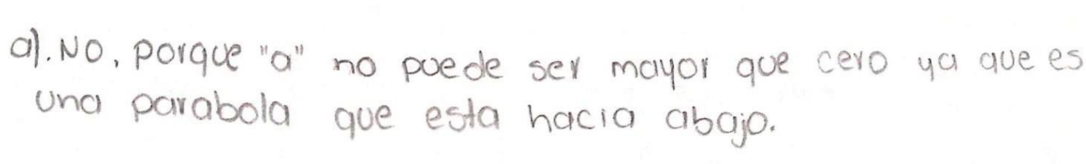
Regla semiótica de correspondencia entre la variable visual concavidad y la unidad simbólica "a"



Análisis de la respuesta de Valery, Figura 19:

Figura 19

Respuesta de Valery al ítem a)

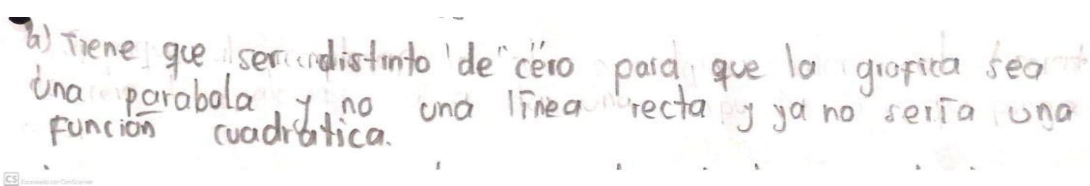

a). NO, porque "a" no puede ser mayor que cero ya que es una parabola que esta hacia abajo.

Se puede observar por medio de la respuesta, que se relacionó la variable visual de la gráfica de la función cuadrática (x), parábola hacia abajo, con el parámetro a, de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$. En este sentido, hubo éxito en la coordinación de los registros, gráfico y algebraico, logrando reconocer el mismo objeto matemático en dichas representaciones. Además, la comprensión global cualitativa permitió establecer la regla semiótica de correspondencia entre las unidades significantes involucradas en ambos registros. Posteriormente, se examinó la conversión de los registros, gráfico y algebraico, al de lengua natural.

Análisis de la respuesta de Mariana, Figura 20:

Figura 20

Respuesta de Mariana al ítem a)


b) Tiene que ser distinto de cero para que la grafica sea una parabola y no una línea recta y ya no sería una funcion cuadrática.

En la respuesta se puede observar que se ha asociado incorrectamente la variable visual de la representación en el registro gráfico curva hacia abajo, con la unidad simbólica, parámetro a, de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$. En este sentido, la presencia de la coordinación de los registros gráfico y algebraico fue parcial, al no avanzar y reconocer el mismo objeto matemático en ambos registros, quedándose en la parte básica del parámetro $a \neq 0$.

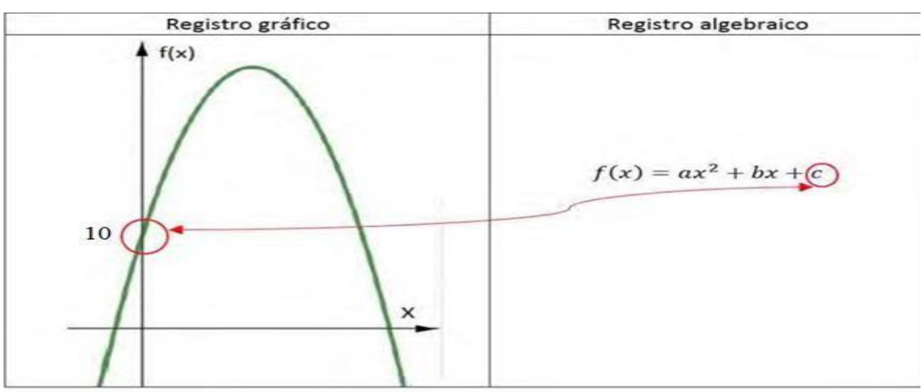
b) ¿“” “puede tomar cualquier valor real diferente de cero? ¿Porqué?

En este ítem, se esperaba por medio de una asociación semiótica, relacionar la intersección de la curva con el eje Y, que es una variable visual de la representación gráfica de la función, con la unidad simbólica pertinente, parámetro "c", de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ vinculada a dicha función.

Una comprensión global cualitativa implicaba ver que la curva de la función intercepta al eje Y en la parte positiva de la representación gráfica, por lo que el valor de la unidad simbólica "c" debía ser positivo, Figura 21.

Figura 21

Regla semiótica de correspondencia entre la variable visual intersección de la curva con el eje "y" y la unidad simbólica "c"



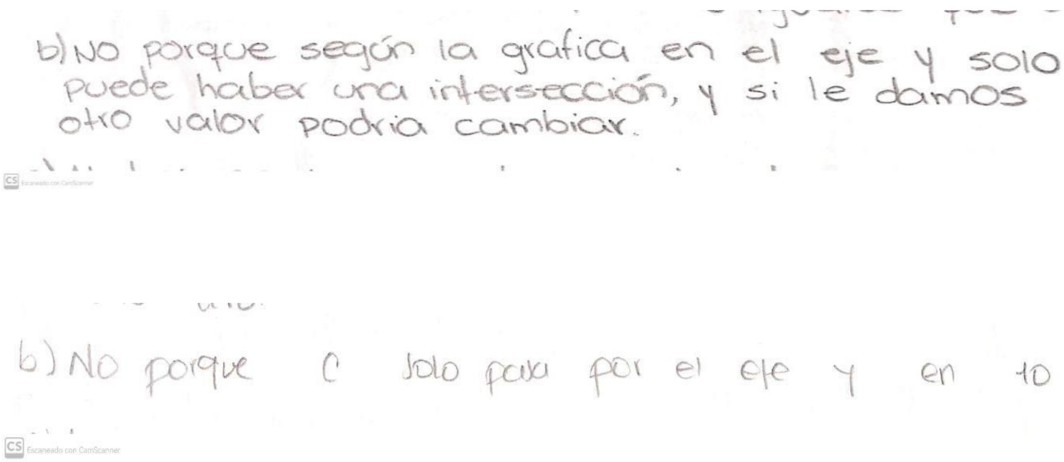
En ese sentido, al hacer uso de tratamientos numéricos, la comprensión global cualitativa se hace indispensable, ya que permitió transitar de un registro a otro considerando como referencia, las reglas semióticas de correspondencia, entre la unidad simbólica de la representación algebraica y la variable visual de la representación gráfica de la función cuadrática.

Posteriormente, se esperaba la realización de la conversión de los registros gráfico y algebraico, al de lengua natural.

Análisis de las respuestas de Camila y Eilenn, Figura 22:

Figura 22

Respuestas de Camila y Eilenn al ítem b)



b) No porque según la grafica en el eje y solo puede haber una intersección, y si le damos otro valor podria cambiar.

b) No porque c solo pasa por el eje y en 10

Se puede observar que en las respuestas se tiene la coordinación esperada, ya que se reconoce la misma función cuadrática en los dos registros presentados, para luego establecer la regla semiótica de correspondencia entre las unidades significantes de ambos registros, que es relacionar la variable visual, intersección de la curva con el eje Y con la unidad simbólica pertinente de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ de la función, percibiendo dicha correspondencia. Luego, se observa la realización de la correspondiente conversión de los registros iniciales, gráfico y algebraico, al registro de lengua natural para poder justificar su respuesta al ítem.

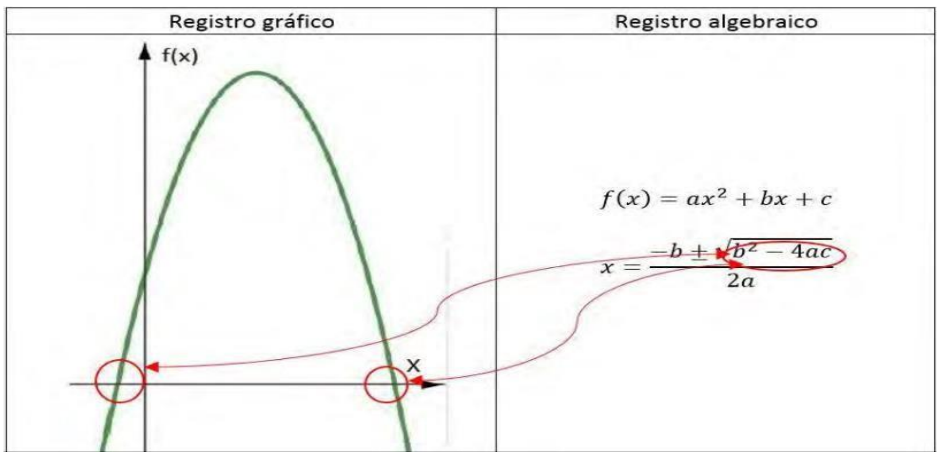
Finalmente, analizaremos el tercer ítem de la Actividad integral Nº 1:

c) ¿El discriminante de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ *puede ser positivo?*

En este apartado, se esperaba que las estudiantes pusieran en acción sus conocimientos previos acerca de las características de una ecuación cuadrática, en particular del discriminante, en razón a la representación gráfica de la función. En ese sentido, se esperaba la coordinación entre los registros gráfico y algebraico de la función, es decir, el relacionar la unidad significante de la representación gráfica con la de la representación algebraica, Figura 23.

Figura 23

Regla semiótica de correspondencia entre la variable visual y la unidad simbólica



Análisis de las respuestas de Lucy y Angie, Figura 24 y Figura 25:

Figura 24

Respuesta de Lucy

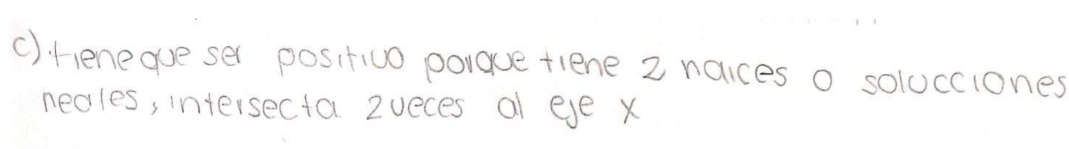


Figura 25

Respuesta de Angie

Con lo anterior se puede observar la coordinación de los registros gráfico y algebraico de la función; se asocia correctamente la variable visual, intersección de la curva con el eje X, del registro gráfico, con la unidad significante compuesta $b^2 - 4ac$ del registro algebraico de la función. Esto se expresa en que los puntos de corte de la representación gráfica de la función determinan el número de raíces que puede tomar el discriminante de una ecuación cuadrática. Luego, para justificar sus respuestas al ítem planteado, se examinó la conversión de los registros gráfico y algebraico, al registro de lengua natural, permitiendo la comprensión global cualitativa al establecer la regla semiótica de correspondencia entre las unidades significantes involucradas en estos registros.

8.2.2 Actividad integral N° 2.

Esta actividad tuvo como objetivo facilitar a las estudiantes la coordinación entre los registros algebraico, de lengua natural y gráfico.

En este apartado, las nociones a tener en cuenta acerca de la función cuadrática correspondían a: los puntos de cortes con los ejes; parámetros de la ecuación cuadrática vinculada a la función; vértice de la curva de la función cuadrática e interpretación del vértice de la gráfica de la función; valor máximo y mínimo y, trazo de la curva de la función cuadrática, reconociendo los puntos de corte.

A continuación, se muestra la actividad integral N°2.

Figura 26

Actividad integral N°2

Actividad Integral N° 2

Dada la siguiente representación algebraica de la función,

$$f(x) = a(x-4)^2 + 6x + (c-16) \qquad ; a, c \in \mathbb{R}$$

y el punto$(4,5)$ perteneciente a la parábola de la función f, resuelva los siguientes ítems:

a. Halle el valor de c.

b. Si uno de los puntos que resulta de intersectar la parábola de la función con el eje X tiene abscisa $x = -1$, halle el valor de a.

c. Halle el vértice y las intersecciones con los ejes de la función f. Realice la representación gráfica en Geogebra indicando los puntos mencionados.

d. Tres estudiantes del curso de Matemáticas manifiestan lo siguiente:

- Julián: "el valor mínimo de la función f es 1"
- Edwin: "el intervalo donde $f(x) > 0$ es $[1, +\infty]$
- Valeria: "el valor mínimo de la función depende del dominio que tenga. Ejemplo, si $Dom(f) = [-\infty, 0]$ entonces el $\min(f) = -3$".

¿Está usted de acuerdo con estas afirmaciones? Justifique su respuesta.

Se esperaba que, teniendo en cuenta los datos proporcionados en los ítems, se movilizara la noción matemática función cuadrática con el apoyo de lápiz y papel y Geogebra. Por lo que, para dar respuesta a los ítems propuestos, se debía coordinar los diferentes registros: de lengua natural, algebraico y gráfico. Ahora, si bien es cierto la información fue presentada inicialmente en el registro algebraico, se esperaba que se diera respuesta a los ítems de manera que se pudiera reconocer la conversión a los registros de lengua natural y gráfico.

A continuación, el análisis al primer ítem de la actividad integral N° 2:

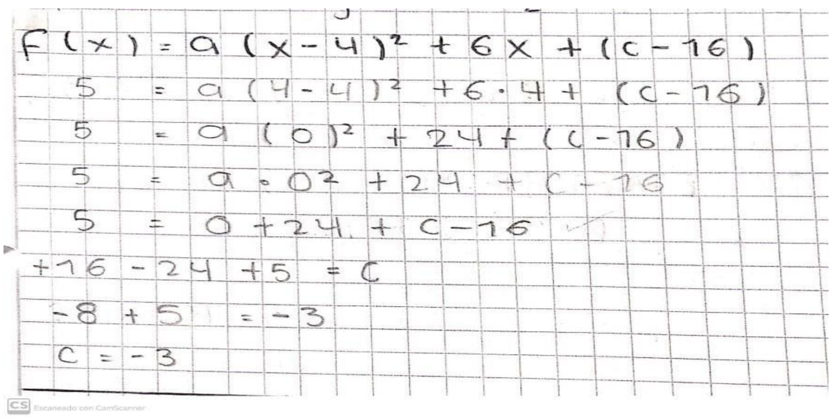
a) Halle el valor de c.

El ítem tuvo como finalidad el identificar que el par ordenado $(4{,}5)$ pertenece a la representación algebraica de la función $f(x) = a(x-4)^2 + 6x + c - 16$. Posteriormente se examinarían los tratamientos en el registro algebraico el cual era de ayuda para dar respuesta al primer ítem.

Análisis de la respuesta de Fernanda, Figura 27:

Figura 27

Respuesta de Fernanda



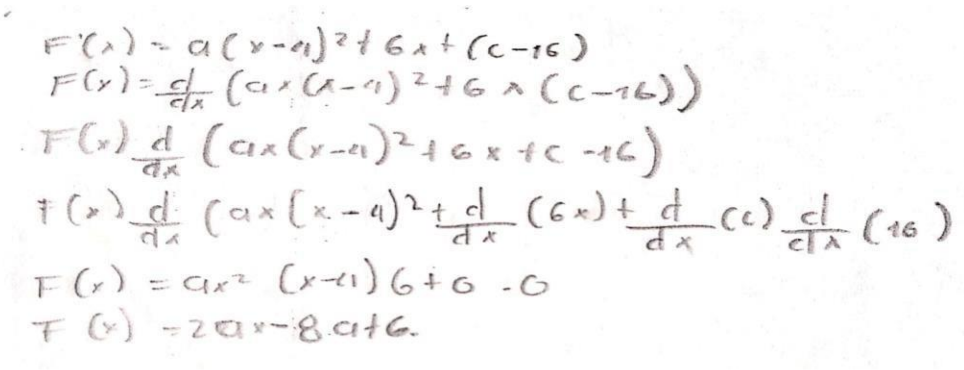
$$f(x) = a(x-4)^2 + 6x + (c-16)$$
$$5 = a(4-4)^2 + 6 \cdot 4 + (c-16)$$
$$5 = a(0)^2 + 24 + (c-16)$$
$$5 = a \cdot 0^2 + 24 + (c-16)$$
$$5 = 0 + 24 + c - 16$$
$$+16 - 24 + 5 = c$$
$$-8 + 5 = -3$$
$$c = -3$$

Con este resultado, se identificó que el par ordenado $(4{,}5)$ pertenece a la representación de la función $f(x) = a(x-4)^2 + 6x + c - 16$, es decir, se examinaron los tratamientos en la representación algebraica, obteniendo el valor del parámetro "c" de la ecuación cuadrática vinculada a la función.

Análisis de la respuesta de Sofía, Figura 28:

Figura 28

Respuesta de Sofía



En la respuesta se observa que no se logró relacionar el punto representado por el par ordenado $(4,5)$ con la función $f(x) = a(x-4)^2 + 6x + c - 16$. Se examina que por medio de tratamientos en el registro de representación algebraico, no se logró obtener el valor del parámetro c.

Ahora, se analizará el segundo ítem.

b) Si uno de los puntos que resulta de intersecar la representación gráfica de la función con el eje X tiene abscisa □ = −1, halle el valor de □.

Para este ítem se esperaba que, a través de la coordinación de los registros gráfico y algebraico, las estudiantes relacionaran el punto de intersección de la representación gráfica con el eje coordenado X, representado por el par ordenado $(-1,0)$, con la regla de correspondencia de la función cuadrática $f(x) = a(x-4)^2 + 6x + c - 16$. En el ítem anterior, se determinó el valor del parámetro $c = -3$, por lo que, con el respectivo tratamiento en la representación algebraica, se establecía el valor del parámetro a.

Análisis de las respuestas de Isabel y María, Figura 29 y Figura 30:

En relación al ítem b), las respuestas de las estudiantes Isabella y Karen no correspondieron a lo esperado en el análisis.

Figura 29

Respuesta de Isabel

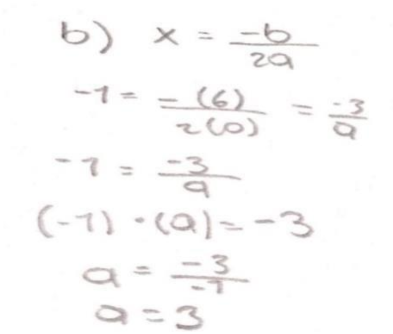
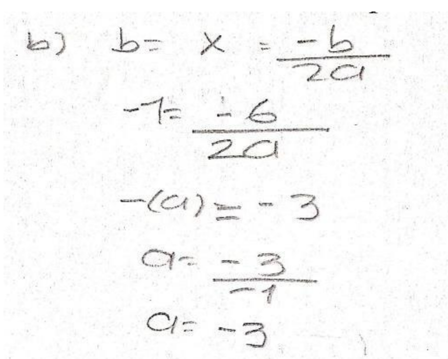


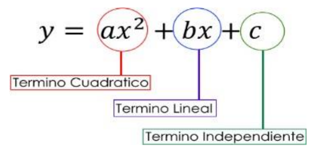
Figura 30

Respuesta de María



No se logró identificar la regla de correspondencia de la representación de la función cuadrática $f(x) = a(x-4)^2 + 6x + c - 16$, con el parámetro a encontrado en el ítem anterior. Aunque los tratamientos efectuados en la representación algebraica son correctos, no se llegó a la representación algebraica de la función que era la correcta. De hecho, este fue el único ítem en donde no se logró identificar dicha correspondencia. Una posible causa, es que se malinterpretó el enunciado en la parte: *que resulta de intersecar la representación gráfica de la función con el eje X tiene abscisa* $\square = -1$; este fragmento fue tomado como el eje de simetría y es por eso que se acude a la formula reemplazando a □ por -1 y a b por *6.*

Ahora, tengamos en cuenta lo siguiente:



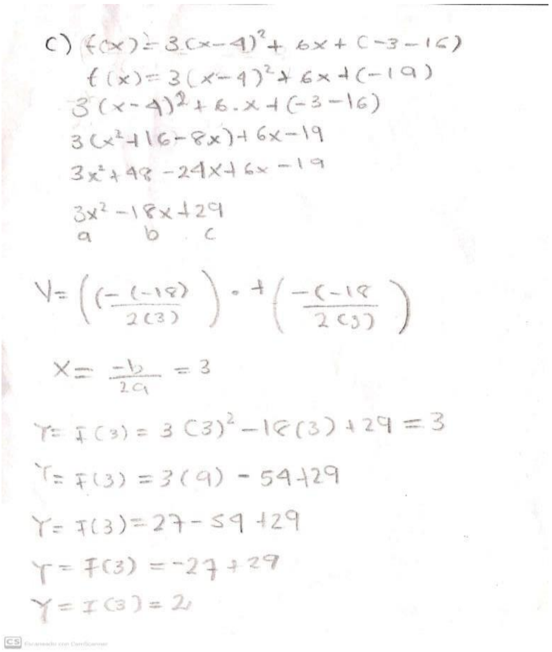
Las estudiantes sabían que el coeficiente lineal es el que acompaña a la variable lineal, por lo que en representación de la función $f(x) = a(x-4)^2 + 6x + c - 16$ toman a b como si fuera *6*, sin tener en cuenta que de la parte $a(x-4)^2$ se obtendría un término lineal el cual se tenía que operar con $6x$. Al respecto se aclaró que no se podía hacer uso de la fórmula del eje de simetría, ya que el valor del termino b no era 6.

c) Represente el gráfico de la función □(x) *indicando las coordenadas del vértice e intercepto con los ejes coordenados.*

Las estudiantes debían llegar a la representación algebraica de la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$ pero obtuvieron una función diferente, debido a que no resolvieron el ítem c) correctamente.

Figura 31

Respuesta de Valentina



Cabe resaltar que, aunque no se llegó a la función esperada, las estudiantes dieron respuesta al ítem, hallando las coordenadas del vértice y el intercepto con los ejes coordenados. Es decir, se identifican los tratamientos en la representación algebraica.

Finalmente, analizamos el cuarto ítem de la actividad integral N° 2:

d) Tres estudiantes del curso de Matemática Básica manifiestan lo siguiente:

- ✓ *Julián: "el valor mínimo de la función □ es 1"*
- ✓ *Edwin: "el intervalo donde □(□) > 0 es [1, +∞)"*
- ✓ *Valeria: "el valor mínimo de la función depende del dominio que tenga, ejemplo si, D□□(□) = (− ∞, 0] entonces min(□) = −3"*

¿Está usted de acuerdo con las afirmaciones? Justifique su respuesta.

Para este ítem, se esperaba la coordinación entre el registro inicial de lengua natural, en donde se presentaron los tres diferentes argumentos, con los registros gráfico y algebraico. Las estudiantes debían validar o invalidar cada argumento, teniendo en cuenta la información presentada y los ítems anteriores.

Como se mencionó anteriormente, las estudiantes llegaron a una función diferente a la que tenía que ser, sin embargo, con la función a la que habían llegado, trabajaron los siguientes ítems. Por lo que hubo una coordinación entre los registros planteados.

Para el primer argumento *"el valor mínimo de la función □ es 1",* se esperaba que las estudiantes interpretaran las coordenadas del vértice del ítem anterior, en donde cuya ordenada de dicho par ordenado es el valor mínimo de la función. En este aspecto, la coordinación del registro gráfico con el registro de lengua natural, que es presentado en el argumento, permitía invalidar lo propuesto.

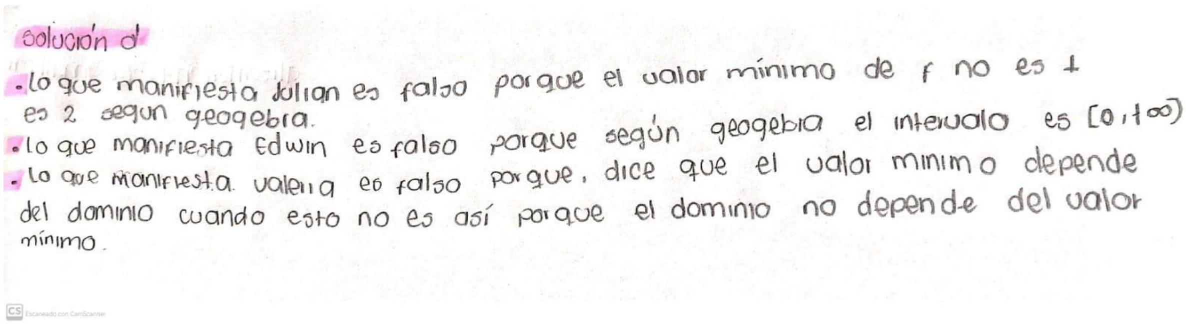
En el segundo argumento *"el intervalo donde* $(x) > 0$ *es [1; +∞)",* por medio de la coordinación de los registros gráfico y algebraico, las estudiantes debían establecer que el intervalo, donde la función $f(x) > 0$, es $[0, +\infty)$.

Finalmente, para el tercer argumento *"el valor mínimo de la función depende del dominio que tenga, ejemplo si, D(□) = (− ∞, 0] entonces min(□) = −3",* se esperaba que reconocieran la validez del argumento propuesto por medio de la coordinación de los registros gráfico y de lengua natural, donde reconocieran la dependencia del valor mínimo de la función en relación al dominio de la misma.

Análisis de la respuesta de Lina, Figura 32:

Figura 32

Respuesta de Lina



solución d

- lo que manifiesta Julian es falso porque el valor mínimo de f no es 1 es 2 segun geogebra.
- lo que manifiesta Edwin es falso porque según geogebra el intervalo es [0,+∞)
- lo que manifiesta valeria es falso porque, dice que el valor minimo depende del dominio cuando esto no es así porque el dominio no depende del valor mínimo.

En la respuesta se observa que se logró la coordinación entre el registro gráfico, visto en Geogebra, con el registro de lengua natural en el cual es presentado el argumento. Esto le permitió invalidar el argumento propuesto, sin embargo, el valor mínimo de la función no es 1 sino 3.

Para el segundo argumento, a través de la coordinación de los registros gráfico y algebraico, se estableció que el intervalo donde la función es mayor que cero es [0, +∞), lo que le permitió invalidar el argumento propuesto.

Finalmente, para el tercer argumento, no se logró reconocer la validez sostenido en la coordinación de los registros gráfico y de lengua natural, ya que no se identificó la dependencia del valor mínimo de la función en relación al dominio de la misma. De hecho, en este punto se pudo observar que todas las estudiantes no lograron establecer dicha dependencia. Esto pudo haber sucedido porque a las estudiantes no se les había enfatizado, en sus clases de matemáticas, la relación que hay entre el dominio y el valor mínimo o máximo de una función.

Teniendo en cuenta lo que manifiesta Duval (1995), la lectura de representaciones gráficas tiene como condición la discriminación de las variables visuales relevantes y la percepción de las alteraciones correspondientes de las expresiones algebraicas. Además, refiere que dicha discriminación es condición necesaria para toda actividad de conversión, así como para el desarrollo de la coordinación de registros, es por eso que se plantea seguir realizando investigaciones en donde se crean las condiciones necesarias que induzcan al estudiante a realizar las actividades cognitivas de las funciones matemáticas a fin de seguir desarrollando la coordinación entre varios de los registros y no quedarse en uno solo.

8.3 Recuento histórico y análisis de la función exponencial

Las actividades estaban relacionadas con una serie de ejercicios de funciones exponenciales, en el cual se pretendía analizar la compresión y el manejo de dicho tema por parte de las estudiantes.

Igualmente se examinaron las conversiones de los registros de las representaciones semióticas propuestas por Duval (1999) en las que indica que un estudiante debe manejar las representaciones semióticas de un objeto matemático para comprender o interiorizar mejor el tema, expresar el objeto matemático de forma verbal, realizar tabulaciones, analizar gráficos y tener un desarrollo analítico. Con esto se puede decir que el estudiante ha podido comprender el objeto matemático desde sus representaciones semióticas.

En estas actividades, para una mejor comprensión de la función exponencial, en la identificación de sus características, las estudiantes hicieron bastante uso del software Geogebra.

Primera secuencia didáctica

Objetivo

Esta actividad tuvo como objetivo identificar las características de la función exponencial para valores diferentes de la base a.

En las actividades 1 y 2 de la secuencia I, las estudiantes debían realizar dos ejercicios sobre la función exponencial, en ellos se encontraba una tabla la cual se debía completar y, con ayuda de Geogebra, realizar la representación gráfica de la función resultante. Además, los ejercicios permitían conocer las características de la función exponencial partiendo de dos funciones, una cuya base es mayor que 1, función creciente, y otra con base $\frac{1}{2}$ siendo esta decreciente.

En las actividades de la secuencia II, por medio de la interacción con Geogebra, a las estudiantes se les pedía contestar una serie de preguntas que les permitían afianzar más el concepto de la función exponencial. En las actividades de cada secuencia y de acuerdo con los registros de representación semiótica, se pretendía evaluar los registros de la función exponencial.

Dificultades durante el desarrollo de la clase:

Las dificultades en estas dos sesiones fueron en las actividades desarrolladas por 5 estudiantes. Las dificultades fueron los siguientes:

- ✓ No tenían claro cuál era el rango de la función exponencial. Para ellas, el rango comenzaba en el punto de corte con el eje Y, es decir $(0,1)$, por lo que el rango para estas 5 estudiantes era $[1, \infty)$.

Cabe resaltar que una de las propiedades de las funciones exponenciales, es que todas pasan por el punto $(0,1)$, y las estudiantes al visualizar la representación gráfica en Geogebra, tomaron solo la parte positiva de la curva para ver el rango de la función, es por eso que para ellas, el rango era $[1, \infty)$, sin tener en cuenta la parte negativa de la curva de la función, es decir, no consideraron los valores, que también hacían parte del rango, entre 0 y 1. Para ello se recordó el dominio de la función exponencial.

- ✓ No tenían claro el concepto matemático de cuando una función es creciente o decreciente.

Cabe señalar que la función exponencial es aquella que a cada valor real x le asigna la potencia a^x con $a > 0$ y $a \neq 0$. Esta función se expresa como $f(x) = a^x$. Ahora, si una función es creciente es porque $a > 1$ y si es decreciente entonces $0 < a < 1$.

Sin embargo, estas 5 estudiantes confundieron estas condiciones: escribían que si es creciente entonces $0 < a < 1$ y si es decreciente entonces $a > 1$ o a veces, cambiaban las desigualdades. La dificultad, que podría ser confusión, era el orden de la desigualdad, por lo que para solventar esta dificultad, se tuvo en cuenta que las estudiantes identifican la variable independiente y dependiente en la representación tabular y gráfica, es por ello que se hizo uso de estas dos representaciones, mencionado que una función es creciente cuando a medida que crece el valor de la variable independiente crece el valor de la función y cuando es decreciente, a medida que el valor de la variable independiente aumenta el valor de la función disminuye. También hicieron uso de Geogebra, las estudiantes hicieron comparaciones, cuándo la función es creciente y cuándo decreciente.

- ✓ Dada la gráfica en Geogebra, las estudiantes no identificaban que las funciones exponenciales no tienen corte con el eje X. Al tener una imagen de la función, piensan que en algún momento la curva cortará al eje X en algún punto.

Para esto, lo que se aclaró es que existen asíntotas, las cuales son líneas rectas que se prolongan indefinidamente en donde la curva se acerca a la asíntota, pero nunca la tocan, por lo que en el eje X, para las funciones exponenciales, hay una asíntota. Esto se pudo ver gracias al uso de Geogebra, haciendo zoom, por un momento, y ver que la curva nunca intersecta al eje.

Segunda secuencia didáctica

Objetivo

Esta actividad tuvo como objetivo aplicar los conocimientos anteriores y deducir, por medio de transformaciones, la nueva función exponencial y sus nuevas características.

En la actividad 4 de la secuencia II, por medio de la interacción con Geogebra, a las estudiantes se les pedía que respondieran una serie de preguntas que les permitía afianzar más el concepto de función exponencial, mediante la conversión.

Dificultades durante el desarrollo de la clase:

Las dificultades en estas dos sesiones fueron en la actividad desarrollada por algunas estudiantes. Las dificultades fueron las siguientes:

- ✓ En un principio no tenían claro cómo realizar las transformaciones, ya sea en base e o cualquier base.

Esto podría deberse a que en el colegio no se ha enfatizado en transformaciones de funciones, sino más bien, en resolver ejercicios que sean de cálculos o de factorización. Es por eso que se trabajaron varios puntos sobre las transformaciones, en diferente base, para que las estudiantes tuvieran más familiaridad con ello y lo trabajaran posteriormente sin mayor dificultad.

- ✓ Graficaban de forma incorrecta las transformaciones de funciones cuando el signo menos $(-)$ aparece antes de la función, $y = -f(x)$.

Además, confunden esta función con $y = f(-x)$. Las estudiantes asumen que es lo mismo que el signo menos esté antes de la función o dentro la función. Las estudiantes mencionaron que en los ejercicios que han trabajado anteriormente, no se han encontrado con funciones de esta forma. Algunos docentes de matemáticas de la sede Manuela Beltrán mencionan que se hacen a un lado estas funciones, $y = f(-x)$ y $y = -f(x)$, para evitar confusiones en las estudiantes y posteriormente explicaciones, que pueden llevar a una confusión mayor. Las estudiantes mencionaron que la confusión se debía a la no apropiación del concepto de función par y función impar; para ello se tomó parte de la clase explicando en qué consistía cada una de estas.

Tabla 6

Secuencias didácticas a evaluar

Clase	Descripción	Descripción de lo logrado	N° de estudiantes que lograron el objetivo
Secuencia I	*Actividad 1 (parte 1)* *Actividad 2 (parte 2)*	° Las estudiantes graficaron de forma correcta la función exponencial usando los valores que tienen en la representación tabular. ° Tuvieron en cuenta que el dominio de la función son todos los reales y el rango son los reales positivos. ° La mayoría tenían claro cuándo una función es creciente o decreciente. ° Todas las estudiantes tuvieron en cuenta cuando no hay y cuando hay intersecciones con los ejes. ° Las estudiantes realizaron la conversión de la representación algebraica, gráfica y tabular a la representación natural.	11
	Actividad 3 (pregunta de análisis)	Las estudiantes, identificaron que una de las funciones, 2^x, es creciente y que la otra función, 2^{-x}, es decreciente. Para ello, se ayudaron con la representación tabular, mencionando que, el orden de la tabla de valores es diferente, una en forma ascendente y otra descendente.	
	Actividad 1 (definición de la función exponencial) *Actividad 2* (comparación de algunas funciones)	° Como esta parte de la actividad fue para una función en general $f(x) = a^x$, las estudiantes respondieron de forma correcta, en la representación natural, las diferentes preguntas planteadas. ° Las estudiantes pasaron de la representación gráfica a la representación natural correctamente.	9

Secuencia II	*Actividad 4* (transformaciones de funciones) *Actividad 5* (transformaciones de funciones base *e*) *Actividad 6* (preguntas de análisis)	° Las estudiantes realizaron de forma correcta la representación algebraica de la función y posteriormente, graficaron en Geogebra las transformaciones de esas funciones. ° Hubo 2 estudiantes que no realizaron la transformación algebraica en la hoja, sino que la hicieron directamente en Geogebra. ° Las estudiantes tenían claro, una vez hecha la transformación y con ayuda de Geogebra, cuáles eran las nuevas características de la función, por ejemplo, cual es la nueva asíntota.	12

Nota. Creación propia

8.4 Uso de Geogebra

El uso de esta aplicación propicia el aprendizaje que puede ser individual o grupal ya que GeoGebra, es un software interactivo que integra de manera dinámica aspectos o contenidos de diversos temas de matemáticas y es importante, ya que facilita los cálculos y la visibilidad de graficas además de estimular la creatividad de los y las estudiantes y docentes. Ahora ¿hasta qué punto es bueno que Geogebra nos de los cálculos? Pensando en la optimización del tiempo, Geogebra y cualquier calculadora, nos da el resultado correcto y en segundos, pero, si se quiere precisar en el aprendizaje de la estudiante y en que conozca y sepa cuál es el proceso para llegar a ese resultado, no sería útil que se use este software como ayuda.

Cabe mencionar que a las estudiantes de la Manuela Beltrán no se les mencionó, tampoco lo sabían, que Geogebra, aparte de darnos una representación gráfica, también realiza procesos algebraicos, esto porque, usarían este software para estos casos, algo que no se quería ya que no tendrían que analizar nada.

Hay que mencionar que las TIC representan a las herramientas de trabajo que hacen posible la integración de diferentes medios con las correspondientes ventajas de cada uno, favoreciendo la trasmisión de más información en menos tiempo, de forma variada y amena y permitiendo el establecimiento de un ambiente de aprendizaje favorable y significativo, donde el estudiante se siente motivado gracias a su carácter de interactividad y facilidad de acceso.

Hablar del quehacer docente en el contexto de la educación superior para comunicadores implica reconocer transformaciones significativas en los modelos y didácticas de enseñanza y aprendizaje. La comunicación social al igual que muchas otras disciplinas, tiene la viabilidad de elaborar productos interesantes para las clases haciendo un uso productivo de estos recursos. La cámara digital, la filmadora, el ordenador, la grabadora de voz, el mismo teléfono celular, constituyen algunas de las herramientas con las que el docente y estudiante deben interactuar a lo largo de su formación profesional.

En este sentido, como lo menciona Ariza (s.f.) educar en estos tiempos implica una formación compatible con nuevas formas de entretener, producir, aprender y trabajar, respetando los estilos de cada individuo y comunidad virtual. Hoy día se hablan de las pedagogías emergentes como el conjunto de enfoques e ideas pedagógicas, todavía no bien sistematizadas, que surgen alrededor del uso de las TIC en educación y que intentan aprovechar todo su potencial comunicativo, informacional, colaborativo, interactivo, creativo e innovador en el marco de una nueva cultura del aprendizaje, como resultado de prácticas innovadoras que realizan docentes intuitivos, sensibles a los cambios que está experimentando la sociedad y a las posibilidades que les ofrece la tecnología, comprometidos con la renovación didáctica.

De esta manera, Geogebra facilitó, a las estudiantes de grado 11 de la Manuela Beltrán, la visualización de la función lineal, cuadrática y exponencial.

Usos de este software por las estudiantes:

- ✓ Para corroborar los resultados realizados a lápiz y papel: las estudiantes decidieron usar este software para ver, por ejemplo, que las intersecciones, ejes de simetría y representaciones tabulares, coincidían con los resultados que habían obtenido con lápiz y papel.
- ✓ Para analizar la representación gráfica de una función: las estudiantes observaban la representación gráfica de la función en Geogebra para tener una idea del comportamiento de dicha función.

A continuación, veamos una respuesta de una estudiante, Figura 33 y Figura 35, en las cuales se identifican los tratamientos con papel y lápiz y en las Figura 34 y Figura 36 se observa que se acude a Geogebra para corroborar lo que había hecho.

Figura 33

Tratamientos con lápiz y papel

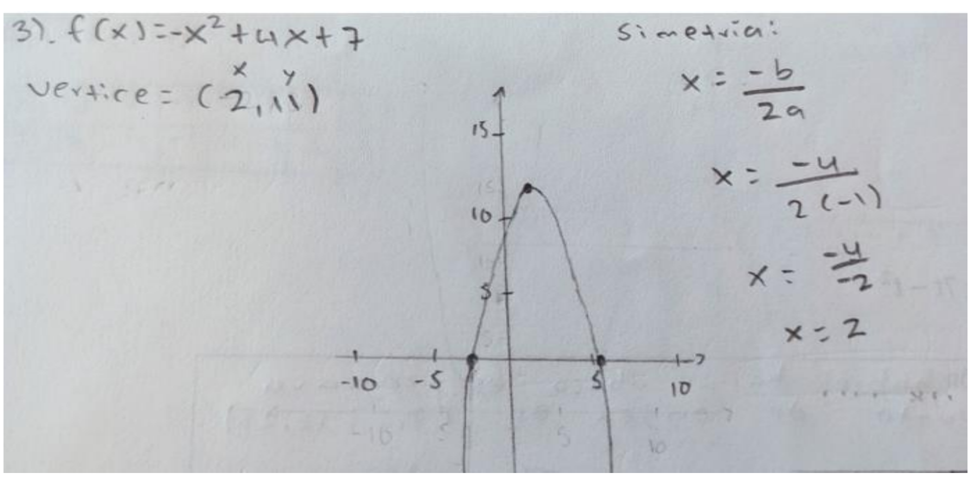


Figura 34

Geogebra para corroborar resultados

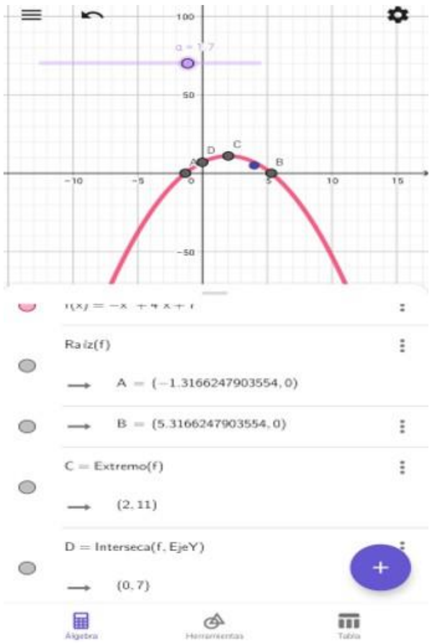


Figura 35

Tratamientos con lápiz y papel

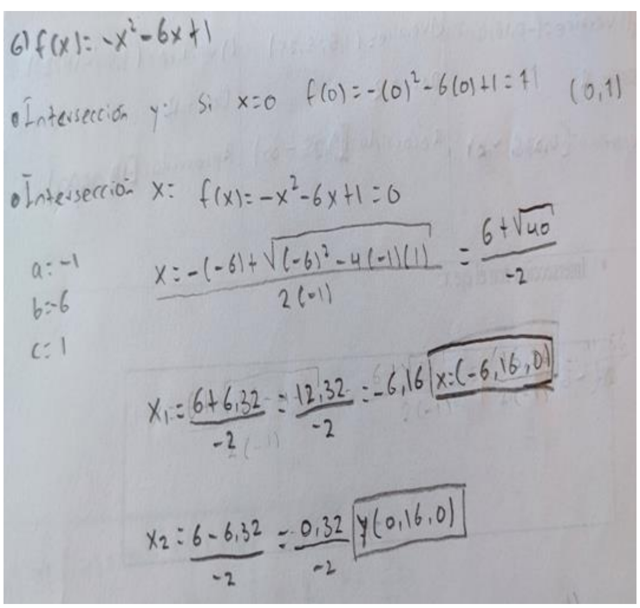
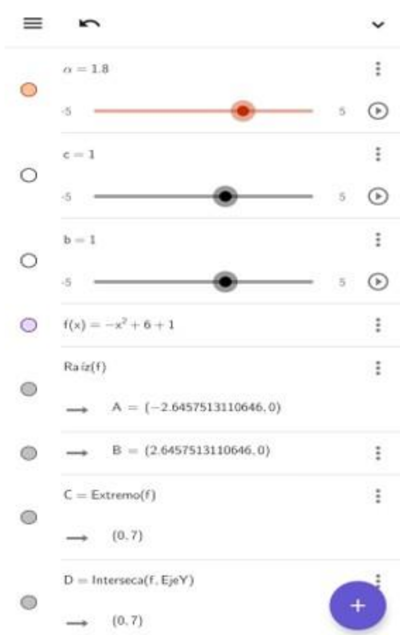


Figura 36

Geogebra para corroborar resultados



Para estos puntos, con el uso de Geogebra, las estudiantes por cuenta propia, reconocen los errores cometidos en los tratamientos en la representación algebraica. Con este software se logró solventar esas dificultades que realizaban con lápiz y papel.

Además, en algunos puntos de las actividades integrales de la función cuadrática, ciertas estudiantes no recordaban cuándo la parábola era cóncava o convexa $(a > 0\ convexa)$ y $(a < 0\ cóncava)$, por lo que acudían a la representación gráfica desde Geogebra, para responder a las preguntas planteadas.

- ✓ En cuanto a la función exponencial, hubo mucha curiosidad e interacción, cuando se trabajó la asíntota. Para las estudiantes era un tema nuevo, por lo que, el hecho de que había una curva que se prolongaba indefinidamente y que nunca iba a cortar a la asíntota, era un argumento que les generaba indagación. Gracias a este software las estudiantes se convencieron de dicha afirmación, además que es una situación que les generó una mayor motivación, ya que esta acción educativa se vuelve interactiva y dinámica.

Es esta una de las razones por la cual se implementó Geogebra, ya que, mediante la manipulación de las funciones matemáticas en un ambiente computacional, las estudiantes pudieron asociar los parámetros de la función con, por ejemplo, la forma de su representación gráfica y, además, permitió fácilmente visualizar la posición de la figura con sus ejes.

Conclusiones

Este trabajo surge como interés personal, gracias a la experiencia vivida como estudiante de la Sede Manuela Beltrán, en donde me encontraba con dificultades en el proceso de aprendizaje de las funciones matemáticas. Gracias a la formación en la línea de Educación Matemática brindada por el Programa de Licenciatura, descubrí en la teoría de registros de representaciones semióticas las razones por las cuales es difícil acceder al concepto de función sin que se presenten explícitamente sus múltiples representaciones. Las múltiples representaciones de un concepto matemático son muy importantes ya que no nos podemos quedar con una sola representación, sabiendo que estas aportan variadas características necesarias para construir los diferentes conceptos. Por otra parte, el uso de Geogebra causó un impacto positivo en el aula, ya que abrió un abanico de herramientas que permitió motivar a las estudiantes y apoyarlas en el proceso individual de construcción de conocimiento.

Con respecto a los resultados de la práctica: en referencia a la pregunta de investigación: ¿Cómo la teoría de registros de representación semiótica permite identificar el conocimiento de las funciones: lineal, cuadrática y exponencial? Se logró identificar, por medio del tránsito entre los diferentes registros de representación, la movilización de la noción de función lineal, cuadrática y exponencial; estableciendo así la comprensión matemática de dicha noción por medio de la discriminación de las unidades significantes entre los diferentes registros de representación semióticos disponibles; permitiendo a las estudiantes cruzar el umbral de la conversión de representación.

Referente al objetivo general: Facilitar el conocimiento de algunas funciones mediante el uso de la teoría de los registros de representación semiótica. Se logró, ya que, en el desarrollo de las secuencias didácticas, se evidencia que se distinguen las unidades significantes de los diferentes registros de representación semiótica en que se presentaron las actividades: de lengua natural, algebraico, gráfico y tabular; por lo que se puede afirmar que, a través de la coordinación, las estudiantes poseen la capacidad de percibir el mismo objeto matemático en estos registros. Posteriormente, por medio de esta coordinación, se identifican las actividades cognitivas.

En relación con los objetivos específicos que se plantearon para alcanzar el objetivo general, las estudiantes transitaron entre los diferentes registros de representación y establecieron sus relaciones mediante el uso de Geogebra. Ahora, el registro de representación semiótico con el que se sintieron mayor familiaridad, fue con el registro gráfico. Esto porque un aprendizaje visual es uno de los mejores métodos para el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Las técnicas de aprendizaje visual, formas gráficas de trabajar con ideas y de presentar información, enseñan a los estudiantes a clarificar su pensamiento, y a procesar, organizar y priorizar nueva información.

Es por eso que sería positivo que en las aulas se siga usando el software Geogebra ya que no solo permite resolver de manera rápida y segura los más variados y diversos problemas que se presentan en el aprendizaje de la matemática, sino también, porque es una herramienta que permite estimular y desarrollar la creatividad de los alumnos, al permitirle descubrir y construir los conocimientos que son objeto de estudio.

Para terminar, es importante que los docentes tengan en cuenta las diversas representaciones semióticas de un objeto matemático, las cuales son absolutamente necesarias en el proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que los objetos matemáticos no son directamente accesibles por la percepción o por una experiencia intuitiva inmediata como son los objetos comúnmente llamados “reales” o “físicos”. Siendo docentes de matemáticas, constatamos cómo la utilización de los contenidos visuales, algebraicos, tabulares y simbólicos, entre otros, resulta muy ventajosa al presentar y manipular ciertos conceptos matemáticos. Es importante reflexionar acerca de la especial importancia del uso de representaciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de aquellos contenidos de la asignatura que, se cree, tienden a ser abordados con un excesivo formalismo.

9. Referencias Bibliográficas

Alzate, T., & Eugenio, Ó. (2006). Representaciones semióticas y evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas. *Revista Educación y Pedagogía* , 37-49.

Ariza, C. (s.f.). *Humanidades digitales, diálogo de saberes y prácticas colaborativas en red. Las TIC y las TAC dentro de la educación para comunicadores sociales y periodistas: el nuevo reto del perfil profesional.* Obtenido de IV. Investigación y Docencia: https://www.javeriana.edu.co/unesco/humanidadesDigitales/ponencias/pdf/IV_113.pdf

Ascárate, C., & Piquet, J. (1990). *Red de Información educativa*.

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la Didáctica de las Matemáticas.* Trabajos de matemática, faMAF UNC. (traducido de Fondaments et méthodes de la didactique). : Recherches en didactique des mathématiques.

Buitrago, G. (12 de Octubre de 2012). *Repositorio institucional. Biblioteca digital*. Obtenido de repositorio.unal.edu.co

Cano, J. (2012). *La definición del concepto de función bajo el enfoque de la Enseñanza para la Comprensión en estudiantes de Grado 11 de una institución educativa oficial de Medellín.* Medellín .

Cen, I. d. (2015). George Polya (1965). Cómo plantear y resolver problemas [título original: How To Solve It?]. *Entreciencias: diálogos en la sociedad del conocimiento*, 3.

Córdoba, L., Díaz, M., Haye, E., & Montenegro, F. (2013). *Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas.* Santo Domingo.

Díaz, Á. (2013). *Guía para la elaboración de una secuencia didáctica .* México: Comunidad de Conocimiento UNAM.

Díaz, J. (2008). *El concepto de función: investigaciones y enseñanza.* Sonora: Academia.

Duval. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. *Revista Aula Universitaria*, 29-36.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Estrasburgo.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano.* Peter Lang S.A. Editions scientifiques.

Garijo, A., & Lucía. (2014). *Enseñanza de funciones y gráficas en 1° de Bachillerato basado en el uso de Geogebra.* Barcelona.

Garijo, L. (2014). *Enseñanza de funciones y gráficas en 1° de Bachillerato basado en el uso de Geogebra.* Barcelona.

Godino, J., Batanero, C., & Vicent, F. (2003). *Fundamentos de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas para maestros.* Manual para el estudiante.

Mancera, E., & Neira, E. (2018). *Dificultades cognitivas de los estudiantes de grado noveno para relacionar las representaciones de la función lineal .* Bogotá.

Martínez, J. (2013). *Apropiación del concepto de función usando el software Geogebra*. Obtenido de Universidad Nacional de Colombia. Repositorio institucional. Bilblioteca digital: http://www.repositorio.unal.co

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares del Ministerio de Educación Nacional.*

Mosquera, I. E. (2021). *Alcaldía de Popayán*. Obtenido de https://www.tomascipriano.edu.co/quienes-somos/proyecto-educativo

Panizza, M., Sadovsky, P., & Sessa, C. (s.f.). *Los primeros aprendizajes algebraicos. Cuando las letras entran en la clase de Matemática.* Comunicación realizada a la sección REM de la reunión anual de la Unión Matemática Argentina, Córdoba.

Pecharroman, C., Arce, M., Conejo, L., & Ortega, T. (2018). Metodología teórica para analizar la congruencia entre representaciones de objetos matemáticos: el caso de los intervalos no acotados de la recta real. 27.

Peralta, J. (2003). *DIFICULTADES PARA ARTICULAR LOS REGISTROS GRÁFICO, ALGEBRAICO Y TABULAR: EL CASO DE LA FUNCIÓN LINEAL.* Sonora.

Polya, G. (2015). *Revistas UNAM*. Obtenido de http://revistas.unam.mx/index.php/entreciencias

Sagñay, J. (2017). *La utilización de Geogebra, como recurso didáctico en el aprendizaje de funciones, para el décimo año de la Unidad Educativa Amelia Gallegos Díaz. periodo 2016-2017 .* Riobamba: Riobamba.

Testa, Y. (16 de 06 de 2016). *Slideshare*. Obtenido de https://es.slideshare.net/yacirt/registros-de-representacion-semiotica

Vives, M. (2016). *Modelos pedagógicos y reflexiones para las pedagogías del sur .*

10. Anexos

Anexo #1. Función Lineal

Actividad Recta

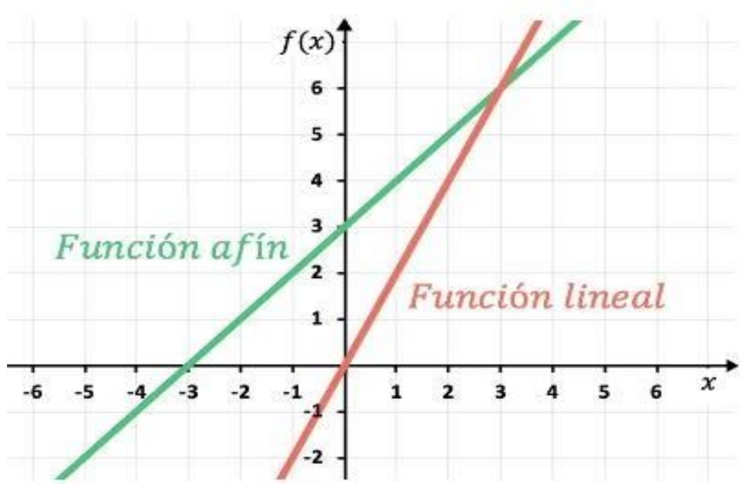
Cuando la gráfica de una función es una recta:

- Una **función afín** es una función polinómica de primer grado, es decir, es una función que representada en la gráfica es una línea recta. Las funciones afines son de la siguiente forma: $f(x) = mx + n$, donde m es la pendiente de la recta y n es la ordenada en el origen, es decir, donde la función corta con el eje vertical.

- Una **función lineal** es una función afín que no tiene término independiente. Por lo tanto, la fórmula de las funciones lineales es la siguiente: $f(x) = mx$, donde m es la pendiente de la recta.

Nota:
El dominio y el recorrido (o rango) tanto de la función lineal como de la función afín son todos los números reales: $Dom\ f = \mathbb{R}$, $Rec\ f = \mathbb{R}$

Diferencia entre una función lineal y una función afín



1. Cálculo de una función a partir de dos puntos

Ejemplo:

Calcula la función lineal que cumple $f(3) = 5$ y pasa por el punto $(1, -1)$.

Dados dos puntos por los que pasa la función, podemos calcular la pendiente m de la función:

Dados dos puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ la pendiente m de la función se calcula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

¿Cómo saber si la función es lineal o afín? Calculamos la ecuación de la recta:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

O sea,

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Entonces, $m = 3$.

La función es, $f(x) = 3x - 4$.

Justifica el resultado anterior y grafica la función.

2. Encuentra la representación algebraica de la función que pasa por los puntos $(2,3)$ y $(0,1)$. ¿Es una función lineal o afín?

3. Halla la función que cumple que $f(1) = 6$ y pasa por le punto $(3,5)$.

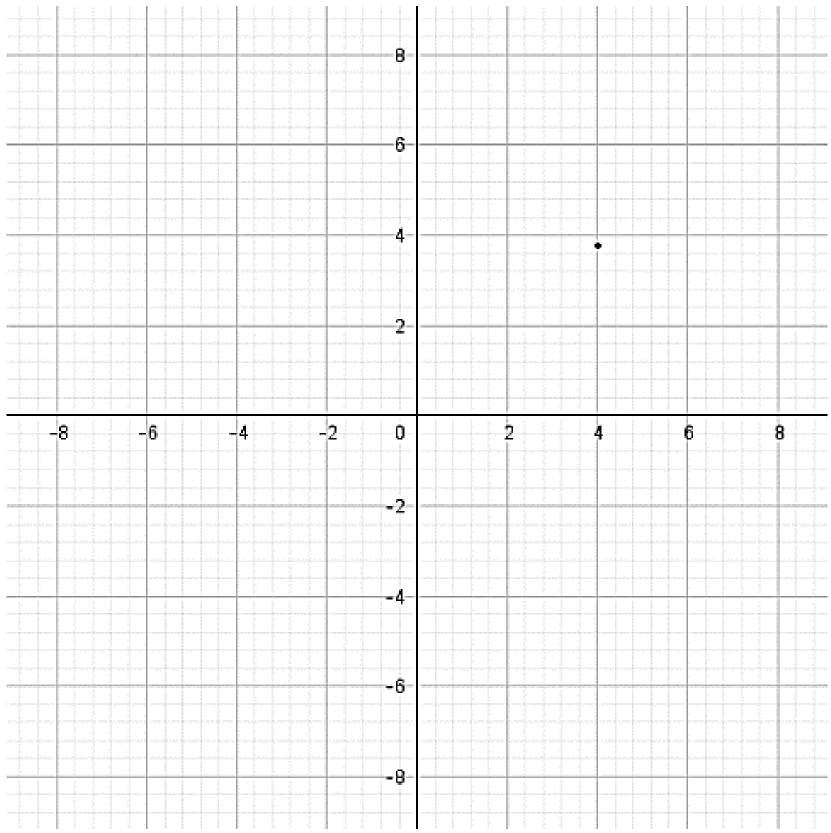
Actividad 1. Evaluación diagnóstica.

Unidad: Análisis de funciones lineales

1. Con tus propias palabras define lo que es función.

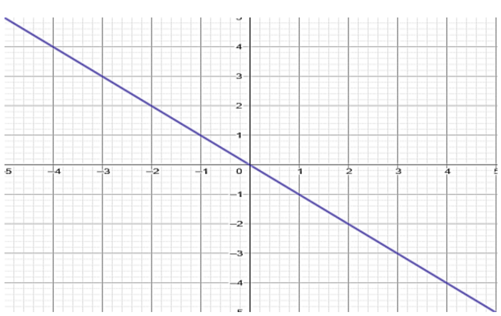
2. Grafica los siguientes puntos en el plano cartesiano:

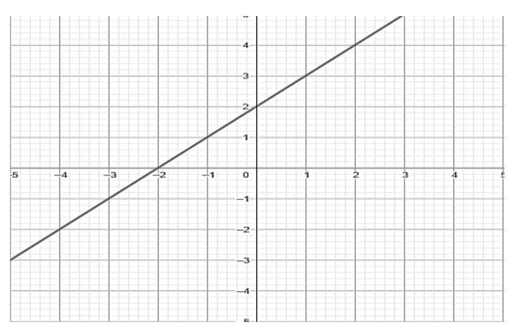
A (2, 4), B (-4, 7), C (-3, -2), D (2, -6), E (1, -1), F (-3, 1) y G (-2, -4)



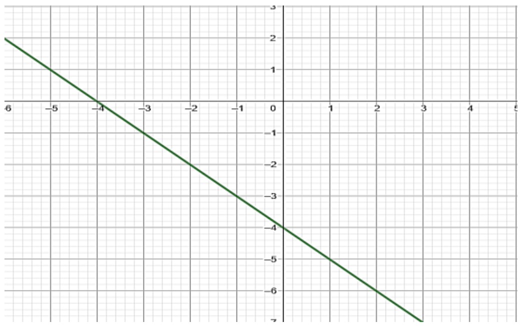
3. Relaciona cada una de las siguientes gráficas con la función que le corresponde:

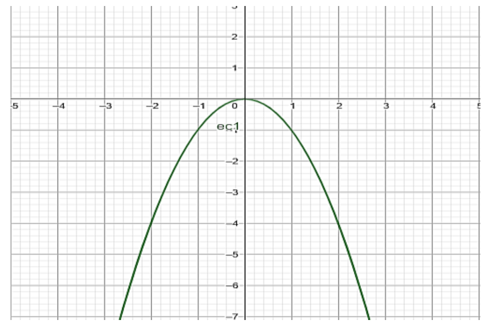
(a). $-f(x) = x$ (b). $-f(x) = x + 4$ (c). $-f(x) = -x - 2$ (d). $-f(x) = x^2$





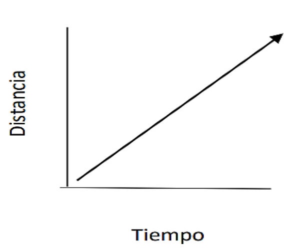
( ) ( )

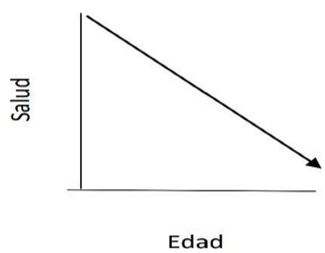


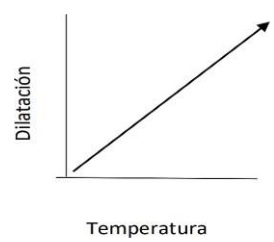


( ) ( )

4. Observa las siguientes gráficas y describe, ¿Qué relación existe entre las variables de cada una de ellas?







5.

- Analiza la siguiente tabla y describe de qué manera se relacionan las variables: kilogramos de masa (variable independiente) y kilogramos de tortillas (variable dependiente).

Masa (kilogramos)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Tortillas (kilogramos)	1.5	3	4.5	6	7.5	9	10.5	12	13.5	15

- Realizar e interpretar la gráfica correspondiente.

6. Convierte del Registro Natural al Registro Algebraico los siguientes enunciados:

a) Un vehículo recorre una distancia

b) Un camión de volteo es capaz de llevar 2 toneladas de carga (tn) por cada flete **c)** La esperanza de vida de una mujer (m) es 4 años mayor a la de un hombre (h).

d) La diferencia (df) entre un número (n) y el número anterior a este.

Actividad 2. Aplicación de Secuencia Didáctica.

Problema 1. Planes de voz

El problema Planes de voz está propuesto para que las estudiantes inicialmente comparen tres compañías telefónicas a partir de un gráfico dado, la comparación debe dar cuenta de la relación que las estudiantes establezcan en cada compañía entre el número de minutos y el valor a pagar por ellos. El problema presentado mediante el Registro Gráfico, pretende posibilitar que las estudiantes reconozcan y establezcan una relación funcional entre las variables y, puedan expresarla a través del Registro Algebraico. El objetivo de esta tarea es enfrentar a las estudiantes a una situación problema en la que deban comparar gráficos cartesianos visualmente semejantes, que representan funciones muy diferentes y, elegir convenientemente la mejor opción, la cual deberán respaldar con argumentos apoyados en la identificación de las variables involucradas y la relación de dependencia entre ellas, la cual deben generalizar a través de una fórmula o expresión algebraica.

A continuación, se muestran los gráficos de algunos planes de voz de tres compañías de telefonía celular, en donde se relaciona el número de minutos y el valor a pagar.

Analice cada una de estas propuestas.

Figura 1. Compañía telefónica N°1

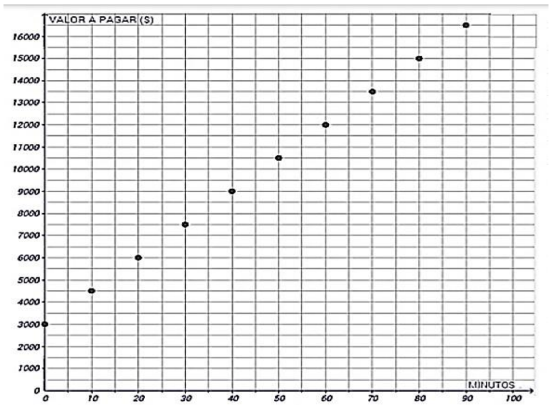


Figura 2. Compañía telefónica N°2

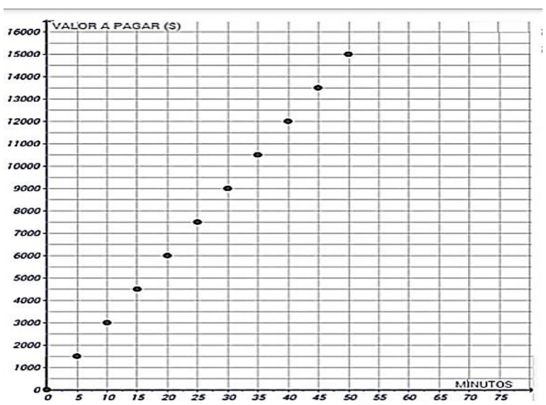
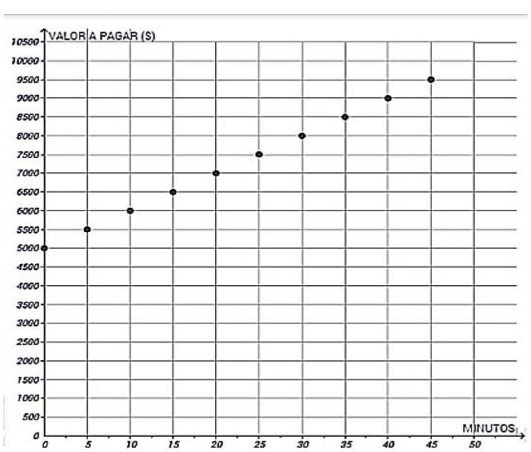


Figura 3. Compañía telefónica N°3



Preguntas:

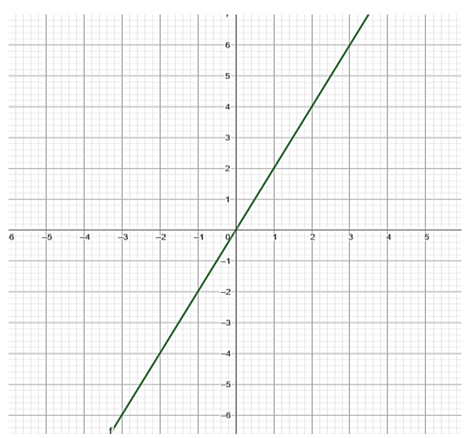
1. **1.** Si usted tuviera que tomar la decisión y determinar cuál de ellos es más favorable, intuitivamente ¿Qué plan tomaría?
2. **2.** ¿Qué razones justificarían que el plan elegido corresponde a la decisión más acertada? Explique por qué ese y no otro.
3. **3.** Para el punto anterior tenga en cuenta los siguiente: la inclinación de la recta que representa cada compañía, permite comparar los valores de sus pendientes. En este caso, identifique la recta que se encuentra más inclinada y considérela como una razón importante para su elección. Para ellos, halle la pendiente de cada recta.
4. **4.** Encuentre una expresión algebraica que le permita determina el valor a pagar para un número n de minutos del plan elegido.

Actividad 3. Actividad de Evaluación.

Unidad: Análisis de funciones lineales

Las preguntas 1 y 2 se responden considerando la siguiente información:

Dada la función f, donde $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, representada en la siguiente gráfica:



1. De las siguientes expresiones algebraicas, ¿cuál corresponde a la gráfica?:

a. $f(x) = x + 1$ b. $f(x) = -x$ c. $f(x) = \frac{x}{2}$ d. $f(x) = 2x$

2. ¿Cuáles de los siguientes pares ordenados está constituido por elementos de la gráfica de la función f?

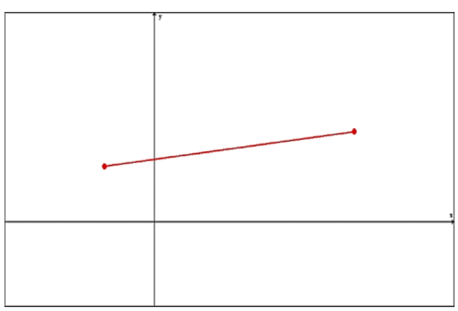
a. $(0,1)$ b. $(1,2)$ c. $(\frac{1}{2}, 1)$ d. $(-2,-4)$ e. $(4,8)$ f. $(100,200)$

Justifique su respuesta.

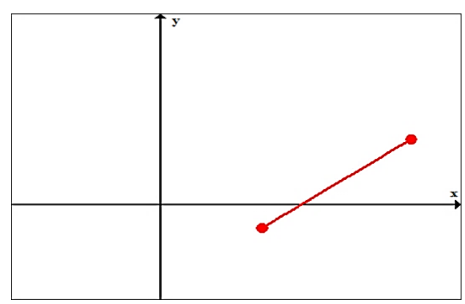
3. Identifique y justifique cuál de las siguientes gráficas representa una función cuyo dominio es:

$\{x: 2 \leq x \leq 6\}$ y su rango es $\{f(x): -1 \leq f(x) \leq 4\}$.

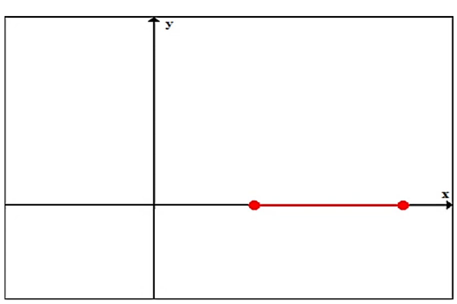
a.



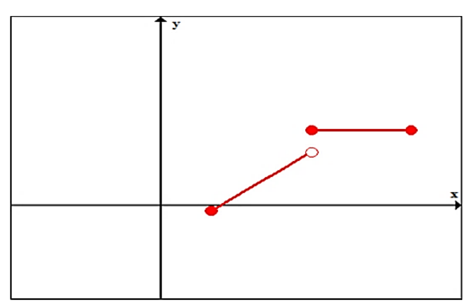
b.



c.



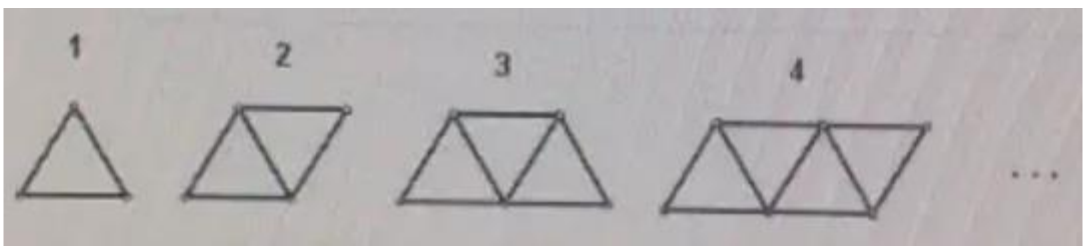
d.



4. Para cada una de las situaciones propuestas a continuación, proponga una expresión algebraica que la represente.

a. La longitud de un lote de forma rectangular es tres veces su ancho.

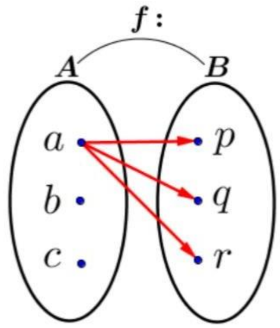
b. Claudia construye figuras geométricas usando palitos de madera del mismo tamaño. Para cada lado del triángulo equilátero utiliza un palito. Las figuras que construye las ubica en fila, como se observa en la figura:



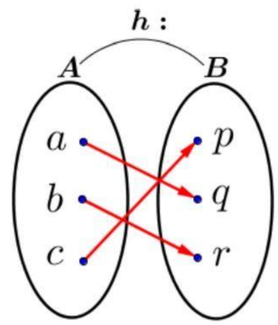
- Su compañero Julio afirma: "En la figura 4, Claudia ha usado 9 palitos de madera, entonces, por regla de tres simple, en la figura 8 usará el doble; o sea 18 palitos de madera" ¿La proposición expresada por Julio es verdadera o falsa? ¿Por qué?
- Encuentra una expresión algebraica que permita obtener el número de palitos que tendrá la figura "n" de la secuencia.
- Representa en el plano cartesiano la función obtenida en el punto anterior.

5. A continuación, se presentan seis relaciones entre dos conjuntos ¿Cuáles de ellas son funciones? Justifique su respuesta.

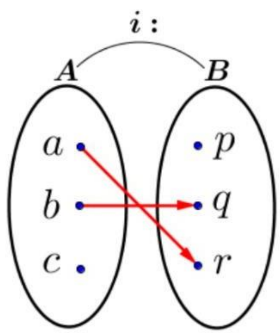
a.



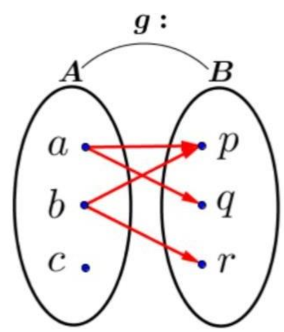
b.



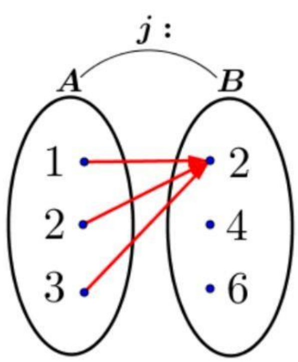
c



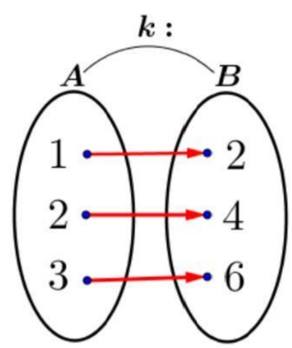
d.



e.



f.



6. ¿Con cuál de las Representaciones de función tienes mayor familiaridad? ¿por qué?

7. ¿Qué entiendes por función a través de sus diversas Representaciones?

Anexo #2. Función Cuadrática

1. ¿Qué entiendes por función cuadrática?

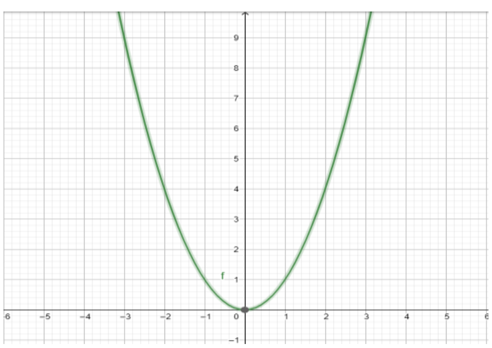
Actividad 1.

Introducción teórica

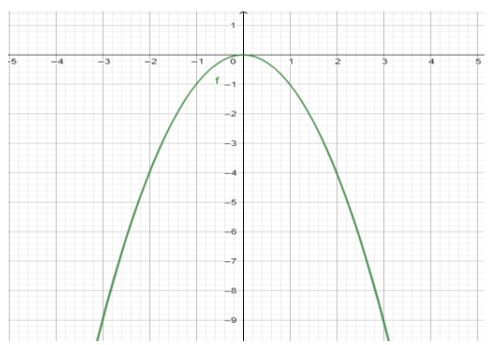
2. Representación gráfica de una función cuadrática

Veamos en general, la forma típica de la gráfica de una función cuadrática mediante algunos ejemplos:

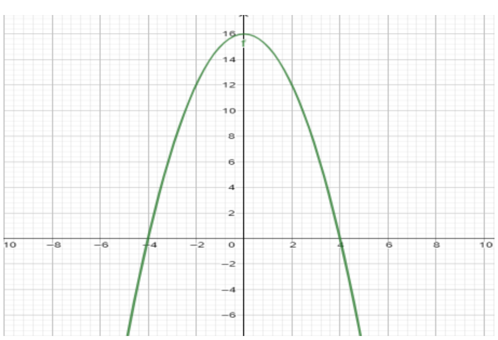
a) $y = x^2$



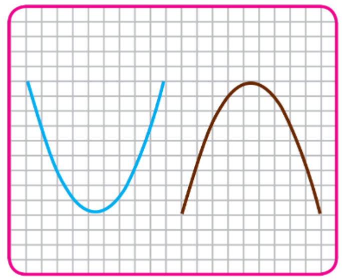
b) $y = -x^2$



b) $y = 16 - x^2$



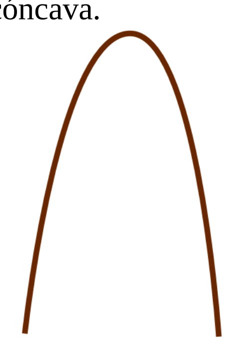
De acuerdo a los gráficos que se han obtenido, se puede concluir que las gráficas de las funciones cuadráticas tienen una forma característica como se aprecia en la figura:



3. Orientación o concavidad de la parábola.

Como apreciamos, al esbozar la gráfica de la función cuadrática, comúnmente, esta se abre hacia arriba o hacia abajo, lo que está indicado por el signo del coeficiente a que acompaña a x^2, es decir, dada la función:

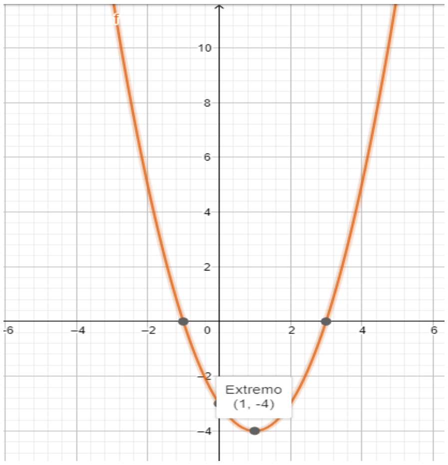
$$f(x) = ax^2 + bx + c; a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$$

Si $a > 0$	**Si** $a < 0$
La parábola se abre hacia arriba, es decir, es convexa. 	La parábola se abre hacia abajo, es decir, es cóncava. 

<u>Ejemplos:</u>

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3, a = 1 > 0$

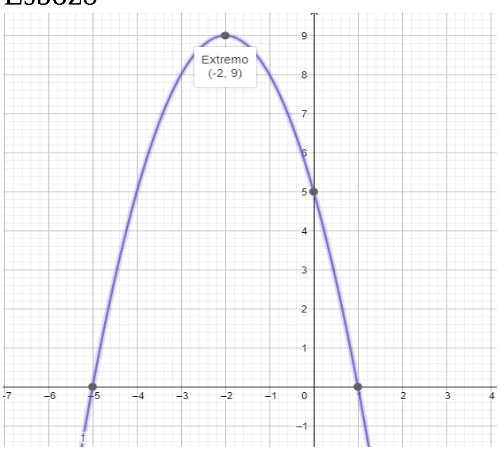
Esbozo



Orientación: convexa

b) $f(x) = -x^2 - 4x + 5, a = -1 < 0$

Esbozo



Orientación: cóncava

4. Eje de simetría de la parábola

En el tipo de funciones cuadráticas que estamos estudiando: $f(x) = ax^2 + bx + c$; el eje de simetría es una recta vertical, paralela al eje y, que atraviesa la gráfica de manera que cada rama de ésta, separada por el eje, es el “reflejo” de la otra, asumiendo la idea de que éste simula un espejo. El eje de simetría intersecta a la parábola en el vértice y al eje X

en el valor x que es la abscisa del vértice. La fórmula del valor x mencionado, conocida como Ecuación del Eje de Simetría es:

$$\boxed{x = \frac{-b}{2a}}$$

Ejemplo:

Observe a continuación cómo determinar el eje de simetría:

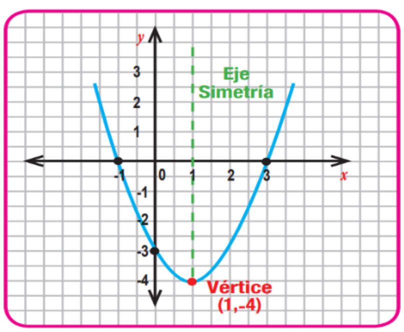
$f(x) = x^2 - 2x - 3$

Como $a = 1$, $b = -2$, $c = -3$, calculamos las coordenadas del punto de vértice, haciendo uso de la valoración de la expresión algebraica:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$x = \frac{-(-2)}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1$$

Eje de simetría, $x = 1$.



5. *Vértice de la parábola*

Al esbozar la gráfica de la función cuadrática,

$$f(x) = ax^2 + bx + c; a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$$

observamos que, dependiendo de la orientación de la parábola, esta presenta un punto en el plano cartesiano, que es mínimo si se abre hacia arriba (cóncava), o máximo si se abre hacia abajo (convexa), este punto se denomina vértice de la parábola y se puede determinar a través de la expresión:

$$\boxed{V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)}$$

<u>Ejemplo:</u>

Observe detenidamente el cálculo del vértice de la parábola.

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

Los coeficientes son: $a = 1, b = -2, c = -3$.

Determinamos las coordenadas del punto de vértice, haciendo uso de la expresión anteriormente mencionada y evaluemos.

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1. \mathit{Por\ tanto}\ x = 1$$

y

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f(1) = 1^2 - 2(1) - 3 = -4. \mathit{Por\ tanto}\ y = -4$$

Así,

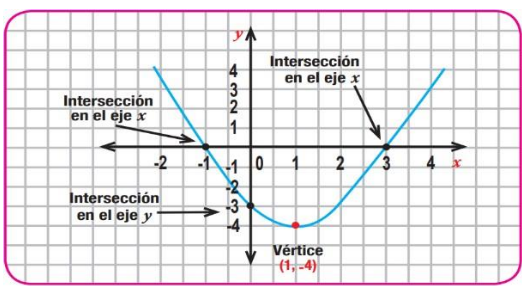
$$\boxed{V(1, -4)}$$

6. *Intersección con los ejes: intercepto y ceros*

- *Intercepto:* Se llama así al valor donde la gráfica de la función intercepta al eje y. Para determinar este valor se reemplaza x por 0 en la ecuación de la función. Así, $y = f(0)$ es el valor en que la gráfica corta al eje y. Dada la función cuadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c, c$ es el intercepto.
- *Ceros:* Se llaman así a los valores donde la gráfica de la función intercepta al eje X. Para determinar la intersección con el eje x, se iguala la función a 0 y se resuelve la ecuación cuadrática. Así, al hacer en la ecuación $y = 0$, y resolver $f(x) = 0$, se determinan los ceros de la función. La cantidad de ceros puede ser 2, 1 o 0, caso último en que la gráfica no intercepta al eje X.

Ejemplo:

$$f(x) = x^2 - 2x - 3, a = 1 > 0$$



- *Intersección con el eje y:*

  Se evalúa $x = 0$. Luego:

  $$f(0) = 0^2 - 2 \times 0 - 3 = -3$$

  Así, la intersección con el eje y es $(0, -3)$.

- *Intersección con el eje x*:

Al igualar a cero la función cuadrática se obtiene la ecuación cuadrática $f(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$, que resolvemos usando la expresión:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; a = 1; b = -2; c = -3$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$x_1 = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Las intersecciones con el eje x son: $(3,0)$ y $(-1,0)$.

7. *Proceso algebraico para determinar si una función posee intersecciones con el eje x*

Algebraicamente, se puede determinar rápidamente si una función tiene, o no, intersecciones con el eje x. Para ello, basta analizar el signo del *discriminante*.

En la función $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ la expresión algebraica del discriminante es $b^2 - 4ac$

$b^2 - 4ac < 0$ → La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene raíces que sean números reales, por lo que la solución corresponde a dos números complejos. La gráfica de la función no intersecta al eje

$b^2 - 4ac = 0$ → La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene una solución real. La gráfica intersecta al eje x en un punto (el vértice).

$b^2 - 4ac > 0$ → La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene 2 raíces o soluciones reales. La gráfica de la función intersecta 2 veces al eje x.

Ejemplo:

Sea $f(x) = x^2 + 3x + 5$, determinar si posee intersecciones con el eje x.

Primero identificamos los coeficientes: $a = 1, b = 3, c = 5$.

Luego valoramos algebraicamente la expresión discriminante:

$$b^2 - 4ac = 3^2 - 4(1)(5) = 9 - 20 = -11$$

La expresión discriminante es negativa, por lo que determinamos que la ecuación no tiene raíces reales, por lo tanto, la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 3x + 5$, no intersecta al eje x.

8. Rango o recorrido de una función cuadrática

El rango o recorrido son los valores determinados para la variable dependiente y. Se determina conociendo la coordenada de la ordenada del vértice, además de la orientación de la parábola.

En forma general: dada la función cuadrática,

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c; \; a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$$

podemos observar lo siguiente:

Si $a > 0$, el recorrido o rango de f es:

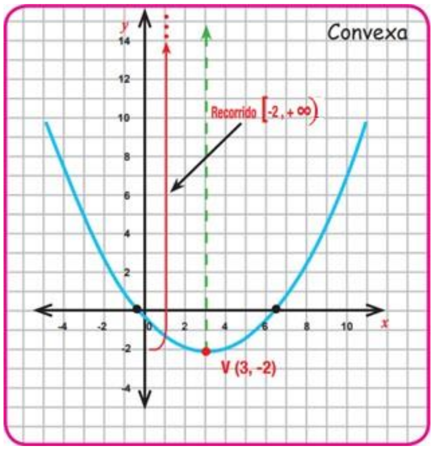
Rec f: $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right)$

Si $a < 0$, el recorrido o rango de f es:

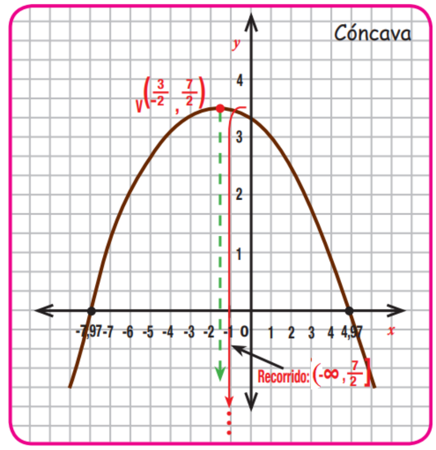
Rec f: $\left(-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$

Para determinar el recorrido teniendo la gráfica, debe observar atentamente el eje y desde el vértice.

Ejemplos:



La coordenada y del vértice es -2 y la parábola es convexa, por lo tanto, el recorrido es: Rec f: $[-2, +\infty)$



La coordenada y del vértice es $\frac{7}{2}$ y la parábola es cóncava, por lo tanto, el recorrido es: Rec f: $(-\infty, \frac{7}{2}]$

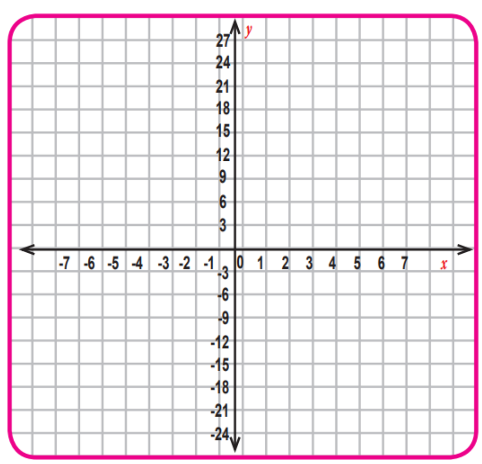
Actividad 2.

Actividad Integral Nº 1

1. Complete las siguientes tablas y ubique los puntos en el plano cartesiano esbozando la gráfica de la función:

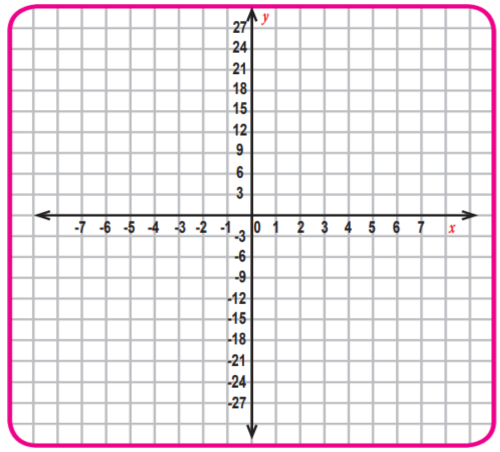
a) $f(x) = x^2$

x	$y = f(x) = x^2$	(x,y)
−5	25	(−5,25)
−4		
−3		
−2		
−1		
0		
1		
2		
3		
4		
5		



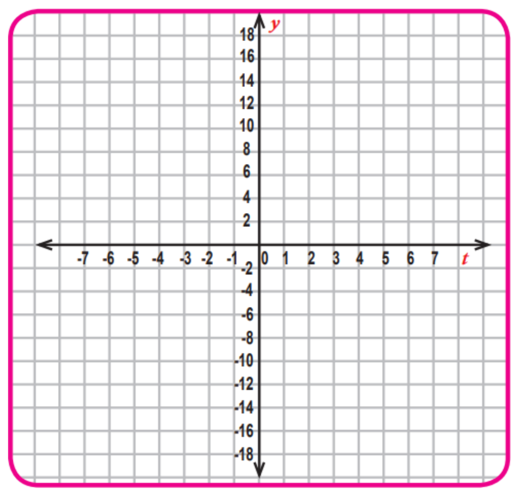
b) $h(x) = -x^2$

x	$y = h(x) = -x^2$	(x,y)
−5	−25	(−5,−25)
−4		
−3		
−2		
−1		
0		
1		
2		
3		
4		
5		



c) $h(t) = 16 - t^2$

x	$h(t) = 16 - t^2$	(x,y)
−5	−9	(−5,−9)
−4		
−3		
−2		
−1		
0		
1		
2		
3		
4		
5		



2. Utilice Geogebra para observar las gráficas de las funciones cuadráticas, e identifique su orientación o concavidad:

a) $f(x) = 2x^2 + 3$

Orientación:

b) $f(t) = 4t + (2 - t)^2$

Orientación:

c) $h(x) = 2x^2 - 8x$

Orientación:

d) $g(t) = 12t - t^2$

Orientación:

e) $g(x) = -x^2 - 6x + 13$

Orientación:

3. Determine y dibuje el vértice y el eje de simetría de la función,

$f(x) = -x^2 - 4x + 5.$

Realice la gráfica en Geogebra apoyándose en una tabla de valores.

4. En cada una de las funciones cuadráticas, determine el eje de simetría.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ b) $f(x) = 2x^2 - 8x$ c) $f(x) = x^2 - 4x - 5$

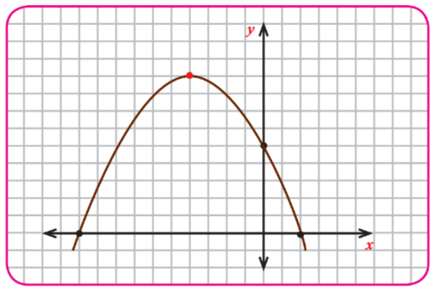
d) $f(x) = 12x - 2x^2$ e) $f(x) = -x^2 - 12x + 3$ f) $f(x) = 3x^2 - 15x +$

6

5. En cada una de las funciones cuadráticas anteriores, determine su vértice, dominio y recorrido.

6. Determine las intersecciones con los ejes de la parábola dada por,

$f(x) = -x^2 - 4x + 5, a = -1 < 0$



- Intersección con el eje x:

- Intersección con el eje y:

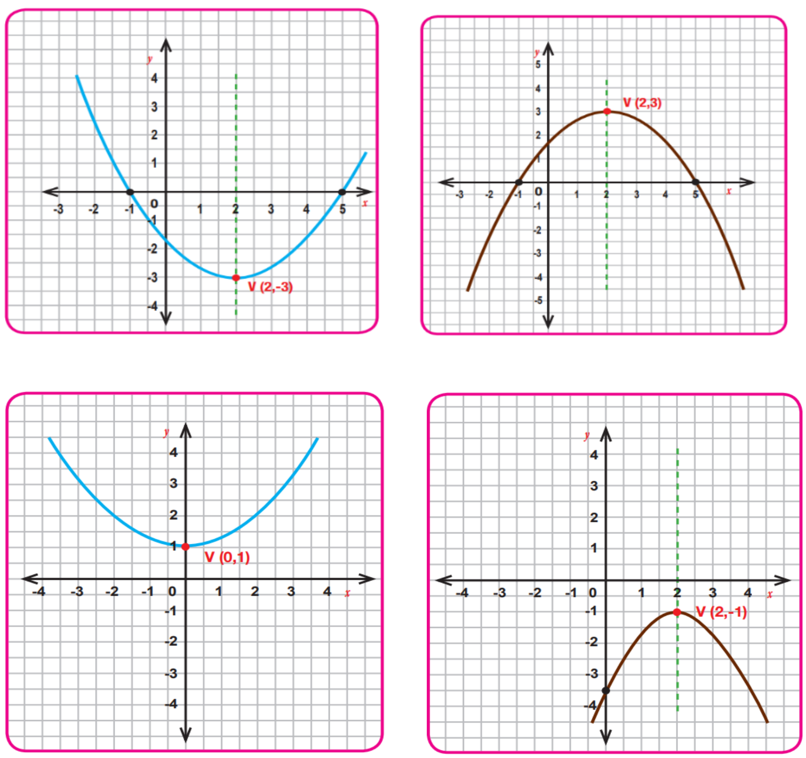
7. En cada una de las funciones cuadráticas del punto 4, determine las intersecciones con los ejes X e Y.

8. En cada una de las siguientes funciones cuadráticas, determine si hay intersecciones con los ejes coordenados y las coordenadas de estas.

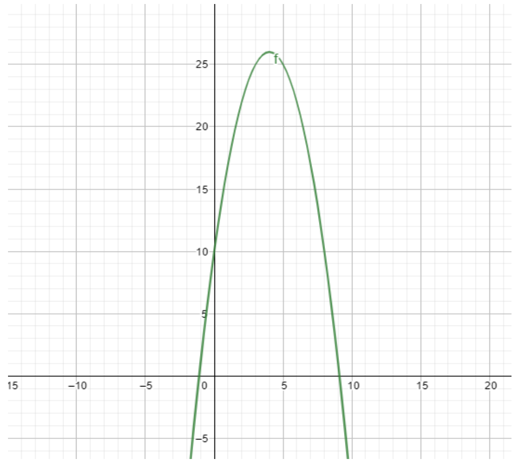
a) $f(x) = x^2 + x + 1$ b) $f(x) = x^2 + 2$ c) $f(x) = 2x^2 + 8x + 9$

d) $f(x) = -x^2 + 6x - 10$ e) $f(x) = -x^2 - 8$ f) $f(x) = -x^2 + 6x - 11$

9. Dada la gráfica de las funciones cuadráticas, determine su dominio y recorrido.



10. Sea la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ y cuyo gráfico es como se muestra en la siguiente figura:



Considere la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ vinculada a la función, y la información brindada anteriormente para responder los siguientes ítems:

a) ¿"a" puede tomar cualquier valor real diferente de cero? ¿Por qué?

b) ¿"c" puede tomar cualquier valor real? ¿Porque?

c) ¿El discriminante de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ puede ser positivo?

Actividad Integral Nº 2

La representación gráfica de la función,

$$f(x) = a(x-4)^2 + 6x + c - 16; a, c \in \mathbb{R}$$

pasa por el punto $(4,5)$.

De acuerdo a lo enunciado, responda los siguientes ítems:

a. Halle el valor de c.
b. Si uno de los puntos que resulta de intersectar la representación gráfica de la función con el eje X tiene abscisa $x = -1$, halle el valor de a.
c. Represente el grafico de la función f indicando:

- Las coordenadas del vértice
- Intercepto con los ejes coordenados

d. Tres estudiantes del curso de Matemáticas manifiestan lo siguiente:

- Julián: “el valor mínimo de la función f es 1”
- Edwin: “el intervalo donde $f(x) > 0$ es $[1, +\infty]$
- Valeria: “el valor mínimo de la función depende del dominio que tenga.

  Ejemplo, si $Dom(f) = [-\infty, 0]$ entonces el $\min(f) = -3$”.

¿Está usted de acuerdo con estas afirmaciones? Justifique su respuesta.

Anexo #3. Función Exponencial

Actividades.

Primera secuencia didáctica.

Secuencia I.

Actividad 1. Parte 1

Introducción.

Consideremos la función $y = 2^x$.

Registro de Representación Algebraica $y = f(x) = 2^x$							
Registro de Representación Tabular Llenar la siguiente tabla:							
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x							
Registro de Representación Gráfico Con ayuda de Geogebra, observar la gráfica con los valores de la tabla anterior.							
Características de la gráfica $Dom\ (f) =$ ____________________ $Rango\ (f) =$ ____________________ Intersecciones con el eje X ____________________ Intersecciones con el eje Y ____________________ Asíntotas verticales ____________________ Asíntotas horizontales ____________________ ¿Creciente o decreciente? ____________________ Concavidad ____________________ Función inyectiva. Si o no. ____________________ ¿Tiene función inversa? ____________________							

Actividad 2. Parte 2

Introducción.

Consideremos la función $y = 2^{-x}$.

Registro de Representación Algebraica $y = f(x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
Registro de Representación Tabular

Llenar la siguiente tabla:							
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^{-x}							

Registro de Representación Gráfico
Con ayuda de Geogebra, observar la gráfica con los valores de la tabla anterior.

Características de la gráfica
$Dom\ (f) =$ ____________________
$Rango\ (f) =$ ____________________
Intersecciones con el eje X ____________________
Intersecciones con el eje Y ____________________
Asíntotas verticales ____________________
Asíntotas horizontales ____________________
¿Creciente o decreciente? ____________________
Concavidad ____________________
Función inyectiva. Si o no. ____________________
¿Tiene función inversa? ____________________

Actividad 3. Pregunta de análisis.

¿Qué diferencia hay entre las dos funciones anteriores?

Secuencia II.

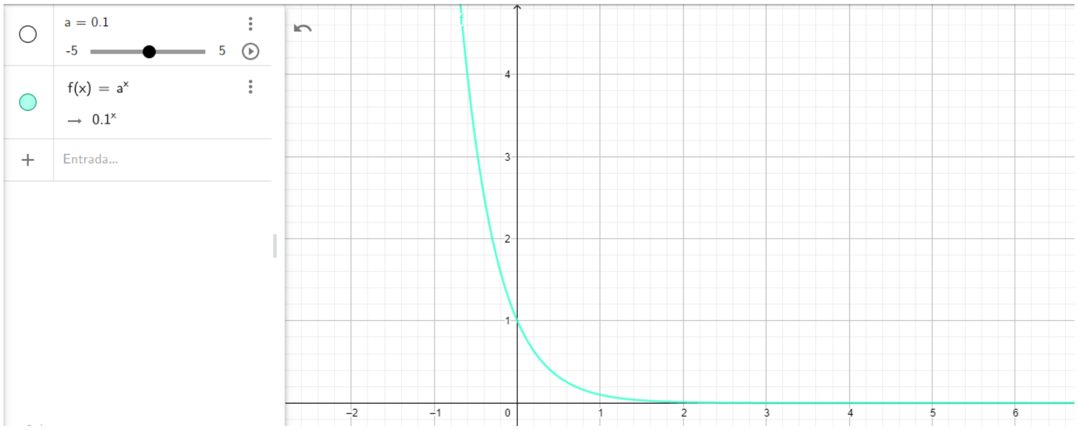
Actividad 1. Definición de la función exponencial

Pasar del registro gráfico al algebraico

Registro de Representación Gráfico

En la siguiente figura tenemos la gráfica de $f(x) = a^x$ para valores de x comprendidos entre 0.1 y 3. Con ayuda de Geogebra, se utiliza un deslizador para obtener los diferentes valores de la base a.

Función $f(x) = a^x$ en Geogebra



Conversión del Registro Gráfico al Registro Algebraico

Luego, por medio de la iteración con Geogebra, a las estudiantes se les pide que contesten una serie de preguntas que les permitan comprender mejor el concepto de la función exponencial. Las preguntas de análisis son:

1. ¿Cuál es el dominio de la función exponencial base $a, f(x) = a^x$?

2. ¿Cuál es el rango de la función exponencial base $a, f(x) = a^x$?

3. ¿Qué sucede cuando $a = 1$?

4. ¿Cuáles son las intersecciones de la gráfica de $f(x) = a^x$ con el eje X?

5. ¿Cuáles son las intersecciones de la gráfica de $f(x) = a^x$ con el eje Y?

6. ¿Es continua la función exponencial? Justifique.

7. ¿Cuando $f(x) = a^x$ es una función creciente, cuando es decreciente?

8. ¿Es $f(x) = a^x$ una función inyectiva?

9. ¿Tiene función inversa la función exponencial $f(x) = a^x$?

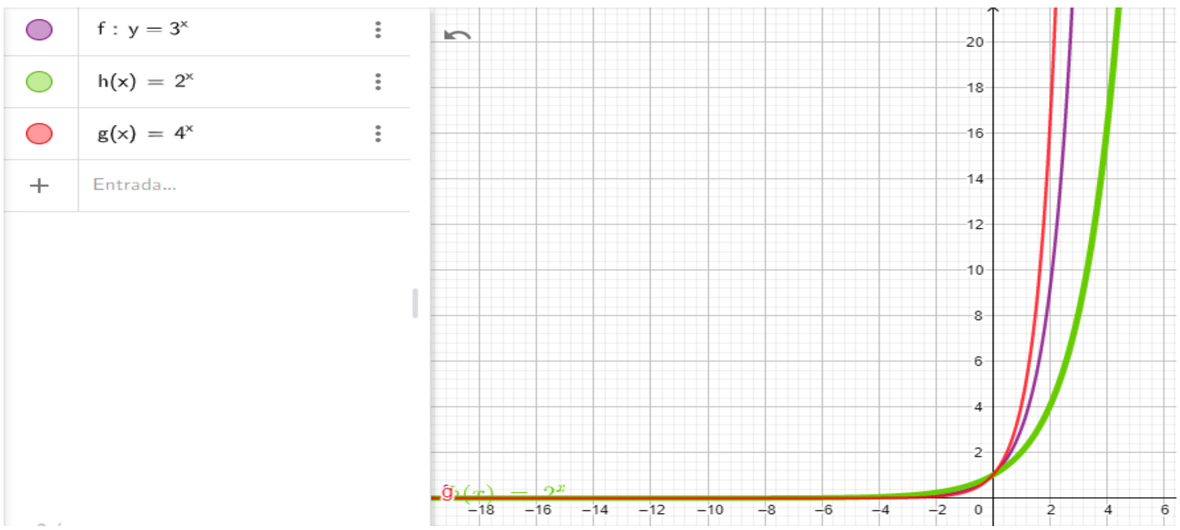
10. ¿ $f(x) = a^x$ es definida positiva o negativa?

Actividad 2. Comparación de diferentes funciones exponenciales: 2^x, 3^x, 4^x

Registro de Representación Gráfico

En la siguiente figura tenemos la gráfica de tres funciones exponenciales para valores diferentes de la base, todos mayores que 1. Se utiliza un deslizador en Geogebra para comparar las funciones en un valor específico.

Gráfica de algunas funciones exponenciales en Geogebra



Conversión del Registro Gráfico al Registro Algebraico

Luego, por medio de la iteración con Geogebra, a las estudiantes se les pide que contesten una serie de preguntas que les permitan distinguir las diferencias que hay entre las funciones exponenciales. Las preguntas de análisis son:

1. ¿Cuál es el punto de corte de las tres funciones?

2. ¿Alguna de las tres funciones corta el eje X?

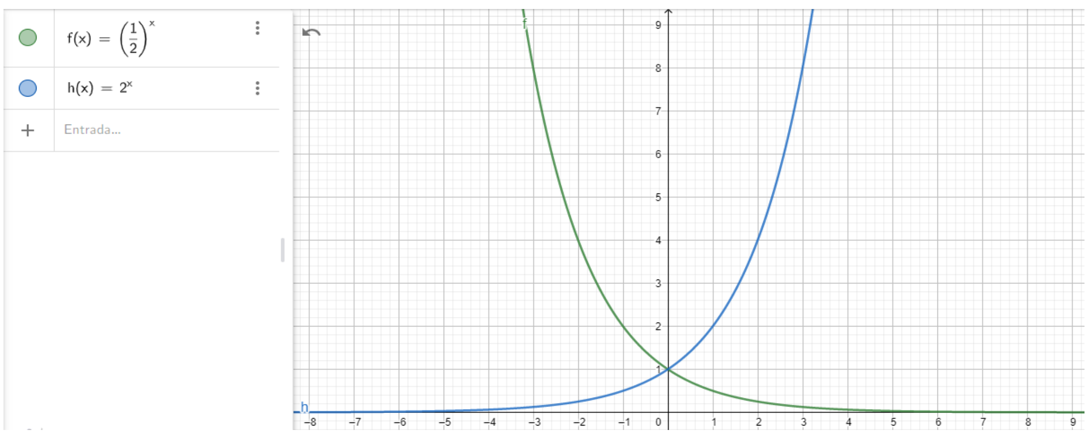
3. Las tres funciones son crecientes. ¿Cuál de las tres crece más rápidamente? ¿Porque?

Actividad 3. Comportamiento de las funciones exponenciales: $\boldsymbol{(\frac{1}{2})^{x}}$, $\boldsymbol{2^{x}}$

Registro de representación gráfico

En la siguiente figura tenemos la gráfica de dos funciones exponenciales para valores diferentes de la base dibujadas en un mismo plano. Se utiliza un deslizador en Geogebra para comparar las funciones en un valor específico.

Algunas funciones exponenciales en Geogebra



Conversión del Registro Gráfico al Registro Algebraico

Luego, por medio de la iteración con Geogebra, a las estudiantes se les pide que contesten una serie de preguntas que les permitan distinguir cuando una función exponencial es creciente o decreciente. Las preguntas de análisis son:

1. ¿Cuál es el punto de corte de las gráficas de $(\frac{1}{2})^{x}$ y 2^{x}?

2. ¿Cuál de las dos funciones es creciente y cual decreciente?

3. ¿La gráfica de alguna de las dos funciones corta al eje X?

4. ¿Las dos funciones son definidas positivas?

5. ¿Es $f(x) = 2^x$ una función inyectiva?

6. ¿Es $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ una función uno a uno?

7. ¿Tiene $f(x) = 2^x$ función inversa?

8. ¿Tiene $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ función inversa?.

Segunda secuencia didáctica.

Módulo I.

Actividad 4. Transformaciones de funciones

Conversión del Registro Algebraico al Registro Gráfico

Utilizar la gráfica $y = f(x) = 2^x$ y Geogebra, para ilustrar las gráficas solicitadas:

1) $y = f(x) + 2$ 2) $y = f(x - 1)$ 3) $y = f(x + 2)$

4) $y = 2f(x)$ 5) $y = -f(x)$ 6) $y = f(-x)$

7) $y = f(x - 2) + 1$ 8) $y = -f(x - 2)$ 9) $y = -f(x + 1)$

Actividad 5. Transformaciones de funciones (base e)

Conversión del Registro Algebraico al Tabular

A continuación, se presenta una tabla de valores aproximados de la función, $f(x) = e^x$. Completar la tabla.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
e^x				1	2.71		

Conversión del Registro Tabular al Gráfico

A partir de la tabla anterior, use Geogebra para visualizar la gráfica de $f(x) = e^x$ y luego utilizando la transformación de funciones obtenga las gráficas solicitadas:

1) $y = f(-x)$ 2) $y = -f(x)$ 3) $y = 2f(x)$

4) $y = f(-x) - 1$ 5) $y = -f(x + 2)$ 6) $y = f(x + 2) + 2$

Actividad 6. Pregunta de análisis

¿Qué ocurre con la asíntota de la función exponencial al usar transformaciones de funciones?

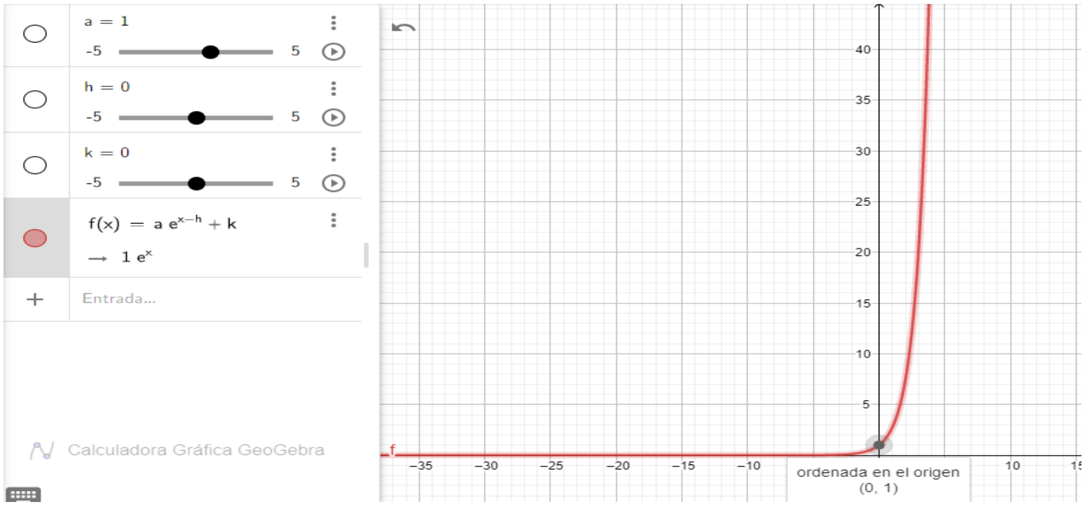
Módulo II.

Actividad 4. Transformaciones de la función exponencial: $f(x) = e^x$

Registro de Representación Gráfico

En la siguiente figura tenemos la gráfica de la función exponencial base e. Se utilizan tres deslizadores en Geogebra para obtener las gráficas de ciertas funciones relacionadas por medio de traslaciones. Estas traslaciones pueden ser: desplazamientos verticales y horizontales; alargamientos y reflexiones verticales y horizontales.

Ilustración de una función exponencial



Conversión del Registro Gráfico al Algebraico

Luego, por medio de la iteración con Geogebra, a la estudiante se le pide que conteste una serie de preguntas para valores diferentes de a, h, y k de la función $f(x) = ae^{(x-h)} + k$ que le permitan comprender las posibles traslaciones de la gráfica de la función exponencial. Las preguntas de análisis son:

1. Discutir sobre las traslaciones de la función $f(x) = e^{x}$.

2. $f(x) = 2e^{(x-1)} + 3$ 3. $f(x) = 2e^{(x+1)} + 3$ 4. $f(x) = 3e^{(x-4)} + 1$

5. $f(x) = 2e^{(x+2)} - 1$ 6. $f(x) = -e^{(x+3)} + 3$ 7. $f(x) = 4e^{x} + 2$

Anexo #4. Función Logarítmica

Actividades.

Secuencia de actividades.

Modulo I.

Actividad 1. Introducción a la función logarítmica (parte 1)

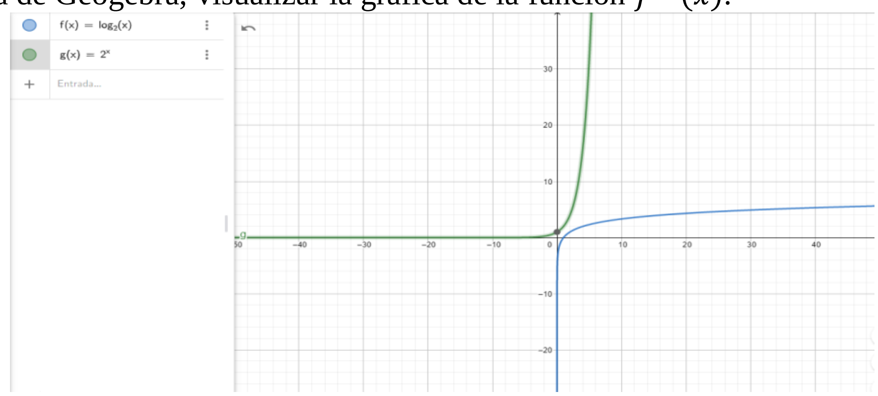
Registro de Representación Algebraica

Consideremos la función,

$$y = f(x) = 2^x$$

Registro de Representación Gráfico

Con ayuda de Geogebra, visualizar la gráfica de la función $f^{-1}(x)$.



Si,

$f(x) = 2^x$, su función inversa es $f^{-1}(x) = \log_2 x$.

$Dom\ (f^{-1}) = (0, +\infty)$

Definición:

Si $y = a^x, con\ a > 1$, entonces su función inversa es, $y = \log_a x\ , con\ a > 1$.

Características de la función $f^{-1}(x) = \log_2 x$.

$Dom\ (\log_2 x) =$ ____________________________________

$Rango\ (\log_2 x) =$ ____________________________________

Intersecciones con el eje $X =$ ____________________________________

Intersecciones con el eje $Y =$ ____________________________________

Asíntotas verticales, horizontales u oblicuas= ____________________________

¿Creciente o decreciente? ____________________________________

Concavidad ____________________________________

Actividad 2. Introducción a la función logarítmica (parte 2)

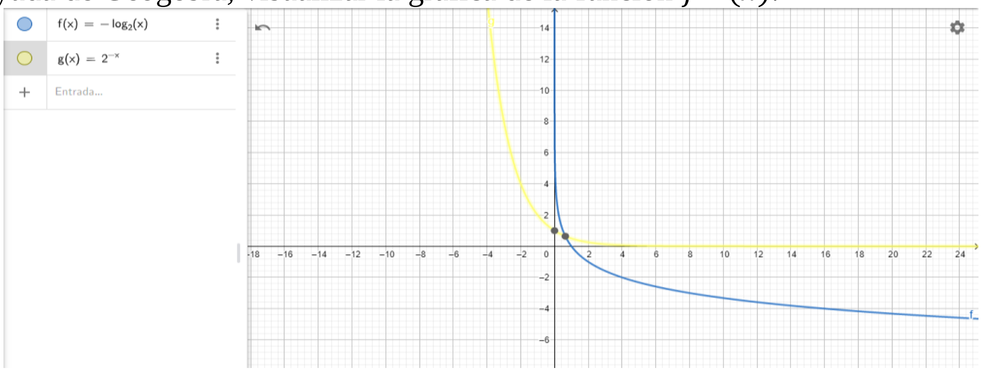
Registro de Representación Algebraica

Consideremos la función,

$$y = f(x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$$

Registro de Representación Gráfico

Con ayuda de Geogebra, visualizar la gráfica de la función $f^{-1}(x)$.



Si,

$f(x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$, su función inversa es, $f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

$Dom\ (f^{-1}) = (0, +\infty)$

Definición:

Si $y = a^{x}, con\ a > 1$, entonces su función inversa es, $y = \log_{a} x\ , con\ 0 < a < 1$.

Características de la función $f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

$Dom\ \ (\log_{\frac{1}{2}} x) =$ ______________________________

$Rango\ \ (\log_{\frac{1}{2}} x) =$ ______________________________

Intersecciones con el eje $X =$ ______________________________

Intersecciones con el eje $Y =$ ______________________________

Asíntotas verticales, horizontales u oblicuas= ______________________

¿Creciente o decreciente? ______________________________

Concavidad ______________________________

Actividad 3. Pregunta de análisis

¿Qué puede concluir acerca de la inversa de la función exponencial?

Actividad 4. Graficar la función exponencial y su inversa (base e)

Registro de Representación Algebraica al Gráfico

Con ayuda de Geogebra, visualizar las gráficas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^x$ b) $f(x) = \log_e x = \ln x$

Registro de Representación Tabular

Complete las siguientes tablas. En caso de obtener números decimales, haga una aproximación.

x	-3	-2	-1	0	1	2
e^x						

x	-3	-2	-1	0	1	2
$\ln x$						

Actividad 5. Dominio de funciones logarítmicas

1. Halle el dominio de cada una de las siguientes funciones logarítmicas:

a) $f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)$ b) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{1+\ln x}\right)$

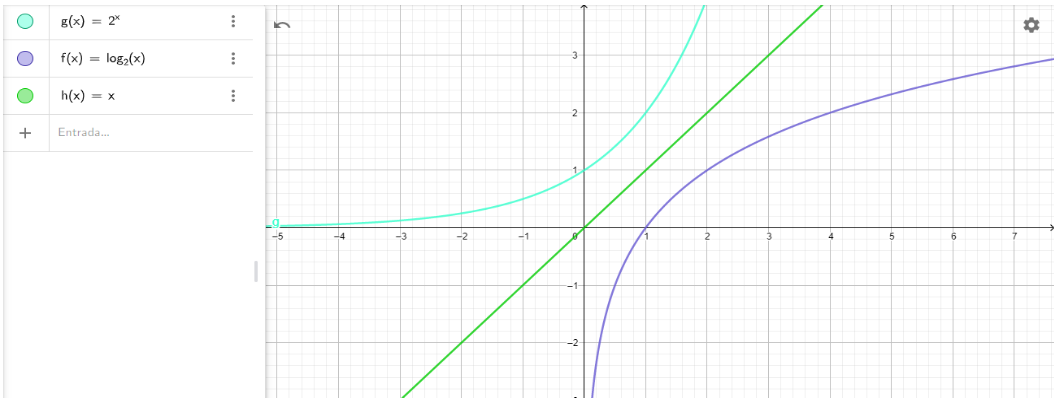
Módulo II.

Actividad 1. Definición de la función logarítmica

Registro de Representación Gráfico

En la siguiente figura, tenemos la gráfica de $f(x) = a^x$ para valores de x comprendidos entre 0.1 y 3. Se utiliza un deslizador en Geogebra para obtener los diferentes valores de la base a. De esta manera, podemos ver dinámicamente la función inversa asociada a cada gráfica, la función logarítmica.

Ilustración de funciones inversas



Conversión (Registro Gráfico al Registro Natural y Algebraico)

Luego, por medio de la iteración con Geogebra, a la estudiante se le pide que conteste una serie de preguntas que le permitan comprender más el concepto de la función logarítmica. Las preguntas de análisis son:

1. ¿Cuál es el dominio de la función logarítmica base a?

2. ¿Cuál es el rango de la función logarítmica base a?

3. ¿Cuáles son las intersecciones de la gráfica de $f^{-1}(x)$ con el eje X?

4. ¿Cuáles son las intersecciones de la gráfica de $f^{-1}(x)$ con el eje Y?

5. ¿Es continua la función logarítmica? Justifique

6. ¿ $f^{-1}(x)$ tiene asíntotas? Justifique

7. ¿ $f^{-1}(x)$ es una función creciente o decreciente?

8. ¿A qué es igual $f(f^{-1}(x))$? Justifique

9. ¿A qué es igual $f^{-1}(f(x))$? Justifique