



Universidad
del Cauca®

UN ENFOQUE FISICOMATEMÁTICO DE LA TEORÍA DE CUERDAS

ANDRÉS FELIPE BELTRÁN RODRÍGUEZ

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
POPAYÁN, COLOMBIA
2024

UN ENFOQUE FISICOMATEMÁTICO DE LA TEORÍA DE CUERDAS

ANDRÉS FELIPE BELTRÁN RODRÍGUEZ

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Ingeniero Físico

Director:
PhD. SERVIO TULIO PÉREZ MERCHANCANO

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
POPAYÁN, COLOMBIA
2024

Nota de aceptación

PhD. Servio Tulio Pérez Merchancano
Director

PhD. Ober Lizardo Hernández Rosero
Jurado

MSc. Jhon Mario Córdoba Pareja
Jurado

Popayán, 12 de marzo de 2024

Agradecimientos

A mi padre, Jose Gabriel Beltrán, por enseñarme con su ejemplo el valor incomparable de la laboriosidad y por inculcarme con su sabiduría que mediante el trabajo perseverante y abnegado, cuyo propósito principal sea el bien común, es posible transformar la historia hacia el progreso implacable y constructivo.

A mi madre, Mariela Rodríguez, por su carácter noble, reflexivo y sereno. Tales atributos han dejado rastro en lo más profundo de mi ser, han hecho de mí un humano inteligente y compasivo. Ella es un claro ejemplo de que las personas más fuertes son las más amables.

Agradezco nuevamente a mis padres por hacerme notar con su bello ejemplo dos hechos fundamentales: fortaleciendo la voluntad y esculpiendo el carácter es posible transformar el mundo para bien; y que el mejor sistema educativo es el amor de un padre.

Agradezco a Servio Tulio Pérez por la dirección de este trabajo de grado. Quiero también expresar mi agradecimiento a los jurados Jhon Mario Córdoba y Ober Hernández, cuyas valiosas contribuciones han enriquecido el trabajo.

A la Universidad del Cauca por disponer de todos sus recursos con la ambiciosa intención de hacer del mío un buen proceso de aprendizaje, ofreciéndome la oportunidad de crecer a nivel académico y profesional.

A los profesores del Departamento de Física y el Departamento de Matemáticas por transmitir dentro y fuera de las aulas provechosas enseñanzas, así como pasión por las ciencias y el aprendizaje en todas sus formas. Al Grupo de Semiconductores y Nuevos Materiales, por ofrecerme sus espacios de trabajo y discusión.

A mis compañeros, con quienes he compartido amplia variedad de intereses. Espero haber sido una buena influencia para ustedes, que hayan recibido ese hipotético regalo como un sincero agradecimiento al impacto notable de nuestras interacciones sobre mi desarrollo personal.

Resumen

En este trabajo se hace un estudio que constituye un posible primer acercamiento a la teoría de cuerdas. Se presenta su historia entre los años 1960 y 1997, exponiendo algunos de los hechos y resultados más relevantes, desde su origen en la física de hadrones, hasta el surgimiento de la correspondencia AdS/CFT. También se exponen fundamentos físicos necesarios para abordar el estudio de la teoría de cuerdas bosónicas. Se desarrolla el formalismo de la hoja de mundo, considerando la acción de Nambu-Goto para describir la dinámica de la cuerda relativista. Posteriormente, se estudia la cuantización de cono de luz para una partícula puntual, aplicando un proceso de cuantización similar para la cuerda relativista abierta y para la cuerda relativista cerrada. De este modo, se analizan los espectros producidos por ambas teorías, resultando el fotón dentro del espectro de cuerdas abiertas y el gravitón dentro de las cuerdas cerradas. Dada la exigencia de la invarianza de Lorentz, ambas teorías viven en un espaciotiempo de 26 dimensiones. Se hace una introducción breve de las teorías de supercuerdas que, a diferencia de las teorías de cuerdas bosónicas, incluyen estados fermiónicos y se describen utilizando el formalismo RNS. Finalmente, se hace una introducción de la correspondencia AdS/CFT, de sus “ingredientes”, junto con una revisión pedagógica de la conjetura de Maldacena y algunas aplicaciones.

Índice general

Agradecimientos	IV
Resumen	v
Introducción	1
1. Historia	3
1.1. Física de hadrones	3
1.2. Modelos duales	5
1.3. Modelo RNS	7
1.4. Unificación y supercuerdas	8
1.5. Algunos desarrollos relevantes desde 1985	9
2. Fundamentos clásicos	11
2.1. Principio de Hamilton	11
2.2. Teorema de Noether	13
2.2.1. Primer teorema de Noether	14
2.3. Fundamentos de Relatividad Especial	14
2.3.1. Transformaciones de Lorentz	16
2.3.2. Energía y momento relativistas	17
2.3.3. Coordenadas de cono de luz	19
2.4. Campos clásicos	21
2.4.1. Teorema de Noether para campos	22
2.5. Acción partícula libre relativista	23
2.6. Dinámica de una cuerda clásica no relativista	26
3. Cuerda relativista	31
3.1. Acción de Nambu-Goto	31
3.2. Parametrizando la cuerda	38
3.2.1. Primer cálculo en teoría de cuerdas	39
3.3. Movimiento de cuerdas abiertas y cerradas	45
3.3.1. Movimiento de una cuerda abierta	47
3.3.2. Movimiento de una cuerda cerrada	48
3.4. Corrientes conservadas sobre la hoja de mundo	49
3.4.1. La pendiente α'	51
3.5. Gauge de cono de luz	52

4. Cuerda relativista cuántica	60
4.1. Cuantización de cono de luz de la partícula puntual	60
4.2. Cuantización de cono de luz de la cuerda relativista abierta	64
4.3. Cuantización de cono de luz de la cuerda relativista cerrada	70
4.4. Supercuerdas relativistas	75
5. Breve introducción a la correspondencia AdS/CFT	82
5.1. Espacio anti-de Sitter	82
5.2. Teoría cuántica de campos conforme	85
5.3. La correspondencia	87
5.4. D3-branas y la conjetura de Maldacena	90
5.5. Aplicaciones	95
A. Operadores de momento y generadores de Lorentz en el gauge de cono de luz para la partícula puntual	97
B. Operadores de Virasoro en el gauge de cono de luz para la cuerda relativista abierta cuántica	100
Bibliografía	103

Índice de figuras

1.1. Matriz S	4
1.2. Gráfica de Chew-Frautschi	5
1.3. Hoja de mundo representada por Tetsuo Goto	7
1.4. Diagrama Teoría M	9
2.1. Esquema de la variación sobre la trayectoria real $q(t)$ de una partícula	12
2.2. Boost a lo largo de la dirección x^1	17
2.3. Cono de luz para un evento dentro de la línea de mundo de una partícula	18
2.4. Ejes de coordenadas de cono de luz x^+ y x^-	19
2.5. Línea de mundo de una partícula entre dos eventos	23
2.6. Sección infinitesimal de la cuerda que se ha deformado mediante una pequeña perturbación	27
2.7. Condiciones de frontera de Dirichlet y Neumann para una cuerda clásica	28
3.1. Superficies espaciotemporales trazadas por cuerdas relativistas	32
3.2. Parametrización de superficies espaciales y espaciotemporales	33
3.3. D2-brana que vive en el plano (x^1, x^2)	38
3.4. Diagrama que representa la condición del gauge estático	39
3.5. Cuerda de longitud a estirada a lo largo del eje x^1	40
3.6. Representación de la velocidad transversal	41
3.7. Parametrización de la hoja de mundo	44
5.1. Diagrama de Penrose del espacio anti-de Sitter	84
5.2. Geodésicas en el espacio anti-de Sitter	85
5.3. Dualidad entre cuerdas abiertas y cerradas	91
5.4. Conjunto de D-branas paralelas	92
5.5. Esquema de una brana negra	93

Introducción

La descripción de la naturaleza a nivel microscópico, como se ha entendido y verificado experimentalmente en la actualidad, involucra las teorías cuánticas de campos. Esta clase de teorías describen la interacción electromagnética y las interacciones nucleares fuerte y débil, conformando el Modelo Estándar de la física de partículas que incluye la teoría electrodébil y la cromodinámica cuántica, donde los objetos fundamentales se consideran como partículas puntuales.

En este sentido, todas las partículas son excitaciones de algún campo, e interactúan localmente con otras partículas. A pesar de que las teorías cuánticas de campos describan la naturaleza a escalas de longitud observadas, existen ciertas indicaciones que sugieren el involucramiento de nuevos elementos a escalas de longitud muy cortas, esto es, a la escala de Planck. Además, las interacciones gravitacionales no están incluidas dentro de tal descripción, ciertamente, ha sido imposible cuantizar la gravedad siguiendo métodos perturbativos puesto que resulta una teoría cuántica de campos no renormalizable [1].

Por otra parte, las interacciones gravitacionales que rigen la naturaleza a escalas macroscópicas, están descritas por la teoría de la Relatividad General, que es una teoría clásica donde la gravedad es equivalente a la curvatura del espaciotiempo. A la escala de Planck, los efectos de la gravedad cuántica son importantes. Parece fundamentalmente necesaria la formulación de una teoría cuántica de la gravedad, por ejemplo, para estudiar la física a tiempos muy cercanos al big bang y para estudiar ciertas propiedades de los agujeros negros.

Sin embargo, es posible incorporar la gravedad dentro de una teoría cuántica consistente asumiendo que los objetos fundamentales de la teoría son objetos unidimensionales: cuerdas; que pueden ser abiertas o cerradas e interactúan uniéndose o dividiéndose. Estas cuerdas pueden oscilar, y para ellas existe un espectro de masas, de manera que, dependiendo su estado de oscilación, una misma cuerda puede representar varios tipos de partículas. Todas las teorías de cuerdas incluyen el gravitón, por lo tanto, es una candidata a la teoría cuántica de la gravedad. La teoría de cuerdas es también un campo importante de la investigación en física, puesto que en él convergen principalmente la física de partículas, la cosmología, la física de la materia condensada y las matemáticas.

La teoría de cuerdas es un tema de frontera sobre el que no está dicha la última palabra. Es un proyecto ambicioso que aún está en construcción a pesar de llevar aproximadamente medio siglo de desarrollo investigativo; de hecho, ciertos aspectos de la teoría aún no se comprenden completamente. Pretende ser una teoría unificada de las fuerzas de la naturaleza, aun cuando no existe evidencia experimental de que sea la descripción correcta del universo [2].

Las teorías del Modelo Estándar y la Relatividad General no dan todas las respuestas a los problemas abiertos actuales de la física teórica de altas energías. Por otro lado, la teoría de cuerdas

constituye un marco teórico muy fértil en donde es posible encontrar algunas respuestas, y posiblemente sea una buena herramienta para construir la física más allá del modelo estándar. Con este trabajo de profundización se pretende hacer un primer acercamiento a la teoría de cuerdas que no tenga prerequisites avanzados como la Teoría Cuántica de Campos y la Relatividad General, siendo un enfoque adecuado para estudiantes de pregrado. Se espera que este acercamiento ayude a los estudiantes de la Universidad del Cauca a comprender ideas importantes de la teoría de cuerdas, consiguiendo con esto un avance en la divulgación de la teoría.

El estudio de la teoría de cuerdas hecho en este trabajo comienza en el capítulo 1, presentando parte de su *historia* desde la década de 1960 hasta el año 1997, es decir, desde sus orígenes en la física de hadrones hasta resultados actuales como la correspondencia AdS/CFT. El panorama histórico que se ofrece resalta algunos hechos y resultados importantes dentro de las referencias [3]-[5].

El capítulo 2 está dedicado al estudio de los *fundamentos físicos* de la mecánica clásica, relatividad especial y la teoría de campos que son necesarios en la descripción posterior de la teoría de cuerdas.

Luego, se estudia la *cuerda relativista* en el capítulo 3, siguiendo principalmente lo expuesto en [6]. Se introduce el concepto de hoja de mundo y se deduce la acción de Nambu-Goto, importante para explorar la dinámica de la cuerda relativista. Se introducen también las condiciones de Virasoro y se impone el gauge de cono de luz para dar una solución explícita a la ecuación del movimiento de una cuerda relativista.

En el capítulo 4 se describe el proceso de cuantización de cono de luz dado en [6]. Inicialmente, se hace para una partícula puntual, y partiendo de esta base se aplica a las cuerdas relativistas abiertas y cerradas, dando lugar así a las *teorías de cuerdas bosónicas*. También se introducen las teorías de supercuerdas, que a diferencia de las teorías de cuerdas bosónicas, incluyen estados fermiónicos y se describen utilizando el formalismo RNS.

En el capítulo 5 se introduce de manera corta la *correspondencia AdS/CFT*, haciendo una descripción geométrica del espacio anti-de Sitter, las teorías de campos conformes, el enunciado de la correspondencia junto con una revisión pedagógica de la conjetura de Maldacena y algunas de sus aplicaciones.

Capítulo 1

Historia

Este capítulo está ampliamente basado en el libro «A Brief History of String Theory: From Dual Models to M-Theory» [3], del filósofo e historiador de la física especializado en gravedad cuántica y teoría de cuerdas Dean Rickles. Se recomienda al lector interesado hacer una revisión exhaustiva del libro, en él se encuentran muchísimos detalles sobre el desarrollo de la teoría de cuerdas desde sus inicios, y eventualmente acercándose hacia los desarrollos más actuales. Pueden ser de interés las experiencias personales de algunos físicos involucrados en la construcción de la teoría, aprovechando la exposición detallada de sus memorias. Otra referencia recomendada es el artículo de John Schwarz titulado «The Early Years of String Theory: A Personal Perspective» [4].

1.1. Física de hadrones

Los hadrones son partículas compuestas por quarks y se clasifican en dos categorías distintas: los bariones, compuestos por tres quarks (como los protones en el núcleo atómico), y los mesones, partículas formadas por pares de tipo quark-antiquark. Esta perspectiva no era la existente a mediados del siglo XX. Los experimentos pertenecientes a la nombrada física de hadrones, que involucran las interacciones fuertes, tenían como resultado la producción de una cantidad muy variada de partículas. Estas partículas fueron catalogadas como *resonancias hadrónicas*, son estados excitados de hadrones que luego decaen en otras partículas, es decir, estados inestables. El panorama no estaba muy claro y comprender estos resultados se convirtió en un desafío importante.

Durante la década de los 60 no existía una teoría de la interacción nuclear fuerte. En esta época se buscaba desarrollar una teoría de estas interacciones. Geoffrey Chew proponía un enfoque hacia una teoría basada en algunos principios generales. Primero, defendía que la teoría cuántica de campos (QFT, del inglés Quantum Field Theory) era inapropiada para describir la fuerza fuerte. Una de las razones para tener este punto de vista era que ninguno de los hadrones parecía ser más fundamental comparado con el resto, se presentaba una situación denominada «democracia nuclear». En este momento de la historia, los quarks se veían simplemente como objetos matemáticos, no como partículas fundamentales físicas. También Chew sugería prestar más atención a las cantidades físicas, especialmente a la matriz S, que describe amplitudes de dispersión. La matriz S fue desarrollada por John Wheeler como una forma de agrupar toda la información físicamente observable necesaria para describir los procesos de colisión o dispersión de partículas, argumentando la posibilidad de ignorar los procesos de muy corta duración entre los estados inicial y final debido a la imposibilidad de su medida. En la figura 1.1 se representa la idea de la utilidad de la matriz S

para un proceso de colisión.

Con el objetivo de desarrollar una teoría donde se determinara la matriz S , fueron impuestas ciertas condiciones de consistencia. Entre ellas, la unitariedad: $S^\dagger S = 1$, implica la conservación de la probabilidad; y la analiticidad, contraparte matemática de la causalidad. Se necesitaba imponer otra propiedad importante a la matriz S , la analiticidad en el momento angular.

Las amplitudes de dispersión son funciones analíticas de la forma $a(l, s)$ con polos llamados polos de Regge; donde l es el momento angular y s es la variable de Mandelstam (invariante Lorentz) correspondiente al cuadrado de la energía total de las partículas colisionantes: $s = (p_1 + p_2)^2 = (p'_1 + p'_2)^2$. Un polo de una función compleja es una singularidad, es decir, un punto donde el valor de la función se hace cero o infinito para cierto argumento. La posición de un polo de Regge está dada por una trayectoria de Regge de la forma $l = \alpha(s)$, y los valores de s para los cuales l toma un valor físico corresponden a estados hadrónicos detectables por los experimentos. Matemáticamente las trayectorias de Regge tienen la forma:

$$\alpha(s) = \alpha(0) + \alpha' s.$$

El trabajo teórico de este tiempo estaba fuertemente influenciado por los resultados experimentales en aceleradores de partículas, al graficar el momento angular en función del cuadrado de la masa de las resonancias hadrónicas (con valores fijos de los demás números cuánticos) aparecían trayectorias de Regge aproximadamente lineales. Este comportamiento se observa en la gráfica de la figura 1.2.

Otro ingrediente necesario para determinar la matriz S , también defendido por Geoffrey Chew, era el principio del *bootstrap*. La propuesta, donde todo el conjunto de hadrones produce las fuerzas que permiten su propia existencia, da origen a una estructura autoconsistente. Aunque en principio no era claro formularlo matemáticamente de forma precisa, durante 1967 se venía trabajando en las reglas de suma de energía finita (FESR, del inglés Finite Energy Sum Rules); con la ayuda de estas y en el límite conocido como *aproximación de resonancia estrecha* fue posible formular el principio bootstrap en 1968, esta formulación fue denominada *dualidad*. La aproximación de resonancia estrecha se refiere a la situación donde la vida media de las resonancias es despreciable, comparada con sus masas.

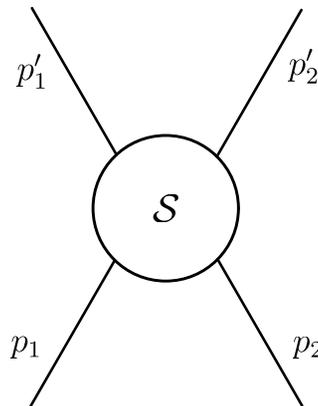


Figura 1.1: Se representan los momentos de las partículas incidentes con p_1 y p_2 . La transformación dada por la matriz S da información sobre los momentos de las partículas luego de la colisión: p'_1 y p'_2 sin considerar lo ocurrido durante la interacción [3].

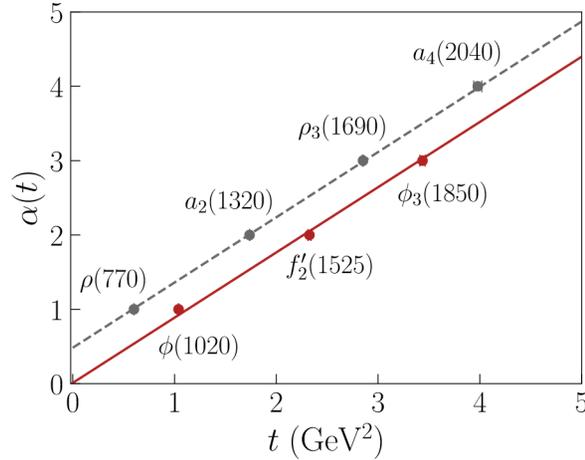


Figura 1.2: Gráfica de Chew-Frautschi, donde t corresponde al cuadrado de la masa de los hadrones, quienes aparecen como polos dentro de las dos trayectorias de Regge observadas en la gráfica. $\alpha(t)$ es el momento angular o spin [7].

1.2. Modelos duales

En el año 1968, Gabriele Veneziano consiguió una fórmula con la propiedad de dualidad, exhibiendo el comportamiento de Regge mediante trayectorias linealmente crecientes. Era el primer ejemplo de un *modelo de resonancia dual*, y daba una buena descripción del proceso para 4 partículas $\pi + \pi \rightarrow \pi + \omega$ (donde dos piones interactúan para producir otro pión y un mesón omega), y matemáticamente de la forma:

$$A(s, t, u) = \frac{\bar{\beta}}{\pi} [B(1 - \alpha(t), 1 - \alpha(s)) + B(1 - \alpha(t), 1 - \alpha(u)) + B(1 - \alpha(s), 1 - \alpha(u))],$$

siendo la función beta de Euler,

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x + y)}.$$

La estructura matemática del modelo de Veneziano tiene la suma de tres funciones beta y era una buena descripción de la reacción, además de materializar explícitamente la dualidad y el comportamiento de Regge. Poco tiempo después, Miguel Virasoro propuso una fórmula alternativa. Este momento de la historia puede trazarse como el surgimiento de la teoría de cuerdas. Durante el año siguiente, los modelos duales ganaron una gran popularidad en la investigación, se hizo una generalización para N partículas para los modelos de Veneziano y de Virasoro. El progreso obtenido hasta ese momento producía la sensación del comienzo de una nueva teoría de las interacciones fuertes. Ambas fórmulas presentaban una *factorización* en términos de un espectro de estados de una única partícula descritos por un conjunto infinito de osciladores armónicos, donde la propiedad de factorizabilidad implica que es posible dividir el proceso en consideración entre partículas entrantes y partículas salientes. Este tipo de resultado conllevó a su interpretación como los modos de vibración de una cuerda relativista, el origen del concepto de *cuerda hadrónica*.

Una figura olvidada en este panorama de la investigación y desarrollo de los modelos duales fue Mahiko Suzuki. En 1968, durante su estancia en el Instituto de Estudios Avanzados en Princeton, Suzuki consiguió un modelo como el de Veneziano. De hecho, Suzuki preparaba un artículo donde

incluía su hallazgo y planeaba publicarlo. Sin embargo, justo antes de hacerlo, mientras estaba en el CERN fue informado sobre un trabajo similar de un joven postdoctorado llamado Veneziano. Al ver que su trabajo era esencialmente idéntico al suyo, Suzuki decidió no publicarlo. Si bien Suzuki no recibió reconocimiento equiparable al de Veneziano por su contribución, su trabajo genera la idea de que el descubrimiento de la amplitud en términos de la función beta no fue algo aleatorio y es una muestra de la convergencia de los resultados en la investigación científica.

Alrededor de 1970, Leonard Susskind, Yoichiro Nambu y Holger Nielsen demostraron que el comportamiento de Regge sugería la presencia de movimientos oscilatorios internos dentro de los hadrones. Conceptos modernos como la hoja de mundo aparecieron como consecuencia de trabajos en este periodo. Aunque, es importante considerar que la interpretación como cuerda era por el momento simplemente una herramienta para investigación, y no como una representación verdadera de la estructura interna de los hadrones y todos sus procesos.

Justo antes de conocer el trabajo de Veneziano, Leonard Susskind estaba trabajando en la teoría cuántica relativista dentro del marco de momento infinito (conocido actualmente como marco de cono de luz), buscando con esta herramienta investigar sobre la estructura interna de los hadrones. Precisamente, experimentando con modelos basados en osciladores dentro del marco de momento infinito, consiguió una amplitud de dispersión de la forma [5]:

$$A(s, t) = \int_0^1 x^{-s} (\exp(-x))^{-t} dx,$$

mientras que la de Veneziano era

$$A(s, t) = \int_0^1 x^{-s} (1-x)^{-t} dx.$$

Ambas fórmulas están relacionadas por el intercambio de $(1-x)$ por $\exp(-x)$. Susskind publicó este resultado en el artículo titulado «Harmonic Oscillator Analogy for the Veneziano Amplitude»[8]. Tras la publicación de este artículo, Susskind comprendió que la amplitud de Veneziano podía interpretarse como si se tratase de una banda elástica cortada, transformándose así en una cuerda elástica con dos extremos. Entonces, lo que se consideraba una serie de resonancias hadrónicas o estados excitados hadrónicos correspondientes a distintas partículas, se convierte ahora en estados de un mismo objeto: la cuerda. Susskind también hace una descripción del concepto de hoja de mundo:

“Supongamos que un mesón está compuesto por un par quark-antiquark en los extremos de una cuerda elástica, como se describió en secciones anteriores. A medida que la cuerda se mueve en el espacio-tiempo, se genera una franja bidimensional delimitada por las trayectorias de los quarks. En analogía con la línea de mundo, llamamos a esta configuración una hoja de mundo.”[9]

Tetsuo Goto, en 1971 se refirió también a la cuerda en términos de un medio continuo unidimensional en el espaciotiempo, representando la hoja de mundo como se ve en la figura 1.3.

En 1971, Claude Lovelace descubrió una condición de consistencia para los modelos duales que exigía un espaciotiempo de dimensión $d = 26$. También, para mantener la consistencia, dentro de su espectro aparecía un taquión. Más tarde, en 1973 el origen de la condición para la *dimensión crítica* fue explicado por Goddard, Golstone, Rebbi y Thorn a partir de la cuantización de una cuerda relativista en el gauge de cono de luz en el artículo “Quantum Dynamics of a Massless Relativistic String ”[11]. A partir de aquí, la interpretación de las cuerdas como objeto fundamental se torna más seria.

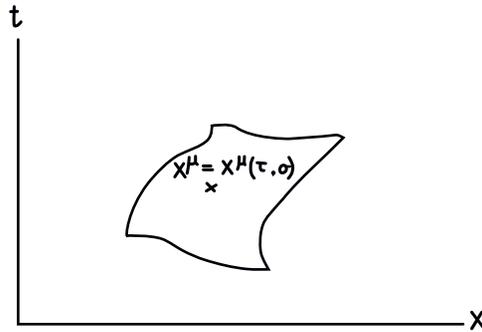


Figura 1.3: Imagen donde se representa la hoja de mundo bidimensional trazada por un medio continuo unidimensional en el espaciotiempo. Note que un punto en esta superficie está parametrizado por dos parámetros τ y σ , correspondientes a la notación que también se usará más adelante para parametrizar la hoja de mundo de una cuerda relativista [10].

1.3. Modelo RNS

En enero de 1971, *Pierre Ramond* construyó una generalización de la ecuación de Dirac basada en modelos de resonancia dual. Propuso la ecuación de onda

$$(F_0 + m) |\psi\rangle = 0,$$

que se conoce como la ecuación de Dirac-Ramond. Las soluciones de esta ecuación producen el espectro de una cuerda fermiónica libre. En marzo de 1971, André Neveu y John Schwarz propusieron un modelo dual bosónico llamado *modelo dual del pión*, con la ecuación de onda

$$(L_0 - 1/2) |\psi\rangle = 0,$$

que da el espectro de partículas libres, correspondientes a una cuerda bosónica.

En ese mismo año, Neveu, Schwarz y Charles Thorn construyeron una teoría que unificaba ambas: la de bosones de Neveu y Schwarz, y la de fermiones de Ramond. La expresión de la acción para la hoja de mundo que produce el espectro de bosones y fermiones es

$$S = \int d\sigma d\tau (\partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X_\mu - i\bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu).$$

Dicha acción presentaba supersimetría global en dos dimensiones o supersimetría de la hoja de mundo. Se tenían dos sectores, el NS (Neveu-Schwarz) donde aparece el espectro de bosones, y el sector R (Ramond) que produce el espectro de fermiones. Esta fue una versión temprana de la teoría de supercuerdas, Schwarz encontró que la dimensión crítica para este modelo es $d = 10$.

En esta época (a inicios de los 70) ya se había descubierto una teoría convincente para la descripción de los hadrones: la cromodinámica cuántica (QCD, del inglés Quantum Chromodynamics). Por otro lado, la teoría de cuerdas presentaba muchos inconvenientes como teoría de los hadrones, como por ejemplo, un espaciotiempo de dimensión muy poco realista. Además, mucha evidencia experimental a favor del modelo estándar estaba apareciendo. Con esto, la teoría de cuerdas fue perdiendo mucha popularidad y ocurrió una suerte de integración de la cuerda hadrónica dentro de la estructura teórica de la QCD. Una muy buena forma de enmarcar este periodo de la historia (y para dar un mejor contexto del desarrollo paralelo del modelo estándar) ha sido expuesta por Yoichiro Nambu en el siguiente párrafo:

“El origen de la teoría de cuerdas se remonta al modelo de Veneziano de 1968. También resulta que el modelo de Weinberg-Salam nació alrededor de la misma época. Este último ha conducido al exitoso Modelo Estándar. Los descendientes del primero, por otro lado, todavía luchan por ser relevantes para el mundo real a pesar de su enorme atractivo teórico. De hecho, existen dos caminos en el desarrollo de la física teórica de partículas desde sus comienzos en los años treinta. Los llamaré la teoría cuántica de campos y la teoría de la matriz S , respectivamente. En su linaje histórico, el Modelo Estándar pertenece al primero, mientras que la teoría de supercuerdas pertenece al segundo. Aunque el primero resultó ser el Camino Real de la física de partículas, esto no estuvo del todo claro antes de su triunfo final, y el segundo también ha jugado roles muy importantes que continúan hasta el día de hoy” [12].

1.4. Unificación y supercuerdas

Como se contaba en la anterior sección, las teorías de cuerdas desarrolladas hasta ese momento tenían muchas falencias para ser consideradas teorías correctas de los hadrones. Por ejemplo, exigían un espaciotiempo de dimensión poco realista (26 o 10), además de la existencia de estados taquiónicos en su espectro (estados con $m^2 = -1$, siendo m la masa de la partícula) que implicaban cierta inestabilidad del vacío. Además, el espectro contenía también partículas sin masa. Por ejemplo, en el espectro de cuerdas cerradas aparecía una partícula sin masa de espín 2, caso contrario al espectro de hadrones que no contiene partículas sin masa.

Fue en 1974 cuando John Schwarz y Joël Scherk exploraron la posibilidad de interpretar la partícula sin masa de spin 2 como el gravitón. Ambos sugirieron a la teoría de cuerdas como una teoría cuántica de la gravedad unificada con las demás fuerzas. En pocas palabras, considerar las entidades físicas fundamentales como cuerdas predice de alguna manera la existencia de la gravedad. La escala de la teoría tuvo que disminuir drásticamente, llegando hasta la escala de Planck. Las cuerdas abiertas correspondían al sector de teoría gauge, las cuerdas cerradas al sector de gravedad. Inicialmente, esta propuesta no fue tomada muy en serio, perdiendo también gran popularidad la teoría de cuerdas, marcándose el inicio de la *década oscura*. Entre 1974 y 1984 disminuyó drásticamente la investigación hecha en los modelos duales, en teoría de cuerdas, comparando con los años anteriores desde la aparición del modelo de Veneziano. Esta década terminaría con el renacimiento de la teoría, en el periodo de la *primera revolución de supercuerdas*.

Durante 1984 retoma gran popularidad la investigación en cuerdas, principalmente como consecuencia de los resultados conseguidos por Schwarz y Michael Green. Luego de estos resultados se originó una ferviente investigación al respecto. Esto desembocó en la *primera revolución de supercuerdas*. El resultado de Schwarz y Green era sobre cancelación de anomalías, en donde demostraban la cancelación de ciertas anomalías (problemas de inconsistencia a nivel matemático que habían planteado gran dificultad en la teoría de cuerdas), específicamente en la versión conocida como teoría de supercuerdas Tipo I, y ya para este año se tenían tres tipos de teorías de supercuerdas consistentes: las que actualmente se conocen como Tipo I, Tipo IIA y Tipo IIB.

Ahora, es necesario aclarar que para continuar con la exposición de los desarrollos históricos, se hace bastante difícil rastrear detalladamente todos los avances y aportes conducentes hacia el estado actual de la teoría. Es por esto que se procederá a exponer brevemente los sucesos más importantes ocurridos en los periodos posteriores de la historia para transmitir una leve percepción al lector sobre el subsecuente desarrollo de la teoría, que para nada pretende ser una exposición completa.

1.5. Algunos desarrollos relevantes desde 1985

En 1985, el «cuarteto de cuerdas de Princeton» conformado por David Gross, Jeffrey Harvey, Emil Martinec y Ryan Rohm introdujeron las cuerdas heteróticas, un nuevo tipo de teoría de supercuerdas donde se combinan las cuerdas bosónicas ($d = 26$) y las supercuerdas ($d = 10$), siendo de alguna manera una cuerda híbrida. Hay dos tipos según su grupo de simetría: las heteróticas $SO(32)$ y $E_8 \times E_8$. En ese mismo año, Philip Candelas, Gary Horowitz, Andrew Strominger y Edward Witten introdujeron las compactificaciones Calabi-Yau, esto como estrategia para conseguir un vacío realista de 4 dimensiones, haciendo que las dimensiones extra fueran de dimensión muy pequeña y compactificadas en variedades de Calabi-Yau. Con esto se abre la posibilidad de recuperar una física realista en 4 dimensiones.

Estos dos temas, las cuerdas heteróticas y la compactificación de Calabi-Yau, dieron el marco teórico para una gran parte del trabajo desarrollado en la teoría de cuerdas durante la década de 1984-1994.

En el año 1987 se publicó el primer libro de texto: *Superstring Theory* en dos volúmenes, escrito por Green, Schwarz y Witten. La publicación de este libro de texto indica que la teoría de cuerdas había avanzado lo suficiente para ser considerada como un marco teórico sólido y coherente. Además, la compilación de un libro de texto demuestra que se había alcanzado ya cierto nivel de consenso.

En 1995, Joe Polchinski hace el redescubrimiento de las D-branas dentro de la teoría de cuerdas y resalta la importancia de este objeto. En este año, Witten, en la conferencia *STRINGS '95 Future Perspectives in String Theory*, dio una charla titulada «Some Comments On String Dynamics» donde presentó los inicios de una visión unificada de las teorías de supercuerdas existentes. Sugirió que de alguna forma todas ellas están relacionadas, en lo que se conoce actualmente como la teoría M [3]. Un ejemplo de esta relación y red de dualidades es el caso cuando una teoría de supergravedad de 11 dimensiones existe como el límite a baja energía de la teoría de cuerdas tipo IIA. Esta red de dualidades está presentada por el famoso diagrama de la figura 1.4.

El año 1995 marcó el inicio de lo que se conoce como *segunda revolución de supercuerdas*, donde además del descubrimiento de las D-branas y dualidades, se consiguieron resultados importantes

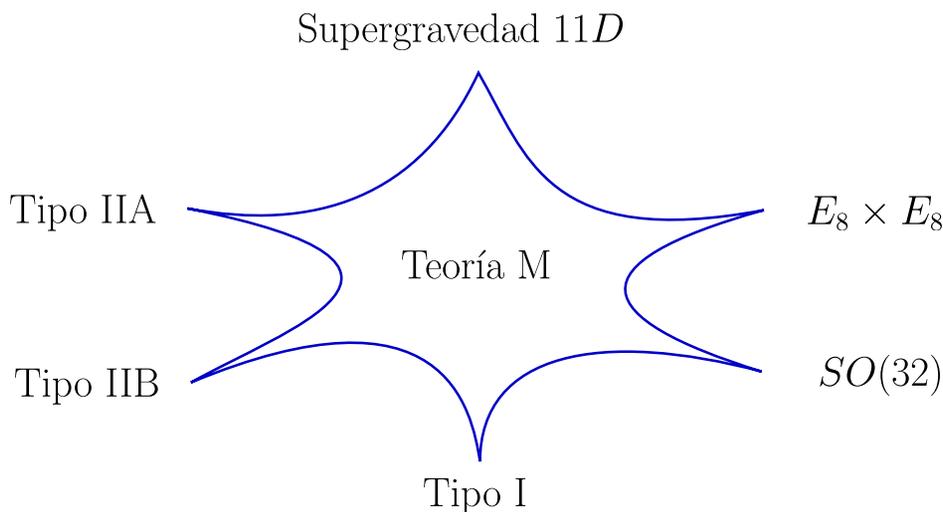


Figura 1.4: Diagrama que muestra la red de dualidades entre las 5 teorías de cuerdas, entendidas como casos límite de una misma teoría subyacente, propuesto originalmente por Edward Witten [3].

sobre la entropía de agujeros negros y el conteo de microestados llevando a una deducción de la fórmula para la entropía de Bekenstein-Hawking dentro de la teoría de cuerdas. Aparecieron también conceptos nuevos como el landscape y el trabajo también con efectos no perturbativos de la teoría. Más precisamente, en 1997 aparece un nuevo resultado importante conseguido por Juan Maldacena, donde se propone una dualidad entre teorías de gravedad cuántica (teoría de cuerdas) y teorías cuánticas de campos conformes (sin gravedad), originalmente mostrando cierta clase de equivalencia entre una teoría que vive en un espacio de Minkowski sin gravedad de dimensión $D - 1$ y una viviendo en un espacio asintóticamente anti-de Sitter de dimensión D . Este resultado es una realización del principio holográfico y muestra cómo con la información existente en la frontera es posible describir la física del espacio completo en una dimensión mayor.

Capítulo 2

Fundamentos clásicos

Este capítulo expone una serie de fundamentos clásicos en física, especialmente de la mecánica clásica y la relatividad especial, para el posterior estudio de las cuerdas relativistas. La mecánica clásica ofrece un conjunto importante de herramientas para el estudio de la física de cuerdas. Se revisan brevemente conceptos como el principio de Hamilton, herramienta muy útil para obtener las ecuaciones del movimiento. Dentro de la sección de relatividad se introducen sus conceptos esenciales, también se introducen las coordenadas de cono de luz que facilitarán la cuantización de la cuerda relativista. Además, se construye la acción para una partícula puntual partiendo del principio de invarianza de Lorentz. Al final del capítulo se estudia la dinámica de una cuerda con masa, de quien se obtiene su ecuación del movimiento usando el principio de Hamilton y se introducen conceptos importantes como las condiciones de frontera.

2.1. Principio de Hamilton

En mecánica clásica, cuando se tiene un sistema físico desconocido, es necesario comenzar a entenderlo con ayuda de las ecuaciones del movimiento, con ellas es posible predecir el comportamiento del sistema físico en cuestión. El principio de Hamilton es una herramienta muy útil que permite obtener estas ecuaciones, y se formula de la siguiente manera:

El movimiento de un sistema mecánico entre los tiempos $t \in (t_1, t_2)$ está dado por los extremales del funcional *acción*:

$$S = S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt, \quad (2.1)$$

donde $L(q, \dot{q}, t)$ es el lagrangiano, una función característica del sistema y determina su dinámica. Es importante resaltar que un funcional puede entenderse de forma intuitiva como una función que toma como argumento otra función. Este principio se conoce también como el *principio de mínima acción* y establece que:

$$\delta S = 0. \quad (2.2)$$

Para obtener las ecuaciones del movimiento es necesario hacer la variación de la acción y usar el principio de Hamilton (2.2). Considerando los extremos de la trayectoria del sistema como extremos fijos a efectos de dicha variación, se impone entonces la condición:

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0. \quad (2.3)$$

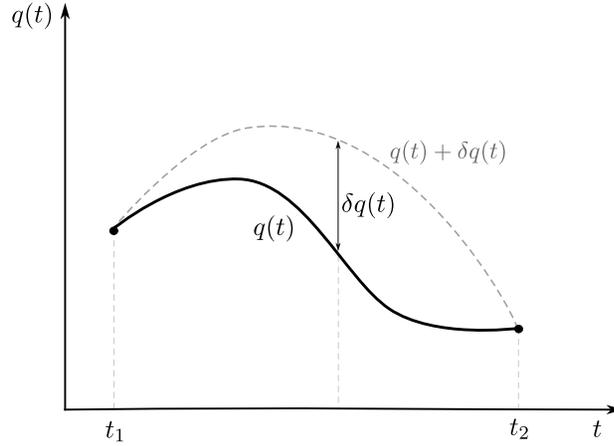


Figura 2.1: Esquema de la variación sobre la trayectoria real $q(t)$ de una partícula [13].

En la figura 2.1 se puede ver esquemáticamente la trayectoria real $q(t)$ del sistema y cómo la variación sobre la trayectoria se hace en un tiempo fijo. Esta trayectoria es tal que para cualquier $\delta q(t)$ se cumple:

$$\delta S \equiv S[q(t) + \delta q(t)] - S[q(t)] = 0,$$

como esta variación considera t fijo, se tiene la identidad siguiente:

$$\delta \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} \delta.$$

Aplicando entonces la variación:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) \delta q dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta q dt, \end{aligned}$$

integrando por partes la segunda integral que aparece:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta q dt = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt,$$

con esto, δS queda como:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2},$$

considerando las condiciones en (2.3), e imponiendo el principio de mínima acción, se cumple que $\delta S = 0$ para cualquier $\delta q(t)$ siempre y cuando

$$\frac{\partial L}{\partial q^I} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^I} \right) = 0. \quad (2.4)$$

Así se obtienen las ecuaciones del movimiento del sistema, conocidas como *ecuaciones de Euler-Lagrange*. El índice I ($I : 1, 2, \dots, n$) denota que para un sistema con n grados de libertad se cuenta

con n ecuaciones distintas, una por cada coordenada generalizada. Esta forma de conseguir las ecuaciones del movimiento, partiendo de la acción del sistema mecánico. Es muy útil incluso para sistemas no necesariamente clásicos, es totalmente necesario y oportuno este tipo de procedimiento, puesto que en la práctica es mucho más sencillo formular la acción característica de cierto sistema comparado con formular directamente sus ecuaciones del movimiento. Las ecuaciones de Euler-Lagrange no siempre son posibles de resolver analíticamente, este es únicamente el caso de los sistemas integrables, donde el número de grados de libertad es igual al de constantes del movimiento. En el resto de los casos, la solución de las ecuaciones del movimiento es posible utilizando métodos numéricos o perturbativamente.

Partiendo de la ecuación (2.4), el *momento canónico* se define como:

$$p^I = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^I} \right), \quad (2.5)$$

y el *hamiltoniano*:

$$H = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^I} \right) \dot{q}^I - L = p^I \dot{q}^I - L. \quad (2.6)$$

Esta formulación de la mecánica clásica permite determinar completamente la dinámica y las ecuaciones del movimiento de un sistema físico. Cuando se enfrenta un sistema físico desconocido, información de esta clase es esencial para poder predecir y entender el comportamiento de dicho sistema. Este formalismo es una herramienta clave para entender los sistemas físicos. Además, el concepto de acción presentado al inicio de este capítulo es importante, se verá más adelante la conveniencia de construir acciones y a partir de ellas derivar las ecuaciones del movimiento. Por ejemplo, en el caso de una cuerda relativista, no es posible construir sus ecuaciones del movimiento directamente, se hace estrictamente necesario construir una acción basada en principios generales que cumple, y entonces a partir de ella derivar las ecuaciones del movimiento.

Integral del movimiento

Una *integral* o constante del movimiento es una función $I = I(q, \dot{q}, t)$ tal que:

$$\frac{dI}{dt} = 0,$$

para cualquier $q(t)$ que sea solución de las ecuaciones del movimiento.

2.2. Teorema de Noether

La matemática Emmy Noether (1882-1935) demostró una importante relación entre las simetrías de un sistema físico y las integrales del movimiento. A través del primer teorema de Noether se establece que las simetrías del sistema están directamente relacionadas con las cargas conservadas del mismo. Antes de hablar sobre este teorema, es importante entender los distintos tipos de simetría existentes en los sistemas físicos. Existen *simetrías discretas*, como la simetría de rotación de un cuadrado o la de traslación dentro de una red cristalina. Estas simetrías involucran una transformación finita que deja el sistema invariante. Por otro lado, también existen *simetrías continuas*, donde la transformación puede ser arbitrariamente pequeña, correspondiendo su tamaño a un valor infinitesimal ϵ . Un ejemplo de simetría continua es la rotación de un círculo, esta transformación deja el objeto invariante sin importar el ángulo de rotación.

Es importante aclarar cierta terminología usada comúnmente en física de altas energías. Se dice que una afirmación es válida *on-shell* cuando es cierta siempre y cuando se cumplan las ecuaciones del movimiento. Una afirmación es válida *off-shell* cuando es cierta incluso cuando las ecuaciones de movimiento no necesariamente se satisfacen o no se aplican condiciones específicas [13].

2.2.1. Primer teorema de Noether

Primera Versión

Para cada simetría global continua del sistema existe una correspondiente integral del movimiento on-shell.

Segunda versión

Al considerar concretamente una transformación (note que $\tilde{\delta}$ es diferente de la variación δ):

$$t \rightarrow t' = t + \tilde{\delta}t, \quad q \rightarrow q'(t') = q(t) + \tilde{\delta}q(t),$$

siendo

$$\tilde{\delta}q = \epsilon \Delta q, \quad \tilde{\delta}t = \epsilon \Delta t,$$

donde Δq representa el generador de la transformación (que define el tipo) y ϵ representa el parámetro que determina cuán grande es la transformación. El teorema se enuncia como:

Sea $\tilde{\delta}$ una simetría global continua, es decir, se encuentra que off-shell $\tilde{\delta}t$, $\tilde{\delta}q$ tales que $\tilde{\delta}S = 0$. Entonces:

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \tilde{\delta}q + \left(L - \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \tilde{\delta}t,$$

es una integral del movimiento on-shell [13].

2.3. Fundamentos de Relatividad Especial

La relatividad especial se basa en el hecho experimental de que la velocidad de la luz (en el vacío: $c \simeq 3 \times 10^8 m/s$) es la misma para todos los observadores inerciales. Dos observadores inerciales distintos deberán entonces comparar las coordenadas de los eventos a través de transformaciones dadas por el grupo de Lorentz. Los eventos se caracterizan por medio de 4 coordenadas, una coordenada temporal t y tres coordenadas espaciales, correspondientes a las *coordenadas espaciotemporales* del evento:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z), \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

La separación espaciotemporal entre dos eventos distintos para dos observadores de Lorentz S y S' , tomando diferencias infinitesimales (implica que los eventos son cercanos) es

$$\begin{aligned} -ds^2 &= -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \\ &= -(dx'^0)^2 + (dx'^1)^2 + (dx'^2)^2 + (dx'^3)^2. \end{aligned}$$

Ambos observadores coinciden en el valor de esta separación conocida como intervalo invariante: $ds^2 = ds'^2$. Introduciendo una notación para simplificar la expresión del intervalo invariante, se tiene que:

$$dx_0 \equiv -dx^0, \quad dx_1 \equiv dx^1, \quad dx_2 \equiv dx^2, \quad dx_3 \equiv dx^3,$$

$$dx_\mu = (dx_0, dx_1, dx_2, dx_3) \equiv (-dx^0, dx^1, dx^2, dx^3).$$

El intervalo se reescribe como

$$\begin{aligned} -ds^2 &= -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \\ &= dx_0 dx^0 + dx_1 dx^1 + dx_2 dx^2 + dx_3 dx^3, \end{aligned}$$

con esto, el intervalo invariante ds^2 en términos de dx^μ y dx_μ se convierte en:

$$-ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 dx_\mu dx^\mu = dx_\mu dx^\mu = dx_0 dx^0 + dx_1 dx^1 + dx_2 dx^2 + dx_3 dx^3. \quad (2.7)$$

Desde ahora se seguirá usando el *convenio de suma de Einstein*, según este, los índices que se repiten dentro de un mismo término deben ser sumados sobre el conjunto correspondiente de valores, en este caso μ toma los valores $\mu = 0, 1, 2, 3$. El resultado en (2.7) puede ser reescrito utilizando la *métrica de Minkowski*:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con esto, la ecuación queda:

$$-ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad \text{considerando: } dx_\mu = \eta_{\mu\nu} dx^\nu.$$

De esta forma se ve que la métrica de Minkowski se puede utilizar para bajar índices, y de forma general:

$$b_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} b^\nu,$$

entonces, si se tienen dos objetos a^μ y b^μ , es posible definir el *producto escalar relativista* como:

$$a \cdot b \equiv a^\mu b_\mu = \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = -a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3. \quad (2.8)$$

La inversa de la métrica de Minkowski es la matriz:

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de tal forma que la propiedad de la inversa se escribe en términos de la *delta de Kronecker* como sigue:

$$\eta^{\nu\rho} \eta_{\rho\mu} = \delta_\mu^\nu,$$

δ_μ^ν se define como:

$$\delta_\mu^\nu = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \nu \\ 0 & \text{si } \mu \neq \nu \end{cases}.$$

2.3.1. Transformaciones de Lorentz

Las transformaciones de Lorentz son transformaciones lineales $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ tales que respetan la *invarianza de Lorentz* representada por la igualdad:

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x'^0)^2 - (x'^1)^2 - (x'^2)^2 - (x'^3)^2. \quad (2.9)$$

Vale la pena traer a consideración el comentario de Klein resaltado por Emmy Noether en [14], comentando que el término «relatividad» es reemplazable por «invarianza relativa a un grupo». En el caso de la relatividad especial, la invarianza ocurre respecto del grupo de Lorentz. Un conjunto de transformaciones de coordenadas que respetan la igualdad dada en (2.9) es:

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma (x^0 - \beta x^1), \\ x'^1 &= \gamma (-\beta x^0 + x^1), \\ x'^2 &= x^2, \\ x'^3 &= x^3, \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde γ es el factor de Lorentz, definido como:

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

y v es la velocidad relativa entre los marcos de referencia S y S' , donde S' se mueve a lo largo de la dirección x^1 . Se dice que los dos marcos de referencia están conectados o transformados mediante un boost a lo largo de la dirección x^1 con parámetro de velocidad $\beta \equiv v/c$. En general, es posible escribir las transformaciones de Lorentz como la relación lineal

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad (2.11)$$

donde las componentes de la matriz $\Lambda^\mu{}_\nu$ son constantes que definen la transformación. Para el boost realizado en (2.10) se consigue la matriz:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

sus componentes deben ser tales que respeten la ecuación (2.9), esto requiere la siguiente condición para la matriz de transformación:

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta, \quad (2.12)$$

en este sentido, Λ es una transformación de Lorentz si y solo si preserva la métrica η . Tomando el determinante a ambos lados de la ecuación (2.12)

$$(\det \Lambda^T) (\det \eta) (\det \Lambda) = \det \eta \quad \longrightarrow \quad (\det \Lambda)^2 = 1 \quad \longrightarrow \quad \det \Lambda = \pm 1.$$

Se comprueba así que la matriz Λ es invertible. En efecto, todas las transformaciones de Lorentz son transformaciones lineales invertibles. Estas transformaciones incluyen transformaciones de rotaciones e impulsos de Lorentz o boost. Cabe resaltar que el grupo completo de simetría del espaciotiempo, combinando traslaciones de la forma $x'^\mu = x^\mu + a^\mu$ con las transformaciones de Lorentz, es el grupo de Poincaré. La transformación combinada será de la forma:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu.$$

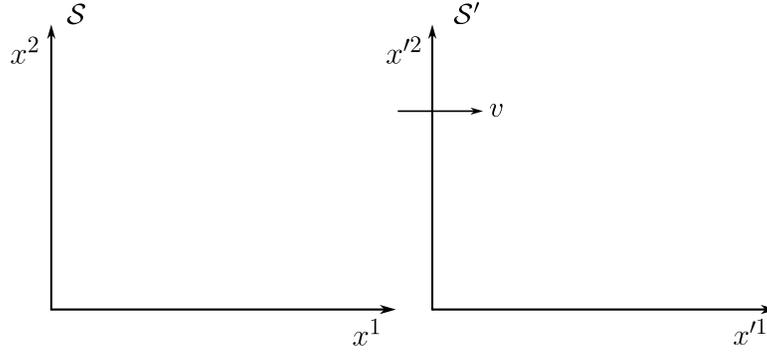


Figura 2.2: Boost a lo largo de la dirección x^1 del observador S , observe que ambos observadores están relacionados por un movimiento relativo, donde el observador S' se mueve con velocidad v a lo largo de dicha dirección, así el parámetro del boost dado en (2.10) es $\beta = v/c$ [6].

En general, un objeto a^μ es un *cuadrivector* o un vector de Lorentz si las cuatro cantidades que lo conforman se transforman como $a'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu$. Evidentemente, x^μ definido en (2.11) es un cuadrivector.

2.3.2. Energía y momento relativistas

Existe una relación entre la masa en reposo de una partícula puntual de masa m , su energía relativista E y su momento relativista \vec{p} dada por la ecuación

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p} \cdot \vec{p} = m^2 c^2, \quad (2.13)$$

donde la energía y momento relativistas se expresan en términos de la masa en reposo y la velocidad de la partícula:

$$E = \gamma m c^2, \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v}.$$

Con estos ingredientes es posible construir el *cuadrivector del momento*

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) \equiv \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right) = \gamma m (c, \vec{v}).$$

Bajando el índice de p^μ :

$$p_\mu = (p_0, p_1, p_2, p_3) = \eta_{\mu\nu} p^\nu = \left(-\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right) = \gamma m (c, v_x, v_y, v_z),$$

teniendo en cuenta también la ecuación (2.13) se construye el escalar de Lorentz:

$$\begin{aligned} p^\mu p_\mu &= -(p^0)^2 + \vec{p} \cdot \vec{p} = -\frac{E^2}{c^2} + \vec{p} \cdot \vec{p} \\ \therefore p^\mu p_\mu &= -m^2 c^2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

La expresión en (2.14) es nombrada un escalar de Lorentz puesto que no tiene índices libres, y además, por el hecho de que para todos los observadores Lorentz el valor de la masa en reposo de la partícula debe ser el mismo. En este sentido, la masa en reposo es también un invariante de Lorentz.

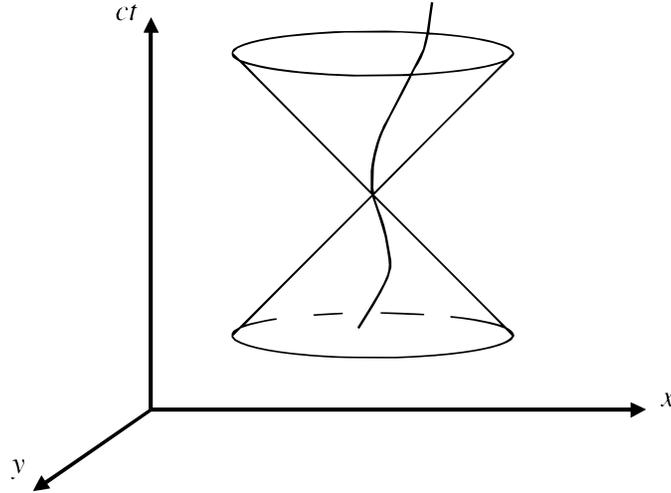


Figura 2.3: Cono de luz para un evento dentro de la línea de mundo de una partícula [15].

Tiempo propio

Para definir el tiempo propio es útil considerar el movimiento de una partícula a lo largo del eje x , cuya trayectoria cubre dos eventos, entonces el intervalo invariante para el movimiento de esta partícula es

$$-ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 = -c^2 dt^2 (1 - \beta^2). \quad (2.15)$$

Según un marco de referencia que se mueve con la partícula (como si estuviera pegado a ella) la partícula parecería no moverse, por lo que $dx = 0$ y $dt = d\tau$ en ese marco de referencia, el intervalo queda como

$$-ds^2 = -c^2 d\tau^2. \quad (2.16)$$

Pese a que para observadores de Lorentz distintos el tiempo transcurrido entre dos eventos distintos puede tener valores diferentes, siempre estarán de acuerdo y medirán el mismo valor para el tiempo entre los dos eventos según el marco de referencia «atado» a la partícula, correspondiente al tiempo propio τ de la partícula. El tiempo propio es una medida del tiempo invariante Lorentz, todos los observadores estarán de acuerdo con el valor del tiempo transcurrido para el reloj del marco de referencia que se mueve con la partícula.

Existe la siguiente definición para distintos valores del intervalo invariante ds^2

$$ds^2 \begin{cases} > 0 & \text{tipo tiempo} \rightarrow v < c \\ = 0 & \text{tipo luz} \rightarrow v = c \\ < 0 & \text{tipo espacio} \rightarrow v > c \end{cases}.$$

En la figura 2.3 se representa la línea de mundo de una partícula. Para uno de sus eventos (punto negro) se traza el cono de luz correspondiente, así que un evento de tipo tiempo correspondería a uno dentro del cono de luz (punto rojo), un evento de tipo luz estaría sobre la superficie del cono (punto verde) y uno de tipo espacio estaría por fuera (punto azul). Para intervalos de tipo tiempo, la ecuación (2.16) implica que el intervalo del tiempo propio se puede escribir simplemente como

$$d\tau = \frac{ds}{c}.$$

Ahora, de la ecuación (2.15)

$$ds = c dt \sqrt{1 - \beta^2} \longrightarrow \frac{dt}{ds} = \frac{\gamma}{c},$$

siendo posible entonces definir el cuadrivector de velocidad u^μ tomando el cociente dx^μ/ds , y usando la regla de la cadena $\frac{da}{ds} = \frac{da}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{v_a \gamma}{c}$:

$$u^\mu = c \frac{dx^\mu}{ds} = c \left(\frac{d(ct)}{ds}, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) = \gamma(c, v_x, v_y, v_z) = \gamma(c, \vec{v}).$$

Obteniendo para el cuadrimomento la expresión:

$$p^\mu = m u^\mu.$$

2.3.3. Coordenadas de cono de luz

Un sistema de coordenadas conveniente en el estudio de la teoría de cuerdas son las coordenadas de cono de luz, estas permiten cuantizar la cuerda relativista de forma directa. El marco que usa estas coordenadas se conocía en los inicios de la teoría como *marco de momento infinito* [5]. En general, estas coordenadas incluyen las nuevas coordenadas x^+ y x^- , que son combinación lineal de la coordenada temporal x^0 y una coordenada espacial, en este caso corresponde a x^1 . Gráficamente se representan en la figura 2.4.

$$\begin{aligned} x^+ &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (x^0 + x^1), \\ x^- &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (x^0 - x^1). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Las coordenadas restantes x^2 y x^3 se mantienen iguales. Así, las coordenadas de cono de luz son (x^+, x^-, x^2, x^3) . Por definición, se toma x^+ como la coordenada del *tiempo de cono de luz* y x^- como una coordenada espacial más. En general, las componentes de cono de luz para cualquier

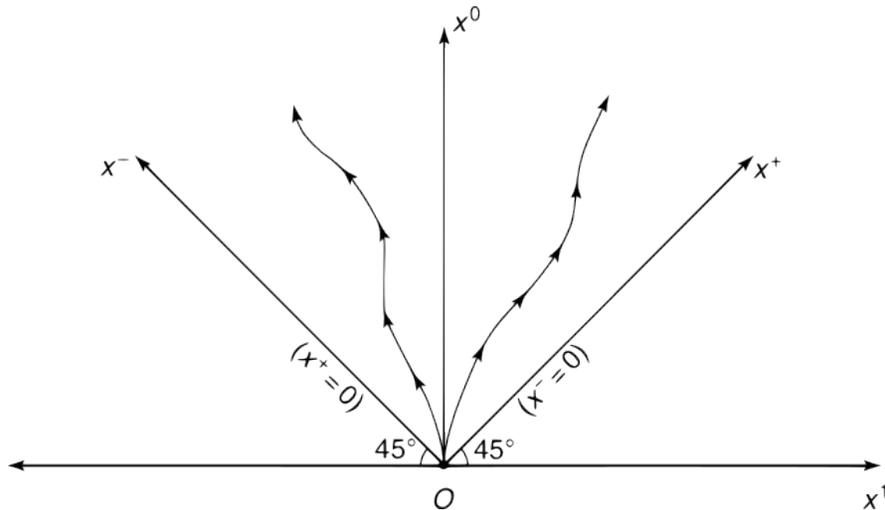


Figura 2.4: Ejes de coordenadas de cono de luz x^+ y x^- , se representan también las líneas de mundo posibles para una partícula [6].

vector de Lorentz a^μ se definen como:

$$\begin{aligned} a^+ &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (a^0 + a^1), \\ a^- &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (a^0 - a^1). \end{aligned}$$

El intervalo invariante en términos de las coordenadas de cono de luz corresponde a

$$-ds^2 = -2dx^+ dx^- + (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \quad (2.18)$$

En notación de índices, y teniendo en cuenta que estos nuevos índices toman valores ($\mu = +, -, 2, 3$) la ecuación (2.18) queda:

$$-ds^2 = \hat{\eta}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

siendo $\hat{\eta}_{\mu\nu}$ la métrica de cono de luz, cuyas componentes son

$$\hat{\eta}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En general, el producto escalar entre vectores escritos en estas coordenadas será:

$$a \cdot b = -a^- b^+ - a^+ b^- + a^2 b^2 + a^3 b^3 = \hat{\eta}_{\mu\nu} a^\mu b^\nu, \quad (2.19)$$

comparando con (2.8) se comprueba que

$$-a^- b^+ - a^+ b^- = -a^0 b^0 + a^1 b^1.$$

Retomando la expresión general $a \cdot b = a_\mu b^\mu$ para el producto escalar y recordando que para las coordenadas de cono de luz los índices recorren los valores $\mu = +, -, 2, 3$. Entonces

$$a \cdot b = a_+ b^+ + a_- b^- + a_2 b^2 + a_3 b^3,$$

y al comparar con la ecuación (2.19) se encuentra:

$$a_+ = -a^-, \quad a_- = -a^+.$$

La *velocidad de cono de luz* se define como:

$$\frac{dx^-}{dx^+} = \frac{1 - \beta}{1 + \beta}.$$

Cuadrimento

El vector de momento en coordenadas de cono de luz tiene componentes p^+ y p^- de forma análoga a (2.17):

$$\begin{aligned} p^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (p^0 + p^1) = -p_-, \\ p^- &= \frac{1}{\sqrt{2}} (p^0 - p^1) = -p_+. \end{aligned}$$

En las coordenadas típicas la energía está dada por $E = p^0 c = -p_0 c$, entonces se esperaría que la energía de cono de luz estuviera relacionada con $-p_+$, y como $-p_+ = p^-$:

$$E_{lc} = p^- c. \quad (2.20)$$

2.4. Campos clásicos

Cuando se trabaja con funciones en el espaciotiempo, se introducen campos de la forma $\phi(t, \vec{x})$ que toman como variables puntos en el espaciotiempo: $(t, \vec{x}) = x^\mu$. Para simplificar la notación se escribe el campo como $\phi(x)$. En este caso, no se trabaja directamente con el lagrangiano L , sino con la densidad lagrangiana \mathcal{L} , que está relacionada con el lagrangiano de la siguiente manera [16]:

$$L = \int \mathcal{L} d^3x, \quad (2.21)$$

con esto se define fácilmente la acción como:

$$S = \int \mathcal{L} dt = \int \mathcal{L} d^4x, \quad (2.22)$$

considerando $c = 1$ y donde $d^3x = dx^1 dx^2 dx^3$ es el diferencial de volumen para 3 dimensiones espaciales; siendo $d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = c dt dx^1 dx^2 dx^3$, por analogía, un diferencial de volumen espaciotemporal.

Un campo es *local* cuando \mathcal{L} solo depende del campo y sus primeras derivadas para un punto x en el espaciotiempo, esto es, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$. Así, la variación de la acción resulta

$$\delta S = \delta \int \mathcal{L} d^4x = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right],$$

y usando el hecho de que $\delta (\partial_\mu \phi) = \partial_\mu (\delta \phi)$, e integrando por partes el segundo término del miembro derecho

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi \right].$$

Exigiendo que la variación de la acción $\delta S = 0$, es posible encontrar las ecuaciones del movimiento, esta es la ecuación de Euler-Lagrange para un campo ϕ

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0. \quad (2.23)$$

De manera análoga a la ecuación (2.5), se define la *densidad de momento canónico*

$$\Pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}, \quad (2.24)$$

y la *densidad hamiltoniana*

$$\mathcal{H} = \Pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{L}. \quad (2.25)$$

Para conseguir el hamiltoniano se integra la densidad lagrangiana sobre el espacio, de manera que

$$H = \int \mathcal{H} d^3x. \quad (2.26)$$

2.4.1. Teorema de Noether para campos

En la sección 2.2.1 se enunció el teorema de Noether, estableciendo que para cada simetría global continua de un sistema mecánico existe una correspondiente integral del movimiento on-shell. Ahora se hace la formulación del mismo teorema, pero para un campo clásico, y es la siguiente: Si una densidad lagrangiana tiene una simetría continua, entonces existe una corriente asociada a esa simetría que se conserva cuando se satisfacen las ecuaciones del movimiento [17].

Note que el equivalente a la integral del movimiento por convención se nombra como *corriente conservada*, en el caso de la teoría clásica de campos. Mientras que las simetrías del lagrangiano garantizan la existencia de cargas conservadas, las simetrías de una densidad lagrangiana garantizan la existencia de corrientes conservadas [6]. Se puede observar matemáticamente cómo aparece dicha corriente y, por ende, su respectiva *carga conservada* (para el lagrangiano) como consecuencia de simetrías.

Matemáticamente se puede ver considerando una acción, escrita como la integral de la densidad lagrangiana sobre el conjunto total de coordenadas ξ^α , en un espacio general que puede ser un subespacio del espacio completo de Minkowski, es decir:

$$S = \int d\xi^0 d\xi^1 \dots d\xi^k \mathcal{L}(\phi^a, \partial_\alpha \phi^a). \quad (2.27)$$

La densidad lagrangiana depende de los campos $\phi^a(\xi)$, y las derivadas $\partial_\alpha \phi^a = \frac{\partial \phi^a}{\partial \xi^\alpha}$, respecto de las coordenadas. El índice a etiqueta cada uno de los campos.

Considerando la variación infinitesimal

$$\phi^a(\xi) \rightarrow \phi^a(\xi) + \delta\phi^a(\xi),$$

con la respectiva variación asociada a las derivadas del campo $\partial_\alpha \phi^a$. Las variaciones infinitesimales o simetrías (que hacen $\delta\mathcal{L} = 0$) con parámetros ϵ^i pueden ser escritas como

$$\delta\phi^a = \epsilon^i h_i^a(\phi), \quad (2.28)$$

donde ϵ^i es un conjunto de constantes infinitesimales, puesto que la variación puede involucrar varios parámetros. Como se asume invariante \mathcal{L} bajo la variación en (2.28) y las respectivas variaciones de sus derivadas, entonces las corrientes j_i^α definidas por

$$\epsilon^i j_i^\alpha \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi^a)} \delta\phi^a, \quad (2.29)$$

son corrientes conservadas, tales que

$$\partial_\alpha j_i^\alpha = 0. \quad (2.30)$$

Por convención, cualquier cuadrivector que satisfaga la propiedad (2.30) es llamado una corriente conservada. Por lo tanto, la ecuación (2.30) también lleva asociada las *cargas conservadas* definidas como

$$Q_i = \int d\xi^1 d\xi^2 \dots d\xi^k j_i^0, \quad (2.31)$$

que no son más que las integrales sobre las coordenadas espaciales de las componentes $\alpha = 0$ de las corrientes.

2.5. Acción partícula libre relativista

Inicialmente se estudia el movimiento de una partícula puntual no relativista de masa m , no nula, que se mueve de forma libre en un espaciotiempo plano. Entonces, la acción S_{nr} , está dada simplemente por la integral respecto del tiempo de la energía cinética de la partícula:

$$S_{\text{nr}} = \int L_{\text{nr}} dt = \int \frac{1}{2} m v^2(t) dt, \quad v^2 \equiv \vec{v} \cdot \vec{v}. \quad (2.32)$$

La ecuación del movimiento para esta partícula, aplicando el principio de Hamilton, es simplemente:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = 0,$$

esto quiere decir que la partícula se mueve a velocidad constante. La acción en (2.32) no puede ser la acción para una partícula relativista, puesto que la ecuación de movimiento que se consigue con ella asume una velocidad constante que no está restringida y podría tomar valores mayores que la velocidad de la luz, en contradicción con la teoría de la relatividad.

Se continúa ahora con la construcción de la acción para una partícula relativista. Ya se sabe que la acción, al ser un funcional, toma funciones como argumento y produce escalares. Entonces, la acción debe ser una magnitud escalar invariante Lorentz para cualquier trayectoria de la partícula, de manera que todos los observadores Lorentz coincidan en el valor de la acción correspondiente a la misma trayectoria espaciotemporal, es decir, a lo largo de cualquier línea de mundo de la misma partícula. Con esto, se consigue también que todos los observadores estén de acuerdo en que las ecuaciones del movimiento se satisfacen, para el caso de una acción mínima o estacionaria.

Recordando que el tiempo propio, definido como (2.16), es una magnitud invariante Lorentz, así que se puede asumir la acción como proporcional al tiempo propio asociado a la línea de mundo de la partícula, mostrada en la figura 2.5. Para intervalos de tipo tiempo, $ds^2 > 0$ y de (2.16) $d\tau = ds/c$, que produce la acción:

$$S = -\alpha \int \frac{ds}{c},$$

con el signo menos que se introduce para garantizar que ds sea real en un intervalo de tipo tiempo.

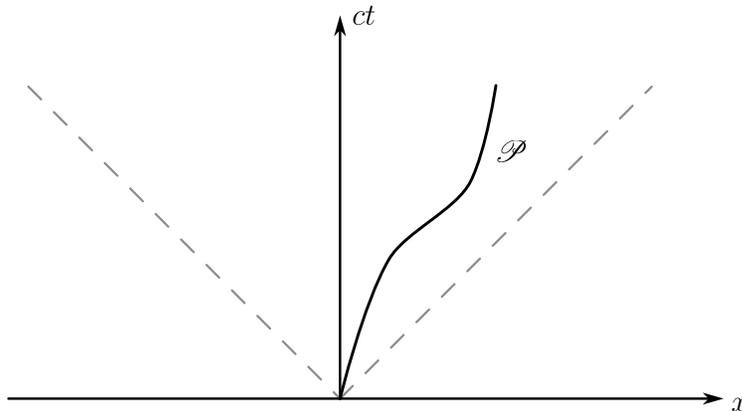


Figura 2.5: Diagrama espaciotemporal donde se muestra la línea de mundo de una partícula entre dos eventos. La trayectoria espaciotemporal es tal que minimiza la acción [6].

Otro paso necesario para concretar la construcción de la acción consiste en un pequeño análisis dimensional. El tiempo propio tiene unidades de tiempo, y la acción debería tener unidades de energía \times tiempo, entonces el factor de proporcionalidad debe tener unidades de energía, además de ser también invariante Lorentz. Una cantidad invariante Lorentz con unidades de energía es mc^2 siendo m la masa en reposo de la partícula, esta cantidad corresponde a su energía en reposo. Entonces, considerando $\alpha = mc^2$ la acción queda:

$$S = -mc \int ds. \quad (2.33)$$

Recordando que,

$$-ds^2 = -c^2 dt^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2,$$

y en un intervalo de tipo tiempo:

$$ds = \sqrt{c^2 dt^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2},$$

$$ds = dt \sqrt{\left(\frac{dx^0}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dx^3}{dt}\right)^2},$$

considerando que $dx^0/dt = c$, y $\frac{dx^I}{dt} \frac{dx_I}{dt} = |\vec{v}|^2 = v^2$ con $(I : 1, 2, 3)$, entonces se consigue la siguiente relación entre ds y dt ,

$$ds = c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

reemplazando este valor ds en (2.33):

$$S = -mc^2 \int dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (2.34)$$

La integral en (2.34) toma como extremos los valores de los tiempos inicial y final en la línea de mundo de la partícula. Partiendo de la definición de la acción dada en (2.1), el lagrangiano para una partícula puntual relativista con masa m es:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (2.35)$$

a partir de este lagrangiano es posible encontrar el momento canónico y el hamiltoniano:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad H = \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Claramente puede verse que a partir de la acción en (2.34) se recupera la física de la partícula relativista, encontrando el momento y la energía relativistas de la partícula.

Invarianza bajo reparametrizaciones

Generalmente la trayectoria x^μ de la partícula, es parametrizada por un parámetro arbitrario creciente τ . Entonces, la parametrización de la línea de mundo implica que las coordenadas se expresan en función del parámetro, esto es $x^\mu = x^\mu(\tau)$. Reexpresando la ecuación (2.7) :

$$ds^2 = -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} (d\tau)^2.$$

Así la acción en (2.33) se transforma como:

$$S = -mc \int \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau. \quad (2.36)$$

Este es el caso de una acción calculada por un observador que usa el parámetro τ . Suponiendo ahora que el mismo observador hace un cambio de parámetro de la forma $\tau \rightarrow \tau'$, aplicando entonces la regla de la cadena:

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{d\tau'} \frac{d\tau'}{d\tau},$$

para reemplazar esta expresión en la acción (2.36) :

$$S = -mc \int \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau'} \frac{dx^\nu}{d\tau'} \frac{d\tau'}{d\tau}} d\tau = -mc \int \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau'} \frac{dx^\nu}{d\tau'}} d\tau'.$$

Nótese que la acción tiene la misma forma que en (2.36), y tendrá el mismo valor, independientemente de la parametrización que elija el observador. Se dice entonces que esta acción es un *invariante bajo reparametrización*.

Ecuaciones del movimiento

Como se vio en la sección 2.1, es posible recuperar las ecuaciones del movimiento variando la acción y aplicando el principio de Hamilton. Variando entonces la acción en (2.33), de forma análoga a la variación δq solo que en este caso la variación se hace respecto de las coordenadas espaciotemporales $\delta x^\mu(\tau)$, se tiene que

$$\delta S = -mc \int \delta(ds).$$

La variación $\delta(ds)$ se puede encontrar a partir de la variación de $(ds)^2$:

$$2ds \delta(ds) = \delta \left(-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} (d\tau)^2 \right) = -2\eta_{\mu\nu} \delta \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right) \frac{dx^\nu}{d\tau} (d\tau)^2,$$

la variación no afecta a τ , de manera que

$$\delta(ds) = -\eta_{\mu\nu} \frac{d(\delta x^\mu)}{d\tau} \frac{dx^\nu}{ds} d\tau = -\frac{d(\delta x^\mu)}{d\tau} \frac{dx_\mu}{ds} d\tau,$$

en el último miembro de la derecha se baja el índice de dx^ν usando la métrica $\eta_{\mu\nu}$. Tomando como límites de integración los valores del parámetro para los puntos inicial y final de la línea de mundo de la partícula, la variación toma la forma

$$\delta S = mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} \frac{d(\delta x^\mu)}{d\tau} \frac{dx_\mu}{ds} d\tau.$$

En la variación aparece el cuadrimomento, que explícitamente es

$$mc \frac{dx_\mu}{ds} = mu_\mu = p_\mu,$$

simplificando así la acción como

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} \frac{d(\delta x^\mu)}{d\tau} p_\mu d\tau.$$

Finalmente, al reescribir el integrando como la derivada del producto, se obtiene:

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} \left[\frac{d}{d\tau} (\delta x^\mu p_\mu) - \delta x^\mu \frac{dp_\mu}{d\tau} \right] d\tau.$$

El primer término se anula puesto que las coordenadas están fijas en los extremos, y como el segundo término se debe anular para δx^μ arbitrario, entonces la ecuación del movimiento es:

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0.$$

Esta ecuación indica que el cuadrimomento de una partícula puntual se conserva a lo largo de su línea de mundo, permanece constante en el tiempo, independientemente de la parametrización utilizada. Se ha derivado entonces la ecuación del movimiento esperada físicamente a partir de la acción invariante Lorentz que se construyó con anterioridad; por lo tanto, esta ecuación del movimiento también es un invariante Lorentz.

2.6. Dinámica de una cuerda clásica no relativista

Se considera ahora una cuerda estirada en el plano (x, y) con extremos fijos a lo largo del eje x , tal como se observa a la izquierda en la figura 2.7. Se prestará atención a sus oscilaciones transversales, es decir, ortogonales a la cuerda. El desplazamiento transversal en cualquier punto será descrito por la coordenada y , considerando que la coordenada x no cambia en el tiempo para el punto dado. Para la descripción clásica de una cuerda homogénea se introducen la tensión T_0 , que tiene unidades de fuerza, y la densidad lineal de masa μ_0 , así la masa total de la cuerda es $M = \mu_0 a$.

$$\begin{aligned} [T_0] &= [\text{Fuerza}] = \frac{[\text{Energía}]}{[\text{Longitud}]} = \frac{M}{L} [v^2], \\ M/L &= \mu_0 \Rightarrow T_0 = \mu_0 v^2, \\ v &= \sqrt{T_0/\mu_0}. \end{aligned}$$

Después de examinar las unidades de los parámetros dinámicos T_0 y μ_0 , y su relación con la velocidad de las oscilaciones transversales, es necesario notar que, en el contexto de una cuerda relativista, la tensión y la densidad de masa estarían relacionadas por $T_0 = \mu_0 c^2$.

Se supone ahora que dicha cuerda puede ser deformada de su forma original por alguna fuerza, aunque esta sea comparativamente pequeña en relación con T_0 . Entonces, es válido asumir que la pendiente de la deformación es pequeña en todo momento, durante su movimiento. También, se presume que la cuerda no se encuentra sometida a ninguna otra fuerza horizontal aparte de la tensión T_0 . Para facilitar el análisis de esta situación, se presenta el diagrama en la figura 2.6. Para un segmento de la cuerda se cumple que:

$$T_1 \cos \alpha = T_2 \cos \beta,$$

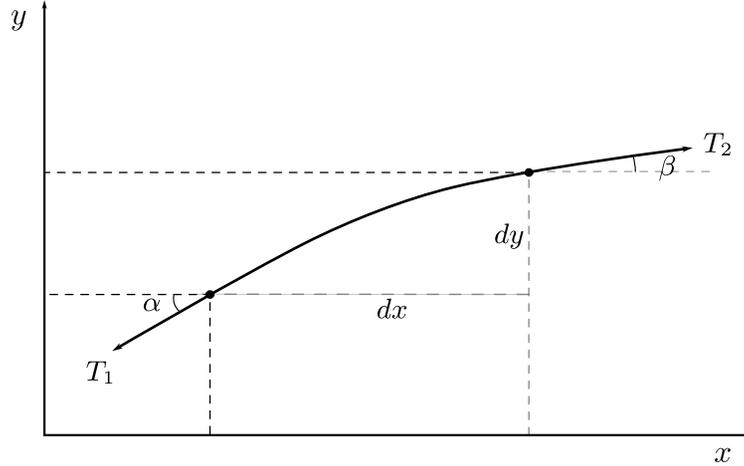


Figura 2.6: Sección infinitesimal de la cuerda que se ha deformado mediante una pequeña perturbación de magnitud F en la dirección transversal [6].

al asumir una deformación pequeña, la aproximación:

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \gamma}} \approx 1 - \frac{1}{2} \tan^2 \gamma \approx 1,$$

es válida y con esto nos queda que $T_1 = T_2 = T_0$. Teniendo en cuenta la segunda ley de Newton, y considerando el elemento infinitesimal de la cuerda dx , con una fuerza de deformación F :

$$T_0(\sin \beta - \sin \alpha) + F dx - \mu_0 g dx = \mu_0 dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

usando la aproximación $\sin \alpha \approx \tan \alpha = \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_x$, de manera similar $\sin \beta \approx \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x+dx}$ se obtiene:

$$T_0 \frac{\left(\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x+dx} - \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_x \right)}{dx} + F - \mu_0 g = \mu_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

considerando el caso en que $\mu_0 g \ll F \ll T_0$,

$$T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

al reordenar los términos, se nota que la expresión anterior es la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu_0}{T_0} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (2.37)$$

Entonces, la velocidad de la onda es

$$v_0 = \sqrt{T_0 / \mu_0}.$$

La solución general de la ecuación diferencial parcial en (2.37) tiene la forma:

$$y(t, x) = h_+(x - v_0 t) + h_-(x + v_0 t),$$

donde h_+ representa una onda moviéndose hacia la derecha y h_- hacia la izquierda. Además, para fijar la solución es necesario aplicar condiciones de frontera y condiciones iniciales, puesto que la ecuación (2.37) involucra segundas derivadas respecto del espacio y del tiempo [6]. Las condiciones de frontera de *Dirichlet* y *Neumann* son los dos tipos más comunes.

Las condiciones de frontera de Dirichlet imponen que la posición de los extremos de la cuerda sea fija. En la gráfica de la izquierda dentro de la figura 2.7 se establecieron las condiciones de frontera de Dirichlet

$$y(t, x = 0) = y(t, x = a) = 0. \quad (2.38)$$

Las condiciones de frontera de Neumann especifican los valores de $\frac{\partial y}{\partial x}$ en los extremos, siendo libres de moverse en la dirección transversal, es decir, imponen las condiciones

$$\frac{\partial y}{\partial x}(t, x = 0) = \frac{\partial y}{\partial x}(t, x = a) = 0. \quad (2.39)$$

También es posible encontrar las ecuaciones del movimiento usando la mecánica lagrangiana. En este caso, la energía cinética T de toda la cuerda es simplemente la suma de la energía en cada uno de los segmentos infinitesimales constituyentes de la cuerda, tomando en cuenta que los extremos de la cuerda están ubicados en $x = 0$ y $x = a$,

$$T = \int_0^a \frac{1}{2} (\mu_0 dx) \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2. \quad (2.40)$$

La energía potencial se consigue al considerar el trabajo necesario para estirar los segmentos de la cuerda. Considerando un segmento infinitesimal dx de la cuerda sin estirar, entonces si se estira momentáneamente la cuerda como se observa en la figura 2.6, el cambio en la longitud Δl del segmento es

$$\Delta l = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} - dx = dx \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2} - 1 \right),$$

recordando que se asume la aproximación para oscilaciones pequeñas, donde $\frac{\partial y}{\partial x} \ll 1$, entonces usando la aproximación $\sqrt{1 + \epsilon} \simeq 1 + \frac{\epsilon}{2}$:

$$\Delta l \simeq dx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2,$$

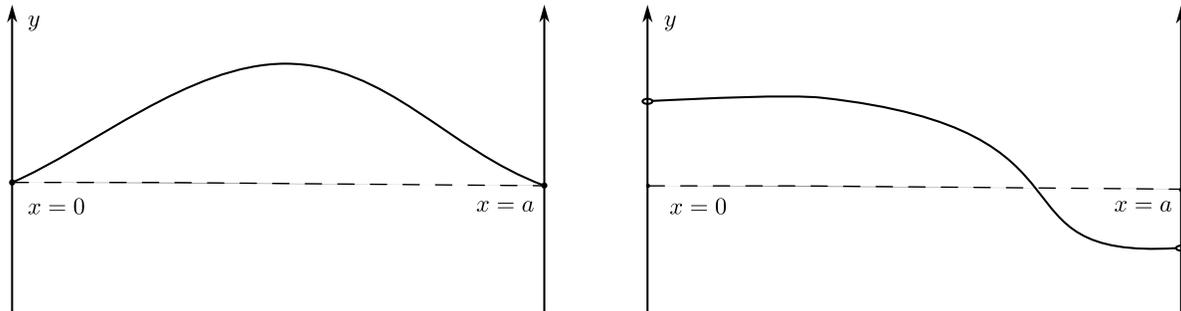


Figura 2.7: A la izquierda se tiene una cuerda con condiciones de Dirichlet en sus extremos. A la derecha una cuerda con condiciones de frontera de Neumann [6].

con esto, el trabajo realizado al estirar cada segmento infinitesimal es $T_0\Delta l$, y la energía potencial total V está dada por

$$V = \int_0^a \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Puesto que el lagrangiano para la cuerda está definido como $L = T - V$:

$$L = \int_0^a \left[\frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] dx \equiv \int_0^a \mathcal{L} dx,$$

donde el término entre corchetes es la densidad lagrangiana \mathcal{L} . De manera que la acción para la cuerda es

$$S = \int_{t_i}^{t_f} L dt = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a \mathcal{L} dx = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \left[\frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (2.41)$$

Si se definen las cantidades

$$\mathcal{P}^t \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}, \quad \mathcal{P}^x \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'}, \quad (2.42)$$

siendo $\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial t}$, $y' = \frac{\partial y}{\partial x}$. Así que, con la \mathcal{L} en (2.41):

$$\mathcal{P}^t = \mu_0 \frac{\partial y}{\partial t}, \quad \mathcal{P}^x = -T_0 \frac{\partial y}{\partial x}. \quad (2.43)$$

Para encontrar las ecuaciones del movimiento se debe variar la acción

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a \mathcal{L}(\dot{y}, y') dx,$$

haciendo la variación

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \delta \dot{y} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \delta y' \right] = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx [\mathcal{P}^t \delta \dot{y} + \mathcal{P}^x \delta y'].$$

Integrando por partes quedan los términos

$$\delta S = \int_0^a \left[\mathcal{P}^t \delta y \right]_{t=t_i}^{t=t_f} dx + \int_{t_i}^{t_f} \left[\mathcal{P}^x \delta y \right]_{x=0}^{x=a} dt - \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \left(\frac{\partial \mathcal{P}^t}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{P}^x}{\partial x} \right) \delta y.$$

Ahora al fijar las configuraciones inicial y final del sistema, se anula el primer término. Tomando las condiciones de frontera de Neumann se anula el segundo término y el momento de la cuerda se conserva al imponer estas condiciones de frontera, que por lo general no se conserva al tomar las de Dirichlet. Entonces la variación queda al final como

$$\delta S = - \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \left[\frac{\partial \mathcal{P}^t}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{P}^x}{\partial x} \right] \delta y.$$

Nuevamente, la variación de la acción debe anularse para cualquier variación en y , esto implica que el integrando debe hacerse cero:

$$\frac{\partial \mathcal{P}^t}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{P}^x}{\partial x} = 0.$$

Reemplazando la expresiones obtenidas en 2.43, se consigue la ecuación del movimiento que se quería hallar, esta corresponde a la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu_0}{T_0} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

Se procede con un análisis más cuidadoso de las condiciones de frontera que salen del segundo término que aparece al variar la acción:

$$\int_{t_i}^{t_f} \left[\mathcal{P}^x \delta y \right]_{x=0}^{x=a} dt,$$

recordando que para obtener la ecuación de onda anterior se asumen condiciones de frontera de Neumann. Pero a partir de la integral

$$\int_{t_i}^{t_f} dt \left[\mathcal{P}^x(t, x=a) \delta y(t, x=a) - \mathcal{P}^x(t, x=0) \delta y(t, x=0) \right],$$

donde x_* es la coordenada de un extremo $x_* = \{0, a\}$, se obtiene según el principio de mínima acción lo siguiente:

$$\mathcal{P}^x(t, x_*) \delta y(t, x_*) = 0. \quad (2.44)$$

Si se asumen condiciones de frontera de Neumann, es decir, cuando los extremos son libres de moverse, entonces $\delta y(t, x_*) \neq 0$. Recordando que $\mathcal{P}^x = -T_0 \frac{\partial y}{\partial x}$, y de la ecuación (2.44) se deduce que

$$\mathcal{P}^x(t, x_*) = 0 \quad \implies \quad \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=x_*} = 0.$$

Ahora, al escoger las condiciones de frontera de Dirichlet se está restringiendo el movimiento de los extremos de la cuerda, por lo que sus posiciones serán fijas, y entonces se cumple que

$$\delta y(t, x_*) = 0 \quad \implies \quad \left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{x=x_*} = 0.$$

Se puede demostrar que el momento se conserva cuando se aplican las condiciones de frontera de Neumann en ambos extremos de la cuerda. Sin embargo, este no suele ser el caso cuando se aplican las condiciones de frontera de Dirichlet. Es posible ilustrar esta situación considerando una cuerda cuyos extremos están anclados, por ejemplo, a una pared y en esta configuración la pared ejerce una fuerza constante sobre la cuerda. Inicialmente, los teóricos de cuerdas desestimaron la posibilidad de tales condiciones de frontera debido a la violación de la conservación del momento, pero con la introducción de un nuevo objeto dentro de la teoría es posible la conservación del momento. Aunque no pueda parecerlo de inmediato, estas condiciones están estrechamente relacionadas con el concepto de D-brana. Asumiendo que las cuerdas pueden estar unidas a D-branas (la D en referencia a Dirichlet, pero descubiertas por Polchinski), las cuales absorben el momento perdido por la cuerda, de esta forma el momento de la cuerda se puede conservar. Es notable la importancia de hacer un análisis detallado de las condiciones de frontera; fue crucial para reconocer la posibilidad de las D-branas en la teoría de cuerdas.

Capítulo 3

Cuerda relativista

Un primer acercamiento a la teoría de cuerdas consiste en la exploración de la dinámica de las cuerdas relativistas. El estudio detallado de sus propiedades provee gran información sobre los fundamentos de la teoría. En este capítulo se introducen conceptos esenciales, como la hoja de mundo y su acción, representada por la acción de Nambu-Goto, de donde se obtiene la ecuación del movimiento y las condiciones de frontera para una cuerda relativista. Se fija la parametrización de la cuerda, apareciendo así restricciones conocidas como condiciones de Virasoro. Finalmente, se impone el gauge de cono de luz para dar una solución explícita de la ecuación del movimiento para una cuerda relativista abierta.

3.1. Acción de Nambu-Goto

Así como una partícula puntual traza una trayectoria unidimensional en el espaciotiempo conformando su línea de mundo, una cuerda traza una trayectoria bidimensional barriendo una superficie por analogía nombrada como *hoja de mundo*. Una cuerda abierta trazará una banda, y una cuerda cerrada trazará una superficie con forma de tubo, como se observa en la figura 3.1. Para la partícula puntual, la acción es proporcional al tiempo propio transcurrido sobre su línea de mundo (ver ecuación (2.33)), este tiempo propio multiplicado por c es un invariante Lorentz, equivalente a una «longitud propia». De forma similar, para las cuerdas se definirá un invariante Lorentz como el «área propia» de la hoja de mundo, proporcional a esta área propia será la acción para una cuerda relativista, que se conoce como la acción de Nambu-Goto.

Es importante notar la diferencia existente entre una superficie en el espaciotiempo y una superficie en el espacio. Por ejemplo, un observador de Lorentz verá en un instante dado solo una única cuerda para una hoja de mundo, mientras que ese mismo observador podrá ver una superficie espacial en su totalidad en un tiempo dado. Pese a ser nombrada como una superficie, la hoja de mundo es un tipo especial de superficie, distinta de una superficie espacial. Antes de empezar a tratar con superficies en el espaciotiempo, es necesario hacerlo primero con superficies espaciales, pues resultan más familiares. Además, los resultados obtenidos pueden extenderse fácilmente a la hoja de mundo.

Una curva en el espacio ordinario puede ser descrita usando un único parámetro, por ejemplo, $x = x(\tau)$. Una superficie, al ser bidimensional, requiere entonces dos parámetros ξ^1 y ξ^2 . Para una superficie dada, se puede trazar una especie de cuadrícula con líneas de ξ^1 y ξ^2 constantes. Esta

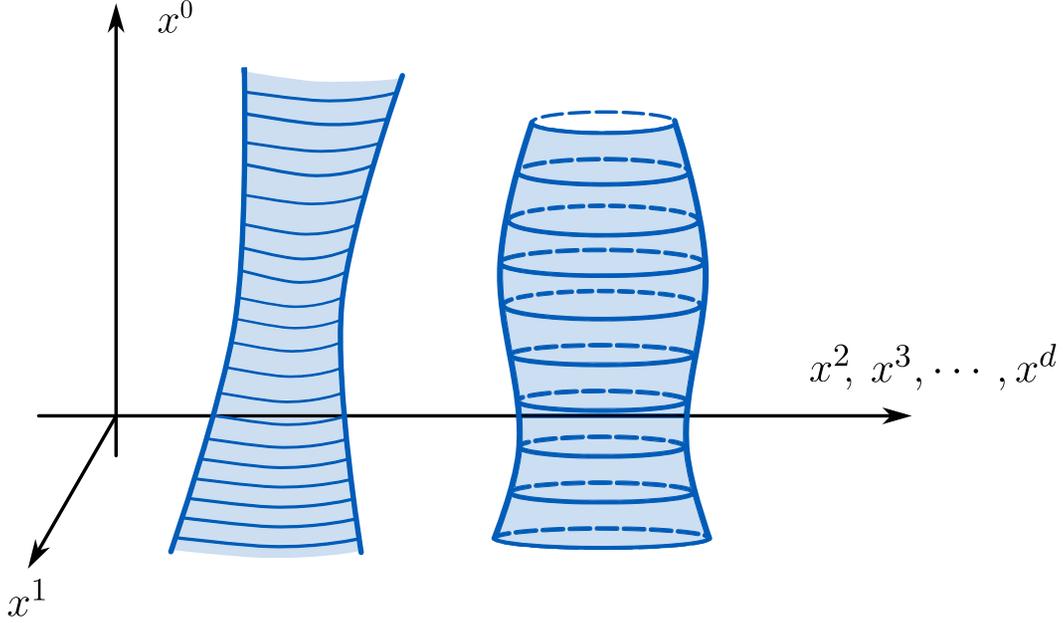


Figura 3.1: A la izquierda se tiene la superficie trazada en el espaciotiempo por una cuerda abierta, y a la derecha la trazada por una cuerda cerrada. Las líneas de x^0 constante dentro de estas superficies corresponden a las cuerdas [6].

superficie ya parametrizada se puede describir mediante las funciones

$$\vec{x}(\xi^1, \xi^2) = (x^1(\xi^1, \xi^2), x^2(\xi^1, \xi^2), x^3(\xi^1, \xi^2)).$$

Localmente, los parámetros se pueden visualizar como coordenadas sobre la superficie espacial, con las que se construirá un funcional del área. Sea un rectángulo infinitesimal de lados $d\xi^1$ y $d\xi^2$, entonces el área dada por la relación o el mapa \vec{x} es un paralelogramo de lados (como se puede apreciar en la figura 3.2):

$$d\vec{v}_1 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} d\xi^1, \quad d\vec{v}_2 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} d\xi^2. \quad (3.1)$$

El diferencial de área es el producto de ambos lados del paralelogramo,

$$\begin{aligned} dA &= d\vec{v}_1 \times d\vec{v}_2 = |d\vec{v}_1| |d\vec{v}_2| |\sin \theta| = |d\vec{v}_1| |d\vec{v}_2| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{|d\vec{v}_1|^2 |d\vec{v}_2|^2 - |d\vec{v}_1|^2 |d\vec{v}_2|^2 \cos^2 \theta}. \end{aligned}$$

Recordando la definición del producto punto, el diferencial de área queda como

$$dA = \sqrt{(d\vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_1)(d\vec{v}_2 \cdot d\vec{v}_2) - (d\vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_2)^2}.$$

Sustituyendo las expresiones para los lados dadas en (3.1), el diferencial se convierte en:

$$dA = d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \right) \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \right) - \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \right)^2}.$$

Con esto se tiene la expresión general para el elemento de área de una superficie parametrizada, y el funcional del área es

$$A = \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \right) \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \right) - \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \right)^2}. \quad (3.2)$$

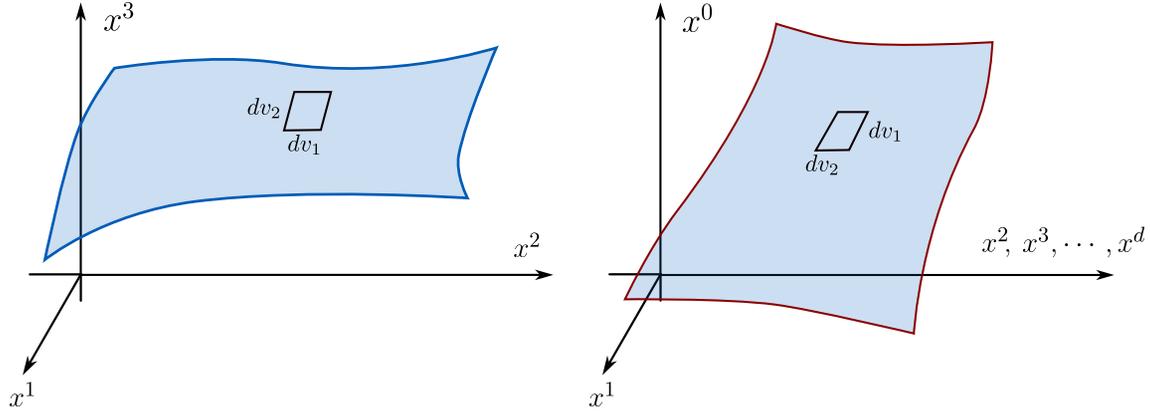


Figura 3.2: La superficie de la izquierda corresponde a una superficie espacial, parametrizada mediante ξ^1 y ξ^2 . Por otra parte, la superficie de la derecha es espaciotemporal parametrizada por τ y σ , note la presencia del eje temporal x^0 [6].

El área de la superficie debería ser la misma sin importar los parámetros utilizados para calcularla, debería ser un invariante bajo reparametrización. Considerando una superficie \mathcal{S} , y $d\vec{x}$ un vector tangente con $\vec{x}(\xi^1, \xi^2)$, así el elemento de línea corresponde a

$$ds^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x},$$

y el vector $d\vec{x}$ se expresa en la forma

$$d\vec{x} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} d\xi^1 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} d\xi^2 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^i} d\xi^i,$$

asumiendo la suma sobre el índice i . Se expresa entonces el elemento de línea como

$$ds^2 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^j} d\xi^i d\xi^j \equiv g_{ij}(\xi) d\xi^i d\xi^j, \quad (3.3)$$

con el índice j también sumado sobre sus posibles valores 1 y 2. La cantidad $g_{ij}(\xi)$ se conoce como la *métrica inducida* sobre \mathcal{S} , la ecuación (3.3) determina las distancias sobre la superficie, escrita matricialmente:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} & \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} & \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \end{pmatrix}.$$

Nótese que el determinante de esta matriz es la expresión manifiesta dentro de la raíz de la ecuación (3.2), y denotando a $g \equiv \det(g_{ij})$, es posible escribir el funcional de área (invariante bajo reparametrización) simplemente como

$$A = \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{g}.$$

Ahora se procede a tratar con *superficies en el espaciotiempo*, de manera que sea posible determinar la acción para una cuerda relativista considerando el área propia de su hoja de mundo, siendo esta una superficie bidimensional trazada por la cuerda en el espaciotiempo, como se indicó al inicio de esta sección. Al ser bidimensional, requerirá también de dos parámetros, similar al caso de una superficie en el espacio con ξ^1 y ξ^2 , solo que ahora se nombrarán τ y σ . Estos fueron los nombres históricamente dados en 1971 por Goto a los parámetros, como se indicó en la sección 1.2.

Una superficie en el espaciotiempo, con coordenadas $x^\mu = (x^0, x^1, \dots, x^d)$ en d dimensiones, puede describirse por las funciones

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \left(X^0(\tau, \sigma), X^1(\tau, \sigma), \dots, X^d(\tau, \sigma) \right), \quad (3.4)$$

siendo una convención en teoría de cuerdas utilizar mayúsculas para denotar estas funciones que llevan de un punto fijo (τ, σ) al punto de coordenadas espaciotemporales dadas en (3.4). A las X^μ se les conoce como *coordenadas de la cuerda*. Los parámetros τ y σ pueden ser vistos localmente como coordenadas sobre la hoja de mundo, donde τ da cierta noción del instante cuando se examina la cuerda y σ indica una posición, un punto de interés sobre la misma [18]. Análogamente al caso de una superficie en el espacio, se tiene un elemento de área (parte derecha en figura 3.2) dado por los vectores

$$dv_1^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} d\tau, \quad dv_2^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} d\sigma.$$

Es natural suponer que el elemento de área tendrá la forma

$$dA = d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau} \right) \left(\frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma} \frac{\partial X_\nu}{\partial \sigma} \right) - \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma} \right)^2}. \quad (3.5)$$

Aunque esta expresión no es correcta, se puede demostrar en cualquier punto sobre la hoja de mundo que

$$\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma} \right)^2 - \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma} \right) \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau} \right) > 0,$$

de manera que se obtiene una expresión imaginaria para el diferencial de área en la ecuación (3.5). Cambiando el signo, se obtiene el área propia como:

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma} \right)^2 - \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau} \right) \left(\frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma} \frac{\partial X_\nu}{\partial \sigma} \right)}.$$

Se introduce una nueva notación para simplificar la expresión de las derivadas dentro de la definición del área propia, que consiste en el cambio:

$$\dot{X} = \dot{X}^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}, \quad X' = X'^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}. \quad (3.6)$$

Usando la notación del producto punto relativista se obtiene una expresión más simple para el área propia

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}.$$

A partir de esta área se puede definir una acción, correspondiente a la acción de una cuerda relativista. La acción tiene unidades de energía \times tiempo, y como se dijo antes: τ se relaciona con el tiempo y σ con la posición sobre la cuerda. Las unidades del área propia son $[A] = L^2$, y las de la acción $[S] = ML^2/T$, para conseguir la acción debe multiplicarse por un término con unidades de M/T . Un término que satisface esta condición es T_0/c ; T_0 siendo la tensión de la cuerda con unidades de fuerza ML/T^2 , y c la velocidad de la luz con unidades de L/T . Al dividir estas dos cantidades, resulta un factor con unidades M/T . Se construye así la acción de Nambu-Goto para la cuerda relativista:

$$S = -\frac{T_0}{c} \int d\tau d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}. \quad (3.7)$$

Esta acción también debe ser invariante bajo reparametrizaciones; de manera similar al caso espacial, se puede expresar la acción de forma invariante. En el caso espaciotemporal, se introduce la métrica inducida que aparece sobre la hoja de mundo al tomar el elemento de línea

$$-ds^2 = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta,$$

con los índices α y β tomando los valores 1 a 2, con $\xi^1 = \tau$ y $\xi^2 = \sigma$, y siendo la métrica inducida sobre la hoja de mundo la matriz

$$\gamma_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} = \frac{\partial X}{\partial \xi^\alpha} \cdot \frac{\partial X}{\partial \xi^\beta},$$

explícitamente:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} (\dot{X})^2 & \dot{X} \cdot X' \\ \dot{X} \cdot X' & (X')^2 \end{bmatrix}.$$

Denotando $\gamma \equiv \det(\gamma_{\alpha\beta})$, para escribir la acción de Nambu-Goto como:

$$S = -\frac{T_0}{c} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\gamma}. \quad (3.8)$$

A partir de esta acción será posible deducir las ecuaciones del movimiento para la cuerda relativista clásica. Puede ser generalizada para describir la dinámica de objetos de dimensión superior a las de la cuerda, una acción de este tipo puede ser una primera aproximación a la dinámica de las D-branas. Tiene la particularidad de ser complicada de manejar a la hora de cuantizar las cuerdas, por la raíz cuadrada que involucra.

En términos de la densidad lagrangiana, la acción en (3.7) es la integral doble

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \mathcal{L}(\dot{X}^\mu, X^{\mu'}), \quad (3.9)$$

con límites de integración definidos, siendo σ_1 una constante positiva. La densidad lagrangiana está dada por

$$\mathcal{L}(\dot{X}^\mu, X^{\mu'}) = -\frac{T_0}{c} \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}.$$

Es claro que las ecuaciones del movimiento se obtienen al variar la acción y aplicar el principio de Hamilton. Así, las ecuaciones del movimiento para la cuerda relativista se consiguen con la variación de la acción en (3.9), siendo

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} \delta \dot{X}^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu'}} \delta X^{\mu'} \right]. \quad (3.10)$$

Las derivadas $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{X}^\mu$ y $\partial \mathcal{L} / \partial X^{\mu'}$ se pueden calcular fácilmente, y puesto que su expresión es extensa se introducen nuevos símbolos para denotarlas, similar al procedimiento realizado en el capítulo anterior para la cuerda clásica. Se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\mu^\tau &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') X'_\mu - (X')^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}, \\ \mathcal{P}_\mu^\sigma &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu'}} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') \dot{X}_\mu - (\dot{X})^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Considerando que

$$\delta \dot{X}^\mu = \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \tau}, \quad \delta X^{\mu\prime} = \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \sigma},$$

aplicando la nueva notación y reescribiendo el integrando en la ecuación (3.10), se consigue una expresión análoga al caso visto en el capítulo anterior con la cuerda clásica. Ahora la variación resulta

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[\mathcal{P}_\mu^\tau \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \tau} + \mathcal{P}_\mu^\sigma \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \sigma} \right], \\ &= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[\frac{\partial}{\partial \tau} (\delta X^\mu \mathcal{P}_\mu^\tau) + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\delta X^\mu \mathcal{P}_\mu^\sigma) - \delta X^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right) \right], \end{aligned}$$

integrando los primeros dos términos

$$\delta S = \int_0^{\sigma_1} d\sigma (\delta X^\mu \mathcal{P}_\mu^\tau) \Big|_{\tau_i}^{\tau_f} + \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau (\delta X^\mu \mathcal{P}_\mu^\sigma) \Big|_0^{\sigma_1} - \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \delta X^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right).$$

Como τ está relacionado con el flujo del tiempo, es posible fijar los valores inicial y final de la cuerda, esto implica que las variaciones $\delta X^\mu(\tau_i, \sigma) = \delta X^\mu(\tau_f, \sigma) = 0$, así que el primer término se anula por esta razón. La variación queda

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau [\delta X^\mu \mathcal{P}_\mu^\sigma]_0^{\sigma_1} - \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \delta X^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right). \quad (3.12)$$

Analizando la primera integral de la ecuación (3.12), se nota que cada término dentro de la sumatoria (se suma sobre el índice μ) debe ser igual a cero. Entonces las condiciones para anular dichos términos deben ser las siguientes:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0^\sigma(\tau, \sigma_*) \delta X^0(\tau, \sigma_*) &= 0, \\ \mathcal{P}_i^\sigma(\tau, \sigma_*) \delta X^i(\tau, \sigma_*) &= 0. \end{aligned}$$

Denotando la expresión de los extremos de la cuerda como $\sigma_* = \{0, \sigma_1\}$, y expresando con el índice i los valores tomados por el índice μ para las coordenadas espaciales. El término $\delta X^0(\tau, \sigma_*)$ implica la variación del tiempo, no tiene sentido fijarlo a cero para ningún extremo de la cuerda. Entonces, la primera condición de frontera que debe cumplirse es

$$\mathcal{P}_0^\sigma(\tau, \sigma_1) = \mathcal{P}_0^\sigma(\tau, 0) = 0.$$

Para las condiciones con el índice i , es posible hacer cero a alguno de los dos factores, por ejemplo, el caso en que $\mathcal{P}_i^\sigma(\tau, \sigma_*) = 0$. En general, a las condiciones de la forma

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, \sigma_*) = 0, \quad (3.13)$$

se les conoce como *condición de extremo libre*, en el caso de la cuerda no relativista, implicaba imponer una condición de frontera de Neumann. La condición de extremo libre hace que se anule el término considerado en la variación de la acción en (3.12). Por otro lado, también es posible una condición de frontera de tipo Dirichlet, o de extremo fijo, en donde se fija la posición de los extremos de la cuerda, esto es $\delta X^i(\tau, \sigma_*) = 0$, implicando que las coordenadas espaciales de los extremos de la cuerda son constantes en el tiempo o simplemente:

$$\frac{\partial X^i}{\partial \tau}(\tau, \sigma_*) = 0. \quad (3.14)$$

Note que esta condición de frontera de Dirichlet se puede aplicar solamente a las direcciones espaciales. Es posible imponer las condiciones de frontera (3.13) y (3.14) de varias maneras, para cualquier dirección espacial y sobre cada extremo de una cuerda abierta. Es importante tener en cuenta que, como una cuerda cerrada no tiene extremos, no requerirá condiciones de frontera. Retomando la variación en 3.12:

$$\delta S = - \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \delta X^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right). \quad (3.15)$$

El integrando debe anularse para cualquier variación δX^μ , dejando como resultado la ecuación del movimiento

$$\frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = 0. \quad (3.16)$$

Se obtiene finalmente la ecuación del movimiento para una cuerda relativista, bien sea abierta o cerrada. Observando las definiciones en (3.11), es notable la complejidad de la ecuación del movimiento, siendo una muestra de la gran ventaja que conlleva construir acciones para conseguir las ecuaciones del movimiento. Conseguir una ecuación tan compleja como esta, sin construir una acción a partir de la cual se derive, es una tarea complicada. Para dar solución a esta ecuación es útil escoger una parametrización conveniente y así facilitar los cálculos, considerando que la invarianza bajo reparametrización de la acción de la cuerda relativista permite tal elección.

Antes de eso, se hace un breve comentario sobre las D-branas y su relación con las condiciones de frontera ya vistas. En el caso de la cuerda no relativista abierta, estas condiciones implicaban que los extremos de la cuerda estaban pegados o unidos a algún objeto físico: sobre condiciones de Dirichlet, o se restringía el movimiento horizontal de los extremos: sobre condiciones de Neumann. Cuando se habla de cuerdas relativistas, entran en juego objetos que restringen el movimiento de los extremos de las cuerdas abiertas, se caracterizan por su número p de dimensiones espaciales y por esto son llamados Dp -branas.

En la figura 3.3 se tiene como ejemplo una D2-brana, es un hiperplano dentro de un espacio de 3 dimensiones. Como se explicó antes, su existencia implica que los extremos de una cuerda abierta deben mantenerse dentro de la D2-brana. Matemáticamente, la D2-brana de la figura 3.3 puede definirse usando las condiciones de frontera siguientes:

$$\mathcal{P}_0^\sigma(\tau, \sigma_*) = 0,$$

es la condición de frontera que siempre debe cumplirse. Además, como el movimiento de los extremos de la cuerda es libre a lo largo de las direcciones x^1 y x^2 , se tienen condiciones de extremo libre para ambas; y como los extremos no se pueden mover a largo de x^3 hay una condición de extremo fijo. Así, el conjunto de condiciones de frontera en las dimensiones espaciales son

$$\mathcal{P}_1^\sigma(\tau, \sigma_*) = 0,$$

$$\mathcal{P}_2^\sigma(\tau, \sigma_*) = 0,$$

$$X^3(\tau, \sigma_*) = 0.$$

Con estas ecuaciones se puede calcular cualquier movimiento de una cuerda abierta ligada a dicha brana. En general, se puede argumentar que cualquier conjunto de condiciones de frontera corresponde a algún conjunto de D-branas.

Desde un punto de vista histórico, es sorprendente ver cuánto tardaron los físicos en descubrir las D-branas, considerando que la acción de Nambu-Goto se conocía desde los 70s y el descubrimiento de las D-branas se formalizó en los 90s (ver sección 1.5). Antes de la inclusión de las D-branas,

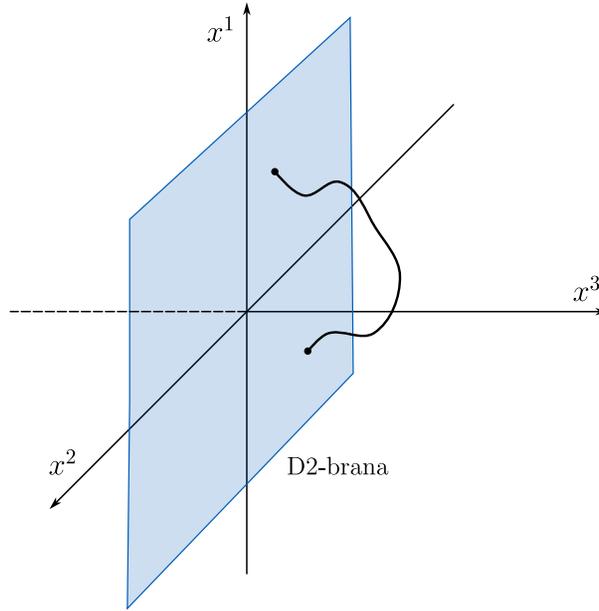


Figura 3.3: D2-brana que vive en el plano (x^1, x^2) . Los extremos de la cuerda se pueden mover libremente sobre el plano de la D2-brana, pero se mantienen unidos a ella [6].

se pensaba que las cuerdas abiertas solo se movían libremente. Una de las mayores objeciones a la inclusión de este nuevo objeto era que de alguna forma violan la invarianza Lorentz. Es posible pensar en cuerdas moviéndose libremente en términos de D-branas, si se considera que las D-branas llenan la totalidad del espacio. Este mismo argumento permite que las D-branas viviendo en espaciotiempos de 10 o 26 dimensiones llenen tres de las dimensiones espaciales de manera que se respeta la invarianza Lorentz, pudiendo violarla solo en las dimensiones extra. Como detalles importantes, las D-branas tienen una densidad de masa mucho mayor a la de las cuerdas, también presentan su propia dinámica y han sido una gran herramienta para el estudio de la fenomenología de las cuerdas [19].

3.2. Parametrizando la cuerda

Lo que se va a parametrizar directamente es la hoja de mundo de la cuerda, cuya parametrización se puede elegir libremente dada la invarianza de la acción revisada en la sección anterior. Intuitivamente puede verse a las distintas parametrizaciones como diferentes cuadrículas sobre la hoja de mundo, y pese a que sean distintas estas cuadrículas, la hoja de mundo es siempre la misma y describe el mismo movimiento físico de la cuerda. La clave consiste en introducir una parametrización conveniente y sencilla de trabajar para extraer información física de las ecuaciones del movimiento.

Una primera parametrización parcial de la hoja de mundo es la conocida como norma estática o *gauge estático*, en donde se relaciona al parámetro τ con la coordenada temporal $X^0 = ct$ de algún observador Lorentz. Esta parametrización lleva dicho nombre, puesto que las líneas de τ constante corresponden a cuerdas estáticas. Como se observa en la figura 3.4, el plano $t = t_0$ corta a la hoja de mundo a lo largo de una curva, esta sería la cuerda en el tiempo t_0 según el observador Lorentz escogido y se fija como una curva de τ constante sobre la hoja de mundo. Entonces, para todo tiempo t , la condición de gauge estático sobre cualquier punto Q en la hoja de mundo se define

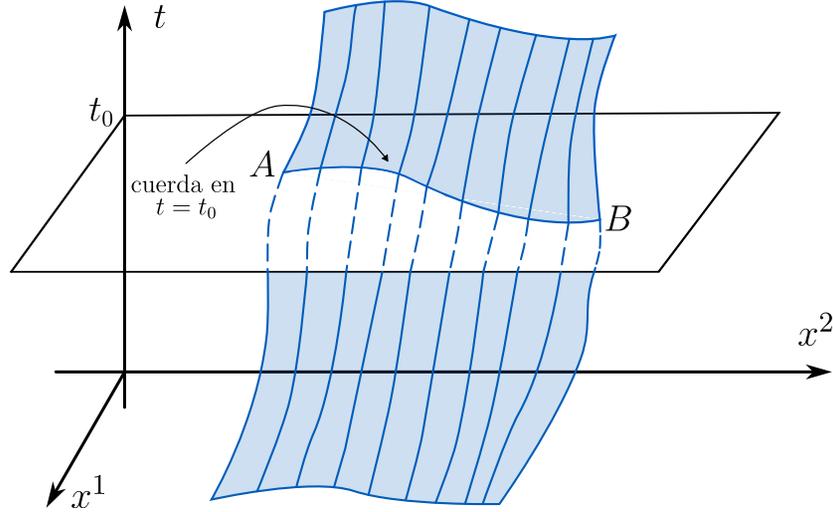


Figura 3.4: En la figura se ve la hoja de mundo de una cuerda abierta. El segmento AB es la intersección de la hoja de mundo con el plano $t = t_0$, correspondiente a la cuerda en el tiempo $t = t_0$ y para el gauge estático $\tau = t_0$ [6].

como

$$\tau(Q) = t(Q),$$

y esto implica que

$$X^0(\tau, \sigma) \equiv ct(\tau, \sigma) = c\tau,$$

o lo que es lo mismo

$$\tau = t.$$

Esta parametrización separa de manera sencilla las componentes espaciales de la temporal. Por ejemplo, para el conjunto de coordenadas de la cuerda $X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(t, \sigma) = \{ct, \vec{X}(t, \sigma)\}$, se encuentra que

$$\begin{aligned} \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} &= \left(\frac{\partial X^0}{\partial \sigma}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right) = \left(0, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right), \\ \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} &= \left(\frac{\partial X^0}{\partial t}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right) = \left(c, \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

3.2.1. Primer cálculo en teoría de cuerdas

Es posible hacer ahora un primer cálculo en teoría de cuerdas, usando la acción de Nambu-Goto, para analizar una cuerda relativista estirada. Se consideran fijos los extremos de la cuerda en $x^1 = 0$ y $x^1 = a$, siendo nulos los valores de las coordenadas para las dimensiones espaciales restantes y denotadas como el vector $\vec{0}$. Las coordenadas espaciales de los extremos de la cuerda entonces son $(0, \vec{0})$ y $(a, \vec{0})$, es decir, la cuerda se ha estirado solo a lo largo de la primera dimensión espacial. En la figura 3.5 se muestra un esquema de la situación planteada. Usando el gauge estático $X^0 = c\tau$, se pueden escribir las demás coordenadas de la cuerda como

$$X^1(t, \sigma) = f(\sigma), \quad X^2 = X^3 = \dots = X^d = 0,$$

donde

$$f(0) = 0, \quad f(\sigma_1) = a.$$

Con esto se obtiene

$$\dot{X}^\mu = (c, 0, \vec{0}), \quad X^{\mu'} = (0, f', \vec{0}),$$

con $f' = df/d\sigma$.

Recordando que la acción de Nambu-Goto es:

$$S = -\frac{T_0}{c} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2},$$

se deben reemplazar los respectivos valores de $(\dot{X})^2$, $(X')^2$ y $\dot{X} \cdot X'$ dentro de la raíz, que para la cuerda estirada son:

$$(\dot{X})^2 = -c^2, \quad (X')^2 = (f')^2, \quad \dot{X} \cdot X' = 0.$$

Ahora se evalúa en la acción

$$S = -\frac{T_0}{c} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(0)^2 - (-c^2) (f')^2} = -T_0 \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^{\sigma_1} d\sigma \frac{df}{d\sigma},$$

calculando la integral con extremos en 0 y σ_1 resulta como:

$$S = -T_0 \int_{t_i}^{t_f} dt (f(\sigma_1) - f(0)) = \int_{t_i}^{t_f} dt (-T_0 a). \quad (3.17)$$

En el gauge estático, evidentemente la cuerda se encuentra estática y, por lo tanto, su energía cinética es nula. Además, recordando que la acción es la integral del lagrangiano L respecto del tiempo, y que en este caso $L = -V$, entonces comparando con la acción en (3.17) resulta que

$$V = T_0 a.$$

La energía potencial de la cuerda estirada a una longitud a es simplemente $T_0 a$, que corresponde a la cantidad de energía necesaria para crear una cuerda de longitud a . T_0 es una fuerza y a es una distancia. De manera intuitiva, es como si se agarrara una cuerda de longitud infinitesimal y se estirara hasta la longitud a con una fuerza de tensión constante, y $T_0 a$ sería el trabajo realizado

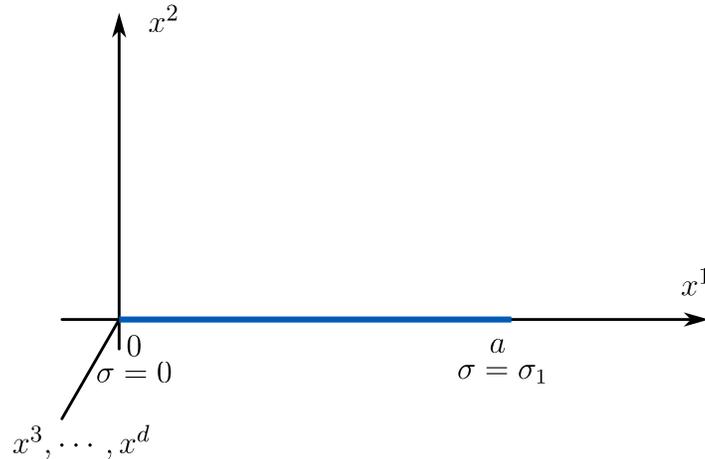


Figura 3.5: Una cuerda de longitud a estirada a lo largo del eje x^1 . La cuerda se parametriza como $X^1(t, \sigma) = f(\sigma)$ [6].

para estirar la cuerda. En este proceso se está creando masa en reposo para la cuerda, siendo simplemente un efecto de la tensión que tiene, es como una máquina que transforma trabajo a masa en reposo [19].

Ya se ha hecho una primera parametrización para τ , ahora queda definir una parametrización para σ . Para las cuerdas abiertas se elige un borde de la hoja de mundo como la curva $\sigma = 0$, y el otro extremo como la curva $\sigma = \sigma_1$, es decir, para una cuerda abierta

$$\sigma \in [0, \sigma_1].$$

Las líneas de σ constante se pueden disponer de manera arbitraria sobre la hoja de mundo, teniendo en cuenta que sean suaves y no se intersequen entre sí. Para las cuerdas cerradas es necesario hacer una identificación tal que la dirección σ sea un círculo:

$$(\tau, \sigma) \sim (\tau, \sigma + \sigma_c),$$

siendo σ_c la circunferencia del círculo, de manera que las cuerdas cerradas están parametrizadas en σ por el intervalo

$$\sigma \in [0, \sigma_c].$$

Es bastante difícil hablar de velocidades, dada la gran variedad de parametrizaciones posibles de la cuerda. Por eso es necesario construir una noción de velocidad invariante bajo reparametrizaciones con sentido físico. La velocidad transversal \vec{v}_\perp puede ser definida sobre la cuerda cumpliendo con los requerimientos antes mencionados, su definición se basa en la idea de que cada punto de la cuerda se mueve transversalmente a ella. Para explicarlo gráficamente, se observa en la figura 3.6 que la cuerda se ha movido en el tiempo dt e interseca el plano ortogonal en el punto P' , la velocidad transversal se obtiene al asumir que el punto P se ha movido a P' . No se necesita una parametrización especial para definir esta noción de velocidad.

Se procede a construir una expresión matemática para la velocidad transversal. Es necesario introducir un parámetro s que mide la longitud a lo largo de la cuerda, entonces para una cuerda en un tiempo fijo, $s(\sigma)$ será la longitud de la cuerda en el intervalo $[0, \sigma]$. De manera que ds es la longitud del vector $d\vec{X}$ en un intervalo $d\sigma$ a lo largo de la cuerda, es decir:

$$ds = |d\vec{X}| = \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right| |d\sigma|.$$

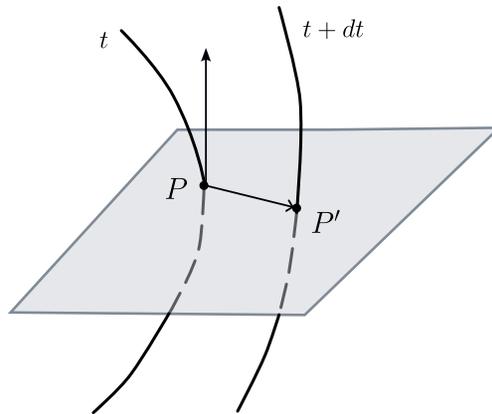


Figura 3.6: En el tiempo t el plano es ortogonal a la cuerda en el punto P , y en el tiempo $t + dt$ la cuerda corta al plano en el punto P' . La velocidad transversal asume que el punto P se ha movido a P' [6].

Note que $\partial\vec{X}/\partial s$ es un vector unitario

$$\frac{\partial\vec{X}}{\partial s} = \frac{\partial\vec{X}}{\partial\sigma} \frac{d\sigma}{ds},$$

además, es un vector tangente a la cuerda porque al derivar respecto de σ se considera t constante, y las líneas de t constante corresponden a la cuerda en los instantes dados. Lo anterior implica que el vector $\partial\vec{X}/\partial s$ es un vector unitario y tangente a la cuerda.

Con esto es posible concretar la definición matemática de la velocidad transversal \vec{v}_\perp como la componente de la velocidad $\partial\vec{X}/\partial t$ en la dirección perpendicular a la cuerda. Dado que, en general, para cualquier vector \vec{u} su componente perpendicular a un vector unitario \vec{n} es $\vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{n})\vec{n}$, así que la expresión para la velocidad transversal es:

$$\vec{v}_\perp = \frac{\partial\vec{X}}{\partial t} - \left(\frac{\partial\vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial\vec{X}}{\partial s} \right) \frac{\partial\vec{X}}{\partial s}. \quad (3.18)$$

La acción de Nambu-Goto puede expresarse dentro del gauge estático aprovechando esta nueva definición, ya que la raíz dentro de la acción en la ecuación (3.7) puede ser reescrita como

$$\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2} = c \frac{ds}{d\sigma} \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}},$$

dejando la expresión de la acción en términos de la velocidad transversal como

$$S = -T_0 \int dt \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left(\frac{ds}{d\sigma} \right) \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}. \quad (3.19)$$

El lagrangiano asociado a la acción en (3.19) está dado por

$$L = -T_0 \int ds \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}.$$

Al comparar este lagrangiano con el de una partícula puntual relativista (2.35), se puede ver a (3.19) como su generalización natural. El término $T_0 ds$ se reconoce como la energía en reposo de un trozo infinitesimal de la cuerda. La acción en (3.19) es válida tanto para cuerdas abiertas como para cuerdas cerradas, y a pesar de verse más simple, también lleva a unas ecuaciones del movimiento muy complicadas de resolver directamente en la mayoría de situaciones.

Ahora es posible analizar el movimiento de una cuerda relativista abierta cuyos extremos son libres de moverse en todas las direcciones. La condición de frontera de la forma (3.13) debe aplicarse a ambos extremos de la cuerda. Utilizando la definición de la velocidad transversal, se pueden simplificar las expresiones para $\mathcal{P}^{\sigma\mu}$ y $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ (definidos en (3.11))

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{T_0}{c^2} \frac{\left(\frac{\partial\vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial\vec{X}}{\partial t} \right) \dot{X}^\mu + \left(c^2 - \left(\frac{\partial\vec{X}}{\partial t} \right)^2 \right) \frac{\partial X^\mu}{\partial s}}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}}, \quad (3.20)$$

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{T_0}{c^2} \frac{ds}{d\sigma} \frac{\dot{X}^\mu - \left(\frac{\partial\vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial\vec{X}}{\partial t} \right) \frac{\partial X^\mu}{\partial s}}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}}. \quad (3.21)$$

Como se dijo antes, la cuerda relativista siempre debe cumplir con la condición de frontera dada en los extremos por $\mathcal{P}^{\sigma 0} = 0$, la componente $\mu = 0$ de la cantidad en (3.20) es

$$\mathcal{P}^{\sigma 0} = -\frac{T_0}{c} \frac{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}},$$

de donde se deduce la condición

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = 0.$$

Esta condición demuestra que los extremos de la cuerda se mueven con una velocidad $\partial \vec{X} / \partial t$ transversal a la cuerda, donde el vector unitario $\partial \vec{X} / \partial s$ es tangente a la misma. Esta es una primera propiedad importante del movimiento de los extremos de una cuerda abierta libre. Queda una segunda propiedad por descubrir; de la definición de la velocidad transversal (3.18) se puede ver que $\vec{v}_{\perp} = \partial \vec{X} / \partial t \equiv \vec{v}$, así la ecuación (3.20) se convierte en

$$\mathcal{P}^{\sigma \mu} = -T_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\partial X^{\mu}}{\partial s},$$

puesto que se trata de una cuerda libre, las coordenadas espaciales ($\mu = 1, \dots, d$) también deben satisfacer la condición de extremo libre, es decir

$$\vec{\mathcal{P}}^{\sigma} = -T_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} = 0. \quad (3.22)$$

De donde se concluye que los extremos de la cuerda abierta libre se mueven con la velocidad de la luz, ya que de la ecuación (3.22):

$$v^2 = c^2.$$

Una condición importante para completar la parametrización en σ de la hoja de mundo es construir las líneas de σ constante siempre perpendiculares a las líneas de τ constante, como se aprecia en la figura 3.7. Al tratarse de una parametrización de la superficie espacial de la cuerda, se tiene que la tangente a la cuerda está dada por $\partial \vec{X} / \partial \sigma$, mientras que la tangente a las líneas de σ constante por $\partial \vec{X} / \partial t$, y comparten la propiedad de ser perpendiculares entre sí en cualquier punto de dicha superficie, es decir

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = 0, \quad (3.23)$$

esto implica que $\partial \vec{X} / \partial t$ es perpendicular a la cuerda y, por lo tanto, coincide con la definición de la velocidad transversal siendo

$$\vec{v}_{\perp} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}. \quad (3.24)$$

Partiendo de este hecho se pueden simplificar las expresiones para $\mathcal{P}^{\tau \mu}$ y $\mathcal{P}^{\sigma \mu}$, ya que la condición (3.23) implica que $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = 0$, pudiéndose escribir como

$$\mathcal{P}^{\tau \mu} = \frac{T_0}{c^2} \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}} \frac{\partial X^{\mu}}{\partial t}, \quad (3.25)$$

$$\mathcal{P}^{\sigma \mu} = -T_0 \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}} \frac{\partial X^{\mu}}{\partial s}. \quad (3.26)$$

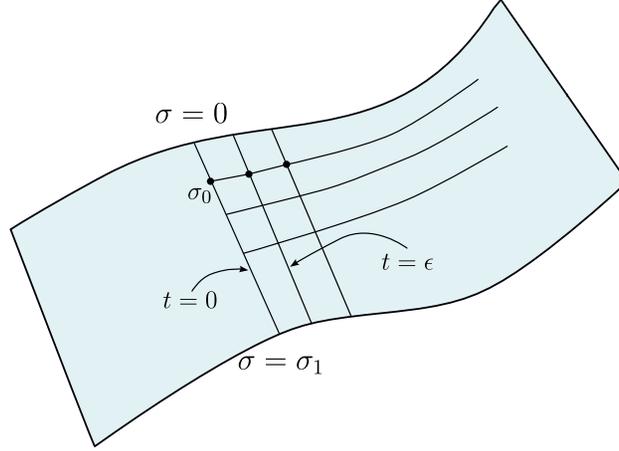


Figura 3.7: La parametrización de la hoja de mundo requiere que las líneas de σ constante se vayan construyendo perpendicularmente a las líneas de t constante [6].

Ahora, se procede a encontrar una expresión para la energía de la cuerda relativista por dos métodos distintos. El primero consiste en calcular el hamiltoniano [20], partiendo de la densidad hamiltoniana (definida en la ecuación 2.25) integrándose a lo largo de la longitud de la cuerda

$$H = \int \mathcal{H} d\sigma. \quad (3.27)$$

Como la densidad de momento canónico para la cuerda se define como:

$$\vec{\mathcal{P}}(t, \sigma) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \vec{X})},$$

que se deduce de la expresión dada en (3.19) tomando solo las componentes espaciales:

$$\vec{\mathcal{P}}(t, \sigma) = \frac{T_0}{c^2} \frac{\vec{v}_\perp}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} \frac{ds}{d\sigma}.$$

La densidad lagrangiana se puede apreciar en la ecuación (3.19), se presenta como

$$\mathcal{L} = -T_0 \left(\frac{ds}{d\sigma} \right) \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}.$$

Así que la densidad hamiltoniana se calcula

$$\mathcal{H} = \vec{\mathcal{P}} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} - \mathcal{L},$$

y recordando la definición de velocidad transversal (3.24), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{T_0}{c^2} \frac{v_\perp^2}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} \frac{ds}{d\sigma} + T_0 \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}} \frac{ds}{d\sigma} \\ &= T_0 \frac{ds}{d\sigma} \left(\frac{v_\perp^2/c^2 + 1 - v_\perp^2/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} \right) = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} \frac{ds}{d\sigma}. \end{aligned}$$

Así que, según la ecuación (3.27) el hamiltoniano es

$$H = \int \frac{T_0 ds}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}}. \quad (3.28)$$

Gracias a la forma simplificada de las ecuaciones (3.25) y (3.26) es posible ahora hacer una interpretación física de la ecuación del movimiento teniendo en cuenta las parametrizaciones ya hechas, siendo una segunda forma de encontrar la expresión para la energía de la cuerda. La ecuación del movimiento (3.16) con $\tau = t$ es

$$\frac{\partial \mathcal{P}^{\tau\mu}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{P}^{\sigma\mu}}{\partial \sigma}, \quad (3.29)$$

tomando la componente $\mu = 0$ de esta ecuación, sabiendo que $\mathcal{P}^{\sigma 0} = 0$ y usando (3.25) nos queda

$$\frac{\partial \mathcal{P}^{\tau 0}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{T_0 \frac{ds}{d\sigma}}{c \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} \right) = 0. \quad (3.30)$$

Si se multiplica esta ecuación por la constante $d\sigma$ se concluye que

$$\frac{T_0 ds}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}}, \quad \text{es constante en el tiempo.}$$

Esta expresión tiene unidades de energía y además coincide exactamente con el hamiltoniano que se acaba de calcular. El término en su numerador corresponde a la energía en reposo de un trozo de cuerda, y el factor relativista en el denominador la convierte en la energía total. El resultado anterior implica que la energía δE de cada trozo infinitesimal $\delta\sigma$ de la cuerda se conserva:

$$\delta E = \frac{T_0 \delta s}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} = \frac{T_0 \frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} \delta\sigma. \quad (3.31)$$

3.3. Movimiento de cuerdas abiertas y cerradas

Retomando la interpretación de la ecuación del movimiento (3.29), ahora tomando las componentes espaciales

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{P}}^\tau &= \frac{T_0}{c^2} \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} \vec{v}_\perp, \\ \vec{\mathcal{P}}^\sigma &= -T_0 \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}} \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

que reemplazando en la ecuación del movimiento, queda

$$\frac{T_0}{c^2} \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} \frac{\partial \vec{v}_\perp}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[T_0 \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}} \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right],$$

usando el hecho de que $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{ds}$, y $\vec{v}_\perp = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}$ se obtiene

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}}{\frac{ds}{d\sigma}} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}} \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right].$$

Note que si se hiciera

$$\frac{ds}{d\sigma} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1, \quad (3.33)$$

se obtendría la forma familiar de la ecuación de onda

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial \sigma^2}.$$

La condición en (3.33) significa físicamente que

$$d\sigma = \frac{ds}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}},$$

y no es más que la forma concreta en que se parametriza la cuerda, puesto que partiendo de $\sigma = 0$ se recorre hasta un punto de longitud ds en la cuerda y si se calcula v_{\perp}^2 en ese nuevo punto se obtiene un número que da la parametrización en σ . Finalmente se entiende de forma explícita cómo se parametriza la cuerda.

Considerando la ecuación (3.31) se consigue la parametrización en términos de la energía:

$$d\sigma = \frac{dE}{T_0}, \quad (3.34)$$

donde se está usando la energía a lo largo de la cuerda para parametrizar σ , que es una parametrización con sentido físico, siendo la energía total $E = T_0\sigma_1$. Supóngase que se toma una cuerda con una energía total de 100 erg, entonces una forma de parametrizarla consiste en etiquetar con valores crecientes de σ por cada 1 erg de cuerda recorrida (por ejemplo, dentro del rango $\sigma \in [0, \sigma_1] = [0, 100]$), así por cada incremento de 1 erg existe un incremento de una unidad en σ . Ahora se simplifican las expresiones para las componentes espaciales (3.32) como

$$\begin{aligned} \vec{p}^{\tau} &= \frac{T_0}{c^2} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}, \\ \vec{p}^{\sigma} &= -T_0 \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

al reemplazar nuevamente en la ecuación del movimiento

$$\frac{\partial \vec{p}^{\tau}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{p}^{\sigma}}{\partial \sigma} = \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial \sigma^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.36)$$

Se obtiene la ecuación de onda libre deseada, aunque presenta las restricciones dadas por las condiciones de parametrización derivadas de las ecuaciones (3.33) y (3.23) respectivamente

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 &= 1, \\ \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} &= 0. \end{aligned}$$

Estas dos condiciones no lineales son las más famosas dentro de la teoría de cuerdas [19], se pueden combinar en una sola y son reemplazadas por las *condiciones de Virasoro*:

$$\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \pm \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 = 1. \quad (3.37)$$

Queda una última condición, la condición de frontera de extremo libre (3.22) indicando que

$$\left. \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=0} = \left. \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=\sigma_1} = 0,$$

básicamente coincide con una condición de frontera de Neumann. Resumiendo, son necesarias las siguientes condiciones para lograr la descripción del movimiento de una cuerda relativista:

$$\text{Ecuación de onda:} \quad \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial \sigma^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = 0, \quad (3.38)$$

$$\text{Condiciones de parametrización:} \quad \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \pm \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 = 1, \quad (3.39)$$

$$\text{Condición de frontera libre:} \quad \left. \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right|_{\sigma_*} = 0. \quad (3.40)$$

3.3.1. Movimiento de una cuerda abierta

Se inicia esta subsección con el fin de solucionar la ecuación del movimiento para una cuerda abierta. La solución más general de la ecuación de onda (3.38) está dada por la combinación de funciones vectoriales arbitrarias

$$\vec{X}(t, \sigma) = \frac{1}{2}(\vec{F}(ct + \sigma) + \vec{G}(ct - \sigma)).$$

Usando la condición de frontera (3.40), con $\sigma = 0$:

$$\left. \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=0} = 0 \longrightarrow \vec{F}'(ct) - \vec{G}'(ct) = 0.$$

Lo anterior implica que las funciones $\vec{F}(ct)$ y $\vec{G}(ct)$ son iguales excepto en un término constante $\vec{G}(u) = \vec{F}(u) + \vec{a}_0$. Volviendo a la solución general

$$\vec{X}(t, \sigma) = \frac{1}{2}(\vec{F}(ct + \sigma) + \vec{F}(ct - \sigma) + \vec{a}_0),$$

la constante \vec{a}_0 puede ser absorbida dentro de la definición de \vec{F} , entonces la solución tiene la forma

$$\vec{X}(t, \sigma) = \frac{1}{2}(\vec{F}(ct + \sigma) + \vec{F}(ct - \sigma)).$$

Usando la condición de frontera (3.40) con $\sigma = \sigma_1$:

$$\left. \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=\sigma_1} = 0 \longrightarrow \vec{F}'(ct + \sigma_1) - \vec{F}'(ct - \sigma_1) = 0,$$

y haciendo la sustitución $u = ct - \sigma_1$, la condición se transforma en

$$\vec{F}'(u + 2\sigma_1) = \vec{F}'(u),$$

esto dice que la función \vec{F}' es periódica con periodo $2\sigma_1$. Por otro lado, la función \vec{F} cambia por un valor constante (elegido convenientemente) luego de un periodo $2\sigma_1$ como

$$\vec{F}(u + 2\sigma_1) = \vec{F}(u) + 2\sigma_1 \frac{\vec{v}_0}{c}.$$

Ahora se analizan las condiciones de parametrización (3.39), calculando cada término por separado, se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} &= \frac{1}{2} \left(\vec{F}'(ct + \sigma) - \vec{F}'(ct - \sigma) \right), \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left(\vec{F}'(ct + \sigma) + \vec{F}'(ct - \sigma) \right), \end{aligned}$$

con esto resulta:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \pm \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = \pm \vec{F}'(ct \pm \sigma).$$

Por lo tanto, la condición (3.39) requiere que $\vec{F}' \cdot \vec{F}' = 1$ para todo argumento de \vec{F} , es decir, que \vec{F}' es un vector unitario. Se puede resumir el análisis realizado sobre las ecuaciones del movimiento; la solución general que describe el movimiento de una cuerda abierta con extremos libres está dada por

$$\vec{X}(t, \sigma) = \frac{1}{2} (\vec{F}(ct + \sigma) + \vec{F}(ct - \sigma)), \quad \sigma \in [0, \sigma_1], \quad (3.41)$$

donde $\sigma_1 = E/T_0$, con E la energía de la cuerda y \vec{F} satisface las condiciones:

$$|\vec{F}'(u)|^2 = 1 \quad \text{y} \quad \vec{F}(u + 2\sigma_1) = \vec{F}(u) + 2\sigma_1 \frac{\vec{v}_0}{c}. \quad (3.42)$$

3.3.2. Movimiento de una cuerda cerrada

De forma similar a la cuerda abierta, para analizar el movimiento de una cuerda cerrada libre se debe jugar con la ecuación de onda (3.38) y las condiciones (3.39) y (3.40). La ecuación de onda tiene como solución

$$\vec{X}(t, \sigma) = \frac{1}{2} (\vec{F}(u) + \vec{G}(v)), \quad u \equiv ct + \sigma, \quad v \equiv ct - \sigma. \quad (3.43)$$

Tomando las derivadas

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left(\vec{F}'(u) + \vec{G}'(v) \right), \\ \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} &= \frac{1}{2} \left(\vec{F}'(u) - \vec{G}'(v) \right), \end{aligned}$$

donde se pueden formar las dos combinaciones lineales:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = \vec{F}'(u) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = -\vec{G}'(v).$$

Según las condiciones de parametrización (3.39), se debe cumplir que para todo u, v :

$$|\vec{F}'(u)|^2 = |\vec{G}'(v)|^2 = 1. \quad (3.44)$$

Para las cuerdas cerradas no existen condiciones de frontera, puesto que no presentan extremos. Sin embargo, existe una condición de periodicidad sobre el parámetro σ :

$$\sigma \sim \sigma + \sigma_1,$$

es decir, cuando σ ha incrementado en σ_1 , se vuelve al mismo punto sobre la cuerda cerrada. Matemáticamente se expresa la condición de periodicidad como

$$\vec{X}(t, \sigma + \sigma_1) = \vec{X}(t, \sigma). \quad (3.45)$$

Reemplazando la expresión para \vec{X} según (3.43) resulta la ecuación

$$\vec{F}(u + \sigma_1) - \vec{F}(u) = \vec{G}(v) - \vec{G}(v - \sigma_1). \quad (3.46)$$

Al tomar las derivadas parciales respecto de u y v se obtienen las ecuaciones

$$\vec{F}'(u + \sigma_1) = \vec{F}'(u) \quad \text{y} \quad \vec{G}'(v + \sigma_1) = \vec{G}'(v). \quad (3.47)$$

Las ecuaciones (3.44) y (3.47) implican que $\vec{F}'(u)$ y $\vec{G}'(v)$ son vectores unitarios y periódicos. El movimiento de una cuerda cerrada se puede determinar completamente utilizando las curvas $\vec{F}'(u)$ y $\vec{G}'(v)$, que al integrarlas producen $\vec{F}(u)$ y $\vec{G}(v)$ más las respectivas constantes de integración que permiten determinar $\vec{X}(t, \sigma)$.

3.4. Corrientes conservadas sobre la hoja de mundo

En la sección 2.4.1, se introdujeron los conceptos de corriente conservada y su respectiva carga conservada asociada. En esta sección se analiza cómo existen las corrientes y cargas conservadas sobre la hoja de mundo de una cuerda. En la sección 2.4.1 aparece el índice α para denotar el número de dimensiones del espacio sobre el que se integra la densidad lagrangiana. Para la acción de una cuerda (3.7), la densidad lagrangiana se integra a lo largo de las coordenadas de la hoja de mundo τ y σ , así que el índice α toma estos dos valores. Explícitamente:

$$S = \int d\xi^0 d\xi^1 \mathcal{L}(\partial_0 X^\mu, \partial_1 X^\mu), \quad (\xi^0, \xi^1) = (\tau, \sigma). \quad (3.48)$$

Note que la acción de la cuerda solo depende de las derivadas de las coordenadas de la cuerda. Además, comparando con (2.27) los campos ϕ^a son las coordenadas X^μ .

Una variación δX^μ que no cambia la densidad lagrangiana es la traslación espaciotemporal constante ϵ^μ , la cual desplaza igualmente cada punto en la hoja de mundo. La densidad lagrangiana es invariante ya que solo depende de las derivadas $\partial_\alpha X^\mu$, entonces las variaciones

$$\delta X^\mu(\tau, \sigma) = \epsilon^\mu, \quad (3.49)$$

se anulan al tomar las derivadas de las coordenadas, ya que $\delta(\partial_\alpha X^\mu) = \partial_\alpha(\delta X^\mu) = \partial_\alpha \epsilon^\mu = 0$. Los índices que aparecían en la sección ya nombrada tienen ahora un significado claro: α es el índice de la hoja de mundo, i y a son índices espaciotemporales.

Para construir la corriente conservada se usa la ecuación (2.29), en este caso

$$\epsilon^\mu j_\mu^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha X^\mu)} \delta X^\mu. \quad (3.50)$$

Dada la variación (3.49), se cancela a ambos lados de la ecuación 3.50 el factor ϵ^μ . Con esto se tienen las corrientes conservadas:

$$j_\mu^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha X^\mu)} \quad \longrightarrow \quad (j_\mu^0, j_\mu^1) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu'}} \right).$$

Las derivadas de \mathcal{L} habían aparecido antes en la expresión (3.11), por consiguiente

$$j_\mu^\alpha = \mathcal{P}_\mu^\alpha \quad \longrightarrow \quad (j_\mu^0, j_\mu^1) = (\mathcal{P}_\mu^\tau, \mathcal{P}_\mu^\sigma).$$

Para este caso la ecuación de la conservación de corriente (2.30) es

$$\partial_\alpha \mathcal{P}_\mu^\alpha = \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = 0, \quad (3.51)$$

no es más que la ecuación del movimiento para la cuerda relativista. Como se tiene una simetría debida a la traslación, se asocia la carga conservada al momento p_μ . Usando la definición de carga conservada en (2.31), se obtiene:

$$p_\mu(\tau) = \int_0^{\sigma_1} \mathcal{P}_\mu^\tau(\tau, \sigma) d\sigma. \quad (3.52)$$

La derivada de la densidad lagrangiana respecto de la velocidad \dot{X}^μ es \mathcal{P}_μ^τ , se puede interpretar como una densidad de momento canónico (2.24). Así, \mathcal{P}_μ^τ es la densidad de momento espaciotemporal de la cuerda. Además, se comprueba que es una carga conservada, porque usando la ecuación del movimiento se consigue:

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = \int_0^{\sigma_1} \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} d\sigma = - \int_0^{\sigma_1} \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} d\sigma = - \mathcal{P}_\mu^\sigma \Big|_0^{\sigma_1}. \quad (3.53)$$

Para una cuerda abierta con extremos libres se aplica la condición de frontera dada en (3.13), de manera que \mathcal{P}_μ^σ se anula en los extremos, por lo tanto se conserva p_μ . Para una cuerda cerrada, las coordenadas $\sigma = 0$ y $\sigma = \sigma_1$ representan el mismo punto sobre la hoja de mundo; por tanto, también se anula dicho término. En ambos casos se conserva p_μ , o lo que es lo mismo:

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0.$$

Cuando se trata de cuerdas abiertas con condiciones de frontera de Dirichlet (3.14) en algunas de las direcciones espaciales, entonces el momento puede no conservarse ya que dicha condición de frontera no asegura que se anule \mathcal{P}_μ^σ . De hecho, en la teoría de cuerdas abiertas se tienen condiciones de frontera de Dirichlet cuando existen D-branas que no llenan totalmente el espacio, el momento de la cuerda puede no conservarse pero el momento total de la cuerda más el de la D-brana se conserva. Nótese que en la parte final de sección 2.6 también se comentó la posibilidad de la violación en la conservación del momento con condiciones de frontera de Dirichlet.

Habiendo concluido con la construcción y análisis de las cargas conservadas sobre la hoja de mundo asociadas a una simetría de traslación, se continúa con la construcción de cargas conservadas asociadas a una *simetría de Lorentz*. Es necesario y útil construir estas cargas para tratar con cuerdas cuánticas, y asegurar que en el proceso de cuantización se preserve la invarianza Lorentz.

La forma general de las transformaciones de Lorentz infinitesimales es $X^\mu \rightarrow X^\mu + \delta X^\mu$, donde

$$\delta X^\mu = \epsilon^{\mu\nu} X_\nu,$$

siendo $\epsilon^{\mu\nu}$ una matriz infinitesimal antisimétrica, cuyas constantes deben satisfacer la condición de invarianza Lorentz $\delta(\eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu) = 0$. Por tanto:

$$2\eta_{\mu\nu}(\delta X^\mu)X^\nu = 2\eta_{\mu\nu}(\epsilon^{\mu\rho} X_\rho)X^\nu = 2\epsilon^{\mu\rho} X_\rho X_\mu = 0,$$

este mismo resultado aplica para cualquier número de dimensiones espaciotemporales, ya que las transformaciones siempre dejan $\eta_{\mu\nu}X^\mu X^\nu$ invariante. Con esto se pueden escribir las corrientes conservadas, en este caso el parámetro de la transformación está dado por $\epsilon^{\mu\nu}$, se tiene entonces

$$\epsilon^{\mu\nu}j_{\mu\nu}^\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha X^\mu)}\delta X^\mu = \mathcal{P}_\mu^\alpha \epsilon^{\mu\nu} X_\nu.$$

Usando la propiedad de antisimetría de $\epsilon^{\mu\nu}$, se puede escribir la corriente como

$$\epsilon^{\mu\nu}j_{\mu\nu}^\alpha = \left(-\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}\right)(X_\mu\mathcal{P}_\nu^\alpha - X_\nu\mathcal{P}_\mu^\alpha),$$

de donde se definen las corrientes $\mathcal{M}_{\mu\nu}^\alpha$ como:

$$\mathcal{M}_{\mu\nu}^\alpha = X_\mu\mathcal{P}_\nu^\alpha - X_\nu\mathcal{P}_\mu^\alpha. \quad (3.54)$$

La ecuación de conservación de corriente es

$$\frac{\partial\mathcal{M}_{\mu\nu}^\tau}{\partial\tau} + \frac{\partial\mathcal{M}_{\mu\nu}^\sigma}{\partial\sigma} = 0,$$

y las cargas corresponden a

$$M_{\mu\nu} = \int_\gamma (\mathcal{M}_{\mu\nu}^\tau d\sigma - \mathcal{M}_{\mu\nu}^\sigma d\tau).$$

3.4.1. La pendiente α'

Observando la forma de la acción de Nambu-Goto (3.7), el parámetro dimensional T_0 (representativo de la tensión de la cuerda) puede relacionarse con un nuevo parámetro α' . Este parámetro ha sido usado desde los inicios de la teoría de cuerdas, como se enseñó en la sección 1.1. Al considerar una cuerda abierta que rota rígidamente, α' es la constante de proporcionalidad que relaciona el momento angular de la cuerda J , en unidades de \hbar , con el cuadrado de su energía E :

$$\frac{J}{\hbar} = \alpha' E^2, \quad (3.55)$$

con unidades

$$[\alpha'] = \frac{1}{[E]^2}.$$

Una forma sencilla de entender la proporcionalidad inusual entre J y E^2 se da en este párrafo. Se sabe que para rotaciones rígidamente $J = I\omega$, con I el momento de inercia. Para un objeto de masa M y longitud del orden de L , se tiene $I \sim ML^2$, entonces $J \sim ML^2\omega$. Para una cuerda relativista en rotación $M \sim E, L \sim E$, y $\omega \sim 1/E$, de tal forma que $J \sim E^2$. La relación exacta es la siguiente [6]:

$$J = \frac{1}{2\pi T_0 c} E^2,$$

comparando con (3.55) se encuentra la relación entre α' y T_0 :

$$\alpha' = \frac{1}{2\pi T_0 \hbar c}.$$

El parámetro recibe el nombre de pendiente debido a su aparición como tal en las trayectorias de Regge para resonancias hadrónicas (ver figura 1.2). El comportamiento de Regge es bastante

preciso y permite predecir la masa de los mesones con un error muy pequeño. Además, el único modelo que representa este comportamiento es el de la cuerda relativista [21]. Es posible construir una longitud característica ℓ_s (la longitud de cuerdas), siendo

$$\ell_s = \hbar c \sqrt{\alpha'},$$

con $\hbar = c = 1$ se tiene que

$$\alpha' = \ell_s^2. \quad (3.56)$$

Revelándose cierta conexión entre el parámetro α' y una escala fundamental de longitud que se encuentra posiblemente en el rango $10^{-33} \text{ cm} \leq \ell_s \leq 10^{-17} \text{ cm}$ [22]. Por último, la acción de Nambu-Goto escrita en términos de α' tiene la forma:

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}. \quad (3.57)$$

3.5. Gauge de cono de luz

En la sección 3.2 se usó el gauge estático para tratar con la dinámica de las cuerdas, pero la solución de las ecuaciones del movimiento no es muy explícita. En esta sección se consideran gauges más generales, entre ellos, el *gauge de cono de luz* que va a permitir una solución completa y explícita de las ecuaciones del movimiento de la cuerda relativista. La forma general de los gauges a utilizar consiste en establecer a τ como una combinación lineal de las coordenadas de la cuerda, equivalente a la condición

$$n_\mu X^\mu(\tau, \sigma) = \lambda\tau, \quad (3.58)$$

donde n_μ es un vector constante de tipo tiempo o nulo; $n_\mu = (1, 0, \dots, 0)$ en el gauge estático. En secciones anteriores se exigía que la coordenada X^0 fuese una coordenada libre, de forma análoga, ahora se debe exigir que las componentes de p_μ en la expresión $n \cdot p$ se conservan. Además, se asume la condición

$$n \cdot \mathcal{P}^\sigma|_{\sigma_*} = 0, \quad (3.59)$$

que garantiza la conservación de $n \cdot p$. Se puede ver con facilidad a partir de (3.53) por qué la anterior expresión implica la conservación de p_μ . Una forma particular de expresar la ecuación (3.58) es la siguiente:

$$n \cdot X(\tau, \sigma) = 2\alpha'(n \cdot p)\tau. \quad (3.60)$$

Según lo visto en la ecuación (3.30), la cual resultó en que la densidad de energía permanecía constante a lo largo de la cuerda. En este caso, la forma general de expresar la condición de parametrización en σ se hace garantizando que $n_\mu \mathcal{P}^{\tau\mu}$ sea constante a lo largo de la cuerda. Dicho de otra forma, $n \cdot \mathcal{P}^\tau$ es constante a lo largo de σ .

Ahora se quiere parametrizar la cuerda abierta dentro del rango $(0, \pi)$, calculando la integral:

$$\int_0^\pi d\sigma n \cdot \mathcal{P}^\tau(\tau, \sigma) = n \cdot p,$$

de acuerdo con la definición en (3.52). Note que al ser constante $n \cdot \mathcal{P}^\tau$, entonces resulta la identidad

$$n \cdot \mathcal{P}^\tau = \frac{n \cdot p}{\pi}, \quad (3.61)$$

esta es una constante sobre la hoja de mundo de una cuerda abierta. Con esta parametrización, la densidad de momento $n \cdot \mathcal{P}^\tau$ es constante, y el valor de σ asignado a un punto es proporcional a la cantidad de momento $n \cdot p$, de la porción de la cuerda desde el extremo $\sigma = 0$ hasta dicho punto.

Como es el propósito de esta sección, se estudia a continuación la ecuación del movimiento (3.16). Haciendo el producto punto relativista con n^μ , se obtiene la condición

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (n \cdot \mathcal{P}^\tau) + \frac{\partial}{\partial \sigma} (n \cdot \mathcal{P}^\sigma) = 0.$$

El primer término se anula por la condición en (3.61) y como consecuencia

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} (n \cdot \mathcal{P}^\sigma) = 0, \quad (3.62)$$

mostrando simplemente que $n \cdot \mathcal{P}^\sigma$ es independiente de σ , y además $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$ dada la condición (3.59).

Para las cuerdas cerradas se sigue un procedimiento similar. Asumiendo que la densidad de momento $n \cdot \mathcal{P}^\tau$ es constante, se llega nuevamente a la conclusión de que esta cantidad es una constante sobre la hoja de mundo, pero en este caso, se escoge un rango $\sigma \in [0, 2\pi]$. Con esto, la ecuación (3.61) se transforma en

$$n \cdot \mathcal{P}^\tau = \frac{n \cdot p}{2\pi}. \quad (3.63)$$

Con este cambio, la parametrización en τ se escribe sin el factor de dos en (3.60), es decir:

$$n \cdot X(\tau, \sigma) = \alpha' (n \cdot p) \tau. \quad (3.64)$$

Para las cuerdas abiertas y cerradas se puede usar la misma condición

$$n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0. \quad (3.65)$$

Resumiendo para ambos casos, la parametrización está definida por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} n \cdot X(\tau, \sigma) &= \beta \alpha' (n \cdot p) \tau, \\ n \cdot p &= \frac{2\pi}{\beta} n \cdot \mathcal{P}^\tau, \end{aligned} \quad \beta = \begin{cases} 2 & \text{para cuerdas abiertas} \\ 1 & \text{para cuerdas cerradas} \end{cases}. \quad (3.66)$$

Partiendo de la expresión para la acción en (3.57), y usando la definición en (3.11) se calculan fácilmente las expresiones para $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ y $\mathcal{P}^{\sigma\mu}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{\tau\mu} &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X') X^{\mu'} - (X')^2 \dot{X}^\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}, \\ \mathcal{P}^{\sigma\mu} &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X') \dot{X}^\mu - (\dot{X})^2 X^{\mu'}}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Con las anteriores definiciones se calcula el producto:

$$n \cdot \mathcal{P}^\sigma = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X') \partial_\tau (n \cdot X) - (\dot{X})^2 \partial_\sigma (n \cdot X)}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}},$$

claramente $\partial_\sigma(n \cdot X) = 0$, pues solo depende de τ , así que

$$n \cdot \mathcal{P}^\sigma = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X') \partial_\tau(n \cdot X)}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}.$$

Por la condición (3.65) y considerando que $\partial_\tau(n \cdot X)$ es una constante no nula, se llega a la restricción

$$\dot{X} \cdot X' = 0, \quad (3.68)$$

que en el gauge estático, con $X^{0'} = 0$, se reduce a (3.23). Aplicando la restricción (3.68) se pueden simplificar las expresiones de $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ y $\mathcal{P}^{\sigma\mu}$:

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{X'^2 \dot{X}^\mu}{\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2}}, \quad \mathcal{P}^{\sigma\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{\dot{X}^2 X^{\mu'}}{\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2}}.$$

Reemplazando la expresión de $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ en la segunda ecuación de (3.66) se obtiene

$$n \cdot p = \frac{1}{\beta\alpha'} \frac{X'^2 (n \cdot \dot{X})}{\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2}},$$

y dado que $n \cdot \dot{X} = \beta\alpha' (n \cdot p)$; de la primera ecuación en (3.66). Se consigue finalmente el resultado

$$1 = \frac{X'^2}{\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2}} \quad \rightarrow \quad \dot{X}^2 + X'^2 = 0.$$

En definitiva, las restricciones que aparecen debido a la parametrización son:

$$\dot{X} \cdot X' = 0, \quad \dot{X}^2 + X'^2 = 0, \quad (3.69)$$

en forma compacta, pueden escribirse como

$$(\dot{X} \pm X')^2 = 0. \quad (3.70)$$

La ecuación 3.70 representa las condiciones de Virasoro (3.37) escritas en forma covariante. Con aquellas condiciones se simplifican aún más las expresiones de $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ y $\mathcal{P}^{\sigma\mu}$:

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu, \quad \mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X^{\mu'}. \quad (3.71)$$

Sustituyendo en la ecuación del movimiento (3.16) se consigue la ecuación de onda:

$$\ddot{X}^\mu - X^{\mu''} = 0. \quad (3.72)$$

Se va a introducir la notación clave de la teoría, por ahora es usada solamente para resolver la ecuación de onda. Esta es la notación usada por casi todos los que trabajan en cuerdas cuánticas [23]. Se sabe que la solución más general de la ecuación de onda (3.72) es

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} (f^\mu(\tau + \sigma) + g^\mu(\tau - \sigma)),$$

donde f^μ y g^μ son funciones arbitrarias de un solo argumento. Se asume que existe una D-brana llenando todo el espacio, de tal forma que las coordenadas de la cuerda X^μ satisfacen condiciones de extremo libre $\mathcal{P}^{\sigma\mu} = 0$, esto a su vez implica condiciones de frontera de Neumann:

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} = 0, \quad \text{en } \sigma = 0, \pi.$$

La condición de frontera evaluada en $\sigma = 0$ es

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}(\tau, 0) = \frac{1}{2} (f^{\mu'}(\tau) - g^{\mu'}(\tau)) = 0.$$

Como las derivadas coinciden, ambas funciones solo pueden ser distintas por una constante c^μ . Se justifica entonces la sustitución $g^\mu = f^\mu + c^\mu$, y si se absorbe dicha constante dentro de la definición de f^μ el resultado es

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} (f^\mu(\tau + \sigma) + f^\mu(\tau - \sigma)). \quad (3.73)$$

Evaluando ahora la condición de frontera en $\sigma = \pi$,

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}(\tau, \pi) = \frac{1}{2} (f^{\mu'}(\tau + \pi) - f^{\mu'}(\tau - \pi)) = 0.$$

Como esta ecuación debe ser válida para todo τ , se deduce que $f^{\mu'}$ es una función periódica con periodo 2π . La forma general de la expansión en series de Fourier para la función $f^{\mu'}(u)$ es

$$f^{\mu'}(u) = f_1^\mu + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^\mu \cos nu + b_n^\mu \sin nu),$$

y al integrarse, se obtiene la serie de Fourier para $f^\mu(u)$:

$$f^\mu(u) = f_0^\mu + f_1^\mu u + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^\mu \cos nu + B_n^\mu \sin nu),$$

donde se han absorbido las constantes de integración dentro de los nuevos coeficientes. Reemplazando la anterior expresión en (3.73), y simplificando mediante identidades trigonométricas, se obtiene:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = f_0^\mu + f_1^\mu \tau + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^\mu \cos n\tau + B_n^\mu \sin n\tau) \cos n\sigma. \quad (3.74)$$

Es necesario reemplazar los coeficientes en la ecuación (3.74) por unos que tengan una interpretación física simple. Inicialmente, se introducen las constantes a_n^μ mediante las relaciones

$$\begin{aligned} A_n^\mu \cos n\tau + B_n^\mu \sin n\tau &= -\frac{i}{2} ((B_n^\mu + iA_n^\mu) e^{in\tau} - (B_n^\mu - iA_n^\mu) e^{-in\tau}) \\ &\equiv -i \frac{\sqrt{2\alpha'}}{\sqrt{n}} (a_n^{\mu*} e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau}) \end{aligned} \quad (3.75)$$

La definición en (3.75) introduce la notación que los teóricos de cuerdas usan convencionalmente [6]. El $*$ denota el complejo conjugado, y se introduce el factor $\sqrt{2\alpha'}$ para hacer adimensionales las constantes a_n^μ ; estas constantes y sus complejos conjugados se convertirán en los operadores de creación y aniquilación cuando se considere la teoría cuántica.

El coeficiente f_1^μ en (3.74) tiene una sencilla interpretación física. La cantidad de momento está dada por

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu = \frac{1}{2\pi\alpha'} f_1^\mu + \dots,$$

los puntos denotan los términos dependientes de $\cos n\sigma$. Para encontrar el momento total, se integra sobre el rango $\sigma \in [0, \pi]$, donde los términos extra se anulan y como resultado queda

$$p^\mu = \int_0^\pi \mathcal{P}^{\tau\mu} d\sigma = \frac{1}{2\pi\alpha'} \pi f_1^\mu \quad \longrightarrow \quad f_1^\mu = 2\alpha' p^\mu,$$

con esto, la constante f_1^μ es proporcional al momento espaciotemporal que tiene la cuerda. Denotando $f_0^\mu = x_0^\mu$, se presenta la forma convencional de la solución:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau - i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{\mu*} e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau}) \frac{\cos n\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (3.76)$$

Así, los términos del lado derecho en (3.76) corresponden al modo cero, al momento, y a las oscilaciones de la cuerda, respectivamente. Para simplificar un poco más las expresiones, se realizan las definiciones:

$$\begin{aligned} \alpha_0^\mu &= \sqrt{2\alpha'} p^\mu, \\ \alpha_n^\mu &= a_n^\mu \sqrt{n}, \\ \alpha_{-n}^\mu &= a_n^{\mu*} \sqrt{n}, \end{aligned} \quad (3.77)$$

con $n \geq 1$. Se puede garantizar que la expresión en (3.76) es real si se cumple que $(\alpha_n^\mu)^* = \alpha_{-n}^\mu$. Usando esta nueva notación se puede reescribir X^μ de la forma:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau - i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu e^{in\tau} - \alpha_n^\mu e^{-in\tau}) \cos n\sigma.$$

Reexpresando la sumatoria; sumando sobre todos los enteros excepto el cero:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos n\sigma. \quad (3.78)$$

Queda completa la solución de la ecuación de onda con condiciones de frontera de Neumann. Se define completamente una solución especificando las constantes x_0^μ y α_n^μ para $n \geq 0$. Partiendo de la ecuación (3.78) es fácil calcular las derivadas:

$$\begin{aligned} \dot{X}^\mu &= \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu \cos n\sigma e^{-in\tau}, \\ X^{\mu'} &= -i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu \sin n\sigma e^{-in\tau}. \end{aligned}$$

Existen dos combinaciones lineales particularmente interesantes de las anteriores derivadas:

$$\dot{X}^\mu \pm X^{\mu'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau \pm \sigma)}. \quad (3.79)$$

Pese a encontrarse una solución de la ecuación de onda, la cual satisface las condiciones de frontera relevantes, es importante también asegurar que las restricciones dadas en (3.69) se respeten. Se usará el *gauge de cono de luz* para encontrar una solución compatible directamente con la ecuación de onda, y también con estas restricciones. Las coordenadas de cono de luz fueron revisadas en la sección 2.3.3 como un simple cambio de coordenadas, cambiando x^0 y x^1 por x^+ y x^- . Elegir el gauge de cono de luz implica imponer las condiciones (3.66) con un vector n^μ tal que produzca $n \cdot X = X^+$. Tomando n_μ como

$$n_\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0 \right),$$

se encuentra que

$$n \cdot X = \frac{X^0 + X^1}{\sqrt{2}} = X^+, \quad n \cdot p = \frac{p^0 + p^1}{\sqrt{2}} = p^+. \quad (3.80)$$

Usando estos resultados en (3.66) se tiene que:

$$X^+(\tau, \sigma) = \beta\alpha' p^+ \tau, \quad p^+ = \frac{2\pi}{\beta} \mathcal{P}^{\tau+}. \quad (3.81)$$

La utilidad del gauge de cono de luz consiste en tomar la forma simple de X^+ para mostrar que no existe dinámica en X^- , y que toda la dinámica se encuentra en las direcciones transversales X^2, X^3, \dots, X^d . Las coordenadas transversales se denotan desde ahora como X^I :

$$X^I = (X^2, X^3, \dots, X^d).$$

Prestando atención a las restricciones (3.70) y recordando la definición del producto punto relativista en coordenadas de cono de luz (2.19), es posible reescribir dichas restricciones de la forma

$$-2(\dot{X}^+ \pm X^{+'})(\dot{X}^- \pm X^{-'}) + (\dot{X}^I \pm X^{I'})^2 = 0,$$

como $X^{+'} = 0$ y $\dot{X}^+ = \beta\alpha' p^+$, entonces \dot{X}^+ se convierte en una constante y se tiene que

$$\dot{X}^- \pm X^{-'} = \frac{1}{\beta\alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^I \pm X^{I'})^2. \quad (3.82)$$

Donde se asume que $p^+ > 0$, si fuera igual a cero, entonces el gauge de cono de luz tendría poca utilidad. En la ecuación anterior se determina \dot{X}^- y $X^{-'}$ en términos de las X^I , y por tanto se determina X^- hasta una constante de integración x_0^- . En últimas, este análisis indica que la dinámica completa de una cuerda está determinada por los objetos:

$$X^I(\tau, \sigma), \quad p^+, \quad x_0^-. \quad (3.83)$$

Se presenta ahora la solución explícita para las coordenadas transversales X^I junto con el cálculo de la correspondiente X^- . Para el caso de cuerdas abiertas $\beta = 2$ y usando la solución general en (3.78) se obtiene

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^I e^{-in\tau} \cos n\sigma. \quad (3.84)$$

Además, considerando (3.77) la condición gauge genera para X^+ el valor

$$X^+(\tau, \sigma) = 2\alpha' p^+ \tau = \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^+ \tau, \quad (3.85)$$

esto significa que el modo cero de la posición y las oscilaciones de la coordenada X^+ son ambas cero, es decir,

$$x_0^+ = 0, \quad \alpha_n^+ = \alpha_{-n}^+ = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \infty.$$

La coordenada X^- , siendo una combinación lineal de X^0 y X^1 satisface la misma ecuación de onda y las mismas condiciones de frontera que las demás coordenadas, por lo que también se puede usar (3.78) y queda

$$X^-(\tau, \sigma) = x_0^- + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^- e^{-in\tau} \cos n\sigma. \quad (3.86)$$

Usando la ecuación (3.79) con $\mu = -$, y con $\mu = I$:

$$\dot{X}^- \pm X^{-'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau \pm \sigma)}, \quad (3.87)$$

$$\dot{X}^I \pm X^{I'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau \pm \sigma)}. \quad (3.88)$$

Igualando (3.87) con (3.82)

$$\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau \pm \sigma)} = \frac{1}{2\alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^I \pm X^{I'})^2,$$

reemplazando para el miembro derecho el cuadrado de la expresión en (3.88) queda

$$\begin{aligned} \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau \pm \sigma)} &= \frac{1}{2p^+} \sum_{p, q \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_q^I e^{-i(p+q)(\tau \pm \sigma)} \\ &= \frac{1}{2p^+} \sum_{n, p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I e^{-in(\tau \pm \sigma)}, \end{aligned}$$

la segunda igualdad se consigue al hacer la sustitución $p + q = n$. Se puede ver claramente la identidad:

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{2p^+} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I. \quad (3.89)$$

Con esto se ha conseguido una solución completa porque se tienen expresiones explícitas para los osciladores α_n^- en términos de los osciladores transversales. La solución general que describe un movimiento permitido se establece al determinar $X^+(\tau, \sigma)$, $X^-(\tau, \sigma)$ y $X^I(\tau, \sigma)$. X^I y X^+ se determinan al especificar los valores de p^+ , x_0^- , x_0^I , y todas las constantes α_n^I . Partiendo de la ecuación (3.89) se pueden calcular las constantes α_n^- , que junto con x_0^- determinan X^- .

La combinación de osciladores en (3.89) es bastante útil y se referirá a ella como *modo de Virasoro transversal* L_n^\perp ,

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{p^+} L_n^\perp, \quad L_n^\perp \equiv \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I, \quad (3.90)$$

con $n = 0$, usando (3.77) se encuentra que

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- = 2\alpha' p^- = \frac{1}{p^+} L_0^\perp \quad \longrightarrow \quad 2p^+ p^- = \frac{1}{\alpha'} L_0^\perp.$$

Usando el valor de α_n^- dado en (3.90), las ecuaciones (3.87) y (3.82) se reescriben como

$$\dot{X}^- \pm X^{-'} = \frac{1}{p^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n^\perp e^{-in(\tau \pm \sigma)} = \frac{1}{4\alpha' p^+} (\dot{X}^I \pm X^{I'})^2. \quad (3.91)$$

También es posible escribir mediante sustitución directa en (3.86) una nueva expresión para X^- :

$$X^-(\tau, \sigma) = x_0^- + \frac{1}{p^+} L_0^\perp \tau + \frac{i}{p^+} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} L_n^\perp e^{-in\tau} \cos n\sigma, \quad (3.92)$$

de aquí se ve claramente que los modos de Virasoro son los modos de expansión para la coordenada X^- .

La masa de una cuerda que realiza un movimiento arbitrario puede calcularse usando los resultados vistos hasta el momento. Considerando la ecuación relativista:

$$M^2 = -p^2 = 2p^+ p^- - p^I p^I,$$

y dado que

$$2p^+p^- = \frac{1}{\alpha'} L_0^\perp = \frac{1}{\alpha'} \left(\frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{I*} \alpha_n^I \right),$$

con $\alpha_0^I \alpha_0^I = 2\alpha' p^I p^I$, y usando (3.77) se obtiene finalmente la expresión para la masa

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I*} a_n^I. \quad (3.93)$$

Así, el cuadrado de la masa se escribe como la suma de términos de la forma $a^*a = |a|^2 \geq 0$, por lo tanto $M^2 \geq 0$. Este fue uno de los primeros resultados importantes obtenidos históricamente como consecuencia de usar el gauge de cono de luz, en cambio, en la cuantización covariante no se podía probar una relación de este tipo para una cuerda clásica [23]. Además, el resultado para M^2 no sobrevivirá a la cuantización porque el espectro de masas para los distintos estados de las cuerdas no será continuo, siendo un punto a favor debido a que las partículas no toman valores continuos para su masa. La cuantización de dicha fórmula permitirá a la teoría de cuerdas describir estados correspondientes a teorías físicas, pudiendo describir campos gauge y la gravedad teniendo en cuenta el cambio que la cuantización hace sobre (3.93) y la respectiva fórmula para cuerdas cerradas.

Capítulo 4

Cuerda relativista cuántica

En este capítulo se expone el proceso de cuantización de una partícula puntual, usando el gauge de cono de luz, para entender los posteriores procesos de cuantización en cuerdas relativistas abiertas y cerradas. Se analiza el espectro de estas teorías de cuerdas abiertas y cerradas, conocidas como *teorías de cuerdas bosónicas*, dada la naturaleza de los estados que generan. Resaltando la aparición de fotones en el espectro de cuerdas abiertas y del gravitón en el espectro de cuerdas cerradas. Se presenta también un resultado importante, en donde se fija la dimensionalidad del espaciotiempo de la teoría como consecuencia de exigir la propiedad de invarianza de Lorentz. En la sección final del capítulo se muestra una breve introducción de la teoría de supercuerdas.

4.1. Cuantización de cono de luz de la partícula puntual

En esta sección se expone el proceso de cuantización para la partícula puntual relativista, donde gran parte de las ideas necesarias para hacer la cuantización de la cuerda relativista se utilizan también en este contexto más simple. Así se consigue una exposición inicial de las ideas complejas de la cuantización de la cuerda relativista, pero en este contexto relativamente más sencillo.

La acción para la partícula puntual relativista fue dada en la ecuación (2.36), donde su movimiento es parametrizado mediante la cantidad adimensional τ . Se puede simplificar la notación para la expresión dentro del radical en (2.36) como $\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \dot{x}^2$, de esta forma, y pensando en τ como una variable temporal y las $x^\mu(\tau)$ como coordenadas de la partícula, tal acción entonces define un lagrangiano L de la forma:

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} L d\tau, \quad L = -m\sqrt{-\dot{x}^2}.$$

Usando la definición de momento dada en (2.5) se obtiene

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{m\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}}, \quad (4.1)$$

así se nota que las componentes del momento deben satisfacer la restricción $p^2 + m^2 = 0$. Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange, definidas en (2.4), para el lagrangiano anterior se consigue la ecuación del movimiento:

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0.$$

El gauge de cono de luz para la partícula puntual se define haciendo la coordenada x^+ proporcional a τ :

$$x^+ = \frac{1}{m^2} p^+ \tau. \quad (4.2)$$

Tomando el valor de $\mu = +$, dentro de (4.1) y usando (4.2) se pueden expresar el momento y la ecuación del movimiento como

$$p_\mu = m^2 \dot{x}_\mu, \quad \ddot{x}_\mu = 0. \quad (4.3)$$

Expandiendo la restricción $p^2 + m^2 = 0$ en sus componentes de cono de luz se deduce que

$$p^- = \frac{1}{2p^+} (p^I p^I + m^2). \quad (4.4)$$

Entonces el valor de p^- está determinado completamente por p^+ y las componentes transversales p^I . La componente $\mu = -$, del momento en (4.3) es

$$\frac{dx^-}{d\tau} = \frac{1}{m^2} p^-,$$

que al integrar resulta

$$x^-(\tau) = x_0^- + \frac{p^-}{m^2} \tau, \quad (4.5)$$

y haciendo el mismo procedimiento para las componentes transversales, se tiene que

$$x^I(\tau) = x_0^I + \frac{p^I}{m^2} \tau. \quad (4.6)$$

De esta manera queda especificado el movimiento de la partícula. Las variables dinámicas independientes son

$$(x^I, \quad x_0^-, \quad p^I, \quad p^+). \quad (4.7)$$

A partir de las variables dinámicas en (4.7) es posible construir una teoría cuántica en el cono de luz: representándolas como operadores. El proceso de inventar una teoría cuántica es casi equivalente a una obra de arte. No es posible seguir simplemente una receta para su invención, pese a que típicamente la exposición se hace siguiendo tal estilo [24].

Antes de comenzar propiamente con la cuantización, es necesario resaltar las diferentes formas existentes para describir la evolución temporal de un sistema en mecánica cuántica. Dos de ellas son la *representación de Schrödinger* y la *representación de Heisenberg*¹. En la representación de Schrödinger el estado del sistema evoluciona en el tiempo, mientras que los operadores no cambian. Por otro lado, en la representación de Heisenberg son los operadores quienes tienen evolución temporal, mientras que el estado permanece invariable en el tiempo. Ambas representaciones son útiles para la construcción de las teorías cuánticas de la partícula puntual y de la cuerda relativista.

Se continúa ahora con la construcción de la teoría cuántica, a partir de la teoría clásica, dentro del gauge de cono de luz para la partícula puntual relativista. El primer paso consiste en representar como operadores a las variables dinámicas en (4.7), las cuales corresponden al conjunto de operadores de Schrödinger independientes del tiempo:

$$(x^I, \quad x_0^-, \quad p^I, \quad p^+). \quad (4.8)$$

¹Para una definición más rigurosa de estas representaciones se sugiere al lector revisar la sección 1.2.3 de [25] y/o la sección 1.5 de [26].

No es necesario, en este capítulo, incluir símbolos adicionales para distinguir los operadores de sus autovalores. Se imponen entonces las relaciones de conmutación siguientes:

$$[x^I, p^J] = i\delta^{IJ} = i\eta^{IJ}, \quad [x_0^-, p^+] = i\eta^{-+} = -i, \quad (4.9)$$

con todos los demás conmutadores iguales a cero. El primer conmutador es el ya conocido conmutador de las coordenadas espaciales con los correspondientes momentos espaciales. El segundo conmutador tiene la misma forma, puesto que se trata a la coordenada x_0^- como una coordenada espacial y p^+ es su correspondiente momento conjugado.

Los operadores en la representación de Heisenberg son:

$$(x^I(\tau), \quad x_0^-(\tau), \quad p^I(\tau), \quad p^+(\tau)), \quad (4.10)$$

los cuales son dependientes del tiempo y satisfacen las mismas reglas de conmutación que los operadores de Schrödinger:

$$[x^I(\tau), p^J(\tau)] = i\eta^{IJ}, \quad [x_0^-(\tau), p^+(\tau)] = -i,$$

con los demás conmutadores iguales a cero.

Partiendo de los operadores de Schrödinger y el parámetro τ , se construyen ahora operadores cuánticos, que son definidos como el análogo de las ecuaciones (4.2), (4.5) y (4.4):

$$\begin{aligned} x^+(\tau) &\equiv \frac{p^+}{m^2} \tau, \\ x^-(\tau) &\equiv x_0^- + \frac{p^-}{m^2} \tau, \\ p^- &\equiv \frac{1}{2p^+} (p^I p^I + m^2). \end{aligned}$$

Los operadores $x^+(\tau)$ y $x^-(\tau)$ son operadores de Schrödinger dependientes del tiempo. Todo este nuevo conjunto de operadores también obedece a las relaciones de conmutación en (4.9).

Se sabe de (2.20) que la energía de cono de luz corresponde a p^- . Para determinar el hamiltoniano se espera que el operador p^- genere una evolución en x^+ , siendo este el correspondiente al tiempo de cono de luz. Sin embargo, los operadores se han parametrizado con τ , y se espera que el hamiltoniano H en últimas genere la evolución en τ . Como x^+ depende de τ , se cumple entonces: $\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial x^+}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial x^+}$, y de la ecuación (4.2) la evolución temporal está generada por $p^+ p^- / m^2$, así se obtiene el hamiltoniano de Heisenberg como

$$H(\tau) = \frac{p^+(\tau)}{m^2} p^-(\tau) = \frac{1}{2m^2} (p^I(\tau) p^I(\tau) + m^2), \quad (4.11)$$

este hamiltoniano genera las ecuaciones esperadas del movimiento y de la evolución de los operadores.

Para completar la construcción de la teoría cuántica para la partícula puntual se debe desarrollar el espacio de estados, conseguir la forma de la ecuación de Schrödinger y definir los estados físicos. Los estados de un sistema están caracterizados por los autovalores de ciertos operadores que conmutan. Como es conveniente trabajar en el espacio de momentos se seleccionan los operadores p^+ y p^I . Así los estados de la partícula puntual cuántica se escriben como

$$|p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (4.12)$$

donde p^+ es el autovalor del operador \hat{p}^+ , y \vec{p}_T es el momento transversal, cuyas componentes son los autovalores de los operadores \hat{p}^I :

$$\hat{p}^+ |p^+, \vec{p}_T\rangle = p^+ |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad \hat{p}^I |p^+, \vec{p}_T\rangle = \vec{p}_T^I |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (4.13)$$

El operador p^- actuando sobre los estados es

$$\hat{p}^- |p^+, \vec{p}_T\rangle = \frac{1}{2p^+} (p^I p^I + m^2) |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (4.14)$$

El hamiltoniano actúa sobre los estados como

$$H |p^+, \vec{p}_T\rangle = \frac{1}{2m^2} (p^I p^I + m^2) |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (4.15)$$

con esto los estados dependientes del tiempo son:

$$\exp\left(-i \frac{1}{2m^2} (p^I p^I + m^2) \tau\right) |p^+, \vec{p}_T\rangle,$$

los cuales satisfacen la ecuación de Schrödinger y son los estados físicos dependientes del tiempo asociados a los estados en (4.12).

La cuantización del campo escalar libre en el gauge de cono de luz produce estados para una partícula, que coinciden exactamente con los estados de la teoría cuántica de la partícula puntual². Cabe resaltar que existe una correspondencia natural entre los estados cuánticos de ambas teorías

$$|p^+, \vec{p}_T\rangle \longleftrightarrow a_{p^+, p_T}^\dagger |\Omega\rangle. \quad (4.16)$$

La correspondencia puede extenderse también a los operadores que actúan sobre el espacio de estados de ambas teorías. En cierto sentido, la teoría cuántica del campo escalar es una teoría más completa, debido a que incluye operadores de creación a_{p^+, p_T}^\dagger que pueden actuar indefinidamente sobre el estado de vacío $|\Omega\rangle$, es decir, contiene estados para un número arbitrario de partículas y dichos estados no aparecen en la teoría cuántica de la partícula puntual.

En la teoría de la partícula puntual se puede escribir la ecuación de Schrödinger, para hacerlo, se define un estado general $|\Psi, \tau\rangle$ mediante la superposición de los estados base $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ de la siguiente manera:

$$|\Psi, \tau\rangle = \int dp^+ d\vec{p}_T \psi(\tau, p^+, \vec{p}_T) |p^+, \vec{p}_T\rangle,$$

entonces la ecuación de Schrödinger para este estado es

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} |\Psi, \tau\rangle = H |\Psi, \tau\rangle. \quad (4.17)$$

Usando la definición para el estado $|\Psi, \tau\rangle$ y reconociendo la acción del hamiltoniano sobre dicho estado (se muestra en (4.15)) se obtiene la siguiente expresión de la ecuación de Schrödinger para la función de onda en el espacio de momentos $\psi(\tau, p^+, \vec{p}_T)$:

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} \psi(\tau, p^+, \vec{p}_T) = \frac{1}{2m^2} (p^I p^I + m^2) \psi(\tau, p^+, \vec{p}_T). \quad (4.18)$$

²El lector interesado puede revisar este resultado para el campo escalar libre en la sección 10.4 de [6].

La ecuación clásica del campo escalar ϕ es $(\partial^2 - m^2)\phi = 0$, en coordenadas de cono de luz esta ecuación se transforma en

$$\left(-2\frac{\partial}{\partial x^+}\frac{\partial}{\partial x^-} + \frac{\partial}{\partial x^I}\frac{\partial}{\partial x^I} - m^2\right)\phi(x^+, x^-, \vec{x}_T) = 0, \quad (4.19)$$

la transformada de Fourier para las componentes espaciales del campo es

$$\phi(x) = \int dp^+ d\vec{p}_T e^{-ix^- p^+ + i\vec{x}_T \cdot \vec{p}_T} \phi(x^+, p^+, \vec{p}_T),$$

que al sustituirla en la ecuación del campo (4.19) resulta

$$\left(-2\frac{\partial}{\partial x^+}(-ip^+) - p^I p^I - m^2\right)\phi(x^+, p^+, \vec{p}_T) = 0,$$

y usando la definición de x^+ en términos del parámetro τ , se consigue finalmente

$$\left(i\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{2m^2}(p^I p^I + m^2)\right)\phi(\tau, p^+, \vec{p}_T) = 0. \quad (4.20)$$

Reorganizando la ecuación (4.18), vemos que tiene la misma forma que (4.20):

$$\left(i\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{2m^2}(p^I p^I + m^2)\right)\psi(\tau, p^+, \vec{p}_T) = 0. \quad (4.21)$$

Esto confirma que la ecuación de Schrödinger para las funciones de onda de la partícula puntual es la misma ecuación para el campo escalar clásico. Existe entonces la correspondencia:

$$\psi(\tau, p^+, \vec{p}_T) \longleftrightarrow \phi(\tau, p^+, \vec{p}_T).$$

La cuantización de la partícula puntual es un ejemplo de lo que se conoce como *primera cuantización*; donde las coordenadas y los momentos de la mecánica clásica se transforman a operadores cuánticos y se construye un espacio de estados, cuyo resultado es un conjunto de estados para una partícula. Por otra parte, la cuantización de una teoría clásica de campos se conoce como *segunda cuantización*; tiene como resultado una teoría cuántica de campos con operadores de campo y estados para un número arbitrario de partículas. Se puede entender la relación entre estas dos cuantizaciones, se interpreta la ecuación de Schrödinger para las funciones de onda de la partícula puntual (que surge de la primera cuantización) como la ecuación clásica de un campo escalar, así, la cuantización de esta teoría clásica de campos implicaría un segundo proceso de cuantización.

4.2. Cuantización de cono de luz de la cuerda relativista abierta

El primer paso, para definir la teoría cuántica de la cuerda relativista abierta en el gauge de cono de luz, consiste en proponer los operadores de Schrödinger teniendo en cuenta el conjunto de operadores para la partícula puntual, los cuales son:

$$(X^I(\sigma), x_0^-, \mathcal{P}^{\tau I}(\sigma), p^+), \quad (4.22)$$

y los operadores de Heisenberg asociados son

$$(X^I(\tau, \sigma), x_0^-(\tau), \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma), p^+(\tau)).$$

Para los operadores $X^I(\sigma)$ y $\mathcal{P}^{\tau I}$ es conveniente exigir que conmuten solamente cuando estén sobre el mismo punto a lo largo de la cuerda, es decir, cuando toman el mismo valor de σ . No se espera que mediciones simultáneas en puntos distintos de la cuerda interfieran entre sí, de manera que se imponen las relaciones de conmutación:

$$[X^I(\sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\sigma')] = i\eta^{IJ}\delta(\sigma - \sigma'), \quad [X^I(\sigma), X^J(\sigma')] = [\mathcal{P}^{\tau I}(\sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\sigma')] = 0, \quad (4.23)$$

donde se usa la delta de Dirac debido a que σ es una variable continua. Los dos operadores restantes que no tienen dependencia de σ obedecen la relación

$$[x_0^-, p^+] = -i, \quad (4.24)$$

y conmutan con todos los demás operadores de Schrödinger :

$$[x_0^-, X^I(\sigma)] = [x_0^-, \mathcal{P}^{\tau I}(\sigma)] = [p^+, X^I(\sigma)] = [p^+, \mathcal{P}^{\tau I}(\sigma)] = 0.$$

Para los operadores de Heisenberg, la única relación de conmutación diferente de cero corresponde a

$$[X^I(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')] = i\eta^{IJ}\delta(\sigma - \sigma'). \quad (4.25)$$

Ahora se debe construir el hamiltoniano, que por supuesto, debe generar una traslación en τ . En el gauge de cono de luz para cuerdas abiertas $X^+ = 2\alpha'p^+\tau$, así que

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial X^+}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial X^+} = 2\alpha'p^+ \frac{\partial}{\partial X^+}.$$

Se sabe que p^- genera una traslación en X^+ , expresándolo según (3.52) queda el hamiltoniano

$$H = 2\alpha'p^+p^- = 2\alpha'p^+ \int_0^\pi d\sigma \mathcal{P}^{\tau-}. \quad (4.26)$$

Considerando la densidad de momento $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ definida en (3.71), es posible conseguir la siguiente expresión para su componente $\mathcal{P}^{\tau-}$:

$$\mathcal{P}^{\tau-} = \frac{\pi}{2p^+} \left(\mathcal{P}^{\tau I} \mathcal{P}^{\tau I} + \frac{X^{I'} X^{I'}}{(2\pi\alpha')^2} \right),$$

así se obtiene de manera explícita el hamiltoniano de Heisenberg

$$H(\tau) = \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma \left(\mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma) \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma) + \frac{X^{I'}(\tau, \sigma) X^{I'}(\tau, \sigma)}{(2\pi\alpha')^2} \right). \quad (4.27)$$

Este hamiltoniano genera las mismas ecuaciones del movimiento clásicas, pero esta vez con operadores cuánticos, que también ocurre para las condiciones de frontera del caso clásico, es decir, se convierten en ecuaciones de operadores cuánticos. Por ejemplo, dentro de la sección 3.5, una solución de la ecuación del movimiento de la forma (3.72) es (3.79), usando la misma notación para el caso clásico, las constantes α_n^μ se convierten ahora en operadores cuánticos.

Técnicamente, es útil reescribir las relaciones de conmutación considerando las combinaciones lineales de las derivadas $(\dot{X}^I \pm X^{I'})$

$$\left[(\dot{X}^I \pm X^{I'}) (\tau, \sigma), (\dot{X}^J \pm X^{J'}) (\tau, \sigma') \right] = \pm 4\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'), \quad (4.28)$$

si los signos son conjugados, entonces se tiene el siguiente resultado:

$$\left[(\dot{X}^I \pm X^{I'}) (\tau, \sigma), (\dot{X}^J \mp X^{J'}) (\tau, \sigma') \right] = 0. \quad (4.29)$$

Se examina ahora la expansión en modos de Fourier para las coordenadas transversales X^I , que se hace en la sección 3.5, recordando que la solución de la ecuación clásica del movimiento para las coordenadas transversales con condiciones de frontera de Neumann es:

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^I e^{-in\tau} \cos n\sigma. \quad (4.30)$$

Recordando que dichas condiciones de frontera implican la existencia de una D-brana que llena la totalidad del espacio. En el caso cuántico (4.30) corresponde a una solución de la ecuación del movimiento de Heisenberg si α_n^I , α_0^I y x_0^I , son operadores, cumpliendo además con la propiedad de hermiticidad: $(X^I(\tau, \sigma))^\dagger = X^I(\tau, \sigma)$.

Usando (3.79) y las relaciones de conmutación dadas en (4.28) y (4.29) se deduce la relación de conmutación para los osciladores α :

$$[\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m \eta^{IJ} \delta_{m+n, 0}. \quad (4.31)$$

Notando que α_0^I conmuta con todos los demás osciladores, como se ve en (3.77) es proporcional al momento de la cuerda $\alpha_0^I = \sqrt{2\alpha'} p^I$, cuyo único conmutador no trivial es con x_0^J , dando como resultado:

$$[x_0^I, p^J] = i \eta^{IJ}.$$

Siguiendo el ejemplo de las definiciones de osciladores hechas en (3.77), se introducen ahora para los modos $\mu = I$ las definiciones:

$$\alpha_n^I = a_n^I \sqrt{n} \quad \text{y} \quad \alpha_{-n}^I = a_n^{I\dagger} \sqrt{n}, \quad n \geq 1. \quad (4.32)$$

sin olvidar que los α y a , son operadores. Para escribir las relaciones de conmutación de los modos α , en términos de los osciladores $(a_n^I, a_n^{I\dagger})$, se reescribe (4.31) como:

$$[\alpha_m^I, \alpha_{-n}^J] = m \eta^{IJ} \delta_{m,n},$$

que se consigue con la sustitución $n \rightarrow -n$. Si m y n son enteros con signos opuestos, entonces se anula el valor del conmutador, es decir

$$[a_m^I, a_n^J] = [a_m^{I\dagger}, a_n^{J\dagger}] = 0, \quad (4.33)$$

y si m y n son enteros del mismo signo, entonces

$$[a_m^I, a_n^{J\dagger}] = \delta_{m,n} \eta^{IJ}. \quad (4.34)$$

Las ecuaciones (4.33) y (4.34) muestran que los operadores $(a_m^I, a_m^{I\dagger})$ satisfacen las relaciones de conmutación de los operadores de creación y aniquilación canónicos del oscilador armónico simple. Existe un par de operadores de creación y aniquilación para cada número de modo $m \geq 1$ y para cada dirección transversal I . Los osciladores correspondientes a diferentes números de modo o diferentes coordenadas conmutan. Si el número de modo y las coordenadas son las mismas, entonces

el conmutador es igual a uno. Con $n \geq 1$, los coeficientes a_n^I son operadores de *aniquilación* y los coeficientes $a_n^{I\dagger}$ son operadores de *creación*. La expansión del operador de coordenadas en términos de estos operadores es

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + 2\alpha' p^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^I e^{-in\tau} - a_n^{I\dagger} e^{in\tau} \right) \frac{\cos n\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (4.35)$$

La simetría de invarianza Lorentz de la acción de la cuerda (3.7), permite definir una serie de cargas conservadas, para cuerdas abiertas con $\sigma \in [0, \pi]$ son:

$$M^{\mu\nu} = \int_0^\pi (x^\mu \mathcal{P}^{\tau\nu} - x^\nu \mathcal{P}^{\tau\mu}) d\sigma, \quad (4.36)$$

escritas explícitamente como:

$$M^{\mu\nu} = x_0^\mu p^\nu - x_0^\nu p^\mu - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu). \quad (4.37)$$

Esta es la expresión de los generadores de Lorentz clásicos en términos de los modos de oscilación y son útiles para sugerir la forma de los generadores cuánticos dentro del gauge de cono de luz de la teoría de cuerdas. Si no es posible construir generadores de Lorentz cuánticos, entonces la teoría de cuerdas falla en ser físicamente invariante Lorentz. El generador cuántico más complicado de tratar es M^{-I} , si es consistente, debería generar las transformaciones de Lorentz sobre las coordenadas de la cuerda, posiblemente combinadas con reparametrizaciones de la hoja de mundo.

Teniendo en cuenta la ecuación (4.37), una primera estimación del generador es

$$M^{-I} \stackrel{?}{=} x_0^- p^I - x_0^I p^- - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^- \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I \alpha_n^-), \quad (4.38)$$

este generador debería también ser hermitiano y presentar ordenamiento normal. Como x_0^I y p^- no conmutan, se debe simetrizar el término haciendo

$$M^{-I} \stackrel{?}{=} x_0^- p^I - \frac{1}{2} (x_0^I p^- + p^- x_0^I) - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^- \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I \alpha_n^-),$$

se comprueba que tiene ordenamiento normal, puesto que los osciladores α^- son operadores de Virasoro con ordenamiento normal, ver apéndice B. Recordando las definiciones:

$$\alpha_n^- = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} \frac{1}{p^+} L_n^\perp, \quad p^- = \frac{1}{2\alpha' p^+} (L_0^\perp + a),$$

se escribe ahora el generador en términos de los operadores de Virasoro:

$$\begin{aligned} M^{-I} = & x_0^- p^I - \frac{1}{4\alpha' p^+} \left(x_0^I (L_0^\perp + a) + (L_0^\perp + a) x_0^I \right) \\ & - \frac{i}{\sqrt{2\alpha' p^+}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(L_{-n}^\perp \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I L_n^\perp \right). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Además, debe satisfacer el álgebra de Lorentz, lo que implica que se debe satisfacer la relación de conmutación

$$[M^{-I}, M^{-J}] = 0. \quad (4.40)$$

El cálculo de la relación de conmutación en (4.40) es extenso, y se considera uno de los cálculos más importantes en teoría de cuerdas [27]. El cálculo explícito de este conmutador puede encontrarse en las referencias [28] y [29].

Se muestra ahora el resultado de (4.40):

$$[M^{-I}, M^{-J}] = -\frac{1}{\alpha' p^{+2}} \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{-m}^I \alpha_m^J - \alpha_{-m}^J \alpha_m^I) \times \left\{ m \left[1 - \frac{1}{24}(D-2) \right] + \frac{1}{m} \left[\frac{1}{24}(D-2) + a \right] \right\}. \quad (4.41)$$

El conmutador (4.41) solo se anula cuando

$$m \left[1 - \frac{1}{24}(D-2) \right] + \frac{1}{m} \left[\frac{1}{24}(D-2) + a \right] = 0, \quad \forall m \in \mathbb{Z}^+,$$

con esto se tienen las condiciones

$$1 - \frac{1}{24}(D-2) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{24}(D-2) + a = 0.$$

La primera fija la dimensión del espaciotiempo:

$$D = 26, \quad (4.42)$$

y la segunda establece el valor de la constante de ordenamiento a :

$$a = -1. \quad (4.43)$$

Con este cálculo, se puede ver que la condición de invarianza de Lorentz de la teoría de cuerdas cuánticas, fija la dimensionalidad del espaciotiempo y el corrimiento en las masas de las partículas. Como la dimensión del espaciotiempo solo se ha determinado mediante argumentos de consistencia de la teoría, entonces se puede decir que la teoría de cuerdas predice la dimensión del espaciotiempo. En la teoría de supercuerdas, un cálculo similar fija la dimensión del espaciotiempo al valor $D = 10$.

Por último, se sabe que:

$$2\alpha' p^- \equiv \frac{1}{p^+} (L_0^\perp + a) = \frac{1}{p^+} (L_0^\perp - 1),$$

donde L_0^\perp es el modo cero de los operadores de Virasoro transversales y a , es la constante de ordenamiento. Entonces el hamiltoniano en (4.26) se expresa como

$$H = L_0^\perp - 1. \quad (4.44)$$

Ahora se procede a estudiar el espectro de la teoría. El conjunto de pares canónicos coincide con el de la partícula puntual (x_0^I, p^I) y (x_0^-, p^+) , así que se introducen similarmente los estados fundamentales

$$|p^+, \vec{p}_T\rangle,$$

y son los estados de vacío de todos los osciladores de la teoría de cuerdas. Para crear estados a partir de $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ se debe actuar sobre ellos mediante operadores de creación $a_n^{I\dagger}$, que son infinitos en cantidad y se pueden operar con ellos cuantas veces se desee.

Siendo I el índice de polarización, el estado base general $|\lambda\rangle$, se puede escribir como

$$|\lambda\rangle = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} \left(a_n^{I\dagger} \right)^{\lambda_{n,I}} |p^+, \vec{p}_T\rangle.$$

El entero positivo $\lambda_{n,I}$ denota la cantidad de veces que el operador de creación $a_n^{I\dagger}$ actúa, de esta manera, el estado $|\lambda\rangle$ muestra cuántas veces cada uno de los osciladores actúa sobre el estado fundamental; cantidad dada por $\lambda_{n,I}$, con $n \geq 1$ y $I = 2, \dots, 25$.

Considerando el operador de masa con $a = -1$:

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(-1 + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I \right), \quad (4.45)$$

este operador fue definido en (B.5). Teniendo en cuenta el operador de número N^\perp , definido como:

$$N^\perp \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I,$$

que tiene las propiedades:

$$\left[N^\perp, a_n^{I\dagger} \right] = n a_n^{I\dagger}, \quad \left[N^\perp, a_n^I \right] = -n a_n^I, \quad N^\perp |p^+, \vec{p}_T\rangle = 0.$$

En términos de este nuevo operador, la expresión (4.45) se escribe como

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(-1 + N^\perp \right). \quad (4.46)$$

Es posible mostrar algunos estados particulares de la teoría de cuerdas abiertas. Iniciando con el estado fundamental, es decir, los que tienen $N^\perp = 0$. Así, actuando con (4.46), se obtiene:

$$M^2 |p^+, \vec{p}_T\rangle = \frac{1}{\alpha'} \left(-1 + N^\perp \right) |p^+, \vec{p}_T\rangle = -\frac{1}{\alpha'} |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (4.47)$$

Teniendo en cuenta que $M^2 = -1/\alpha' < 0$, este es un estado con el cuadrado de su masa siendo negativo, correspondiente a un *taquión*.

Ahora, para el primer estado excitado, con $N^\perp = 1$, el operador de masa (4.46) produce el valor $M^2 = 0$, es decir, son estados sin masa. La manera de construir estados con $N^\perp = 1$ consiste en actuar sobre los estados fundamentales $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ con cualquiera de los osciladores transversales $a_1^{I\dagger}$, por lo que se tienen en total $D - 2 = 24$ estados sin masa de la forma:

$$a_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad M^2 a_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle = 0. \quad (4.48)$$

La teoría de cuerdas abiertas contiene *fotones*, específicamente, estados unipartícula del campo de Maxwell. Este hecho se muestra claramente en la correspondencia que existe entre los estados:

$$a_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \longleftrightarrow a_{p^+, \vec{p}_T}^{I\dagger} |\Omega\rangle.$$

Los estados cuánticos de la teoría de Maxwell libre en el gauge de cono de luz aparecen del lado derecho de la correspondencia, y tienen los mismos índices de Lorentz, los mismos momentos y la

misma masa de los que naturalmente aparecen al cuantizar la cuerda abierta. El estado sin masa general es la combinación lineal del estado base en (4.48):

$$\sum_{I=2}^{25} \xi_I a_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle.$$

Los estados con $N^\perp = 2$ se pueden construir actuando sobre los estados fundamentales con $a_1^{I\dagger} a_1^{J\dagger}$ o $a_2^{I\dagger}$:

$$a_1^{I\dagger} a_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad a_2^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle.$$

Estos estados tienen $M^2 = 1/\alpha'$. Con $D = 26$ existen 324 estados posibles. Todos ellos son estados para una sola partícula, considerando que corresponden a excitaciones de un solo estado fundamental (la cuerda), y se conocen como *tensores masivos*. Para describir un conjunto de estados para un número arbitrario de partículas, se necesita estudiar la teoría de campos de cuerdas. Los resultados para todos los estados con $N^\perp \leq 2$ se resumen a continuación:

Cuadro 4.1: Lista de los estados con $N^\perp \leq 2$ para la cuerda abierta [6].

N^\perp	$ \lambda\rangle$	M^2	Número de estados
0	$ p^+, \vec{p}_T\rangle$	$-1/\alpha'$	1
1	$a_1^{I\dagger} p^+, \vec{p}_T\rangle$	0	24
2	$a_1^{I\dagger} a_1^{J\dagger} p^+, \vec{p}_T\rangle, a_2^{I\dagger} p^+, \vec{p}_T\rangle$	$1/\alpha'$	324

4.3. Cuantización de cono de luz de la cuerda relativista cerrada

La solución general de la ecuación de onda para la cuerda cerrada tiene la forma:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X_L^\mu(\tau + \sigma) + X_R^\mu(\tau - \sigma), \quad (4.49)$$

donde X_L^μ es una onda que se mueve hacia valores negativos de σ , y X_R^μ hacia valores positivos. La cuerda cerrada no tiene extremos, por lo que se debe cumplir la condición de periodicidad

$$\sigma \sim \sigma + 2\pi,$$

esta es la identificación o compactificación de la coordenada σ de la hoja de mundo. Se toma dicho valor, porque el intervalo en el que el parámetro recorre tiene longitud 2π : $\sigma \in [0, 2\pi]$. En este caso, $\sigma = 0$ y $\sigma = 2\pi$ representan el mismo punto sobre la cuerda.

Se exige que las X^μ tengan el mismo valor para cualquier par de coordenadas que representen el mismo punto, es decir:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi), \quad (4.50)$$

tal condición debe cumplirse para todo τ y σ . Definiendo ahora las variables:

$$\begin{aligned} u &= \tau + \sigma, \\ v &= \tau - \sigma, \end{aligned}$$

y en términos de estas nuevas variables, la ecuación (4.49) se transforma en

$$X^\mu = X_L^\mu(u) + X_R^\mu(v), \quad (4.51)$$

aplicando a esta ecuación la condición de periodicidad (4.50) se tiene que:

$$X_L^\mu(u + 2\pi) - X_L^\mu(u) = X_R^\mu(v) - X_R^\mu(v - 2\pi). \quad (4.52)$$

Como u y v son variables independientes, no pueden tener el mismo valor, implicando que las correspondientes derivadas respecto de u y v se anulen:

$$X_L^{\mu'}(u + 2\pi) - X_L^{\mu'}(u) = 0, \quad X_R^{\mu'}(v) - X_R^{\mu'}(v - 2\pi) = 0,$$

este resultado implica que las $X_L^{\mu'}(u)$ y $X_R^{\mu'}(v)$ son funciones estrictamente periódicas con periodo 2π . Es posible entonces escribirlas como expresiones periódicas en términos de la suma de osciladores:

$$\begin{aligned} X_L^{\mu'}(u) &= \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-inu}, \\ X_R^{\mu'}(v) &= \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-inv}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Para la teoría de cuerdas cerradas se necesita introducir dos conjuntos de modos distintos: $\bar{\alpha}_n^\mu$ los modos izquierdos, y α_n^μ los modos derechos. Integrando las ecuaciones (4.53):

$$\begin{aligned} X_L^\mu(u) &= \frac{1}{2} x_0^{L\mu} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \bar{\alpha}_0^\mu u + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\bar{\alpha}_n^\mu}{n} e^{-inu}, \\ X_R^\mu(v) &= \frac{1}{2} x_0^{R\mu} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \alpha_0^\mu v + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-inv}, \end{aligned} \quad (4.54)$$

donde las coordenadas de modo cero $x_0^{L\mu}$ y $x_0^{R\mu}$ aparecen como constantes de integración. La condición (4.52) restringe los términos en (4.54) implicando que:

$$\bar{\alpha}_0^\mu = \alpha_0^\mu. \quad (4.55)$$

Con tal condición, la expansión en modos para $X^\mu(\tau, \sigma)$ se escribe reemplazando en (4.51) lo obtenido en (4.54)

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} \left(x_0^{L\mu} + x_0^{R\mu} \right) + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} \left(\alpha_n^\mu e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma} \right). \quad (4.56)$$

La densidad de momento canónico $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ de la cuerda es en este caso:

$$\mathcal{P}^{\tau\mu}(\tau, \sigma) = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2\pi\alpha'} \left(\sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu + \dots \right),$$

de manera que se puede intuir una relación entre el operador α_0^μ y el operador del momento p^μ . Integrando la densidad de momento a lo largo del intervalo $\sigma \in [0, 2\pi]$, los términos que representan los puntos se anulan, y el momento total es

$$p^\mu = \int_0^{2\pi} \mathcal{P}^{\tau\mu}(\tau, \sigma) d\sigma = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \alpha_0^\mu,$$

de donde se obtiene la relación

$$\alpha_0^\mu = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^\mu. \quad (4.57)$$

Entonces, α_0^μ es proporcional al momento espaciotemporal que tiene la cuerda cerrada.

La ecuación (4.56) representa la variable dinámica de la teoría para la cuerda cerrada, y teniendo en cuenta que solo existe una variable de momento, en la teoría cuántica solo existirá un operador de momento correspondiente. Para simplificar la notación, se hace $x_0^{L\mu} = x_0^{R\mu} \equiv x_0^\mu$, y es la coordenada conjugada al operador de momento de la teoría cuántica.

Se continúa ahora con la cuantización de la cuerda cerrada. Las relaciones de conmutación presentan el mismo comportamiento que para la cuerda abierta, para las coordenadas transversales y el momento se tiene

$$[X^I(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')] = i \delta(\sigma - \sigma') \eta^{IJ}, \quad (4.58)$$

y los demás conmutadores son cero. A efectos prácticos, η^{IJ} es equivalente a la delta de Kronecker δ^{IJ} . Para los modos cero también se tiene la relación $[x_0^-, p^+] = -i$. Los operadores $\bar{\alpha}_n^\mu$ y α_n^μ satisfacen las relaciones:

$$\begin{aligned} [\bar{\alpha}_m^I, \bar{\alpha}_n^J] &= m \delta_{m+n,0} \eta^{IJ}, \\ [\alpha_m^I, \alpha_n^J] &= m \delta_{m+n,0} \eta^{IJ}, \\ [\alpha_m^I, \bar{\alpha}_n^J] &= 0. \end{aligned} \quad (4.59)$$

En analogía con la teoría de cuerdas abiertas, se pueden definir los operadores de creación y aniquilación canónicos:

$$\begin{aligned} \alpha_n^I &= a_n^I \sqrt{n} & \text{y} & & \alpha_{-n}^I &= a_n^{I\dagger} \sqrt{n}, & n \geq 1, \\ \bar{\alpha}_n^I &= \bar{a}_n^I \sqrt{n} & \text{y} & & \bar{\alpha}_{-n}^I &= \bar{a}_n^{I\dagger} \sqrt{n}, & n \geq 1, \end{aligned} \quad (4.60)$$

siendo las únicas relaciones de conmutación que no se anulan:

$$[\bar{a}_m^I, \bar{a}_n^{J\dagger}] = \delta_{m,n} \eta^{IJ}, \quad [a_m^I, a_n^{J\dagger}] = \delta_{m,n} \eta^{IJ}. \quad (4.61)$$

El hamiltoniano se construye mediante un argumento similar al propuesto para las cuerdas abiertas. Se sabe que p^- genera traslaciones en X^+ , y para cuerdas cerradas $X^+ = \alpha' p^+ \tau$, esto resulta en $\partial_\tau = \alpha' p^+ \partial_{X^+}$, siendo así el hamiltoniano

$$H = \alpha' p^+ p^-. \quad (4.62)$$

Para encontrar una expresión con ordenamiento normal de este hamiltoniano, es importante revisar los *operadores de Virasoro* de la teoría de cuerdas cerradas. Son dos conjuntos de operadores \bar{L}_n^\perp y L_n^\perp definidos como:

$$\bar{L}_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_p^I \bar{\alpha}_{n-p}^I, \quad L_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I, \quad (4.63)$$

para los osciladores en la dirección $\mu = -$, se pueden conseguir las expresiones:

$$\sqrt{2\alpha'} \bar{\alpha}_n^- = \frac{2}{p^+} \bar{L}_n^\perp, \quad \sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{2}{p^+} L_n^\perp. \quad (4.64)$$

Considerando (4.55), para $n = 0$ debe cumplirse que $\alpha_0^- = \bar{\alpha}_0^-$, de donde se deduce la condición de *level-matching* o condición de emparejamiento de niveles:

$$L_0^\perp = \bar{L}_0^\perp. \quad (4.65)$$

El significado de (4.65) es que para cualquier estado $|\lambda, \bar{\lambda}\rangle$ de la cuerda cerrada debe satisfacerse la igualdad $L_0^\perp |\lambda, \bar{\lambda}\rangle = \bar{L}_0^\perp |\lambda, \bar{\lambda}\rangle$. Esta es una restricción sobre el espacio de estados, solo los estados que satisfacen la igualdad pertenecen a dicho espacio. Para evitar ambigüedades en el ordenamiento de los operadores de Virasoro, se definen de la siguiente manera:

$$\bar{L}_0^\perp = \frac{\alpha'}{4} p^I p^I + \bar{N}^\perp, \quad L_0^\perp = \frac{\alpha'}{4} p^I p^I + N^\perp, \quad (4.66)$$

con \bar{N}^\perp y N^\perp los operadores número asociados respectivamente a los osciladores definidos en (4.60), es decir,

$$\bar{N}^\perp \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n \bar{a}_n^{I\dagger} \bar{a}_n^I, \quad N^\perp \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I. \quad (4.67)$$

Con esto, la condición de level-matching puede escribirse como:

$$N^\perp = \bar{N}^\perp. \quad (4.68)$$

La dimensión crítica de la teoría de cuerdas cerradas se deduce (análogamente a las cuerdas abiertas) exigiendo que la teoría sea invariante de Lorentz, y su valor coincide con la dimensión de la teoría de cuerdas abiertas, esto es, $D = 26$. Esto tiene la implicación de que ambas teorías pueden coexistir, pudiendo por ejemplo, una cuerda abierta cerrarse para formar así una cuerda cerrada [6].

Las constantes de ordenamiento para los operadores L_0^\perp y \bar{L}_0^\perp tienen el mismo valor que la constante para el operador L_0^\perp de las cuerdas abiertas. Tomando $n = 0$ en (4.64),

$$\sqrt{2\alpha'} \bar{\alpha}_0^- = \frac{2}{p^+} (\bar{L}_0^\perp - 1), \quad \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- = \frac{2}{p^+} (L_0^\perp - 1),$$

tomando el promedio de ambas expresiones se encuentra lo siguiente:

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- \equiv \frac{1}{p^+} (L_0^\perp + \bar{L}_0^\perp - 2) = \alpha' p^-, \quad (4.69)$$

donde la relación con el momento proviene de (4.57). Conociendo la expresión de p^- , entonces se puede calcular el operador de masa como:

$$M^2 = -p^2 = 2p^+ p^- - p^I p^I = \frac{2}{\alpha'} (L_0^\perp + \bar{L}_0^\perp - 2) - p^I p^I.$$

Reemplazando los valores de \bar{L}_0^\perp y L_0^\perp dados en (4.66), se consigue la fórmula de la masa para los estados de la cuerda cerrada como:

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'} (N^\perp + \bar{N}^\perp - 2). \quad (4.70)$$

En la ecuación (4.69) se observa la expresión del hamiltoniano en términos de los operadores de Virasoro, dando como resultado:

$$H = \alpha' p^+ p^- = L_0^\perp + \bar{L}_0^\perp - 2, \quad (4.71)$$

reemplazando los valores en (4.66) queda en términos de los operadores número:

$$H = \frac{\alpha'}{2} p^I p^I + N^\perp + \bar{N}^\perp - 2. \quad (4.72)$$

La acción de los operadores de Virasoro sobre las coordenadas de la hoja de mundo es simple, siendo el operador $L_0^\perp + \bar{L}_0^\perp$ generador de traslaciones en τ , y el operador $L_0^\perp - \bar{L}_0^\perp$ generando traslaciones en σ .

Para completar el tratamiento de la teoría de cuerdas cerradas es necesario construir su espacio de estados. Los estados fundamentales son $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ y son aniquilados por los operadores de aniquilación izquierdos \bar{a}_n^I y derechos a_n^I . Un estado general $|\lambda, \bar{\lambda}\rangle$ se construye de la forma:

$$|\lambda, \bar{\lambda}\rangle = \left[\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} \left(a_n^{I\dagger} \right)^{\lambda_{n,I}} \right] \left[\prod_{m=1}^{\infty} \prod_{J=2}^{25} \left(\bar{a}_m^{J\dagger} \right)^{\bar{\lambda}_{m,J}} \right] |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (4.73)$$

haciendo la salvedad de que no todos los estados que aparecen en esta ecuación pertenecen al espacio de estados de la teoría, debido a que los estados verdaderos satisfacen la condición de level-matching. Así, un estado $|\lambda, \bar{\lambda}\rangle$ pertenece al espacio de estados, si y solo si satisface la condición $N^\perp = \bar{N}^\perp$. Los operadores número actúan sobre $|\lambda, \bar{\lambda}\rangle$ con autovalores:

$$N^\perp = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{I=2}^{25} n \lambda_{n,I}, \quad \bar{N}^\perp = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{J=2}^{25} m \bar{\lambda}_{m,J}. \quad (4.74)$$

Los estados de mínima energía, es decir, los estados fundamentales, se construyen con $N^\perp = \bar{N}^\perp = 0$, y corresponden a los estados del campo escalar $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ para una partícula. Para calcular su masa, se actúa con el operador de masa (4.70) sobre dichos estados

$$M^2 |p^+, \vec{p}_T\rangle = \frac{2}{\alpha'} \left(N^\perp + \bar{N}^\perp - 2 \right) |p^+, \vec{p}_T\rangle = -\frac{4}{\alpha'} |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (4.75)$$

Esto significa que $M^2 = -4/\alpha' < 0$, son *taquiones* de cuerdas cerradas y completamente análogos a los de cuerdas abiertas.

Los estados excitados siguientes deben construirse con dos osciladores actuando sobre los estados fundamentales. Además, se requiere un oscilador del sector izquierdo y otro del sector derecho para satisfacer la restricción $N^\perp = \bar{N}^\perp$. Los osciladores tienen $n = 1$ y $m = 1$, respectivamente. Su masa se calcula, con $N^\perp = \bar{N}^\perp = 1$, como:

$$M^2 a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle = 0,$$

estos estados tienen $M^2 = 0$, siendo el número de estados posibles $(D - 2)^2$. El estado general sin masa puede escribirse de la forma

$$\sum_{I,J} R_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (4.76)$$

donde R_{IJ} son elementos arbitrarios de una matriz cuadrada de dimensión $D - 2$. Cualquier matriz cuadrada puede ser descompuesta en una parte simétrica y otra antisimétrica; a su vez, la parte simétrica se puede descomponer en dos partes: una parte simétrica sin traza y la parte que corresponde solo a la traza. De manera que se ha descompuesto R_{IJ} en tres partes independientes:

$$R_{IJ} = \hat{S}_{IJ} + A_{IJ} + S' \delta_{IJ}. \quad (4.77)$$

Así se obtienen tres grupos de estados linealmente independientes:

$$\sum_{I,J} \hat{S}_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (4.78)$$

$$\sum_{I,J} A_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (4.79)$$

$$S' a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (4.80)$$

Los estados del gravitón, en la teoría cuántica del campo gravitacional libre en el cono de luz para una partícula son

$$\sum_{I,J=2}^{D-1} \xi_{IJ} a_{p^+, \vec{p}_T}^{IJ\dagger} |\Omega\rangle,$$

con ξ_{IJ} una matriz simétrica sin traza. Como \hat{S}_{IJ} es también una matriz simétrica sin traza, se pueden identificar con los estados en (4.78), de manera que

$$a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \longleftrightarrow a_{p^+, \vec{p}_T}^{IJ\dagger} |\Omega\rangle.$$

Estos estados tienen los mismos índices de Lorentz, el mismo momento y la misma masa. Siendo esto una clara muestra de que la teoría de cuerdas cerradas presenta estados correspondientes al *gravitón*. Los estados en (4.79) corresponden a estados del *campo de Kalb-Ramond*; es un campo tensorial antisimétrico $B_{\mu\nu}$, en cierto sentido, es la generalización del campo gauge de Maxwell A_μ . El estado en (4.80) no tiene índices libres, representa un único estado y corresponde al estado de un campo escalar sin masa, este campo se conoce como el *dilatón*.

Dentro del nivel sin masa se encontraron los campos gravitacionales, campos de Kalb-Ramond, y campos del dilatón. Cada uno de estos campos es un tema de estudio en sí mismo. En el cuadro 4.2 se presentan los estados construidos en esta sección.

Cuadro 4.2: Lista de los estados con $N^\perp + \bar{N}^\perp \leq 2$ en el espectro de la cuerda cerrada [6].

N^\perp, \bar{N}^\perp	$ \lambda, \bar{\lambda}\rangle$	M^2	Número de estados
0, 0	$ p^+, \vec{p}_T\rangle$	$-4/\alpha'$	1
1, 1	$a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} p^+, \vec{p}_T\rangle$	0	576

4.4. Supercuerdas relativistas

A lo largo de este capítulo se han estudiado las teorías de cuerdas bosónicas; abiertas y cerradas. Estas teorías viven en un espaciotiempo de 26 dimensiones con todos sus estados cuánticos representando partículas bosónicas, entre ellas el fotón y el gravitón. Cabe remarcar que la aparición de estados taquiónicos en el espectro de las cuerdas bosónicas las hace problemáticas, ya que la existencia de tales estados implica una inestabilidad del vacío [30]. Además, si una teoría de cuerdas busca ser realista, entonces debe contener también estados fermiónicos, como los quarks y los leptones. Para obtener estados fermiónicos se necesita introducir las *teorías de supercuerdas*.

Las teorías de supercuerdas, para la inclusión de fermiones, requieren una simetría conocida como *supersimetría*³, asegurando la existencia de la misma cantidad de estados bosónicos y de estados fermiónicos en cualquier nivel de masa. Básicamente, existen dos enfoques para desarrollar las supercuerdas según la clase de supersimetría: el *formalismo de Ramond-Neveu-Schwarz* (RNS), supersimétrico sobre la hoja de mundo, y el *formalismo de Green-Schwarz* (GS) que es supersimétrico sobre el espaciotiempo de Minkowski en diez dimensiones. Ambos enfoques son equivalentes para este espacio. En esta sección se describe la formulación RNS de la teoría de supercuerdas [30].

Para describir la posición de la cuerda bosónica clásica se usaron las coordenadas de la cuerda $X^\mu(\tau, \sigma)$, estas son variables conmutativas a diferencia de las nuevas variables que se deben introducir a la teoría de cuerdas para obtener los estados fermiónicos. Se deben introducir las variables dinámicas de la hoja de mundo $\psi_1^\mu(\tau, \sigma)$ y $\psi_2^\mu(\tau, \sigma)$, que son variables dinámicas anticonmutativas.

Los X^μ y ψ_α^μ ($\alpha = 1, 2$.) son vectores de Lorentz, y entran ambos en la definición de los generadores de Lorentz en el gauge de cono de luz M^{-I} , además, la condición de que el conmutador $[M^{-I}, M^{-J}]$ se anule produce restricciones distintas a las obtenidas para la cuerda bosónica, aunque se utilizan los mismos métodos para su cálculo [31]. En este caso, el número de dimensiones espaciotemporales es diez, o lo que es lo mismo $D = 10$.

En el gauge de cono de luz, solo es necesario analizar los campos transversales ψ_α^I . Para estudiar su cuantización es conveniente tener una acción S_ψ que describa su dinámica:

$$S_\psi = \frac{1}{2\pi} \int d\tau \int_0^\pi d\sigma [\psi_1^I (\partial_\tau + \partial_\sigma) \psi_1^I + \psi_2^I (\partial_\tau - \partial_\sigma) \psi_2^I], \quad (4.81)$$

siendo S_ψ la acción de Dirac para un fermión que vive en el mundo bidimensional (τ, σ) .

Haciendo la variación de los campos ψ_α^I en S_ψ se consiguen las ecuaciones del movimiento y las condiciones de frontera correspondientes. Se tiene entonces que

$$\delta S_\psi = \frac{1}{2\pi} \int d\tau \int_0^\pi d\sigma [\delta\psi_1^I (\partial_\tau + \partial_\sigma) \psi_1^I + \psi_1^I (\partial_\tau + \partial_\sigma) \delta\psi_1^I + \delta\psi_2^I (\partial_\tau - \partial_\sigma) \psi_2^I + \psi_2^I (\partial_\tau - \partial_\sigma) \delta\psi_2^I],$$

integrando por partes y desechando las derivadas totales respecto del tiempo, se tiene

$$\delta S_\psi = \frac{1}{\pi} \int d\tau \int_0^\pi d\sigma [\delta\psi_1^I (\partial_\tau + \partial_\sigma) \psi_1^I + \delta\psi_2^I (\partial_\tau - \partial_\sigma) \psi_2^I] + \frac{1}{2\pi} \int d\tau [\psi_1^I \delta\psi_1^I - \psi_2^I \delta\psi_2^I]_{\sigma=0}^{\sigma=\pi}. \quad (4.82)$$

Es fácil notar que las ecuaciones del movimiento son

$$(\partial_\tau + \partial_\sigma) \psi_1^I = 0, \quad (\partial_\tau - \partial_\sigma) \psi_2^I = 0, \quad (4.83)$$

y las condiciones de frontera están dadas por

$$\psi_1^I(\tau, \sigma_*) \delta\psi_1^I(\tau, \sigma_*) - \psi_2^I(\tau, \sigma_*) \delta\psi_2^I(\tau, \sigma_*) = 0, \quad (4.84)$$

las cuales deben ser satisfechas para todo τ en los puntos $\sigma_* = 0$ y $\sigma_* = \pi$. Las ecuaciones del movimiento (4.83) implican que ψ_1^I se mueve hacia la derecha y ψ_2^I hacia la izquierda, esto es:

$$\begin{aligned} \psi_1^I(\tau, \sigma) &= \Psi_1^I(\tau - \sigma), \\ \psi_2^I(\tau, \sigma) &= \Psi_2^I(\tau + \sigma). \end{aligned}$$

³La supersimetría es la invarianza bajo la acción de un supergrupo, o infinitesimalmente, bajo la acción de una superálgebra de Lie, también denominada álgebra de Lie graduada. Para el espaciotiempo de Minkowski, el grupo de isometrías es el grupo de Poincaré, de manera que su extensión supersimétrica es el grupo de super-Poincaré, con su respectiva álgebra de Lie. Un elemento de esta álgebra es el generador de supersimetría, cuyo hamiltoniano se conoce como supercarga.

Las condiciones de frontera (4.84) demandan que en el punto $\sigma_* = 0$:

$$\psi_1^I(\tau, 0) = \psi_2^I(\tau, 0),$$

y en el otro extremo:

$$\psi_1^I(\tau, \pi) = \pm \psi_2^I(\tau, \pi). \quad (4.85)$$

El espacio de estados completo de la teoría de supercuerdas se divide en dos subespacios, que comúnmente son llamados *sectores*. Primero, el *sector Ramond* (R) que contiene los estados usando el signo positivo en (4.85) y el *sector Neveu-Schwarz* (NS) que contiene los estados que aparecen al usar el signo negativo. Definiendo un campo fermiónico Ψ^I en el intervalo $\sigma \in [-\pi, \pi]$:

$$\Psi^I(\tau, \sigma) \equiv \begin{cases} \psi_1^I(\tau, \sigma) & \sigma \in [0, \pi] \\ \psi_2^I(\tau, -\sigma) & \sigma \in [-\pi, 0], \end{cases} \quad (4.86)$$

siendo $\Psi^I(\tau, \sigma) = \chi^I(\tau - \sigma)$. Así la condición de frontera en (4.85) produce el resultado

$$\Psi^I(\tau, \pi) = \psi_1^I(\tau, \pi) = \pm \psi_2^I(\tau, \pi) = \pm \Psi^I(\tau, -\pi).$$

De manera que un fermión periódico corresponde a las condiciones de frontera de Ramond y un fermión antiperiódico se relaciona con las condiciones de frontera de Neveu-Schwarz.

$$\begin{aligned} \Psi^I(\tau, \pi) &= +\Psi^I(\tau, -\pi) && \text{Condición Ramond.} \\ \Psi^I(\tau, \pi) &= -\Psi^I(\tau, -\pi) && \text{Condición Neveu-Schwarz.} \end{aligned} \quad (4.87)$$

Se procede a analizar con más detalle el sector Neveu-Schwarz. El fermión de Neveu-Schwarz Ψ^I es antiperiódico y puede expandirse en términos de exponenciales con modos fraccionarios de la forma:

$$\Psi^I(\tau, \sigma) \sim \sum_{r \in \mathbb{Z} + 1/2} b_r^I e^{-ir(\tau - \sigma)}, \quad (4.88)$$

Se definen como operadores de creación a los coeficientes para los modos negativos, y los positivos corresponden a operadores de aniquilación. Dichos operadores actúan sobre el vacío de Neveu-Schwarz que se denota como $|\text{NS}\rangle$. Estos operadores satisfacen la relación de anticonmutación

$$\{b_r^I, b_s^J\} = \delta_{r+s,0} \eta^{IJ}.$$

Todo operador de creación b_{-r}^I debe aparecer máximo una sola vez en cualquier estado, dado que anticonmutan entre sí, anulándose en el proceso. Ahora, como las coordenadas $X^I(\tau, \sigma)$ se cuantizan de la forma ya utilizada, se siguen teniendo los operadores de creación α_{-n}^I . De manera que los estados en el sector Neveu-Schwarz son de la forma:

$$|\lambda\rangle = \prod_{I=2}^9 \prod_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^I)^{\lambda_{n,I}} \prod_{J=2}^9 \prod_{r=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots} (b_{-r}^J)^{\rho_{r,J}} |\text{NS}\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (4.89)$$

El operador de masa en el sector NS está dado por

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(\frac{1}{2} \sum_{p \neq 0} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} r b_{-r}^I b_r^I \right). \quad (4.90)$$

Recuérdese que la constante de ordenamiento para las cuerdas bosónicas tiene el valor $a = -1$. Ahora, si a esta se suma la contribución de los fermiones NS, la constante resulta $a = -1/2$, con esto el operador de masa es

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(-\frac{1}{2} + N^\perp \right), \quad N^\perp = \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \sum_{r=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots} r b_{-r}^I b_r^I. \quad (4.91)$$

Con N^\perp , el operador número que cuenta la contribución de los α^I y los b^I . En el cuadro 4.3 se listan los primeros niveles de estados en el sector NS.

Es útil tener un operador que asigne el valor $+1$ a los estados bósónicos y el valor -1 a los estados fermiónicos. Este operador es $(-1)^F$, se conoce a F como el número fermiónico. Se declara el autovalor del operador sobre los estados fundamentales $|\text{NS}\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle$ como -1 , siendo estos estados fundamentales fermiónicos, es decir:

$$(-1)^F |\text{NS}\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle = -|\text{NS}\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle$$

su acción sobre el estado genérico en (4.89) es $(-1)^F |\lambda\rangle = -(-1)^{\sum_{r,J} \rho_{r,J}} |\lambda\rangle$, esto es, anticonmuta con todos los operadores fermiónicos. Todos los estados con N^\perp entero tienen un número par de osciladores fermiónicos, por lo tanto, son estados fermiónicos con $(-1)^F = -1$. Los estados con N^\perp semientero tienen un número impar de osciladores, y por lo tanto $(-1)^F = +1$. Este carácter fermiónico o bósónico por ahora está restringido simplemente a la hoja de mundo (τ, σ) .

Con las condiciones de frontera de Ramond en (4.87) el campo Ψ^I es periódico y puede expandirse mediante osciladores con modos de valor entero:

$$\Psi^I(\tau, \sigma) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^I e^{-in(\tau - \sigma)}. \quad (4.92)$$

Los modos negativos se asumen como operadores de creación y los modos positivos son operadores de aniquilación. Los osciladores satisfacen la relación de anticonmutación:

$$\{d_m^I, d_n^J\} = \delta_{m+n,0} \delta^{IJ},$$

análogamente al sector NS, los operadores de creación en el sector R son todos anticonmutativos y pueden aparecer máximo una sola vez para un estado dado.

Los estados fundamentales en el sector R son más complicados que en NS. En este caso existen dos conjuntos de estados degenerados $|R_a\rangle$ y $|R_{\bar{a}}\rangle$ que actúan sobre el vacío único $|0\rangle$, estando

Cuadro 4.3: Lista de los primeros estados en el sector Neveu-Schwarz

N^\perp	$\alpha' M^2$	Estados posibles
0	-1/2	$ \text{NS}\rangle \otimes p^+, \vec{p}_T\rangle$
1/2	0	$b_{-1/2}^I \text{NS}\rangle \otimes p^+, \vec{p}_T\rangle$
1	1/2	$\left\{ \alpha_{-1}^I, b_{-1/2}^I b_{-1/2}^J \right\} \text{NS}\rangle \otimes p^+, \vec{p}_T\rangle$
3/2	1	$\left\{ \alpha_{-1}^I b_{-1/2}^J, b_{-3/2}^I, b_{-1/2}^I b_{-1/2}^J b_{-1/2}^K \right\} \text{NS}\rangle \otimes p^+, \vec{p}_T\rangle$

el conjunto completo denotado por $|R_A\rangle$ con $A = 1, \dots, 16$. Así, el espacio de estados del sector Ramond contiene los estados de la forma:

$$|\lambda\rangle = \prod_{I=2}^9 \prod_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^I)^{\lambda_{n,I}} \prod_{J=2}^9 \prod_{m=1}^{\infty} (d_{-m}^J)^{\rho_{m,J}} |R_A\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (4.93)$$

El sector R también tiene definido un operador $(-1)^F$, y se impone que el estado $|0\rangle$ sea fermiónico, es decir,

$$(-1)^F |0\rangle = -|0\rangle.$$

Se establece entonces que los ocho estados $|R_a\rangle$ son fermiónicos, y los $|R_{\bar{a}}\rangle$ son bosónicos. El operador de masa está dado por

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n \geq 1} (\alpha_{-n}^I \alpha_n^I + n d_{-n}^I d_n^I). \quad (4.94)$$

Se listan ahora los estados en varios niveles de masa

$$\begin{aligned} \alpha' M^2 = 0 : & & |R_a\rangle & \parallel & |R_{\bar{a}}\rangle \\ \alpha' M^2 = 1 : & & \alpha_{-1}^I |R_a\rangle, d_{-1}^I |R_{\bar{a}}\rangle & \parallel & \alpha_{-1}^I |R_{\bar{a}}\rangle, d_{-1}^I |R_a\rangle, \\ \alpha' M^2 = 2 : & & \{\alpha_{-2}^I, \alpha_{-1}^I \alpha_{-1}^J, d_{-1}^I d_{-1}^J\} |R_a\rangle, & \parallel & \{\alpha_{-2}^I, \alpha_{-1}^I \alpha_{-1}^J, d_{-1}^I d_{-1}^J\} |R_{\bar{a}}\rangle, \\ & & \{\alpha_{-1}^I d_{-1}^J, d_{-2}^I\} |R_{\bar{a}}\rangle & \parallel & \{\alpha_{-1}^I d_{-1}^J, d_{-2}^I\} |R_a\rangle. \end{aligned} \quad (4.95)$$

A la izquierda de las barras se encuentran los estados fermiónicos, y a la derecha los estados bosónicos. Obsérvese que a cada estado del lado izquierdo le corresponde uno del lado derecho. Existe entonces la misma cantidad de estados bosónicos y fermiónicos en cada nivel de masa, siendo una señal de *supersimetría*. Sin embargo, esta simetría es de la hoja de mundo, la supersimetría espaciotemporal aparece después de combinar estados de los sectores de Neveu-Schwarz y Ramond.

Antes de ensamblar una teoría supersimétrica, es importante introducir el concepto de *función generadora*, útil en el contexto del conteo del número de estados que aparecen dentro de un nivel de masa dado. Se introducen ahora las funciones que encapsulan estos números para los sectores NS y R. Como un primer ejemplo, la función generadora f_{os} para la teoría de cuerdas bosónicas abiertas es:

$$f_{os}(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^n)^{24}}.$$

Cuya expansión en serie de potencias tiene los coeficientes:

$$f_{os}(x) = \frac{1}{x} + 24 + 324x + 3200x^2 + 25650x^3 + 176256x^4 + \dots,$$

esta función generadora se ha definido basándose en $\alpha' M^2$. Efectivamente, da cuenta de un estado taquiónico con $\alpha' M^2 = -1$, luego 24 estados sin masa del campo de Maxwell y 324 estados con $\alpha' M^2 = +1$. Estos estados fueron listados en el cuadro 4.1.

En el sector NS, $\alpha' M^2 = N^{\perp} - \frac{1}{2}$, y se tienen ocho coordenadas transversales bosónicas. De esta manera, la función generadora del sector NS es

$$f_{NS}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^{n-\frac{1}{2}}}{1-x^n} \right)^8, \quad (4.96)$$

su expansión a primeros órdenes es

$$f_{\text{NS}}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 8 + 36\sqrt{x} + 128x + 402x\sqrt{x} + 1152x^2 + \dots,$$

muestra que existe un taquión en el nivel $\alpha'M^2 = -1/2$, ocho estados sin masa y 36 estados en $\alpha'M^2 = 1/2$. Estos estados fueron listados en el cuadro 4.3.

Para el sector R, se tiene que $\alpha'M^2 = N^\perp$, y la función generadora corresponde a

$$f_{\text{R}}(x) = 16 \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^n}{1-x^n} \right)^8, \quad (4.97)$$

su expansión en serie de potencias es

$$f_{\text{R}}(x) = 16 + 256x + 2304x^2 + 15360x^3 + \dots.$$

Es un hecho que el sector Ramond presenta supersimetría de la hoja de mundo. Los estados fundamentales de este sector se dividieron en dos conjuntos $|R_a\rangle$ y $|R_{\bar{a}}\rangle$, con ocho estados cada uno y valores opuestos de $(-1)^F$. Los osciladores d_0^I se transforman como vectores bajo Lorentz. Sin embargo, los estados fundamentales no transforman como vectores, sino que ambos transforman como *espinores*, siendo la transformación apropiada para fermiones espaciotemporales. Los índices a y \bar{a} son índices de espinor e indican la existencia de dos clases de fermiones en un espaciotiempo de diez dimensiones.

Se puede hacer un truncamiento del sector R, de manera que solo se escoja el conjunto de estados con $(-1)^F = -1$. Este sector se denota como R $^-$, y contiene estados fermiónicos en el espaciotiempo. Este proceso de truncamiento se conoce como la *proyección GSO*, propuesta por Gliozzi, Scherk y Olive en 1976 [32]. Asimismo, el sector R $^+$ se define como el conjunto de los estados en R para los que $(-1)^F = +1$. Tras el truncamiento, la función generadora para el sector Ramond es

$$f_{\text{R}^-}(x) = 8 \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^n}{1-x^n} \right)^8. \quad (4.98)$$

Considerando ahora los estados en el sector NS, se nota que estos estados no tienen índices de espinor, este sector produce bosones. Se hace el truncamiento de este sector al conjunto de estados con $(-1)^F = +1$, sector que se denota como NS $^+$. Este sector contiene estados sin masa y elimina los estados taquiónicos. Además, el conjunto de niveles de masa en el sector NS $^+$ coincide con los del sector R $^-$. Se puede definir también el sector NS $^-$ que contiene un taquión. La función generadora del sector NS $^+$ es:

$$f_{\text{NS}^+}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left[\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^{n-\frac{1}{2}}}{1-x^n} \right)^8 - \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-x^{n-\frac{1}{2}}}{1-x^n} \right)^8 \right]. \quad (4.99)$$

Así, la *teoría de supercuerdas abiertas* está completamente definida al combinar aditivamente los conjuntos de estados de los sectores R $^-$ y NS $^+$, y se obtiene un espectro supersimétrico. Para observar cómo el número de estados fermiónicos y bosónicos coinciden para todos los niveles de masa, debe cumplirse que $f_{\text{NS}^+}(x) = f_{\text{R}^-}(x)$, de forma explícita:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \left[\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^{n-\frac{1}{2}}}{1-x^n} \right)^8 - \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-x^{n-\frac{1}{2}}}{1-x^n} \right)^8 \right] = 8 \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^n}{1-x^n} \right)^8. \quad (4.100)$$

La identidad (4.100) fue probada por Jacobi en un trabajo publicado en 1829 [33]. Esta es una ecuación esencial de la teoría de cuerdas supersimétrica. La teoría de supercuerdas abiertas construida es la teoría de una única D9-brana estable, debido a que la teoría no presenta estados taquiónicos.

Las *teorías de supercuerdas cerradas* se obtienen al combinar los sectores NS y R en pares de la forma (\cdot, \cdot) , donde la primera entrada es el sector izquierdo y la segunda el sector derecho. Se tienen de esta manera cuatro sectores para cuerdas cerradas:

$$(NS, NS), \quad (NS, R), \quad (R, NS), \quad (R, R).$$

Para obtener una teoría con supersimetría se deben truncar los cuatro sectores. Puesto que el sector NS $-$ contiene un taquiión, no es común construir teorías de supercuerdas cerradas usando este sector. Así, un primer truncamiento corresponde a la teoría de supercuerdas de tipo IIA, obtenida al combinar los sectores de la forma:

$$\text{Tipo IIA: } (NS+, NS+), (NS+, R+), (R-, NS+), (R-, R+). \quad (4.101)$$

La teoría de supercuerdas de tipo IIB aparece cuando los sectores Ramond son iguales, es decir, se tienen las combinaciones

$$\text{Tipo IIB: } (NS+, NS+), (NS+, R-), (R-, NS+), (R-, R-). \quad (4.102)$$

Existen también dos tipos adicionales de teorías de supercuerdas, las conocidas como *supercuerdas heteróticas*. Mientras que las teorías de cuerdas Tipo II se construyen combinando supercuerdas abiertas, en los sectores izquierdo y derecho, las supercuerdas heteróticas combinan una cuerda bosónica abierta izquierda con una supercuerda abierta en el sector derecho. Existen dos versiones de estas cuerdas, las tipo $E_8 \times E_8$ y las tipo $SO(32)$, nombradas según el grupo de simetría característico de cada teoría.

Un último tipo de teoría de supercuerdas es la teoría de Tipo I, una teoría supersimétrica de cuerdas abiertas y cerradas sin orientación, a diferencia de las ya descritas consideradas como teorías de cuerdas cerradas orientadas. La lista completa de las teorías de cuerdas supersimétricas de diez dimensiones es: Tipo IIA, Tipo IIB, $E_8 \times E_8$, $SO(32)$ y Tipo I.

Capítulo 5

Breve introducción a la correspondencia AdS/CFT

Uno de los resultados más impactantes en teoría de cuerdas es quien da nombre a este capítulo. Conocida también como la dualidad gauge/gravedad, correspondencia holográfica, dualidad holográfica o AdS/CFT. La introducción hecha en este capítulo pretende enseñar algunos principios básicos de la geometría del espacio anti-de Sitter, de las teorías cuánticas de campos conformes, incluye una formulación pedagógica de la conjetura de Maldacena y algunas de sus aplicaciones más importantes.

5.1. Espacio anti-de Sitter

Antes de entender exactamente qué es el espacio anti-de Sitter, es necesario describir un poco la teoría de la relatividad general. La relatividad general puede ser vista como la teoría gauge de las transformaciones locales de coordenadas. Esta teoría se fundamenta en el *principio de equivalencia*, el cual establece que la física debe ser independiente de la elección de un sistema de coordenadas; este hecho ya está en la dinámica newtoniana, donde la masa inercial de una partícula es igual a su masa gravitacional.

Otra versión del principio de equivalencia, que es el *principio de equivalencia débil*, puede ilustrarse con un experimento mental debido a Einstein. Suponiendo a un observador dentro de una caja, entonces dicho observador no debería ser capaz de distinguir entre la aceleración gravitacional y la inercial mediante experimentos locales, es decir, si la caja es lo suficientemente pequeña, ningún observador podría distinguir entre estos dos tipos de aceleración. Dicho de otra manera, el principio establece que los efectos de una aceleración y un campo gravitacional uniformes son indistinguibles localmente. Por otra parte, según el *principio de equivalencia fuerte* se concluye que las partículas se mueven a lo largo de las geodésicas de una variedad espaciotemporal \mathcal{M} con curvatura, sin importar la naturaleza de las partículas bajo consideración. En este sentido, la gravedad es equivalente a la curvatura del espaciotiempo [34].

La relatividad general describe el universo como un espaciotiempo clásico \mathcal{M} con $d - 1$ dimensiones espaciales y una dimensión temporal [35]. Matemáticamente, \mathcal{M} es una variedad pseudoriemanniana cuya forma está descrita por la métrica g_{ab} , con signatura de Lorentz $(-, +, \dots, +)$. En un sistema de coordenadas (x^0, \dots, x^{D-1}) , la distancia invariante ds entre dos puntos infinitesi-

malmente cercanos está dada por

$$ds^2 = g_{ab} (x^0, \dots, x^{D-1}) dx^a dx^b,$$

donde se asume el convenio de suma de Einstein. Por ejemplo, para el espaciotiempo plano de la relatividad especial (el espacio de Minkowski en $d = 4$) la métrica tiene la forma:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2, \end{aligned}$$

dada en coordenadas cartesianas y esféricas, respectivamente. Otro ejemplo es el agujero negro de Schwarzschild de masa M , descrito por la métrica

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

El horizonte del agujero negro, $r = 2M$, es una hipersuperficie regular, aunque no puede verse explícitamente en estas coordenadas, existe una singularidad en $r = 0$ [35].

El *espaciotiempo anti-de Sitter* (AdS) es una solución máximamente simétrica de las ecuaciones de Einstein para un universo vacío con constante cosmológica negativa. Matemáticamente se expresa a partir de la ecuación de campo de Einstein:

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R + \Lambda g_{ab} = 8\pi G T_{ab}, \quad (5.1)$$

siendo $R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \equiv G_{ab}$ el tensor de Einstein, g_{ab} la métrica del espaciotiempo, Λ la constante cosmológica y T_{ab} el tensor de energía-momento; asociado a la materia que se puede acoplar al campo gravitatorio. La ecuación de Einstein relaciona entonces la geometría del espaciotiempo con su contenido de materia. Las soluciones de vacío son aquellas donde $T_{ab} = 0$. Así, la ecuación de Einstein se reduce a:

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 0. \quad (5.2)$$

Un subconjunto de estas soluciones de vacío son las soluciones máximamente simétricas, siendo máximamente simétrico el espaciotiempo que admite un número máximo de generadores de simetría. Las soluciones máximamente simétricas considerando los distintos valores de la constante cosmológica son las siguientes [36]:

- $\Lambda = 0 \longrightarrow$ Minkowski.
- $\Lambda > 0 \longrightarrow$ de Sitter.
- $\Lambda < 0 \longrightarrow$ anti-de Sitter.

Particularmente, el espaciotiempo anti-de Sitter tiene curvatura negativa y, cuando tiene dimensión $d + 1$, su métrica puede escribirse como [37]

$$ds^2 = L^2 \left[- (r^2 + 1) dt^2 + \frac{dr^2}{r^2 + 1} + r^2 d\Omega_{d-1}^2 \right]. \quad (5.3)$$

Dentro de las aplicaciones hechas para la correspondencia AdS/CFT, es útil expresar la métrica del espaciotiempo anti-de Sitter en un sistema de coordenadas conocido como el parche de Poincaré:

$$ds^2 = L^2 \frac{-dt^2 + d\vec{x}_{d-1}^2 + dz^2}{z^2}. \quad (5.4)$$

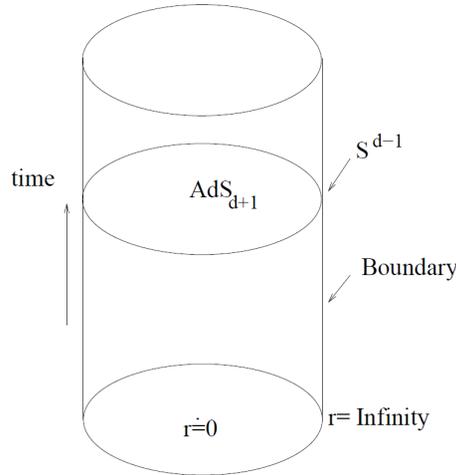


Figura 5.1: Diagrama de Penrose del espacio anti-de Sitter [37].

Las propiedades de la geometría del espacio anti-de Sitter se alejan mucho de la geometría euclidiana. Una representación bidimensional euclidiana usual del espacio AdS es el *disco de Poincaré*, también conocido como geometría de Lobachevsky, con quien comparte gran parte de sus propiedades [38]. El espacio AdS es un claro ejemplo de espacio hiperbólico, esto es, de un espacio con curvatura constante negativa.

Existe una representación del disco de Poincaré hecha por el artista M. C. Escher, *Circle Limit III*, el lector interesado puede apreciar dicha representación artística para ganar cierta intuición; en ella los peces se hacen cada vez más pequeños e infinitos a medida que se acercan a la frontera del disco. Según este punto de vista, el disco es finito, pero aun así los peces se hacen cada vez más pequeños cerca del borde, de manera que se acercan a la frontera siempre sintiéndola infinitamente lejos.

El espaciotiempo anti-de Sitter puede verse como una pila de estos discos de Poincaré, conformando un cilindro sólido, exactamente como en la figura 5.1, y donde la dirección temporal corre a lo largo de su eje. De este modo, existe otra forma de representar el espaciotiempo AdS_{d+1} , se consigue mediante su diagrama de Penrose. Pese a ser el espacio AdS espacialmente infinito en su extensión, puede definirse una frontera sobre el infinito. La frontera contiene la dirección temporal y una esfera S^{d-1} , el diagrama se observa en la figura 5.1.

Teniendo en cuenta la métrica dada en (5.4), entonces la frontera conforme del espacio AdS está en $z = 0$, descrita en las coordenadas de Poincaré. Las geodésicas del espacio AdS presentan comportamientos distintos según sea la masa de la partícula viviendo en dicho espacio. Así, los fotones que viajan desde un punto fijo del espacio AdS, a lo largo de la dirección z hacia la frontera en $z = 0$, retornan desde la frontera al punto de partida en un tiempo finito. Por el contrario, una partícula masiva con energía finita no alcanzará la frontera —alcanzar la frontera del espacio requeriría una energía infinita— pero retorna como si se tratase de un búmeran. El comportamiento de las geodésicas en el espacio AdS se observa en la figura 5.2.

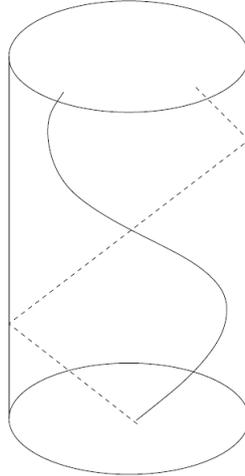


Figura 5.2: Las geodésicas para partículas sin masa (representadas con la línea punteada) alcanzan la frontera en el infinito y retornan en un tiempo finito. Las geodésicas con masa no alcanzan la frontera, puesto que necesitarían una energía infinita para hacerlo. [37].

5.2. Teoría cuántica de campos conforme

Las teorías de campos clásicas sin parámetros dimensionales son invariantes de escala. Un ejemplo sencillo es la teoría del campo escalar con un único término de interacción:

$$S = \int dx^4 \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right),$$

esta acción es invariante bajo el escalamiento simultáneo con un factor específico, de las coordenadas espaciotemporales y el campo, de la forma

$$\phi(x) \rightarrow \lambda^\Delta \phi(\lambda x), \quad (5.5)$$

donde Δ se conoce como la dimensión de escalamiento del campo, en este caso $\Delta = 1$. La misma teoría no es invariante bajo la transformación (5.5) si se agrega un término de masa:

$$S = \int dx^4 \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) - \frac{\lambda}{4!} \phi^4.$$

Otro ejemplo de una teoría de campos clásicamente invariante de escala es la teoría de Yang-Mills acoplada a fermiones sin masa y a escalares. En todas las teorías invariantes de escala en su versión clásica, tal invarianza de escala se ve violada al incluir correcciones cuánticas [39]. Sin embargo, existen ejemplos de teorías cuánticas de campos con invarianza de escala exacta, son las descritas brevemente en esta sección, y tienen la particularidad de ser teorías muy útiles en el contexto de la correspondencia AdS/CFT.

Las teorías cuánticas de campos con simetría conforme (CFT), son teorías donde, además de presentar simetría de Poincaré, también existe la invarianza bajo *dilataciones* de la forma

$$x^\mu = \lambda x^\mu,$$

y *transformaciones especiales conformes*

$$x^\mu = \frac{x^\mu + a^\mu x^2}{1 + 2a_\nu x^\nu + a^2 x^2}.$$

Estas transformaciones tienen como generadores a D , generador de la dilatación, y a K_μ , generador de la transformación especial conforme. Junto con los generadores de Poincaré P_μ , generador de traslaciones, y $J_{\mu\nu}$, generador de las transformaciones de Lorentz, integran el *grupo conforme* $SO(d, 2)$ del espacio de Minkowski de dimensión d [40].

La invarianza bajo transformaciones de escala típicamente implica —bajo condiciones leves— también invarianza bajo el grupo de transformaciones conformes, donde estas reescalan las longitudes pero preservan los ángulos entre vectores. Es posible construir las corrientes asociadas con las transformaciones conformes como

$$J_\mu = T_{\mu\nu} \delta x^\nu,$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento, expresión que puede derivarse a partir del teorema de Noether. La conservación de la corriente correspondiente a las traslaciones requiere de la conservación del tensor de energía-momento, es decir:

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0,$$

y la conservación de la corriente correspondiente a las transformaciones de Lorentz se cumple si $T_{\mu\nu}$ es simétrico. La corriente para la dilatación $J_\mu = T_{\mu\nu} x^\nu$ se conserva si

$$\partial^\mu (T_{\mu\nu} x^\nu) = T_\nu^\nu \equiv 0.$$

Así, la condición para la invarianza de escala consiste en que el tensor de energía-momento sea sin traza. Entonces, se puede notar que en una teoría invariante de Poincaré e invariante de escala —con un tensor de energía-momento conservado simétrico y sin traza— las corrientes conformes se conservan:

$$\partial^\mu (T_{\mu\nu} v^\nu) = \partial^\mu T_{\mu\nu} v^\nu + T_{\mu\nu} \partial^\mu v^\nu = \frac{1}{2} T^{\mu\nu} (\partial_\mu v_\nu + \partial_\nu v_\mu) = \frac{1}{D} \partial^\tau v_\tau T_\mu^\mu \equiv 0.$$

Las condiciones sobre la traza y la propiedad de simetría del tensor de energía-momento se pueden cumplir en la mayoría de las teorías de campos clásicas y cuánticas. Pese a que existan algunos pocos contraejemplos, se puede asumir que las teorías invariantes de escala poseen también la invarianza conforme completa [39].

Específicamente en una teoría cuántica, la invarianza conforme es violada al introducir una *escala de renormalización*. Por ejemplo, en una teoría de Yang-Mills pura, que es invariante de escala a nivel clásico, el acoplamiento gauge viene dado según la escala de energía de la teoría¹, y se introduce además un parámetro dimensional ocasionado por el proceso cuántico llamado transmutación dimensional (DT, por sus siglas en inglés). De manera que el tensor de energía-momento en su versión cuántica pierde la propiedad de ser sin traza, perdiendo también la teoría su simetría de invarianza de escala, y por tanto, la simetría conforme.

Un ejemplo estándar de teoría cuántica de campos con simetría conforme es la teoría $\mathcal{N} = 4$ super-Yang-Mills, teoría que está involucrada en la correspondencia AdS/CFT.

¹En las teorías clásicas de campos, la constante de acoplamiento (denotada comúnmente como g) corresponde a una constante adimensional. Sin embargo, bajo el proceso de cuantización, esta “constante” va a depender de la escala de energía del proceso en consideración, escala conocida como la escala del *grupo de renormalización* (RG, por sus siglas en inglés).

5.3. La correspondencia

En 1997 surgió una conexión fascinante entre dos tipos muy distintos de teorías. En un lado de esta correspondencia están las teorías gauge cuánticas; similares a las que describen las fuerzas fuerte y electrodébil, las cuales rigen la naturaleza en las escalas microscópicas de la física de partículas. Del otro lado de la correspondencia se encuentran las teorías de gravedad, cuya fuerza gobierna la naturaleza en las escalas macroscópicas de la cosmología y los agujeros negros. Por aquel entonces, se descubrió que dentro de la teoría de cuerdas existían objetos cuya descripción viene dada por campos gauge en cierto límite, y por la gravedad en un límite diferente.

El límite en el cual la descripción mediante la gravedad es adecuada corresponde al límite donde la teoría gauge se convierte en fuertemente acoplada. La correspondencia AdS/CFT, o dualidad gauge/gravedad, afirma que estas dos descripciones son equivalentes para todos los valores del acoplamiento gauge, aunque por lo general, un único lado de la correspondencia es manejable. En acoplamiento débil, la teoría gauge está bajo control perturbativo, mientras que los grados de libertad gravitacionales duales se acoplan a la torre completa de las excitaciones de la cuerda y no pueden tratarse clásicamente. Por el contrario, en acoplamiento fuerte, los grados de libertad de la teoría gauge no tienen un tratamiento perturbativo, y se reorganizan en una descripción dual en términos de la gravedad clásica [41].

La correspondencia AdS/CFT explota el hecho de que el grupo de isometrías del espacio anti-de Sitter en $d + 1$ dimensiones es idéntico al grupo conforme en el espacio de Minkowski en d dimensiones. La correspondencia AdS/CFT establece lo siguiente: toda la física en un espacio asintóticamente AdS puede ser descrita por una CFT local que «vive» sobre su frontera [37]. Aunque se dice que la teoría de campos se define sobre la frontera de AdS, realmente, describe toda la física ocurriendo dentro del espacio AdS. Entonces, cuando se piensa en la imagen de AdS, no es correcto considerar simultáneamente una teoría de campos adicional viviendo en la frontera [1].

Una forma más general de exponer la correspondencia es la siguiente:

Cualquier teoría cuántica de campos conforme que vive en $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1}$ es equivalente a una teoría de la gravedad cuántica en un espacio asintóticamente $AdS_{d+1} \times M$, siendo M una variedad compacta [40].

El ejemplo más famoso y estudiado de esta correspondencia fue el propuesto por Juan Maldacena en [42]. Este ejemplo relaciona una teoría de supercuerdas Tipo IIB en el espacio $AdS_5 \times S^5$ con una teoría de super-Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$ $SU(N)$ en $d=4$. Note que la teoría de gravedad cuántica se relaciona con una teoría que vive en un espaciotiempo sin gravedad y en una dimensión menor. Algunos ejemplos [43] de la correspondencia se listan a continuación:

- Supercuerdas Tipo IIB en $AdS_5 \times S^5$ \longleftrightarrow $\mathcal{N} = 4$ super-Yang-Mills $SU(N)$ en $d=4$.
- Supercuerdas Tipo IIB en $AdS_3 \times S^3 \times \mathbb{T}^4$ \longleftrightarrow producto simétrico de CFTs.
- Supercuerdas Tipo IIA en $AdS_4 \times \mathbb{C}P^3$ \longleftrightarrow $\mathcal{N} = 6$ super-Chern-Simons $SU(N) \times SU(M)$ en $d = 3$.

Para el ejemplo dado originalmente por Maldacena, existe una suerte de diccionario entre los parámetros de cada una de las teorías involucradas en la correspondencia. La teoría gauge posee dos parámetros adimensionales g_{YM} y N . Una combinación de ambos da lugar al acoplamiento de 't Hooft: $\lambda \equiv g_{YM}^2 N$. Técnicamente, la teoría gauge tiene ahora dos parámetros adimensionales independientes g_{YM} y λ .

Por otro lado, la teoría de cuerdas en $AdS_5 \times S^5$ tiene un acoplamiento adimensional g_s y dos parámetros dimensionales: la escala de longitud de la cuerda $\ell_s = \sqrt{\alpha'}$ (definida anteriormente en (3.56)), y el radio del espacio AdS representado por L en las ecuaciones (5.3) y (5.4). Así, la teoría de cuerdas tiene dos parámetros adimensionales: g_s y L/ℓ_s .

Los parámetros de la teoría gauge y de la teoría de cuerdas están relacionados de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} g_{YM}^2 &= 2\pi g_s, \\ \lambda &= \frac{1}{2} \frac{L^4}{\alpha'^2}. \end{aligned}$$

De acuerdo con la versión más fuerte de la correspondencia AdS/CFT, se conjetura que la dualidad entre la teoría gauge supersimétrica $SU(N)$, y la de supercuerdas de Tipo IIB se debe mantener para cualquier valor de N y g_s . Esto implicaría que la teoría $\mathcal{N} = 4$ super-Yang-Mills es exactamente equivalente a la teoría de supercuerdas Tipo IIB $AdS_5 \times S^5$. Sin embargo, en la actualidad es imposible comprobar esta forma de la correspondencia, puesto que no existe todavía una formulación cuántica consistente a nivel no perturbativo de la teoría de cuerdas, y particularmente para espaciotiempos curvos [44].

En la forma débil de la correspondencia AdS/CFT, se conjetura que es solamente válida en el límite de Maldacena: $N \rightarrow \infty$ y λ muy grande. Así, en su versión débil relaciona la supergravedad clásica con la teoría $\mathcal{N} = 4$ super-Yang-Mills en acoplamiento fuerte y $N \rightarrow \infty$. De manera que:

$$\left(\begin{array}{c} \lambda \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty \end{array} \right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{c} g_s \rightarrow 0 \\ \alpha' \rightarrow 0 \end{array} \right).$$

Claramente se observa que la correspondencia AdS/CFT provee una dualidad de acoplamiento débil/fuerte. La correspondencia es una dualidad en el sentido usual, es decir, cuando un lado de la correspondencia está débilmente acoplado, entonces la descripción dual del otro lado está fuertemente acoplada.

Una forma de ver una interpretación matemática de la correspondencia se consigue al estudiar las simetrías del espacio AdS. Considerando, por ejemplo, la métrica del espaciotiempo AdS_5 en coordenadas de Poincaré:

$$ds^2 = \left(\frac{r}{L}\right)^2 (-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) + L^2 \frac{dr^2}{r^2},$$

este espaciotiempo tiene simetría $SO(4, 2)$, de gran importancia física. La métrica tiene invarianza de Poincaré $ISO(3, 1)$ en $x^\mu = (t, x, y, z)$, que corresponde a la simetría de Poincaré de la teoría de campos dual en el espaciotiempo de 4 dimensiones. Así, x^μ se interpreta como las coordenadas espaciotemporales de la teoría de campos conforme. Análogamente, para el espaciotiempo AdS_{d+2} , d representa el número de dimensiones espaciales de la teoría gauge.

La métrica del espacio AdS_5 también es invariante bajo las transformaciones de escala

$$x^\mu \rightarrow ax^\mu, \quad r \rightarrow \frac{1}{a}r,$$

bajo este escalamiento, r se transforma como la energía conjugada a t . Esta es una razón del porqué la teoría de campos conforme es cuadrimensional, mientras que la teoría de gravedad tiene cinco dimensiones. La coordenada r tiene una interpretación como la escala de energía de la teoría sin

gravedad. Así, por ejemplo, la teoría $\mathcal{N} = 4$ super-Yang-Mills tiene esta invarianza de escala, mas la invarianza es vista geoméricamente dentro de la teoría de gravedad [45].

El hecho de que la teoría de campos viva en un espacio de dimensión menor está en acuerdo con especulaciones hechas acerca de la gravedad cuántica. Desde el punto de vista histórico, rondaba sobre la década de los noventa una idea no muy bien establecida conocida actualmente como *principio holográfico*. Tal principio fue desarrollado por 't Hooft [46] y Susskind [47], sugiriendo que las teorías de gravedad cuántica deben ser holográficas, es decir, la física en cierta región puede ser descrita sin perder información por una teoría en la frontera. El principio holográfico surge como resultado del estudio de la termodinámica de los agujeros negros.

Stephen Hawking y Jacob Bekenstein demostraron a mediados de los 70 que los agujeros negros se comportan como objetos termodinámicos con temperaturas $T_H = \hbar c^3 / 8\pi kGM$, con M la masa del agujero negro, emitiendo radiación de Hawking, y también tienen una entropía dada por (5.6), donde se considera el área de su horizonte de eventos. Esto implica que eventualmente irradiará su energía, perdiendo masa en el proceso conocido como evaporación de Hawking. Dada la evaporación de Hawking, existe una paradoja en torno a la descripción cuántica de lo ocurrido con la información al caer dentro de un agujero negro, pareciera posible lanzar estados cuánticos puros dentro de un agujero negro y obtener en cambio estados mixtos/térmicos, aparentemente violando la propiedad de unitariedad y resultando en una pérdida de información —esta es la paradoja de pérdida de información en agujeros negros. Hawking creía que este análisis demostraba que la mecánica cuántica es violada por agujeros negros en evaporación. Al asignar una entropía a los agujeros negros, se deduce que deben tener asociados un conjunto de microestados, convirtiéndose así en un reto para las teorías cuánticas de la gravedad obtener tales microestados, compatibles con lo propuesto por Bekenstein [3].

Según el límite de Bekenstein, la máxima entropía dentro de una región del espacio está dada por

$$S_{\text{máx}} = \frac{\text{Área}}{4G_N}, \quad (5.6)$$

donde el área corresponde a la de la frontera de dicha región. Suponiendo un estado con una entropía mayor que $S_{\text{máx}}$, entonces se puede mostrar que tal estado viola la segunda ley de la termodinámica. Este límite para la entropía implica que el número de grados de libertad dentro de alguna región crece como el área de su frontera y no como el volumen de la región dada; en las teorías cuánticas de campos típicas este comportamiento no es posible. Intentar entender este comportamiento conduce al principio holográfico antes mencionado, según el cual, dentro de una teoría cuántica de la gravedad, toda la física dentro de un volumen dado puede ser descrita en términos de una teoría sobre la frontera que tiene menos de un grado de libertad por área de Planck, satisfaciendo el límite de Bekenstein. Como es sabido, en la correspondencia AdS/CFT se está describiendo la física dentro del seno del espacio AdS mediante una teoría de campos con una dimensión menos viviendo sobre la frontera, en este sentido, es una realización del principio holográfico [1].

Actualmente, la correspondencia presenta varias extensiones y generalizaciones. Una de ellas es la exploración de la posibilidad de una correspondencia dS/CFT. La dualidad dS/CFT relaciona una teoría de cuerdas en un espaciotiempo *de Sitter* de dimensión d con una teoría de campos conforme euclidiana sobre una esfera de dimensión $(d - 1)$, tal correspondencia se entiende mucho menos. Sin embargo, una de las motivaciones para dicha correspondencia es la evidencia experimental de una constante cosmológica positiva, es decir $\Lambda > 0$, sugiriendo que el universo se está acercando a una

cosmología de Sitter en el futuro lejano. Esta correspondencia podría ser relevante en el universo muy temprano [30].

Existe mucha evidencia de la validez de la correspondencia AdS/CFT, pese a que aún siga presentando la condición de conjetura. Se puede pensar en el problema de la construcción de una prueba matemáticamente rigurosa de la correspondencia, pero no existe aún para formular tal prueba, otra forma de ofrecer una definición completa de lo que es la teoría de cuerdas. Se ha asumido la conjetura como correcta, considerando que hasta ahora no ha llevado a contradicciones o paradojas. Por ejemplo, en el caso de cuatro dimensiones, las teorías gauge duales se definen sin ambigüedad, por lo tanto, la dualidad puede ser tomada como la definición de la teoría de cuerdas para la clase de configuraciones de fondo donde se aplica. Se puede tener la esperanza de que algún día se encuentre una formulación completamente independiente de la teoría de cuerdas, así sería mejor formulado el objetivo de probar la correspondencia AdS/CFT [30].

5.4. D3-branas y la conjetura de Maldacena

Un escenario en el cual ha sido posible probar la efectividad de la teoría de cuerdas es el de los agujeros negros. Es bien sabido que un agujero negro corresponde a una región del espaciotiempo en donde la gravedad es tan fuerte que incluso la luz no puede escapar de ella. Si la teoría de cuerdas continúa con su propósito de reconciliar la relatividad general con la mecánica cuántica, debería ser capaz de explicar la termodinámica de estos objetos astronómicos.

Pasos se han dado en esta dirección con el desarrollo hecho por Strominger y Vafa [48] en 1996, cuando encontraron que, al suponer los agujeros negros como compuestos por cuerdas, es posible conseguir un resultado para su entropía similar a (5.6). Siendo este el primer cálculo para la entropía de Bekenstein mediante el conteo de sus estados cuánticos, uno de los mayores avances luego del descubrimiento de las D-branas. Aunque la situación considerada para el cálculo es altamente ideal, porque se estudian agujeros negros con un valor grande de carga eléctrica y viviendo en un espaciotiempo de cinco dimensiones; muy diferentes a los que se observan en el universo. A pesar de esto, su entropía es también proporcional al área del horizonte de eventos. Tales agujeros negros son soluciones relativamente sencillas de las ecuaciones de la teoría de cuerdas con cinco de sus diez dimensiones compactificadas [38]. Este cálculo necesita la existencia de D-branas dentro de la teoría, y es relevante ante la paradoja de la pérdida de información [3].

Varios físicos siguieron el camino trazado por Strominger y Vafa, entre ellos Curtis Callan y Juan Maldacena, quienes hicieron un análisis similar para el caso con agujeros negros de Reissner-Nordström no extremales. Esta clase de ideas, combinadas con la noción de utilizar el límite para valores grandes de N D-branas coincidentes con descripciones duales, da origen a la que puede considerarse como la tercera revolución de supercuerdas. En este sentido, puede verse condensada en la correspondencia AdS/CFT gran parte de los desarrollos hechos durante esta revolución, lo que es lo mismo, es una consecuencia del conjunto de conceptos como dualidades y teoría M, agujeros negros y D-branas.

Las D-branas codifican las descripciones duales que la teoría de cuerdas lleva dentro de su formulación matemática, es decir, se cuenta con dos maneras distintas pero equivalentes para describir la misma física. Uno de los ejemplos representativos de esta propiedad se encuentra en la interacción entre dos D-branas. Si se considera, por ejemplo, la situación en que estos objetos intercambian cuerdas entre sí, entonces la fuerza que una D-brana ejerce sobre la otra puede representarse mediante el intercambio de una cuerda cerrada propagándose entre ellas, como se observa al lado

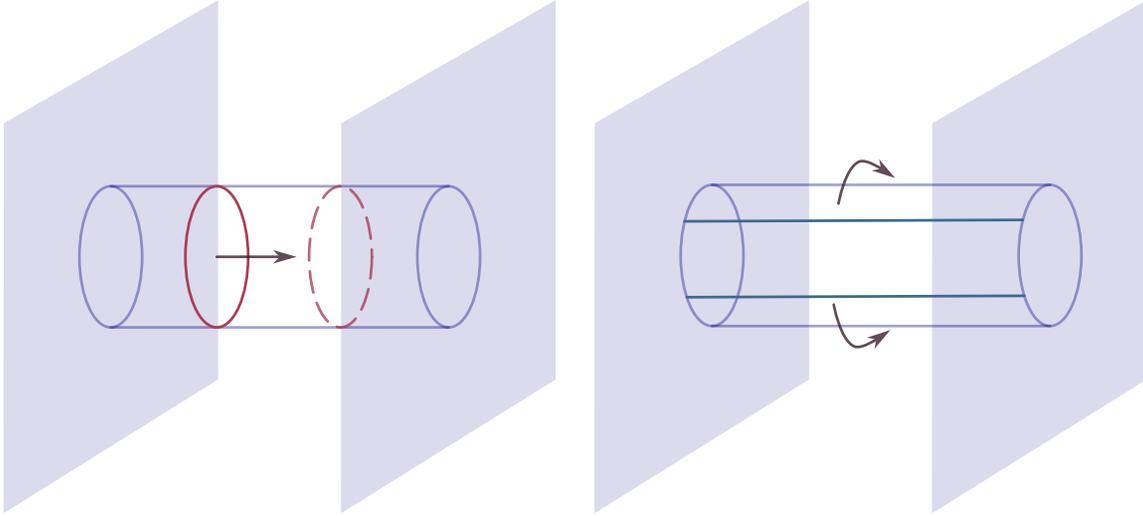


Figura 5.3: Representación esquemática de la dualidad entre cuerdas abiertas y cerradas. Del lado izquierdo se muestra el intercambio de una cuerda cerrada entre dos D-branas, del lado derecho se muestra un proceso equivalente que corresponde al intercambio de cuerdas abiertas [38].

izquierdo de la figura 5.3.

Dada la simetría de dualidad, el mismo proceso de interacción también puede verse como el intercambio de un par de cuerdas abiertas (con sus extremos atados a las D-branas) propagándose alrededor de la región que trazaría la cuerda cerrada, como se observa del lado derecho de la figura 5.3. Ambas descripciones son matemáticamente equivalentes. El primer caso involucra un intercambio de gravitones, mientras que en el segundo no aparecen, teniendo en cuenta la ausencia de estados correspondientes al gravitón en el espectro de cuerdas abiertas. Esto puede dar la sensación de la posibilidad de construir una teoría cuántica de la gravedad sin gravitones, y de esta forma una teoría con gravedad puede ser equivalente a una teoría gauge sin gravedad [38].

En el límite a bajas energías de las teorías de cuerdas se pueden encontrar solitones ² correspondientes a soluciones de agujeros negros. Existe además la posibilidad de construir cierto tipo de agujeros negros como configuraciones de D-branas coincidentes. La dualidad descrita en el párrafo anterior —conocida también como dualidad entre cuerdas abiertas y cerradas o dualidad agujero negro/D-brana— es la base para la correspondencia AdS/CFT.

Considerando un conjunto de D3-branas paralelas, se puede demostrar que para cada par de ellas sus interacciones son nulas, puesto que la atracción gravitatoria es compensada con la repulsión debida a otros campos ante los cuales presentan carga. Esta condición de nulidad en la interacción se garantiza siempre y cuando las D3-branas se mantengan paralelas, tal arreglo permite alejar o acercar las D3-branas de manera arbitraria. En la figura 5.4 se observa un conjunto de D3-branas paralelas con los diferentes tipos de cuerdas posibles. Dentro de las cuerdas abiertas están aquellas con ambos extremos sobre una misma brana, y las que tienen cada extremo atado a una brana

²Los solitones se definen como soluciones localizadas, no singulares e independientes del tiempo, de las ecuaciones del movimiento clásicas con energía finita en una teoría de campos. En un espaciotiempo de dimensión D , dichas soluciones se conocen como p -brana si están localizadas en $D - 1 - p$ coordenadas espaciales e independientes de las restantes p coordenadas, donde $p < D - 1$. Por ejemplo, el caso $p = 0$ (0-brana) tiene característica de partícula puntual y también es llamada agujero negro; con $p = 1$ se tiene una cuerda; el caso $p = 2$ se conoce como membrana [49].

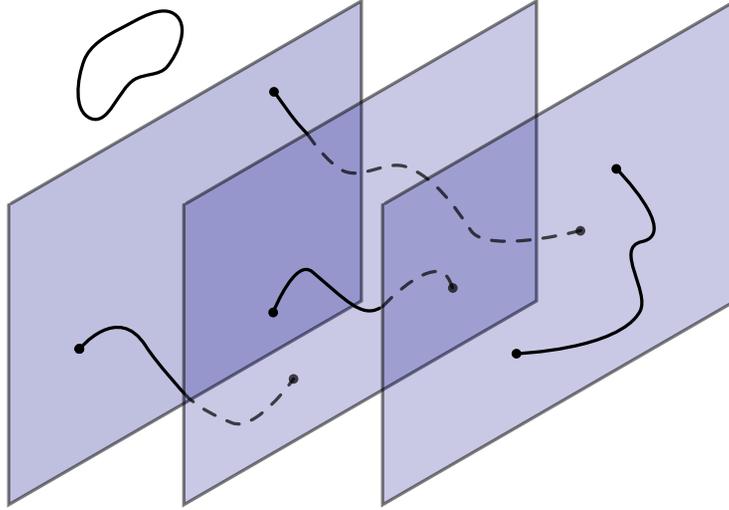


Figura 5.4: Conjunto de D-branas, con una cuerda abierta sobre la misma superficie y las tres restantes estiradas entre dos D-branas paralelas, como se observa en la figura, las cuerdas cerradas pueden propagarse libremente.

distinta. También es posible la existencia de cuerdas cerradas propagándose libremente, con la posibilidad de alejarse de todas las D3-branas a la vez.

En el mínimo nivel de energía, las cuerdas abiertas con extremos sobre dos D3-branas distintas, presentan estados con una masa que es proporcional al estiramiento de la cuerda, esto como consecuencia de su tensión intrínseca (este resultado, pero referido a una cuerda relativista, fue introducido en la sección referenciada como 3.2.1). Así, su masa puede aumentar o disminuir según se alejen o se acerquen las D3-branas. Por otra parte, las cuerdas abiertas con ambos extremos sobre la misma D3-brana dan lugar a partículas sin masa, situación donde pueden contraerse hasta tener tamaño nulo. Finalmente, las cuerdas cerradas viajan libremente, se perciben como un espaciotiempo plano en 10 dimensiones. En principio, las cuerdas abiertas y cerradas interactúan mutuamente [38].

Se supone ahora que el conjunto de N D3-branas se acerca de manera que sean coincidentes, esto es, se encuentren en el mismo lugar del espacio. Esto sugiere que todas las partículas, derivadas de las excitaciones de cuerdas abiertas con extremos en distintas D3-branas, experimentan una pérdida de masa, producto de tal acercamiento. De manera esquemática, la descripción de este sistema está dada por:

$$S = S_{\text{cuerdas abiertas en } N \text{ D3-branas}} + S_{\text{cuerdas cerradas lejanas}} + S_{\text{interacción}}, \quad (5.7)$$

donde la S se refiere a “sistema”. Teniendo en cuenta que las D3-branas son hipersuperficies con masa, y como su tamaño es infinito, entonces el conjunto de D3-branas de este tipo se puede interpretar como un objeto de gran peso deformando el espaciotiempo, comportándose esencialmente como un agujero negro. En la figura 5.5 se representa de forma muy simplificada la situación, donde se observa que el espaciotiempo de diez dimensiones de la teoría —dibujado en líneas de color negro— sufre una marcada hendidura en el lugar donde están superpuestas las N D3-branas —representadas en azul con líneas punteadas— y lejos de este lugar, es plano, dada la débil influencia gravitacional.

Un paso importante dentro de la *conjetura de Maldacena* consiste en considerar solamente el

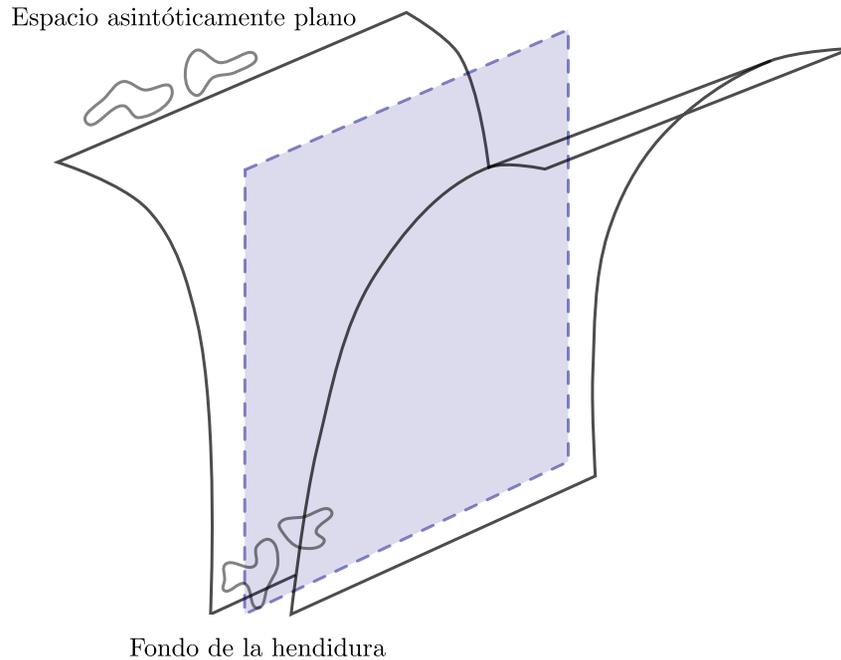


Figura 5.5: El conjunto de D3-branas deforma el espaciotiempo, y la conjetura de Maldacena asume que es intercambiable por el campo gravitacional generado por el conjunto [38].

campo gravitacional generado por el conjunto de D3-branas, es decir, eliminando las D3-branas y dejando en su lugar al campo gravitacional promedio (conocido como una *brana negra*). Dados sus aspectos gravitacionales, este objeto ahora pertenece a una teoría de cuerdas cerradas. Alexander Polyakov se refirió a esta maniobra hábil de cambiar la descripción con D-branas a una descripción gravitacional como sigue: “un poco como sustituir el famoso gato por su sonrisa” [3], probablemente refiriéndose al gato de Cheshire de la obra de Lewis Carroll, *Las aventuras de Alicia en el país de las maravillas*.

Al haber eliminado las D3-branas en la descripción del sistema (5.7), se tiene entonces un sistema de cuerdas cerradas moviéndose bajo la influencia de la geometría del espaciotiempo. La mecánica cuántica impone a las D3-branas una forma de carga repartida a lo largo de toda su extensión tridimensional, generando campos similares al electromagnético. Así, el arreglo de D3-branas tiene carga N , mostrando que a nivel microscópico su descripción viene dada en términos de un número N de D3-branas, cada una de las cuales presenta una unidad de la carga fundamental. Considerando que existen seis direcciones transversales —las D3-branas dejan un rastro cuadrimensional cuando se mueven dentro de un espaciotiempo de diez dimensiones— y como las seis direcciones transversales se pueden representar como el conjunto de todas las posibles esferas de dimensión cinco, entonces quedan así encerradas las N unidades de la “carga eléctrica generalizada” poseídas por las D3-branas. En analogía con el campo electromagnético, se dice que las esferas encierran N unidades de flujo [38].

La nueva configuración (representada en la figura 5.5) tiene solamente cuerdas cerradas viviendo en un espaciotiempo curvo, donde existen cuerdas cerradas en el fondo de la hendidura (con campo gravitatorio fuerte) y otras cuerdas cerradas muy lejos de la misma. En este caso, también es posible la interacción entre ambas, es decir, las cuerdas pueden entrar o salir de la hendidura. Representando esquemáticamente esta situación, se tiene el sistema:

$$S = S_{\text{cuerdas cerradas en hendidura \& } N \text{ flujos}} + S_{\text{cuerdas cerradas lejanas}} + S_{\text{interacción}} . \quad (5.8)$$

Tal sistema es equivalente al representado en (5.7). Pese a que los términos de interacción en (5.7) y (5.8) aparentemente tengan una interpretación distinta, en el caso en que la longitud de la cuerda es arbitrariamente pequeña ambos términos son insignificantes. Maldacena anticipó las profundas consecuencias a las que se llega si se supone adicionalmente que el número de las D3-branas es muy grande. Además, si se considera la longitud de la cuerda como infinitesimal, entonces los sistemas descritos se parecen a las teorías de partículas y campos basadas en objetos puntuales.

Dentro de la descripción de las cuerdas abiertas para el sistema, el primer término en (5.7), hacer infinitesimal el tamaño de las cuerdas lleva a simplificaciones — la teoría de cuerdas produce un resultado preciso para la dinámica de cuerdas abiertas con extremos en las N D3-branas: se trata de la teoría ya nombrada en este capítulo, la teoría super-Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$, prima cercana de la cromodinámica cuántica. Así, la descripción de la dinámica de las D3-branas puede estar dada por el mismo tipo de teorías usadas para describir la física de partículas. Sin embargo, dicha teoría se trata de una extensión supersimétrica de la teoría de Yang-Mills, con la máxima supersimetría posible, hecho bastante alejado de la fenomenología, debido a la falta de evidencia experimental precisa para la supersimetría. A pesar de ser de la misma clase que la cromodinámica cuántica, la teoría es demasiado simétrica como para ser compatible con el universo observable.

Continuando con la descripción de los términos dentro del sistema (5.7), la contribución de las cuerdas cerradas se simplifica a gravitones propagándose libremente en un espaciotiempo plano. También, el término de interacción (en principio el más complejo del sistema) se ve eliminado totalmente.

Se puede resumir el sistema S en (5.7), considerando las suposiciones de que la longitud de la cuerda es infinitamente pequeña y el número de D3-branas es muy grande, de la forma:

$$S = S_{\text{super-Yang-Mills } \mathcal{N}=4} + S_{\text{gravitones libres}} . \quad (5.9)$$

Las cuerdas cerradas se mueven en la geometría mostrada de forma esquemática en la figura, dicho límite hace muy estrecha la hendidura y con una profundidad grande. De tal manera que las pequeñas cuerdas cerradas quedan atrapadas en el fondo, con nula probabilidad de escapar de la hendidura y también es cero la probabilidad de que una cuerda cerrada se adentre en la hendidura. Así, el término de interacción no figura en el sistema 5.9.

El primer término del sistema, referenciado como (5.8), caracteriza el movimiento de las pequeñas cuerdas cerradas en la hendidura. Esta hendidura adopta una geometría específica, conocida como el espacio anti-de Sitter en cinco dimensiones, previamente mencionado; las cinco dimensiones restantes están compactificadas en una esfera, donde las N unidades de carga descritas en esta sección quedan encerradas por aquella 5–esfera. El segundo término corresponde a las pequeñas cuerdas cerradas que viven en una geometría plana, considerando que la curvatura solo se presenta en la región de la hendidura. Así, el sistema resulta:

$$S = S_{\text{gravedad en AdS \& } N \text{ flujos}} + S_{\text{gravitones libres}} , \quad (5.10)$$

donde el primer término corresponde a una teoría de supergravedad obtenida como el límite a bajas energías de la teoría de supercuerdas Tipo IIB. Los sistemas (5.9) y (5.10) son los mismos, son dos descripciones alternas de un mismo conjunto de N D3-branas paralelas. Por lo tanto, se pueden

“igualar” los sistemas (5.9) y (5.10), tras cancelar los términos de gravitones libres, se llega a la igualdad:

$$S_{\text{gravedad en AdS \& N flujos}} = S_{n=4 \text{ SYM}},$$

denotada simbólicamente como:

$$\text{AdS} = \text{CFT}. \quad (5.11)$$

Con esto se ha revisado una forma intuitiva de entender la correspondencia AdS/CFT, de la que se habló en la sección 5.3, específicamente en este caso, para el ejemplo propuesto originalmente por Maldacena.

5.5. Aplicaciones

La característica más útil de la correspondencia es el hecho de que traduce el régimen fuertemente acoplado, o no perturbativo, de una teoría cuántica de campos a una teoría de la gravedad débilmente acoplada. Los cálculos convencionales en teoría cuántica de campos dependen de una expansión perturbativa en términos de una constante de acoplamiento (denotada generalmente por g) suficientemente pequeña. Este enfoque a nivel perturbativo, permite describir las interacciones electrodébiles, la cromodinámica cuántica con libertad asintótica a altas energías y gran parte de los sistemas de la materia condensada, por ejemplo, los conductores fuertemente correlacionados, superconductores estándar tipo BCS, cadenas de espín, etc.

Sin embargo, el enfoque perturbativo falla en el acoplamiento fuerte, y por lo tanto, no es adecuado para dar razón a muchos problemas abiertos en sistemas cuánticos fuertemente interactuantes: la cromodinámica cuántica a escalas de energía bajas o intermedias, el plasma de quarks y gluones, y los metales extraños en sistemas de materia condensada. La correspondencia AdS/CFT simplifica de gran manera dichos cálculos en acoplamiento fuerte. Pero teniendo en cuenta que involucra teorías poco realistas, a lo sumo puede ser útil como un modelo de prueba para los sistemas fuertemente acoplados del mundo real [41]. A continuación, se presentan las descripciones de dos aplicaciones de la correspondencia:

- El *plasma de quarks y gluones* es un nuevo estado de la materia que pudo ser generado experimentalmente en el año 2000, mediante la colisión a muy altas energías de iones pesados —iones de oro en el caso del RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider), operado por el laboratorio nacional de Brookhaven, en Nueva York. Se usan iones de plomo en el experimento Alice que se realiza en las instalaciones del LHC. En estos experimentos se hacen chocar los núcleos de frente, viajando a velocidades muy cercanas a la de la luz. La colisión produce una pequeña región del espacio donde la temperatura resulta casi un millón de veces la temperatura del núcleo de sol, es decir, del orden de 10^{13}K . Así, cada uno de los quarks y gluones presentan una gran cantidad de energía.

La cromodinámica cuántica por medio del fenómeno de *desconfinamiento* predice que los quarks y gluones se comportan como si estuvieran libres de toda interacción, siempre y cuando estén a energías lo suficientemente altas. Para estos experimentos se esperaba observar algo similar a un plasma gaseoso de quarks y gluones, donde luego de la colisión se dispersaran en todas las direcciones, porque si su interacción es muy pequeña, entonces cada partícula saldría despedida en alguna dirección aleatoria e independiente de las demás [38].

Lo que se observa realmente en los experimentos de colisión de iones pesados es algo diferente a lo esperado. El plasma de quarks y gluones se comporta como un líquido fuertemente

interactuante y de muy baja viscosidad. Los físicos de partículas tuvieron grandes dificultades para describir este comportamiento inesperado. Sin embargo, Policastro, Son y Starinets [50] usaron la correspondencia AdS/CFT para explicarlo, aprovechando el hecho de que a altas temperaturas las teorías $\mathcal{N} = 4$ super-Yang-Mills y la cromodinámica cuántica son similares.

El valor que calcularon para la relación entre la viscosidad η y la densidad de entropía s , relación que en unidades de \hbar/k_B , toma el valor $1/4\pi$ en una clase amplia de sistemas holográficos. Este valor es ampliamente diferente al calculado mediante las teorías débilmente acopladas, y está muy cerca del valor experimental observado en el plasma de quarks y gluones [41], considerando que las medidas en el RHIC favorecen un valor pequeño, $\eta/s \leq 0,25$, así el valor de $\eta/s = 1/4\pi \simeq 0,08$ obtenido mediante la dualidad gauge/gravedad está en total acuerdo con dicho acotamiento [51]. El valor tan pequeño para η/s indica que el plasma de quarks y gluones es el fluido más fuertemente acoplado conocido hasta el momento.

Otra característica importante del plasma de quarks y gluones es el fenómeno de *termalización*. Cuando los iones pesados colisionan, se forma un estado de no equilibrio, que luego se relaja a un estado de equilibrio térmico. Existen distintos modelos dentro de la dualidad holográfica para describir este fenómeno. Una posibilidad consiste en considerar ondas de choque colisionantes dentro de la teoría dual gravitacional. Otra posibilidad consiste en estudiar el colapso de una capa de materia y la formación de un agujero negro en el espacio asintóticamente AdS. Este es un área de la investigación bastante amplio. Los resultados obtenidos recientemente implican que para los sistemas fuertemente acoplados el tiempo de relajación es muy corto [51].

- Existe una combinación particular de las áreas de la física: materia condensada, gravedad, teoría de cuerdas y la teoría cuántica de campos. Dicha interfase de áreas tan variadas ha sido posible gracias a la dualidad holográfica, en este caso particular se ha nombrado como la correspondencia AdS/CMT [52] (donde CMT hace referencia a Condensed Matter Theory). AdS/CMT es el estudio de sistemas de materia condensada sin quasipartículas, ofreciendo modelos sin una descripción basada en las quasipartículas, y en las que aun así los cálculos controlados se pueden realizar.

Dentro de la física del estado sólido, los *metales extraños* exhiben una fase metálica de la materia que no está bien descrita por la teoría del líquido de Fermi propuesta por Landau, la cual trata con pequeñas perturbaciones en torno al mar de Fermi. Este modelo es ampliamente exitoso para los metales ordinarios, pero falla en materiales con orden topológico no perturbativo, es decir, en los metales extraños. Los metales extraños exhiben un orden topológico en el sentido de que su estado fundamental tiene un entrelazamiento de largo alcance (correspondiente a una fase topológica de la materia). Así, en lugar de estar descritos por la teoría de líquido de Fermi, tienen una mejor descripción en la versión de la dualidad holográfica con aplicaciones a la materia condensada, la dualidad AdS/CMT.

Apéndice A

Operadores de momento y generadores de Lorentz en el gauge de cono de luz para la partícula puntual

En la teoría cuántica, las cargas conservadas se convierten en operadores que generan mediante su conmutación una versión cuántica de las transformaciones de simetría que las origina clásicamente. Otra manera de cuantizar la partícula puntual es mediante la *cuantización covariante*, donde se tienen los operadores de Heisenberg $x^\mu(\tau)$ y $p^\mu(\tau)$ con relaciones de conmutación:

$$[x^\mu(\tau), p^\nu(\tau)] = i\eta^{\mu\nu}, \quad [x^\mu(\tau), x^\nu(\tau)] = [p^\mu(\tau), p^\nu(\tau)] = 0.$$

En esta cuantización, el operador $p^\mu(\tau)$ genera traslaciones. Considerando que el lagrangiano de la partícula puntual es invariante bajo las traslaciones $\delta x^\mu(\tau) = \epsilon^\mu$, es preciso comprobar que el operador de momento $i\epsilon_\rho p^\rho(\tau)$ genera dicha transformación de simetría.

$$\delta x^\mu(\tau) = [i\epsilon_\rho p^\rho(\tau), x^\mu(\tau)] = i\epsilon_\rho (-i\eta^{\rho\mu}) = \epsilon^\mu.$$

Se puede notar claramente dicho resultado en el marco de la cuantización covariante. En la cuantización de cono de luz desarrollada en el capítulo 4 no es claro si los operadores de momento generan traslaciones. Expandiendo entonces el operador $i\epsilon_\rho p^\rho(\tau)$ en coordenadas de cono de luz:

$$i\epsilon_\rho p^\rho(\tau) = -i\epsilon^- p^+ - i\epsilon^+ p^- + i\epsilon^I p^I.$$

Es bien sabido que los operadores de momento en el cono de luz son p^+ , p^- y p^I , estos operadores conmutan entre sí. Se esperaría que si fueran momentos «honestos» entonces generarían traslaciones [53]. Se procede a comprobar:

$$\delta x^\mu(\tau) = [-i\epsilon^- p^+ - i\epsilon^+ p^- + i\epsilon^I p^I, x^\mu(\tau)].$$

Probando el primer caso con $\epsilon^- \neq 0$:

$$\delta x^\mu(\tau) = -i\epsilon^- [p^+, x^\mu(\tau)],$$

esperando que en este caso se generen las traslaciones $\delta x^+ = 0$, $\delta x^I = 0$ y $\delta x^- = \epsilon^-$:

$$\begin{aligned}\delta x^+ &= -i \epsilon^- \left[p^+, \frac{p^+ \tau}{m^2} \right] = 0, \\ \delta x^I &= -i \epsilon^- \left[p^+, x_0^I + \frac{p^+ \tau}{m^2} \right] = 0, \\ \delta x^- &= -i \epsilon^- \left[p^+, x_0^- + \frac{p^- \tau}{m^2} \right] = -i \epsilon^- (i) = \epsilon^-.\end{aligned}$$

Los conmutadores se calculan directamente obedeciendo las reglas de conmutación en (4.9). Para el primer caso ocurre lo esperado. Ahora se prueba el caso con $\epsilon^+ \neq 0$:

$$\delta x^\mu = -i \epsilon^+ [p^-, x^\mu(\tau)] = -i \epsilon^+ \left[\frac{1}{2p^+} (p^I p^I + m^2), x^\mu(\tau) \right],$$

donde se esperan las traslaciones $\delta x^+ = \epsilon^+$, $\delta x^I = 0$ y $\delta x^- = 0$:

$$\begin{aligned}\delta x^+ &= -i \epsilon^+ \left[\frac{1}{2p^+} (p^I p^I + m^2), \frac{p^+ \tau}{m^2} \right] = 0, \\ \delta x^- &= -i \epsilon^+ \left[\frac{1}{2p^+} (p^I p^I + m^2), x_0^- + \frac{p^- \tau}{m^2} \right] = -\epsilon^+ \frac{p^-}{p^+}, \\ \delta x^I &= -i \epsilon^+ \left[\frac{1}{2p^+} (p^I p^I + m^2), x_0^I + \frac{p^+ \tau}{m^2} \right] = -\epsilon^+ \frac{p^I}{p^+}.\end{aligned}$$

El resultado no coincide con lo esperado, pero una traslación en x^+ implicaría la transformación en la definición del gauge de cono de luz, es decir, $x^+ = p^+ \tau / m^2 + \epsilon^+$. Una traslación como la esperada tendría como consecuencia salirse del gauge con el que la teoría fue cuantizada. Este resultado ocurre debido a que existe otra transformación de simetría que el operador p^- genera, una reparametrización. La invarianza bajo reparametrizaciones implica que la transformación

$$\begin{aligned}x^\mu(\tau) &\longrightarrow x^\mu(\tau + \lambda(\tau)) = x^\mu(\tau) + \lambda(\tau) \partial_\tau x^\mu(\tau), \\ \delta x^\mu(\tau) &= \lambda(\tau) \partial_\tau x^\mu(\tau).\end{aligned}$$

Siendo la anterior una simetría de la partícula puntual. Así, el operador p^- genera una traslación más una reparametrización de la forma:

$$x^+ \rightarrow x^+ + \epsilon^+ + \lambda \partial_\tau x^+.$$

Como la variación de x^+ es cero,

$$0 = \epsilon^+ + \lambda \partial_\tau x^+(\tau) = \epsilon^+ + \lambda \frac{p^+}{m^2} \longrightarrow \lambda = -\frac{m^2}{p^+} \epsilon^+.$$

Así se consigue explicar las transformaciones que p^- genera en x^- y x^I , ya que no hay traslación para estas coordenadas sino simplemente una reparametrización, siendo justo la transformación necesaria para preservar la condición del gauge de cono de luz.

Existen cargas conservadas asociadas a la *invarianza de Lorentz*. Clásicamente, las cargas asociadas a las transformaciones de Lorentz infinitesimales para las coordenadas $x^\mu(\tau)$ se conservan; con las cargas dadas por

$$M^{\mu\nu} = x^\mu(\tau) p^\nu(\tau) - x^\nu(\tau) p^\mu(\tau)$$

Asimismo las cargas cuánticas generan dichas transformaciones. Cualquier *teoría cuántica invariante Lorentz* debe satisfacer el álgebra de Lie del grupo de Lorentz definida por la ecuación:

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i\eta^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - i\eta^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} + i\eta^{\mu\sigma} M^{\rho\nu} - i\eta^{\nu\sigma} M^{\rho\mu}, \quad (\text{A.1})$$

siendo una combinación lineal de cuatro generadores de Lorentz ¹. Dado el caso en que sea imposible construir los operadores $M^{\mu\nu}$ en la teoría cuántica, entonces significa que la teoría no es invariante Lorentz. Este hecho es importante para la cuantización de la cuerda, ya que la ecuación (A.1) impone restricciones adicionales que tienen consecuencias físicas muy relevantes.

Utilizando la ecuación (A.1) se puede encontrar la forma de los conmutadores para las cargas de Lorentz en coordenadas de cono de luz, con los generadores dados por

$$M^{IJ}, \quad M^{+I}, \quad M^{-I}, \quad M^{+-}.$$

Note que el conmutador:

$$[M^{-I}, M^{-J}] = 0,$$

este resultado debe también satisfacerse para asegurar la invarianza Lorentz de la teoría cuántica. El cálculo de dicho conmutador en la teoría de cuerdas cuánticas es bastante extenso y difícil ². Resulta que también es igual a cero con la condición de que la cuerda se propague en un espaciotiempo de dimensión particular y con la aparición de campos gauge en el espectro de la cuerda abierta. En este sentido, la teoría de cuerdas es una teoría restringida que solo es invariante Lorentz para una dimensionalidad fija del espaciotiempo.

¹El lector interesado puede consultar la proposición 1.5 del libro [54] para una prueba del conmutador.

²Un cálculo detallado puede encontrarse en la sección 4.2.1 de las notas de clase [28]. Además, en [29] se encuentra una exposición pedagógica de dicho resultado.

Apéndice B

Operadores de Virasoro en el gauge de cono de luz para la cuerda relativista abierta cuántica

La expansión del operador de las coordenadas transversales (4.35) tiene una conexión explícita con los operadores de creación y aniquilación. En este apartado se revisa lo que ocurre con las direcciones restantes en el cono de luz $X^+(\tau, \sigma)$ y $X^-(\tau, \sigma)$. La expansión para $X^+(\tau, \sigma)$ es simplemente la expresión en (3.85)

$$X^+(\tau, \sigma) = 2\alpha' p^+ \tau = \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^+ \tau.$$

La expansión para X^- fue dada en (3.86):

$$X^-(\tau, \sigma) = x_0^- + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^- e^{-in\tau} \cos n\sigma,$$

donde los modos α_n^- podían reescribirse en términos de los α_n^I :

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{p^+} L_n^\perp, \quad L_n^\perp \equiv \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I. \quad (\text{B.1})$$

Los L_n^\perp se nombran en este caso *operadores de Virasoro transversales*. Existe una ambigüedad en cuanto al orden de los operadores $\alpha_{n-p}^I \alpha_p^I$, el caso con $n = 0$ es problemático:

$$L_0^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I = \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} (\alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \alpha_p^I \alpha_{-p}^I). \quad (\text{B.2})$$

En teoría cuántica de campos, un concepto bien conocido es el de *ordenamiento normal*¹, y no es más que la expresión de algún operador con todos los operadores de creación a la izquierda de los operadores de aniquilación. De tal modo, la primera suma del lado derecho tiene ordenamiento

¹Se puede encontrar una definición concisa de este concepto en la sección 4.2 de [55].

normal, pero la segunda suma no lo tiene y se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p^I \alpha_{-p}^I &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} (\alpha_{-p}^I \alpha_p^I + [\alpha_p^I, \alpha_{-p}^I]) = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} p \eta^{II} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} (D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

El operador L_0^\perp queda escrito como

$$L_0^\perp = \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} (D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p. \quad (\text{B.4})$$

Resulta conveniente definir L_0^\perp como operador con ordenamiento normal sin incluir la *constante de ordenamiento*, es decir:

$$L_0^\perp \equiv \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I = \alpha' p^I p^I + \sum_{p=1}^{\infty} p a_p^{I\dagger} a_p^I,$$

recordando la definición en (B.1) con $n = 0$: $\sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- = 2\alpha' p^- = \frac{1}{p^+} L_0^\perp$, ecuación a la que es introducida dicha constante de ordenamiento a :

$$2\alpha' p^- \equiv \frac{1}{p^+} (L_0^\perp + a).$$

La inclusión de esta constante modifica el cálculo del operador de masa proveniente de la ecuación relativista $M^2 = -p^2$,

$$\begin{aligned} M^2 = -p^2 &= 2p^+ p^- - p^I p^I = \frac{1}{\alpha'} (L_0^\perp + a) - p^I p^I \\ &= \frac{1}{\alpha'} \left(a + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I \right). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Comparando con (3.93), la constante de ordenamiento introduce un desplazamiento en el operador de masa. La constante es ambigua, por ahora:

$$a \stackrel{?}{=} \frac{1}{2} (D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p,$$

el valor de esta constante afecta el valor de las masas de todos los estados de la teoría. Un resultado famoso en matemáticas sugiere darle un valor finito para la sumatoria del lado derecho. Considerando la continuación analítica de la función zeta $\zeta(s)$, se puede obtener el resultado

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12} \stackrel{?}{=} 1 + 2 + 3 + 4 + \dots$$

Así, el valor de a es

$$a = -\frac{1}{24} (D-2), \quad (\text{B.6})$$

Para conservar la consistencia de la teoría debe exigirse $D = 26$, de manera que $a = -1$. Este valor es el necesario para que el espectro de cuerdas abiertas incluya estados de fotones sin masa.

Para finalizar este apéndice, se exponen las relaciones de conmutación de los operadores de Virasoro y se muestra la forma en que actúan sobre las coordenadas de la cuerda. Los operadores de Virasoro cumplen con la propiedad $(L_n^\perp)^\dagger = L_{-n}^\perp$, y satisfacen las relaciones de conmutación

$$\left[L_m^\perp, L_n^\perp \right] = (m - n) L_{m+n}^\perp + \frac{D - 2}{12} (m^3 - m) \delta_{m+n,0}, \quad (\text{B.7})$$

el segundo término del lado derecho se conoce como la extensión central del álgebra de Virasoro, siendo el álgebra quizá más importante en teoría de cuerdas. Ahora, la acción de los operadores de Virasoro sobre las coordenadas de la cuerda genera el mismo cambio que ocurriría como resultado de una reparametrización de la hoja de mundo

$$\left[L_m^\perp, X^I(\tau, \sigma) \right] = \xi_m^\tau \dot{X}^I + \xi_m^\sigma X^{I'}, \quad (\text{B.8})$$

donde

$$\begin{aligned} \xi_m^\tau(\tau, \sigma) &= -ie^{im\tau} \cos m\sigma, \\ \xi_m^\sigma(\tau, \sigma) &= e^{im\tau} \sin m\sigma. \end{aligned}$$

Se comprueba este hecho al ver que la expansión de Taylor para las transformaciones de las coordenadas $\tau \rightarrow \tau + \epsilon \xi_m^\tau(\tau, \sigma)$, $\sigma \rightarrow \sigma + \epsilon \xi_m^\sigma(\tau, \sigma)$, produce:

$$\begin{aligned} X^I(\tau + \epsilon \xi_m^\tau, \sigma + \epsilon \xi_m^\sigma) &= X^I(\tau, \sigma) + \epsilon \left(\xi_m^\tau \dot{X}^I + \xi_m^\sigma X^{I'} \right) \\ &= X^I(\tau, \sigma) + \epsilon \left[L_m^\perp, X^I(\tau, \sigma) \right]. \end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] O. Aharony, S. S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri e Y. Oz, «Large N Field Theories, String Theory and Gravity,» *Physics Reports*, vol. 323, n.º 3–4, págs. 183-386, ene. de 2000, ISSN: 0370-1573. DOI: 10.1016/S0370-1573(99)00083-6. dirección: [http://dx.doi.org/10.1016/S0370-1573\(99\)00083-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0370-1573(99)00083-6).
- [2] D. Tong, *Lectures on String Theory*, 2012. arXiv: 0908.0333 [hep-th].
- [3] D. Rickles, *A Brief History of String Theory, From Dual Models to M-Theory* (The Frontiers Collection), 1.ª ed. Springer Berlin, Heidelberg, 2014, ISBN: 978-3-642-45128-7. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-45128-7>.
- [4] J. Schwarz, *The Early Years of String Theory: A Personal Perspective*, 2009. arXiv: 0708.1917 [hep-th].
- [5] A. Capelli, E. Castellani, F. Colomo y P. D. Vecchia, *The Birth of String Theory*. Cambridge University Press, 2012. DOI: 10.1017/CBO9780511977725.
- [6] B. Zwiebach, *A First Course in String Theory*, 2.ª ed. Cambridge University Press, 2009. DOI: 10.1017/CBO9780511841620.
- [7] R. S. Sufian, T. Liu, G. F. de Téramond et al., *Nonperturbative strange-quark sea from lattice QCD, light-front holography, and meson-baryon fluctuation models*, 2018. arXiv: 1809.04975 [hep-ph].
- [8] L. Susskind, «Harmonic-Oscillator Analogy for the Veneziano Model,» *Phys. Rev. Lett.*, vol. 23, págs. 545-547, 10 sep. de 1969. DOI: 10.1103/PhysRevLett.23.545. dirección: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.23.545>.
- [9] L. Susskind, «Dual-symmetric theory of hadrons.—I,» *Il Nuovo Cimento A (1965-1970)*, vol. 69, págs. 457-496, 3 1970. DOI: 10.1007/BF02726485. dirección: <https://doi.org/10.1007/BF02726485>.
- [10] T. Gotō, «Relativistic Quantum Mechanics of One-Dimensional Mechanical Continuum and Subsidiary Condition of Dual Resonance Model,» *Progress of Theoretical Physics*, vol. 46, n.º 5, págs. 1560-1569, nov. de 1971, ISSN: 0033-068X. DOI: 10.1143/PTP.46.1560. eprint: <https://academic.oup.com/ptp/article-pdf/46/5/1560/5270740/46-5-1560.pdf>. dirección: <https://doi.org/10.1143/PTP.46.1560>.
- [11] P. Goddard, J. Goldstone, C. Rebbi y C. Thorn, «Quantum dynamics of a massless relativistic string,» *Nuclear Physics B*, vol. 56, n.º 1, págs. 109-135, 1973, ISSN: 0550-3213. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(73\)90223-X](https://doi.org/10.1016/0550-3213(73)90223-X). dirección: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032137390223X>.
- [12] Y. Nambu, «From the S-matrix to string theory,» en *The Birth of String Theory*, A. Capelli, E. Castellani, F. Colomo y P. Di Vecchia, eds. Cambridge University Press, 2012, págs. 275-282. DOI: 10.1017/CBO9780511977725.026.
- [13] D. Kubiznak, *PSI 2017/2018 Front End - Theoretical Mechanics - Lecture 1*, en, PIRSA:17080042, <https://pirsa.org>, ago. de 2017. dirección: <https://pirsa.org/17080042>.

- [14] E. Noether, «Invariant variation problems,» *Transport Theory and Statistical Physics*, vol. 1, n.º 3, págs. 186-207, 1971. DOI: 10.1080/00411457108231446. dirección: <https://doi.org/10.1080/00411457108231446>.
- [15] R. Ferraro, *Einstein's Space-Time: An Introduction to Special and General Relativity*, 1.ª ed. Springer New York, NY, 2007. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-69947-9>.
- [16] H. Goldstein, C. Poole y J. Safko, *Classical mechanics*, 3.ª ed. Pearson, 2002.
- [17] M. D. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 2013. DOI: 10.1017/9781139540940.
- [18] A. Güijosa, *Introducción a la Teoría de Cuerdas*, Apuntes de Cursos en la UNAM, 2013. dirección: <https://nucleares.unam.mx/~alberto/apuntes/#poscuerdas>.
- [19] B. Zwiebach, *12/13 PSI - String Theory Review Lecture 4*, en, PIRSA:13010046 ver, <https://pirsa.org>, ene. de 2013. dirección: <https://pirsa.org/13010046>.
- [20] A. Svesko, «A Detailed Introduction to String Theory,» Tesis de grado, Oregon State University, 2013. dirección: https://ir.library.oregonstate.edu/concern/honors_college_theses/rf55z958z.
- [21] B. Zwiebach, *12/13 PSI - String Theory Review Lecture 6*, en, PIRSA:13010052 ver, <https://pirsa.org>, ene. de 2013. dirección: <https://pirsa.org/13010052>.
- [22] S. Nawata, R. Tao y D. Yokoyama, *Fudan lectures on string theory, 2023*. arXiv: 2208.05179 [hep-th].
- [23] B. Zwiebach, *12/13 PSI - String Theory Review Lecture 7*, en, PIRSA:13010053 see, <https://pirsa.org>, ene. de 2013. dirección: <https://pirsa.org/13010053>.
- [24] B. Zwiebach, *12/13 PSI - String Theory Review Lecture 8*, en, PIRSA:13010054 ver, <https://pirsa.org>, ene. de 2013. dirección: <https://pirsa.org/13010054>.
- [25] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, 2nd. Boca Raton: CRC Press, 2003. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781315275826>.
- [26] F. Mandl y G. Shaw, *Quantum Field Theory*. New York: Wiley, 1984.
- [27] B. Zwiebach, *12/13 PSI - String Theory Review Lecture 11*, en, PIRSA:13010061 see, <https://pirsa.org>, ene. de 2013. dirección: <https://pirsa.org/13010061>.
- [28] G. Arutyunov, *Lectures on String Theory*. Utrecht University, 2009, págs. 59-63.
- [29] K. Bering, *A Note on Angular Momentum Commutators in Light-Cone Formulation of Open Bosonic String Theory*, 2012. arXiv: 1104.4446 [hep-th].
- [30] K. Becker, M. Becker y J. H. Schwarz, *String Theory and M-Theory: A Modern Introduction*. Cambridge University Press, 2006. DOI: 10.1017/CBO9780511816086.
- [31] M. B. Green, J. H. Schwarz y E. Witten, *Superstring Theory: 25th Anniversary Edition* (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). Cambridge University Press, 2012, pág. 213.
- [32] F. Gliozzi, J. Scherk y D. Olive, «Supergravity and the spinor dual model,» *Physics Letters B*, vol. 65, n.º 3, págs. 282-286, 1976, ISSN: 0370-2693. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(76\)90183-0](https://doi.org/10.1016/0370-2693(76)90183-0). dirección: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269376901830>.
- [33] C. G. J. Jacobi, *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum* (Cambridge Library Collection - Mathematics). Cambridge University Press, 2012. DOI: 10.1017/CBO9781139344081.
- [34] D. Lust y W. Vleeshouwers, *Black Hole Information and Thermodynamics*, 2018. arXiv: 1809.01403 [gr-qc].
- [35] R. Bousso, «The holographic principle,» *Reviews of Modern Physics*, vol. 74, n.º 3, págs. 825-874, ago. de 2002, ISSN: 1539-0756. dirección: <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.74.825>.
- [36] M. Blau, *Lecture Notes on General Relativity*, 2023. dirección: <http://www.blau.itp.unibe.ch/GRlecturenotes.html>.

- [37] J. Maldacena, *The gauge/gravity duality*, 2014. arXiv: 1106.6073 [hep-th].
- [38] J. Edelstein y G. Giribet, *Cuerdas y supercuerdas* (Un paseo por el cosmos), R. Coleccionables, ed. 2016.
- [39] A. Zaffaroni, «Introduction to the AdS-CFT correspondence,» *Classical and Quantum Gravity*, vol. 17, n.º 17, pág. 3571, sep. de 2000. dirección: <https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/17/17/306>.
- [40] D. Harlow, «TASI Lectures on the Emergence of the Bulk in AdS/CFT,» 2018. arXiv: 1802.01040 [hep-th].
- [41] J. Probst, *Applications of the Gauge/Gravity Duality* (Springer Theses). Springer Cham, 2018. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-93967-4>.
- [42] J. Maldacena, «The Large-N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity,» *International Journal of Theoretical Physics*, vol. 38, n.º 4, págs. 1113-1133, 1999, ISSN: 0020-7748. DOI: 10.1023/a:1026654312961. dirección: <http://dx.doi.org/10.1023/A:1026654312961>.
- [43] G. Giribet. «Introduction to AdS/CFT,» Physics Latam, Math and HEP Seminar. (2023), dirección: https://youtu.be/D_tH0hMS-VE?si=Oju15b-kMwcpnSB.
- [44] J. Erdmenger, *Introduction to Gauge/Gravity Duality (TASI Lectures 2017)*, 2018. arXiv: 1807.09872 [hep-th].
- [45] M. Natsuume, *AdS/CFT Duality User Guide*. Tokyo: Springer Japan, 2015, ISBN: 978-4-431-55441-7. dirección: <https://doi.org/10.1007/978-4-431-55441-7>.
- [46] G. 't Hooft, *Dimensional Reduction in Quantum Gravity*, 1993. arXiv: gr-qc/9310026 [gr-qc].
- [47] L. Susskind, «The world as a hologram,» *Journal of Mathematical Physics*, vol. 36, n.º 11, págs. 6377-6396, nov. de 1995, ISSN: 1089-7658. DOI: 10.1063/1.531249. dirección: <http://dx.doi.org/10.1063/1.531249>.
- [48] A. Strominger y C. Vafa, «Microscopic origin of the Bekenstein-Hawking entropy,» *Physics Letters B*, vol. 379, n.º 1, págs. 99-104, 1996, ISSN: 0370-2693. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(96\)00345-0](https://doi.org/10.1016/0370-2693(96)00345-0). dirección: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269396003450>.
- [49] D. Youm, «Black holes and solitons in string theory,» *Physics Reports*, vol. 316, n.º 1-3, págs. 1-232, ago. de 1999, ISSN: 0370-1573. DOI: 10.1016/S0370-1573(99)00037-X. dirección: [http://dx.doi.org/10.1016/S0370-1573\(99\)00037-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0370-1573(99)00037-X).
- [50] G. Policastro, D. T. Son y A. O. Starinets, «Shear Viscosity of Strongly Coupled N=4 Supersymmetric Yang-Mills Plasma,» *Physical Review Letters*, vol. 87, n.º 8, ago. de 2001, ISSN: 1079-7114. DOI: 10.1103/physrevlett.87.081601. dirección: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.081601>.
- [51] M. Ammon y J. Erdmenger, *Gauge/Gravity Duality: Foundations and Applications*. Cambridge University Press, 2015.
- [52] S. A. Hartnoll, A. Lucas y S. Sachdev, *Holographic quantum matter*, 2018. arXiv: 1612.07324 [hep-th].
- [53] B. Zwiebach, *12/13 PSI - String Theory Review Lecture 9*, en, PIRSA:13010057 ver, <https://pirsa.org>, ene. de 2013. dirección: <https://pirsa.org/13010057>.
- [54] H. J. W. Müller-Kirsten y A. Wiedemann, *Introduction to Supersymmetry*, 2nd. WORLD SCIENTIFIC, 2010. DOI: 10.1142/7594. eprint: <https://worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/7594>. dirección: <https://worldscientific.com/doi/abs/10.1142/7594>.
- [55] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*. Cambridge University Press, 1995, vol. 1. DOI: 10.1017/CBO9781139644167.