

SUPERCONDUCTORES TOPOLÓGICOS E INFORMACIÓN CÚANTICA



Daniel Alejandro Rodríguez Díaz

Trabajo de Grado en la modalidad de profundización

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
FACULTAD DE CIENCIA NATURALES Y EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
MATERIA CONDENSADA

Popayán 2023

SUPERCONDUCTORES TOPOLÓGICOS E INFORMACIÓN
CÚANTICA

Daniel Alejandro Rodríguez Díaz

FACULTAD DE CIENCIA NATURALES Y
EDUCACIÓN

Trabajo de Grado para optar al título de Ingeniería Física

Director(a):

Ph.D Servio Tulio Perez Merchancano

Popayán Enero 2023

Nota de aceptación

Jurado: Ph.D. Luz Elena Bolivar Marinez

Jurado: Ph.D. Adriana Isabel Figueroa

Director: Ph.D. Servio tulio Pérez Merchancano

Popayán, 23 de Febrero de 2023

Índice de cuadros

1.1. Clasificación de Aislantes y Superconductores topológicos en función de Las simetrías e invariantes topológicos.	28
3.1. <i>Propiedades experimentales de algunos materiales utilizados en la fabricación de nanohilos de Majorana en la búsqueda de MF.[100]</i> . . .	61

CONTENIDO

Agradecimientos	I
Resumen	III
Introducción	VII
1. Superconductores Topológicos	1
1.1. Ecuación Klein-Gordon	2
1.2. Ecuación de Dirac	3
1.3. Soluciones ecuación de Dirac	4
1.4. Fermiones de Majorana	6
1.4.1. Punto de vista de la física de partículas	7
1.4.2. Punto de Vista de la materia condensada	8
1.4.3. Fermiones de Majorana como partículas emergentes en sistemas de sólidos superconductores.	9
1.5. Modelo Ideal	10
1.5.1. Superconductor de onda p (1D) sin espín: Modelo de Kitaev	10
1.6. Enfoque Bogoliubov-Gennes	13
1.6.1. Formalismo Bogoliubov-de-Gennes(BdG) para superconductores	18
1.6.2. Simetrías e Invariantes topológicos	21
1.6.3. Fases topológicas protegidas por simetrías	24
2. Superconductores Topológicos 2D	31
2.1. Soluciones Jackiw-Rebbi	31
2.2. Superconductor 2-D sin Espín.	34
2.2.1. Ecuaciones BdG de superconductores p+ip	37
2.2.2. MZMs radiales en vórtices de un superconductor p+ip	40
2.2.3. Efectos de la vorticidad en la presencia de MZ	41
2.2.4. Resolución de la ecuación diferencial	42
2.2.5. Espectro de energía	43
2.2.6. Puntos críticos e identificación de fases	47

3. Superconductores con Espín	51
3.1. Superconductores con Simetría TR	51
3.2. Nanohilos de Majorana	54
3.2.1. Aproximación experimental del modelo de Kitaev	57
3.3. Señales experimentales de MZM	73
3.3.1. Reflexión de Andreev Anomala	74
3.3.2. Efecto 4π de Josephson	78
3.3.3. Resultados Experimentales	82
4. Computación cuántica topológica	93
4.1. Q-bits y su manipulación	94
4.1.1. Compuertas cuánticas y proyecciones	96
4.1.2. Computación cuántica adiabática	98
4.2. Fase Geométrica y Fase de Berry	100
4.2.1. Fase de Berry	100
4.2.2. Curvatura de Berry	102
4.2.3. Fase adiabática No Abeliána	102
4.3. Computación con Anyones	104
4.3.1. Braiding, tipos de partícula, reglas de fusión y propiedades de intercambio	107
4.3.2. Computación topológica con MZM	112
4.3.3. Desafíos de La computación topológica con MZM y el porvenir.	119
Conclusiones	123
I ANEXOS	125
A. Notación Tensorial	127
B. Modelo de Tight Binding	131
C. Cadena de Kitaev abierta	139
D. Teoría de Ginzburg-Landau	143
E. Identidades Hexagonal y Pentagonal	145

Índice de figuras

1.1.	Representación de los estados de energía del mar de Dirac[64]	5
1.2.	<i>(a) La pareja electrón-hueco (excitón) actúa como un bosón (b) Un hueco-par de cooper en un superconductor actúa como un fermión (En carga son equivalentes a un electrón y puede ser un fermión de Majorana). [71]</i>	9
1.3.	<i>Las dos fases presentes en el modelo de una cadena unidimensional de Kitaev. (a) La fase trivial (b) la fase topológica (TSC). (c) el diagrama de fases del modelo d Kitaev. [69]</i>	11
1.4.	<i>Diagrama de Fase de la cadena de Kitaev en función del termino de acoplamiento superconductor Δ</i>	13
1.5.	<i>relación de dispersión de un superconductor de onda S, 1-D. Para valores de $\mu = 0,5t$</i>	16
1.6.	arriba: <i>Fermion de Majorana, abajo:</i> <i>MZMs en los limites de una cadena de Kitaev aplicando condiciones de borde a (1.54-1.57) y se toma una cadena de 16 átomos(Ver Anexo C)</i>	17
1.7.	<i>Gráfico de la relación de dispersión de un superconductor de onda P, 1-D. Para valores de $\mu = -2t, -1,5t - 0,5t, 0, 0,5t, 1,5t$ y $2t$</i>	19
1.8.	<i>Gráfico de la relación de dispersión de un superconductor de onda P, 1-D. Para valores de $\mu = 0,5t$ []</i>	20
1.9.	<i>Diagrama de fases de la cadena de Kitaev en función de $\Delta' = \Delta p$</i>	21
1.10.	<i>Diagrama de fases de un superconductor de onda P, 1-D en el plano $\mu - t$</i>	24
1.11.	<i>Gráfico de la relación de dispersión de un superconductor de onda P, 1-D. Para valores de $\mu = [-2t, 2t]$</i>	25
1.12.	<i>Gráfico de la relación de dispersión de un superconductor de onda P, 1-D. Para valores de $\mu = [0, 2t]$</i>	26
2.1.	<i>Representación grafica de un dominio de pared, para un sistema de Dirac unidimensional, en este caso $m(x)$ hace las veces de un valor variable de μ en modelo de la cadena de Kitaev</i>	33

2.2.	<i>Representación gráfica en el espacio de momentum sobre una superficie esférica de las fases topológicas (a) Curva azul fase trivial (b) Curva negra fase topológica. [96]</i>	36
2.3.	<i>MZMs y perfil del vortice en un superconductor bidimensional sin espín.</i>	43
2.4.	<i>Bandas de energía Y MZM en dominios de pared, para 2μ</i>	45
2.5.	<i>Bandas de energía Y MZM en dominios de pared, para 3μ</i>	45
2.6.	<i>Bandas de energía Y MZM en dominios de pared, para 4μ</i>	46
2.7.	<i>MZM en los bordes en una geometría cilíndrica de la red bidimensional, para 2μ y $2,5\mu$</i>	48
2.8.	<i>(a) Espectro de energía de un superconductor quirral en coordenadas cilíndricas a lo largo del eje y, y límites de bordes en el eje x, (b) comparación entre los estados de borde de un superconductor quirral y un superconductor helical (c) Efecto de un vórtice y su paridad en la presencia de estados MZM.[99]</i>	49
2.9.	<i>Modelo de una red bidimensional en la geometría de Laughlin(Periodica en una dirección y Abierta en la otra)</i>	49
3.1.	<i>Izquierda, Los electrones sobre la superficie de fermi tienen el espín totalmente polarizado en función de un campo magnético. Derecha, Los electrones están polarizados en presencia de un campo magnético y acoplamiento espín orbita.[77].</i>	57
3.2.	<i>Espectro de energía de 2 cadenas de Kitaev A_{\uparrow} y B_{\uparrow}, en presencia de un campo magnético que varía entre 0 y 0.5</i>	58
3.3.	<i>Esquema experimental de una heteroestructura Superconductor de onda $S(Nb$ o Al)-Nanohilo semiconductor($InAs$ o $InSb$).Figuras tomadas de [100][101]</i>	60
3.4.	<i>Efecto Zeeman asociado al Espín en el espectro de energía, evidenciado por un campo magnético B que varía entre 0 y 0.2. Arriba, la parábola magenta corresponde al espín \uparrow, y la parábola roja al espín \downarrow.[100]</i>	62
3.5.	<i>Efecto del acoplamiento Rashba de espín-orbita en el espectro de energía (Degeneración de Kramer). Se toma $\mu = 0$, $u = 0,5$ y $\bar{B} = \Delta = 0$ en la ecuación (3.17).[102]</i>	64
3.6.	<i>Levantamiento de la degeneración de Kramer de la Heteroestructura (Ruptura de inversión TR). Se toma $\mu = 0$, $u = 0,5$, $\bar{B} = 0,2$ y $\Delta = 0$ en la ecuación (3.17).[102]</i>	65
3.7.	<i>Arriba, Efecto del acoplamiento Rashba de espín-orbita en el espectro de energía (Degeneración de Kramer). Abajo, Espectro de energía en el límite de aislante topológico, se toma $u = 0, 0,1$ y $0,3$.[101]</i>	66
3.8.	<i>Arriba, Efecto del acoplamiento Rashba de espín-orbita en el espectro de energía (Degeneración de Kramer). Abajo, Espectro de energía en el límite de aislante topológico, se toma $u = 0, 0,1$ y $0,3$.[101]</i>	66

3.9. *Arriba, Espectro de energía de un nanohilo con acoplamiento finito y campo de zeeman igual a cero, se grafica únicamente los valores propios de energía asociados a los electrones (Degeneración de Kramer). Abajo, Espectro de energía del nanohilo de majorana en la presencia de un campo de Zeeman \bar{B} , y acoplamiento de Rashba variable, en el límite de aislante topológico al tomar $u = 0, 0,1$ y $0,3$. [101]* 67

3.10. *Espectro de energía y espín electrones del nanohilo semiconductor: **Arriba Izquierda**, Sin acoplamiento SO y campo \mathbf{B} finito; **Arriba Derecha**, Acoplamiento SO finito y sin campo magnético; **Abajo Izquierda**, El acoplamiento SO domina la apertura del gap de energía, los electrones presentan espín opuesto; **Abajo derecha**, El campo de zeeman \bar{B} domina el mecanismo de apertura del Gap, el espín está polarizado con el campo.* 69

3.11. ***Arriba**, Espectro de energía de un nanohilo en diferentes regimenes. **Abajo**, Espectro de energía del nanohilo de majorana en la presencia de un campo de Zeeman \bar{B} variable, y acoplamiento de Rashba $u = 0,6$. [100]* 71

3.12. *Comparación del espectro de energía de la cadena de Kitaev, y un nanohilo de Majorana: **Arriba**, un superconductor de onda p ; **Abajo**, Nanohilo de majorana en el régimen de un acoplamiento de espín orbita finito y campo de Zeeman variable. [100]* 72

3.13. *(a) Metal convencional (N) acoplado a un superconductor topológico (TSC) con MZMs en los bordes (b) Diferencial de la conductancia a temperatura $T = 0$ (c) Diferencial de la conductancia a una temperatura finita. [99]* 75

3.14. *Cuantización de la conductancia en un nanohilo de Majorana. (a) Experimento típico de conductancia donde el nanohilo se encuentra próximo a un metal a través de una barrera de tunelamiento bajo un voltaje finito V_{bias} . (b) Reflexión de andreev como un problema de transmisión a través de una barrera doble donde se presentan: S_{ee} (Reflexión normal), S_{eh} (Reflexión de Andreev). (c) La reflexión de Andreev presenta un pico de resonancia asociado a un MZ ($E = 0$) y temperatura cero, para un voltaje de referencia $eV = 0$, el quantum de conductancia en este caso es $G_0 = 2e^2/\hbar$. [100]* 76

3.15. *(a) Reflexión de andreev como un problema de transmisión a través de una barrera (b) Pico de resonancia cuantizado, el cual puede servir como prueba de un MZ aislado. [102]* 77

- 3.16. (a) Los fermiones de majorana internos γ_1 y γ_2 ubicados a los bordes de las regiones topológicas median una componente adicional a la corriente convencional de Josepshon de periodo 4π en función de φ , entre ambos TSC se encuentra una región aislante (Una barrera). (b) En la región intermedia entre los TSC es reemplazado por un superconductor o semiconductor (3.3), la corriente de Josepshon de periodo 4π puede aislarse mediante mediciones de los denominados escalones de Shapiro. (c) Superficialmente es igual a (a) y (b) pero la corriente presenta un periodo de 2π en φ [40] 78
- 3.17. Energía como función de la diferencias de fases susperconductoras a traves de una unión de Josepshon. Las areas grises corresponden a los niveles excitados de altas energías. Izquierda, Superconductor Topológico. Derecha, Superconductor topológico en el subespacio de bajas energía, los cruces para $\varphi = \pi, 3\pi$ estan protegido por la conservación de la paridad de los fermiones.[99] 80
- 3.18. Efecto de Josepshon fraccional en un Nanohilo de Majorana (a) Unión de Josepshon realizado por la aproximazióm dos superconductores, modelados como dos segmentos 1-D acoplados mediante una barrera de tunelamiento, y diferente fases superconductora ϕ_R y ϕ_L . (b) Un superconductor 1-D en una geometria de anillo con una unica union de Josepshon que encierra un campo magnetico Φ .(c) Niveles de Energía asociados a a unión de Josepshon como función de la fase $\varphi \equiv \phi$. (d) Corriente superconductor-Corriente de Josepshon en función de $\varphi \equiv \phi$. [101] 81
- 3.19. (a) Conductancia dI/dV esperada como función del voltaje V_{bias} para un montaje experimental de STM el nanohilo de majorana es de $InAs$, $\Delta = 0,5 meV$; Nb , $\mu = 0$, $\alpha = 0,1eV - \text{Å}$ y $T = 100mK$. (b) Dependencia de la posición de la conductancia para un voltaje V_{bias} ubicada cerca del limite del nanohilo.[105] 85
- 3.20. (a) Geometria Tipica de un dispositivo sujetoa la detección de MZM de borde via espectroscopia de efecto tunel (b) En la presencia de una doble barrera como en la fig.3.14, los electrones pueden pasar a traves de efectotunel mediante diferentes trayectorias, por otro lado en el caso que los coeficientes a ambos lados de las barreras son iguales t_R y t_L , dicho tunelamiento presenta una unidad de probabilidad asociada todos los caminos posibles. (c) Y (D) Evento de tunelamiento en presencia de un MF, en este caso la punta del microscopio de efecto tunel actua como en la fig. 3.15[106][107] 86

3.21. (a) Superconductor acoplado con un nanohilo de InSb para probar MZM (b) Pico de resonancia en V_{bias} cuando el campo de Zeeman es grande, que indica la existencia de MZM [35]. Por lo general en la configuración de un microscopio de efecto tunel (STM). La corriente de tunelamiento I que es equivalente a la debida por transferencia de carga en la interfaz N-TSC se mide a lo largo del hilo para todas las coordenadas en x y y manteniendo un V_{bias} constante, sin embargo en el caso de ser usado para la espectroscopia de efecto tunel la punta permanece en un unico lugar y variando el valor del voltaje V_{bias} se miden los valores de la corriente y mediante una diferenciación numérica se obtiene la grafica de la Izquierda.[35][106] . . . 86

3.22. (a) Atomos de Hierro sobre un film superconductor (b) Densidad local de los estados mediante un STM, Se observa una densidad de estados localizada en el borde del hilo a Energía cero, medidas tomadas por microscopia de efecto tunel de escaneo (STM)[103] 87

3.23. **Izquierda:** Conductancia $G = dI/dV$ en un nanohilo de majorana como función de un campo de Zeeman V_Z relativo al gap superconductor Δ , se observa un cierre del gap de energía para un valor critico $V_{Zc}^2 = \Delta^2 + \mu^2$. **Centro** La conductancia no local entre el final del semiconductor/superconductor presenta un cierre del gap superconductor **Derecha:** La conductancia en el punto critico cerano a un voltaje de cero presenta una dependencia lineal de V_{bias} [77]. 87

3.24. **Izquierda:** Esquema experimental para evidenciar el Efecto de Josephson AC. **Derecha:** La conductancia teorica para la configuración del circuito (a) permite predecir lo antes mencionados escalones de Shapiro [108]. . . . 89

3.25. (a): Una unión de Josephson construida sobre un pozo cuantico de HgTe. (b): Patrón de interferencia de la conductancia. (c): Densidad de la supercorriente en el espacio real, obtenido mediante una transformada de fourier inversa de (b). [109]. 90

3.26. a. Esquema experimental para evidenciar el Efecto de Josephson AC. b La conductancia teorica para la configuración del circuito (a) permite predecir lo antes mencionados escalones de Shapiro. c Los puntos naranjas marcan los puntos donde se esperaba encontrar MF [108][110]. 91

3.27. Graficas del voltaje caracteristico $V(I)$ de una Unión de Josephson en la presencia de un campo magnetico B y un V_{bias} entre 3 y 6 mV en incrementos de 0,6mV. Para $B < 2T$, el rpimer escalón de Shapiro ocurre para $\Delta V = 6\mu V$, y para $B > 2T$, dicho escalon desaparece, y esta vez el primer escalon se encuentra en $12\mu V$. Este efecto es una señal del Efecto de Josephson Fraccional y de superconductividad topológica [110]. 91

4.1. Esquema básico de las fases de un algoritmo de computación cuántica y manipulación de bits cuánticos (Q-bits). [99] 96

4.2. *Diagrama de energía en el subespacio de bajas de energías. izquierda, sistema no degenerado. derecha, sistema degenerado, anyones.* 104

4.3. *Esquema del proceso de trenzado No abeliano de un sistema de 4 Aniones, en base a la manipulación de un parámetro del hamiltoniano.[114]* 104

4.4. *Proceso de traslación de una partícula alrededor de otra, Izquierda; En 3-D Todos los posibles caminos pueden deformarse unos en otros con lo cual el resultado final son equivalentes. Derecha; En 2-D, debido a la reducción a un sistema con un grado de Libertad menos, el proceso de rotar una partícula alrededor de la otra no es equivalente a dejarla en su posición inicial.* 105

4.5. *(a-c) Representación gráfica de las trayectorias en el espacio real, (d-g) Líneas de mundo de un sistema de cuasi partículas. La evolución en (b) corresponde al elemento del grupo de trenzado del panel (f), la evolución en (c) se representa en el panel (g). Tanto (f) como (g) pueden expresarse en términos de operaciones elementales como se muestra en (d)-(e).[46]* 107

4.6. *Izquierda, correspondencia entre el proceso de fusión de 3 aniones con un canal fijo de fusión, pero diferentes ordenes en el proceso de fusión. La matriz F puede ser vista como una rotación en el espacio de los estados intermedios de fusión. Derecha, representación simbólica de un intercambio en contra de las manecillas del reloj de los aniones a y b en un tipo de partícula c . El proceso de intercambio genera una fase R_{ab}^c* 109

4.7. *Representación de las líneas de mundo de un par de aniones de Ising σ (a) generados del vacío, en este caso el proceso de trenzado causa un cambio del canal de fusión (b) uno generado del vacío otro de una partícula ψ (fermión), tras el proceso de trenzado existe una teleportación del fermión de uno de los pares de anyones al otro.* 111

4.8. *El intercambio de dos aniones genera una fase $R_{ab}^c = e^{i\theta_{ab}^c}$, en otras palabras R_{ab}^c corresponde a una matriz diagonal dependiente del canal de fusión. Cuando el proceso de intercambio se realiza después de un proceso de fusión la acción de intercambio, afecta a los estados del subespacio intermedio de fusión mediante la matriz F con lo cual el intercambio le da a diferentes canales de fusión entre b y c , una fase diferente.* 112

4.9. **I.** Unión de tipo T , vista como tres segmentos de un nanohilo de Majorana con fases superconductoras $\phi_{A,B,C}$ (a) Si un único segmento es topológico la interacción mediante tunelamiento Γ no puede destruir los MZM (b) 2 Regiones topológicas donde los MZM $\gamma_{1,2}$ se acoplan en un fermión ordinario excepto en la uniones π . (c) Si las tres regiones son topológicas $\gamma_{1,2,3}$ se acoplan en un fermión convencional y un modo de Majorana protegido topológicamente. **II.** Intercambio adiabático de Aniones de Ising (Majorana) en una unión tipo T asociado al movimiento de los dominios topológicos mediante el cambio de parámetros como el potencial químico debido a la aplicación de un voltaje local. **III.** Ejemplo de un superconductor topológico unidimensional. Las compuertas a lo largo del nano hilo controlan el potencial Químico de modo que puedan moverse los bordes de la región topológica donde se localizan los MZM. 115

4.10. Operaciones de trenzado de modos de Majorana mediante operaciones no abelianas (a) La operación U_{12} y U_{21} no son equivalentes. (b) La composición de las transformaciones $U_{12}U_{23}$ y $U_{23}U_{12}$ no conmutan. (c) Esquema de la ecuación de Yang-Baxter (4.46).[100] 116

B.1. Relación de dispersión en un cristal 1D según la aproximación de Tight Binding.[74] 134

B.2. Relación de Dispersión para una red bidimensional en función de $\gamma(a) = 0,5eV$, y diferentes valores de $\gamma(b)$; $\gamma(b) = 1eV$ la línea verde y $\gamma(b) = 0,5 eV$ la línea azul.[71] 135

B.3. Banda de energía tipo S en el modelo de Tight binding para una red cubica, a la izquierda γ es negativa y a la derecha γ es positiva.[75] . 136

B.4. Estructura de bandas en el modelo de Tight Binding. Izquierda Los niveles de energía en el caso de un solo átomo. Derecha los niveles de energía de una red cristalina de N átomos, en función de la integral de solapamiento (el inverso de la distancia entre átomos).[85] 137

C.1. a. Fase Trivial cadena de Kitaev que cuenta con N fermiones ordinarios c_j localizados en cada punto de la cadena. b. Fase topológica cadena de Kitaev que cuenta con $N - 1$ operadores d_j localizados a lo largo de la cadena y un fermión convencional deslocalizado en función de 2 MZM 141

E.1. Representación geométrica de la identidad pentagonal tomando en cuenta todos las posibles operaciones de fusión 145

E.2. Representación geométrica de la identidad hexagonal tomando en cuenta todos las posibles operaciones de fusión como de braiding 146

Agradecimientos

Principalmente a Dios por las bendiciones y oportunidades que se han presentado lo largo de mi vida y para la elaboración del trabajo.

A mi familia en particular a mi padre y madre por estar presentes y apoyándome en mi camino academico.

A mi director el Ph.D Servio Tuio Perez Merchano, las evaluadoras; Ph.D Adriana Isabel Figueroa y Luz Helena Bolívar, por sus sugerencias, correcciones, tiempo y guia para que el presente trabajo de grado llegara a buen puerto.

Un gran agradecimiento especial a Angelica Bolivar y Nayibe Hurtado compañeras y Amigas que iniciaron junto a mi este camino academico de la ingenieria física y me inspiraron para seguir aquello que tanto me apasiona dentro de la física.

Resumen

En el estudio de sistemas a bajas temperaturas y en particular en sistemas fuertemente correlacionados como la superconductividad topológica surgen de manera natural y como resultado del gran número de investigación una comprensión cada vez mayor, a partir de aspectos que han hecho parte de la formulación del problema e hipótesis de este proyecto entre ellas:

i) ¿Cuál es la importancia de la superconductividad en ciencia y tecnología?

La superconductividad es un puente entre la física macroscópica mas cercana a la experiencia del día a día (leyes de la mecánica de Newton, termodinámica, electromagnetismo de Maxwell) y las leyes de la mecánica cuántica que rigen el comportamiento a nivel microscópico de átomos y moléculas, que es mucho menos familiar y aparte de un paradigma intuitivo. A los superconductores se los ha caracterizado como parte de sistemas fuertmente correlacionados. A nivel microscópico los electrones asociados a una corriente pueden ser transportados a través de un material superconductor sin experimentar fricción ni disipar energía.

El “Santo Grial” de la superconductividad son los materiales que superconductor en condiciones de temperatura y presión ambientales, lo cual ampliaría enormemente el uso de superconductores para aplicaciones prácticas. Actualmente, los imanes más potentes se fabrican con bobinas de cables superconductores (electroimanes superconductores). Este es el caso de los imanes que se utilizan en grandes instalaciones científicas, como los aceleradores de partículas, y en medicina, como los aparatos de resonancia magnética nuclear. Los imanes potentes son también un componente importante de los generadores que transforman energía mecánica en electricidad entre ellos los generadores eólicos e hidráulicos. De poderse utilizar en estas condiciones y la vida diaria, aportarían mucho a la resolución de los problemas de energía y de contaminación ambiental en forma notable.

ii) ¿Qué es un sistema fuertemente correlacionado y cuál es su importancia en

la física de la materia condensada?

En los sistemas de electrones fuertemente correlacionados la interacción entre los electrones no se puede despreciar lo que hace que el problema sea muy difícil de resolver puesto que no se puede simplificar a una teoría efectiva de una partícula como en los metales descritos por la teoría del líquido de Fermi (véase metales en sólidos cristalinos). Sin embargo, la interacción entre los electrones es lo que da lugar a fenómenos de emergencia sorprendentes inconcebibles desde sus elementos constituyentes. Estos sistemas presentan diagramas de fase muy ricos con diversas fases que compiten o coexisten entre sí. Entre las fases que se encuentran están las fases magnéticas, superconductoras y otras fases que presentan física nueva como las fase protegidas por simetrías. Los diagramas de fase presentan transiciones de fase al variar la temperatura y también transiciones de fase cuánticas en base a los valores de los parámetros del sistema en cuestión. Un ejemplo sería el aislante de Mott que se encuentra en los cupratos. El aislante de Mott es un claro ejemplo de fallo de teoría de bandas, que predice el sistema como metal. Su carácter aislante proviene de la interacción entre los electrones. La caracterización y la descripción microscópica de los electrones fuertemente correlacionados es un campo de investigación muy activo.

iii) ¿Qué papel juega la superconductividad topológica en la computación e información cuántica? ¿tienen importancia física y tecnológica los fermiones de Majorana?

La computación cuántica provee un método que puede hacer cálculos a tasas significativamente más rápidas que la computación convencional. Esto se debe a que las computadoras convencionales procesan bits digitales en forma de ceros y unos, mientras que las computadoras cuánticas implementan bits cuánticos (q-bits) superposición de todos los valores entre 0 y 1, elevando 2^n veces la capacidad y la velocidad del procesamiento de datos.

la investigación en las partículas de Majorana, que son sus propias antipartículas, ve reflejado su valor en su potencial para almacenar y procesar información cuántica de forma tal que está protegida del ruido ambiental. Sin embargo, no hay material que hospede naturalmente para estas partículas. Como resultado, los investigadores han tratado de diseñar plataformas, sobre las cuales se puedan realizar estos cálculos. “El nuevo descubrimiento de la superconductividad topológica en una plataforma tanto unidimensional y/o bidimensional allana el camino para construir q-bits topológicos escalables no solo para almacenar información cuántica, sino también para manipular los estados cuánticos .

iv) ¿Cuál es la relevancia física y tecnológica de estados mezclados que se producen en los superconductores topológicos? ¿Son importantes los efectos termodinámicos y estadísticos en el estudio de dicho fenómeno físico?

Los estados topológicos de la materia, que deben sus exóticas propiedades es-

tados cuánticos correlacionados de sus electrones, de rara curiosidad han pasado a ser una de las áreas más pujantes de la física. Como resultado, las cualidades físicas están «protegidas topológicamente». Se piensa que los materiales «fuertemente topológicos» que albergan esos efectos robustos son prometedores en cuanto materiales termoeléctricos, que convierten el calor en electricidad. Y algunos físicos esperan que en ellos se basen los futuros ordenadores topológicos cuánticos, que podrían resolver ciertos problemas exponencialmente más deprisa que los ordenadores clásicos.

El ejemplo más famoso es el efecto Hall cuántico, descubierto en 1980 en ciertos materiales bidimensionales que conducen la electricidad y en los que la resistencia no se ve afectada por cambios pequeños en variables como la temperatura. El efecto es tan robusto que se ha tomado como fundamento para definir el ohmio (la unidad de medida de la resistencia) en el Sistema Internacional de unidades reformado que entró en vigor en mayo. Un efecto parecido en sistemas tridimensionales permite que algunos materiales, los aislantes topológicos, sean en sus fronteras exteriores, pese a su nombre, unos conductores perfectos mientras que el grueso del material es aislante.

En atención a los anteriores interrogantes, este trabajo se desarrolla bajo la siguiente estructura: Primero se estudia con cierto detalle a través de un “modelo teórico ideal o elemental”, en el que intervienen fermiones de Majorana, y por medio del método “tight-binding unidimensional de un superconductor de onda p ”, introducida hace un decenio a través del modelo de Kitaev. [1-15] Posteriormente se realiza una introducción general a las notables propiedades de los fermiones de Majorana en sistemas de materia condensada, así como su naturaleza intrínsecamente no local y estadísticas de intercambio exóticas, y se explica el por qué se sospecha que estas cuasipartículas son especialmente adecuadas para el procesamiento de información cuántica de baja decoherencia. Finalmente, se discute el potencial experimental de superconductores topológicos utilizando semiconductores con fuerte acoplamiento de espín-órbita, los cuales están acoplados a superconductores de *onda S* estándar y expuestos a un campo magnético. [21-34] Se proporciona una introducción en los aspectos más importantes para la comprensión de la física básica siendo accesible para estudiantes con una comprensión básica de la mecánica cuántica y la segunda cuantificación.

Introducción

Los fermiones de Majorana, descubiertos teóricamente en 1937 como soluciones reales a la ecuación de Dirac, presentan una propiedad muy notoria: ellas son sus propias antipartículas. Este hecho ha afectado desde entonces a diversos problemas que van desde la física de neutrinos, hasta el efecto Hall cuántico fraccionario y la superconductividad [1-5]. En particular, en materia condensada, estos fermiones de Majorana, emergen como excitaciones de modo cero fundamentalmente en superconductores de *ondas p unidimensionales*, lo que tiene potenciales aplicaciones en computación cuántica [6-20].

La materia topológica es fundamentalmente mecánico-cuántica, sin un similar en el mundo clásico. En particular, la superconductividad topológica [1-20][1-63] combina dos temas fascinantes en la física de la materia condensada: las fases topológicas de la materia y la superconductividad no convencional, siendo el componente clave de la computación cuántica topológica tolerante a fallas [1-50]. Durante la última década, se han logrado avances significativos en la clasificación de superconductores topológicos con simetrías internas y/o cristalinas.[86] Para las realizaciones experimentales, gran parte del enfoque se ha puesto en ideas similares al superconductor Fu-Kane [7], donde un superconductor convencional está cerca de un material topológico. Por otro lado, los superconductores no convencionales exhiben propiedades topológicas y de rompimiento de simetría aún más ricas.

A la par, la computación cuántica presenta un marco teórico para resolver eficientemente tareas computacionales difíciles, *por ejemplo*, factorización de grandes números usando el algoritmo de Shor [1]. Sin embargo, un problema práctico en un sistema con muchos bits cuánticos (q-bits) es la decoherencia cuántica. La interacción con un entorno externo hace que colapse la función de onda y no se puede obtener información confiable. Un computador cuántico libre de errores necesita evitar de alguna manera los fenómenos de decoherencia [20-50]. La idea principal es construir sistemas en los que la presencia de simetrías discretas proteja los estados preparados, haciendo que el sistema sea robusto a dicha decoherencia. Una reflexión sobre los fundamentos de la mecánica cuántica permite captar la delicada raíz que hace que el mundo cuántico sea completamente extraño y hermoso, y luego seguirlo a medida que crece desde la esfera de la física de pocas partículas hacia el reino de sistemas

de muchos cuerpos [40-63] permitiendo una formación a modo de introducción más extensa y completa.

La computación cuántica es un elemento destacado en la lista de posibles aplicaciones para los estados cuánticos topológicos, por otro lado, los conceptos clave en la teoría cuántica, como el entrelazamiento cuántico, juegan un papel central en la comprensión de la materia topológica.

Capítulo 1

Superconductores Topológicos

En este capítulo se da una introducción al tema de la superconductividad topológica, explicando los ingredientes genéricos necesarios de la superconductividad topológica, así como las propiedades básicas de los fermiones de Majorana (*MFs*), y cómo estos se pueden acoplar a semiconductores estándar debido a la proximidad con *estados superconductores*. Anteriormente han aparecido dos excelentes artículos de revisión que tratan el tema [40] y [41], razón por la cual, no se realiza una revisión exhaustiva del tema, o deriva detalladamente todos los resultados, en cambio se brinda una visión física de lo que se cree que son los conceptos básicos más importantes. Eventualmente se desvelaran algunas de sus propiedades, como las estadísticas No abelianas y mencionara su potencial para el cálculo cuántico topológico.

La superconductividad topológica es un estado interesante de la materia, en parte porque está asociada con excitaciones de cuasipartículas que son *MFs*. En *física de partículas*, los *MFs* son *partículas* (fermiónicas) que son sus propias *antipartículas* [1-20]. Mientras, en *materia condensada* es probable que existan como *excitaciones de cuasipartículas* en ciertos sistemas de muchos electrones, donde son una cuasipartícula que es su “propio agujero”. Un fermión de Majorana es en cierto sentido la mitad de un fermión normal. El interés teórico de los *MFs*, principalmente recae en su estadística especial de intercambio; al ser aniones no abelianos significa que los intercambios de partículas son operaciones no triviales que en general no conmutan[2-10].

Por otro lado, en los superconductores topológicos los *MFs* que conforman un *estado fermionico ordinario* se encuentran efectivamente deslocalizados protegidos de la mayoría de los tipos de decoherencia, es decir, perturbaciones locales que afecten solo a uno de sus constituyentes Majorana. Sin embargo, el estado puede manipularse mediante el intercambio físico de *MFs* debido a sus estadísticas no abelianas, lo que ha llevado a la idea de un cálculo cuántico topológico de baja decoherencia [21-40]. Durante los últimos años, varios grupos experimentales han asumido el desafío de crear *MFs*, y se han hecho observaciones que pueden interpretarse como pruebas de

fermiones de Majorana [35-39]. El tiempo dirá cuáles son observaciones genuinas de la física de Majorana.

1.1. Ecuación Klein-Gordon

Partiendo de la relación de Einstein para partícula de masa m tomando como operadores a la energía y el momentum,

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 \Rightarrow E^2 - \mathbf{p}^2 = p^\mu p_\mu = m^2 \quad (1.1)$$

se obtiene una ecuación relativista sencilla del sistema cuántico para una partícula.

$$\begin{aligned} p^\mu p_\mu \phi &= m^2 \phi \\ (i\hbar \partial^\mu)(i\hbar \partial_\mu) \phi &= m^2 \phi \\ -\hbar^2 \square \phi &= m^2 \phi \end{aligned} \quad (1.2)$$

Realizando la consideración de $\hbar = 1$ por simplicidad, se observa que ecuación

$$(\square + m^2)\phi = 0 \quad (1.3)$$

es una ecuación invariante ante *transformadas de Lorentz*, dado que el operador entre los paréntesis es un escalar de Lorentz. Al mismo tiempo, la función de onda, $\phi(X, t)$, es una función escalar invariante de Lorentz.

La ecuación (1.3), es conocida como la *ecuación de Klein-Gordon*, y al igual que las ecuaciones de onda tiene como soluciones funciones de onda plana.: $e^{\mp i k_\mu \cdot x^\mu} = e^{\mp i(k_0 t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{X})}$. Siendo, $k^\mu = (k^0, \mathbf{k})$ los valores propios del operador de energía-momentum.

$$\begin{aligned} k^2 - m^2 &= (k^0)^2 - \mathbf{k}^2 - m^2 = 0 \\ k^0 &= \pm E = \pm \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Peculiaridad: Al permitir soluciones tanto de energía positiva como energía negativa, se tiene que es consistente con la relación relativista (1.1) energía-momentum.

Al estudiar más *la ecuación de Klein-Gordon*, esta vez partiendo junto a su complejo conjugado

$$\begin{aligned} (\square + m^2)\phi &= 0 \\ (\square + m^2)\phi^* &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Se obtiene operando algebraicamente que

$$\begin{aligned} \phi^* \square \phi - \phi \square \phi^* &= 0, & \partial_\mu (\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) - \nabla \cdot (\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*) &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Definición : La densidad de probabilidad es un cuadrivector $J^\mu = (\rho, \mathbf{J})$, siendo \mathbf{J} , la densidad de corriente de probabilidad igual que en el caso de la mecánica cuántica no relativista. (Ver 1.7)

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2im} (\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*), \quad \rho = \frac{i}{2m} (\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t}), \quad (1.7)$$

Al tomar como soluciones a la ecuación de Klein-Gordon ondas planas $\phi(x) = e^{-ik \cdot x}$,

$$\rho = \frac{i}{2m} (ik^0 - ik^0) = \frac{k^0}{m} = \pm \frac{E}{m} \quad (1.8)$$

Por tanto, ρ no puede representar la *densidad de probabilidad* entendiéndole como la probabilidad de que una partícula se encuentre en cierto estado al momento de hacer una medición. Más aún el restringir las soluciones de energía a los valores positivos pretendiendo evitar esta inconsistencia no permite obtener información completa de todo lo que le sucede al sistema.

1.2. Ecuación de Dirac

Está claro que apesar de no poder evitarse las soluciones de energía negativa, se debe obtener una definición de densidad de probabilidad consistente. La propuesta de Dirac consiste en expresar la energía relativista (1.1) de la siguiente manera

$$E = \alpha \mathbf{c} \mathbf{p} + \beta m c^2 \quad (1.9)$$

A su vez esta expresión es equivalente a (1.1) con lo cual al tomar su valor al cuadrado se observa que debe cumplirse $\alpha^2 = 1$, $\beta^2 = 1$ y $(\alpha\beta + \beta\alpha) = 0$. Al pensar en α y β como números reales o complejos las 3 condiciones son incompatibles, al obligatoriamente tener que cumplirse que $\alpha\beta = -\beta\alpha$. Afortunadamente para las matrices la conmutatividad efectivamente no se cumple. Esto implica que la ecuación que se busca corresponde a una ecuación de matrices actuando sobre vectores.

Para obtener esta situación se considera la expresión (1.1) como una relación matricial

$$\begin{aligned} E^2 &= \mathbf{p}^2 + m^2 \\ p^2 &= p^\mu p_\mu = m^2 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Se asumen 4 matrices linealmente independientes γ^μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$, tales que

$$\not{p} = \gamma^\mu p_\mu, \quad (1.11)$$

Siendo que (1.11) representa la matriz raíz cuadrada de p^2 , es decir

$$\begin{aligned} \not{p}\not{p} &= p^2\mathbf{I} \\ \gamma^\mu\gamma^\nu p_\mu p_\nu &= p^2\mathbf{I}, \\ \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu) p_\mu p_\nu &= p^2\mathbf{I} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Donde \mathbf{I} es la matriz identidad ($n \times n$), y las matrices γ^μ cumplen con el álgebra de Clifford,

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = [\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2\eta^{\mu\nu}\mathbf{I} \quad (1.13)$$

Estas definiciones, permiten a partir de dichas matrices, encontrar una relación lineal energía-momentum equivalente a la relación de Einstein.

$$\not{p}\psi = m\psi \quad (1.14)$$

Esta nueva ecuación conocida como *la ecuación de Dirac*, es lineal respecto a las coordenadas espaciales y temporales. En cuanto a la forma explícita de estas matrices γ^i , estas deben ser Hermíticas, ya que el hamiltoniano es un operador Hermítico. Las matrices más pequeñas que funcionan de esta forma al igual que cumplen el Algebra de Clifford son matrices 4×4 , y hay más de una representación de estas matrices.

1.3. Soluciones ecuación de Dirac

$$H = \alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m \quad (1.15)$$

La ecuación de Dirac se trata pues de una ecuación de primer orden, y se identifica que el hamiltoniano (1.15) es consistente con la propuesta hecha por Dirac de la relación energía-momentum (1.1). En dicho caso la función de onda ha de ser formulada como un espinor,

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

En el espacio de momentum

$$\psi_\alpha(x) = e^{-ip \cdot x} u_\alpha(p); \quad \text{donde } \alpha = 1, 2, 3, 4. \quad (1.17)$$

$$(\not{p} - m)u(p) = 0, \quad (1.18)$$

Restringiendo el movimiento a lo largo del eje z, es decir, $p_1 = p_2 = 0$, de este modo

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) &= 0 \\ (\gamma^0 p_0 + \gamma^3 p_3 - m)u(p) &= 0 \end{aligned} \quad (1.19)$$

En función a la anterior igualdad se evidencia: *las ondas planas solución de la ecuación de Dirac existen únicamente para los valores de energía*

$$p_0 = E_\pm = \pm \sqrt{p_3^2 + m^2} \quad (1.20)$$



Figura 1.1: Representación de los estados de energía del mar de Dirac[64]

En general y no solo para un movimiento unidimensional

$$p^0 = E_\pm = \pm E = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \quad (1.21)$$

El sistema de ecuaciones (1.19) toma la forma

$$\begin{pmatrix} (E_\pm - m)\mathbf{I} & \sigma_3 p_3 \\ \sigma_3 p_3 & -(E_\pm + m)\mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}(p) \\ \tilde{v}(p) \end{pmatrix} = 0 \quad (1.22)$$

Donde

$$\tilde{u}(p) = \begin{pmatrix} u_1(p) \\ u_2(p) \end{pmatrix}; \quad \tilde{v}(p) = \begin{pmatrix} u_3(p) \\ u_4(p) \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

Las soluciones de (1.19) en el caso de energía positiva y negativa tienen la forma explícita:

$$u_+^\uparrow(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{p_3}{E_+ + m} \\ 0 \end{pmatrix}, u_+^\downarrow(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{p_3}{E_+ + m} \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

$$u_-^\uparrow(p) = \begin{pmatrix} -\frac{p_3}{E_- - m} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_-^\downarrow(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{p_3}{E_- - m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.25)$$

- Al tratarse de una ecuación de primer orden, es posible definir la densidad de probabilidad aun en la presencia de energías positivas y negativa.
- La presencia de soluciones de energía trae otras muchas dificultades teóricas. Puesto que no existe un límite para los valores de energía negativos conduce a cualquier sistema físico (de partículas de Dirac) a una transición a estos estados energéticos no físicos, lo que ocasiona un colapso de todos los sistemas estables.
- **Teoría de huecos**; propuesta por Dirac según la cual el vacío no es del todo vacío, por el contrario, lo describe como un mar de electrones de energía negativa, llamado el mar de Dirac.[Ver fig 1.1]. Esta hipótesis a su vez permite predecir algunos fenómenos físicos que son experimentalmente observables.
- Sí los estados propios de *energía negativa* están llenos de forma incompleta, cada estado propio no ocupado, llamado “Hueco”, podría comportarse como una partícula *igual al “electrón”* cargada positivamente.
- Este estado de “hueco” se viene a reconocer como la *antipartícula*, en este caso, un *positrón*. la teoría de Dirac predice una antipartícula de la misma masa para cada partícula de Dirac.

1.4. Fermiones de Majorana

Se establece que soluciones simétricas a la ecuación de Dirac describen una partícula fermiónica que es a su vez su propia antipartícula. [79] De especial interés aquí son las soluciones en 1-D y 2-D a exactamente *energía cero*. Estos modos Majorana cero (MZM) están dotados de algunas propiedades físicas notables que pueden conducir a avances en la computación cuántica y, de hecho, existe la posibilidad de ser observados experimentalmente.

1.4.1. Punto de vista de la física de partículas

Las matrices α y β en la ecuación de Dirac no son de única representación, por el contrario las matrices γ^μ son un conjunto de matrices convencionales que junto a unas relaciones de anti conmutación generan una representación matricial del álgebra de Clifford.

Una elección particular de estas matrices es de la forma

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{pmatrix}; \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donde } i = 1, 2, 3. \quad (1.26)$$

Cada elemento de las matrices 4×4 representa una matriz 2×2 , en particular σ_i corresponden a las 3 matrices de Pauli. Es útil definir el producto de cuatro matrices γ^μ como

$$\gamma^5 = \frac{i}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \quad (1.27)$$

Esta elección de representación matricial es conocida como las *matrices de Dirac*, o **representación Paul-Dirac**. Estas matrices pueden ser escritas, en la **representación de Weyl**, como

$$\gamma_W^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^\mu = (\sigma^0, -\sigma^i); \quad \tilde{\sigma}^\mu = (\sigma^0, \sigma^i) \quad (1.28)$$

La idea de Majorana es para una elección particular de las matrices α y β en la ecuación (1.9) las soluciones de son de naturaleza real. Las correspondientes matrices γ^μ en **representación de Majorana** son:

$$\gamma_M^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_M^1 = \begin{pmatrix} i\sigma_3 & 0 \\ 0 & i\sigma_3 \end{pmatrix}; \quad \gamma_M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_M^3 = i \begin{pmatrix} -i\sigma_1 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

Esta representación la ecuación de Dirac se trata de cuatro ecuaciones acopladas para 4 componentes del espinor. [64] [69] Para la ecuación de Majorana, la representación de las matrices de Majorana es real, con lo cual el sistema de cuatro ecuaciones se reduce a dos sistemas independientes, cada uno con dos ecuaciones acopladas. El equivalente en la imagen de Majorana considera que 2 MFs degenerados con paridad de carga (CP) opuesta serían indistinguibles de un fermión de Dirac con esa misma masa.

1.4.2. Punto de Vista de la materia condensada

Los electrones en el formalismo de segunda cuantificación están representados por un conjunto de operadores de creación c_j^\dagger y de aniquilación c_j que cumplen las relaciones de anti-conmutación

$$\{c_i^\dagger, c_j^\dagger\} = \{c_i, c_j\} = 0, \quad \{c_i^\dagger, c_j\} = \delta_{ij} \quad (1.30)$$

En forma general, se puede realizar una transformación canónica del hamiltoniano (y cualquier otro operador de interés) a la “base de Majorana”

$$c_i = \frac{1}{2}(\gamma_{j1} + i\gamma_{j2}), c_i^\dagger = \frac{1}{2}(\gamma_{j1} - i\gamma_{j2}) \quad (1.31)$$

$$\gamma_{i\alpha} = c_i + c_i^\dagger, \gamma_{j\beta} = -i(c_i - c_i^\dagger) \quad (1.32)$$

Donde los nuevos operadores $\gamma_{j\alpha}$ satisfacen el algebra $\{\gamma_{i\alpha}, \gamma_{j\beta}\} = 2\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}$. Al invertir la transformación especificada en 1.31 y 1.32

$$\gamma_{j1} = c_j^\dagger + c_j, \gamma_{j2} = i(c_j^\dagger - c_j) \quad (1.33)$$

Estas relaciones sugieren que los fermiones de Majorana aislados pueden encontrarse en sistemas con orden superconductor el cual consiste superposiciones coherentes de los estados ocupados de un electrón y hueco, que surgen naturalmente en la teoría BCS de la superconductividad. Por otro lado, un operador definido en la ecuación (1.33) sólo puede actuar no trivialmente en un sistema en estado fundamental propio de una fase superconductora producto de cierta interacción entre las partículas del sistema, en este caso los electrones.

Esta transformación no suele ser de más ayuda que el formalismo anterior, físicamente esto es porque los 2 fermiones de Majorana que comprenden un electrón dado están entrelazadas en el espacio y por lo tanto tiene poco sentido describirlas como entidades separadas. Sin embargo, hay una clase especial de sistemas, llamados *superconductores topológicos* y ciertos *sistemas cuánticos de Hall*, en los que dos fermiones de Majorana que comprenden un solo electrón se separan espacialmente. En este caso una descripción a través de la base de Majorana se convierte en esencial, la separación espacial será de gran importancia en aplicaciones dentro de la computación y codificación cuántica de la información puesto que la información en cada Q-bit, al no encontrarse localizada, presenta largo tiempo de decoherencia, una característica para una computación cuántica robusta.

1.4.3. Fermiones de Majorana como partículas emergentes en sistemas de sólidos superconductores.

Un fermión de Majorana sería entonces una cuasi partícula que es su propia anti-cuasi partícula presentándose ambas de forma emparejada (es decir, una superposición en partes iguales de una cuasipartícula y una anti-cuasipartícula). (Ver fig. 1.2) El interés en estos extraños fermiones radica en su exótica física estadística. En vez de ser fermiones o bosones como la materia ordinaria, son aniones no abelianos lo que significa que el intercambio de partículas no es una operación trivial y no conmuta.

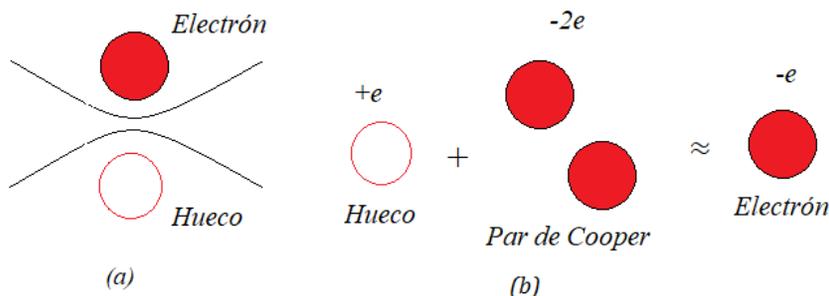


Figura 1.2: (a) La pareja electrón-hueco (excitón) actúa como un bosón (b) Un hueco-par de cooper en un superconductor actúa como un fermión (En carga son equivalentes a un electrón y puede ser un fermión de Majorana). [71]

Entender en que consiste el fenómeno de *superconductividad No convencional* mediada por MF tiene en cuenta la descripción del comportamiento de un electrón dentro de un sólido y puede considerarse en último término un problema de encontrar los auto valores de la energía asociados a la interacción marcada por un potencial determinado, bajo el formalismo conocido como **Aproximación de tight binding** (Ver Anexo B). Las excitaciones de un superconductor se denominan **excitaciones de Bogoliubov** y están formadas por la superposición de una cuasi partícula y una anti-cuasi partícula y en estos últimos la superposición tiene que ser a partes iguales.[72] Sin embargo, la superposición de hueco y electrones asociada a los pares de Cooper como cuasipartículas; resulta no ser suficiente para la aparición de fermiones de Majorana. Resulta natural buscar tales excitaciones en sistemas superconductores donde el tipo más común de emparejamiento superconductor es de la *simetría onda s*, y *onda p*.

1.5. Modelo Ideal

A continuación, nos centraremos tan solo en la física de cuasipartículas, sin considerar ningún origen microscópico de la superconductividad no convencional. Es por ello que se asume que la física de cuasipartícula está bien descrita usando una formulación de campo medio e ignoramos los efectos (posiblemente importantes) que resultarían de considerar una solución completa. La superconductividad puede surgir de electrones emparejados en ondas de espín opuesto; entonces los operadores de las cuasipartículas toman la forma $d = uc_{\uparrow}^{\dagger} + vc_{\downarrow}$ siendo físicamente distintas de $d^{\dagger} = v^*c_{\downarrow}^{\dagger} + u^*c_{\uparrow}$, con lo cual el espín es el culpable de los superconductores de ondas convencionales.

Se sugiere la necesidad de tratar con *superconductores sin espín* con lo cual sistemas emparejados con un solo tipo de especies fermiónicas en lugar de dos proporcionan plataformas ideales fermiones de Majorana. Por el principio de exclusión de Pauli, el emparejamiento de Cooper en un metal “sin espín” debe ocurrir con paridad impar, lo que resulta en un superconductor (1D) unidimensional de onda p y un superconductor $p + ip$ en el caso bidimensional (2D). Estos superconductores son muy especiales: A continuación, se describe el caso unidimensional, se dan cuenta de fases topológicas que soportan excitaciones exóticas en sus límites y en los defectos topológicos. Lo más importante, los modos cero de Majorana (MZM, energía cero) están localizados en los extremos de un superconductor topológico de onda p 1D [77,78], y en vórtices superconductores en el superconductor 2D $p + ip$.

1.5.1. Superconductor de onda p (1D) sin espín: Modelo de Kitaev

En este caso, los MZM ocurren cerca de los límites extremos de la cadena unidimensional. El modelo de superconductividad topológica por Kitaev incluye un fenómeno de salto de los electrones entre los vecinos cercanos (Ver Anexo B),

$$H_K = - \sum_{j=1}^N \mu c_j^{\dagger} c_j - \sum_{j=1}^{N-1} \left(t c_j^{\dagger} c_{j+1} + \Delta' c_j c_{j+1} + h.c. \right) \quad (1.34)$$

Donde $t > 0$, $\mu > 0$ y $\Delta' = \Delta e^{i\phi}$ con $\Delta > 0$; son la integral del salto entre vecinos próximos, potencial químico, y el parámetro de orden superconductor, respectivamente, a su vez c_j^{\dagger} y c_j son el operador de creación y destrucción en una red unidimensional.

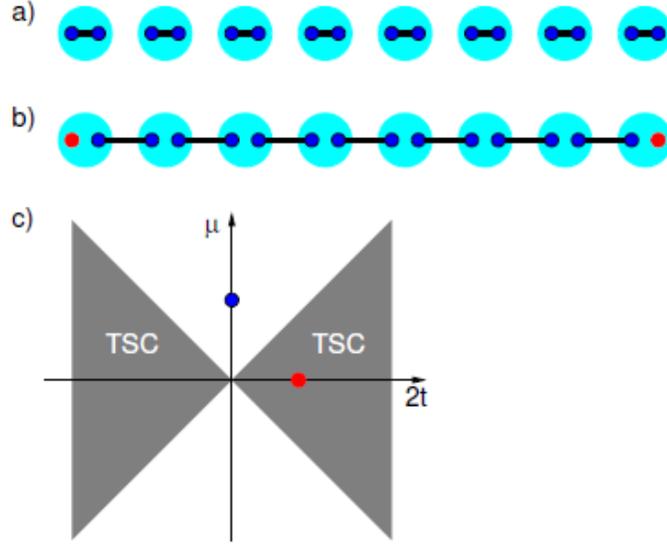


Figura 1.3: Las dos fases presentes en el modelo de una cadena unidimensional de Kitaev. (a) La fase trivial (b) la fase topológica (TSC). (c) el diagrama de fases del modelo d Kitaev. [69]

1.5.1.1. El caso $\mu = 0, t = \Delta$

El hamiltoniano (1.34) puede escribirse como

$$\begin{aligned}
 H_K &= -t \sum_{j=1}^{N-1} \left(c_j^\dagger c_{j+1} + c_{j+1}^\dagger c_j + e^{i\phi} c_j c_{j+1} + e^{-i\phi} c_{j+1}^\dagger c_j^\dagger \right) \\
 &= -t \sum_{j=1}^{N-1} \left(e^{i\phi} c_j c_{j+1} - c_j c_{j+1}^\dagger + c_j^\dagger c_{j+1} + e^{-i\phi} c_j^\dagger c_{j+1}^\dagger \right)
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

Transformando los operadores en la base de Majorana (1.31) y (1.32), en los cuales se introduce el factor de fase para tener en cuenta la fase superconductora

$$\gamma_{+,j} = e^{-i\phi/2} c_j^\dagger + e^{-i\phi/2} c_j \quad \gamma_{-,j} = i \left(e^{-i\phi/2} c_j^\dagger - e^{-i\phi/2} c_j \right) \tag{1.36}$$

Estos operadores cumplen con la condición de Majorana $\gamma_{\pm j}^\dagger = \gamma_{\pm j}$. En términos de estos operadores el hamiltoniano en (1.34) se reescribe como

$$H_K = -it \sum_{j=1}^{N-1} (\gamma_{+,j} \gamma_{-,j+1}) \tag{1.37}$$

Nótese que en (1.37) los operadores de Majorana $\gamma_{-,1}$ y $\gamma_{+,N}$ no se toman en cuenta, mientras el resto de operadores de Majorana son emparejados entre primeros vecinos esta situación da como resultado que los átomos vecinos más cercanos se emparejen, y a su vez existan un par de MZM en los dos extremos de la red unidimensional que permanecen desapareados (Ver Fig. 1.3 (b)), los cuales forman un fermión cuyo estado es no localizado. (Ver Fig 1.5) Ahora bien, otro aspecto interesante es el que los operadores $\gamma_{-,1}$ y $\gamma_{+,N}$ conmutan con H_K , es decir,

$$[H_K, \gamma_{-,1}] = [H_K, \gamma_{+,N}] = 0 \quad (1.38)$$

Con estos operadores de Majorana se puede construir un operador fermiónico convencional, $q^\dagger = (\gamma_{-,1} - i\gamma_{+,N})$ que también conmuta con H_K .

Definiendo un nuevo operador $d_j = (\gamma_{-,j+1} + \gamma_{+,j})$ y el correspondiente d_j^\dagger , se tiene que

$$H_K = \frac{t}{2} \sum_{j=1}^{N-1} d_j^\dagger d_j - (N-1)t \quad (1.39)$$

Al no incluir este operador en el hamiltoniano, ocupar el estado correspondiente requiere energía cero. Por lo tanto, en contraste con los superconductores “normales”, donde el estado fundamental no es degenerado y consiste en una superposición de estados de número par de partículas (condensado de pares de Cooper), el hamiltoniano (1.39) permite un número impar de cuasi partículas a costo de energía cero. El estado fundamental corresponde a tener en total un número par o impar de electrones en el superconductor.

1.5.1.2. El caso $\mu < 0$ y $t = \Delta = 0$

El hamiltoniano de 1.34 en la base de Majorana se reduce a

$$H_K = -\frac{\mu}{2} \sum_{j=1}^N (1 + i\gamma_{+,j}\gamma_{-,j}) \quad (1.40)$$

En este caso los modos de Majorana ubicados en el mismo lugar j de la red unidimensional están emparejados. Como resultado no existen MZM desemparejados en los dos extremos (Ver Fig. 1.3(a)).

Los 2 casos considerados anteriormente representan dos distintas fases en el modelo de Kitaev para una cadena unidimensional: El primer caso corresponde a una *fase topológica no trivial* que permite la existencia de MZM desapareados mientras el segundo caso corresponde a *una fase trivial*. [69,80] Un punto sutil es que ambas

fases tienen las mismas propiedades punto por punto. De hecho, una fase puede ser transformada a la otra (y viceversa) por simple permutación de operadores de Majorana. Pero a su vez tienen propiedades diferentes en los extremos de la cadena.

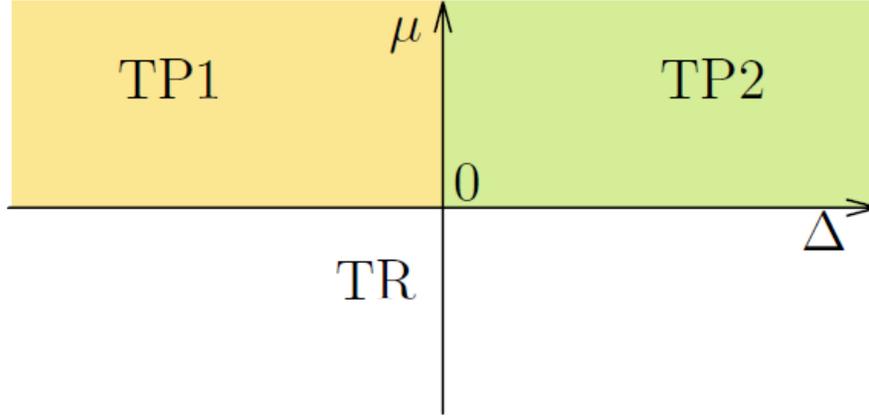


Figura 1.4: *Diagrama de Fase de la cadena de Kitaev en función del término de acoplamiento superconductor Δ*

No tomar en cuenta el espín en el modelo de Kitaev asegura que un solo MZM reside en cada extremo de la cadena en su fase topológica. Introducir el espín dentro del modelo, inicialmente sin interacciones espín-órbita, en un *superconductor de onda p* duplica la degeneración para cada estado propio del hamiltoniano, de modo que cuando $|\mu| < t$ cada extremo soporta dos modos cero de Majorana, o, de manera equivalente, un modo cero fermiónico ordinario, con lo cual estos estados fermiónicos ordinarios se alejarán de la energía cero al incluir las perturbaciones como el acoplamiento de espín-órbita. Estas consideraciones implican un requisito previo para observar los MZM desemparejados [81]. Hay una serie de propuestas bastante ingeniosas y realistas que abordan esta cuestión, al tiempo que se cumplen los requisitos clave de la superconductividad. Estos incluyen el límite de los aislantes topológicos bidimensionales [15,27,82,83] o nanocables hechos de un aislante topológico tridimensional [84], ambos con superconductividad inducida por proximidad.

1.6. Enfoque Bogoliubov-Gennes

El enfoque BdG se basa en el supuesto de que en el superconductor existen cuasi partículas bien definidas. Tiene la ventaja de proporcionar información sobre las excitaciones de una partícula del sistema. Se puede obtener el espectro de excitación de las cuasipartícula, junto con las correspondientes amplitudes de cuasipartícula. El

formalismo BdG es esencialmente correcto en el régimen de acoplamiento débil, pero también rinden resultados cualitativos en situaciones de acoplamiento muy fuerte. Para la comparación con los casos más interesantes que se discuten más adelante, comenzamos introduciendo la formulación del campo medio de la física cuasipartícula para un *superconductor de onda S convencional* (de Bardeen-Cooper-Schrieffer ó BCS). Comenzamos con un metal simple con degeneración de espín dada por el Hamiltoniano de una única partícula.

$$H = \left(\frac{p^2}{2m} - \mu \right) I_{2 \times 2} \quad (1.41)$$

Donde μ es el potencial químico y define la superficie de Fermi, m es la masa, $I_{2 \times 2}$ es la matriz identidad en las variables de espín, y asumiendo un modelo isotrópico, $p^2 = \sum_{i=1}^d p_i^2$. Para un sistema de muchos cuerpos, el hamiltoniano en segunda cuantización es

$$H = \sum_{\mathbf{p}, \sigma} c_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger \left(\frac{p^2}{2m} - \mu \right) c_{\mathbf{p}\sigma} \equiv \sum_{\mathbf{p}, \sigma} c_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger \varepsilon(p) c_{\mathbf{p}\sigma} \quad (1.42)$$

Donde $c_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger$ crea una cuasipartícula de cuadrimento \mathbf{p} y espín σ . El estado fundamental de muchos cuerpos de este hamiltoniano se obtiene simplemente completando todos los niveles por debajo de la energía de Fermi ($E < 0$). Formalmente se puede escribir el hamiltoniano (1.42) como

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}, \sigma} [c_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger \varepsilon(p) c_{\mathbf{p}\sigma} - c_{\mathbf{p}\sigma} \varepsilon(p) c_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger] + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon(p) \\ H &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}, \sigma} [c_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger \varepsilon(p) c_{\mathbf{p}\sigma} - c_{-\mathbf{p}\sigma} \varepsilon(-p) c_{-\mathbf{p}\sigma}^\dagger] + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon(p) \end{aligned} \quad (1.43)$$

Habiendo tenido en cuenta que $\{c_{\mathbf{p}\sigma}^\dagger, c_{\mathbf{p}'\sigma'}\} = \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$ al mismo tiempo que se re-etiquetó el índice sobre el que se realiza la sumatoria de \mathbf{p} a $-\mathbf{p}$. Retomando el concepto de espinor esta vez definido como

$$\psi_{\mathbf{p}} \equiv \left(c_{\mathbf{p}\uparrow}, c_{\mathbf{p}\downarrow}, c_{-\mathbf{p}\uparrow}^\dagger, c_{-\mathbf{p}\downarrow}^\dagger \right)^T \quad (1.44)$$

El hamiltoniano se puede reescribir en función del hamiltoniano *BdG* de una forma más compacta tal que así

$$H = \sum_{\mathbf{p}} \psi_{\mathbf{p}}^\dagger H_{BdG}(\mathbf{p}) \psi_{\mathbf{p}} + cte \quad (1.45)$$

$$H_{BdG}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varepsilon(p) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon(p) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon(-p) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon(-p) \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

Dicho hamiltoniano al ser hermitiano cumple que $H_{BdG}(\mathbf{p}) = -CH_{BdG}^T(-\mathbf{p})C^{-1}$, donde

$$C = \tau^x \otimes I_{2 \times 2} \tau^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

Esta invariancia, que llegará a ser más importante cuando se considera el emparejamiento superconductor, que se conoce como “simetría” de conjunción de carga o bien una cuasipartícula Hueco-Partícula. Se debe tener especial reserva a llamar a esto una simetría porque lo que realmente se ha hecho es introducir una redundancia en nuestra descripción de este material o sistema de muchos electrones, y en lugar de tener dos grados de libertad (una banda y dos Espines) el H_{BdG} tiene cuatro con lo cual se tiene la misma cantidad de valores propios de energía puesto que actúa sobre funciones de onda cuya primera mitad está compuesta por operadores de aniquilación de electrones, y la segunda mitad por operadores de creaciones de los mismos electrones. Se puede pensar en ellos como operadores de aniquilación de un conjunto adicional de agujeros. En otras palabras, mediante este formalismo se crea una redundancia artificial al efectivamente duplicar los grados de libertad, con lo cual, a priori este formalismo complica nuestra descripción de lo que era un simple problema de fermiones libres. Sin embargo lo que se busca mediante este formalismo es mostrar que la forma más fácil de resolver para el espectro de energía y bandas de un superconductor es mediante una teoría de campo medio en la forma BdG . El potencial de emparejamiento, que ahora introduciremos, simplemente se añade al H_{BdG} que se tiene.

Iniciando con un metal convencional de onda-s ($\Delta' = \Delta$), y con los electrones emparejados en configuración de singlete el potencial de emparejamiento toma la forma

$$\begin{aligned} H_{\Delta} &= \Delta c_{p\uparrow}^{\dagger} c_{-p\downarrow}^{\dagger} + \Delta^* c_{-p\downarrow} c_{p\uparrow} \\ H_{\Delta} &= \frac{1}{2} \left[\Delta \left(c_{p\uparrow}^{\dagger} c_{-p\downarrow}^{\dagger} - c_{-p\downarrow}^{\dagger} c_{p\uparrow}^{\dagger} \right) + \Delta^* \left(c_{-p\downarrow} c_{p\uparrow} - c_{p\uparrow} c_{-p\downarrow} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.48)$$

Donde Δ es un número complejo que representa el parámetro de orden superconductor, y a su vez capta la física de dos electrones o huecos combinados en un par de Cooper o bien en un par de Cooper separado en sus dos constituyentes. Considerando el hamiltoniano total en el formalismo BdG se tiene

$$H + H_{\Delta} = \sum_{\mathbf{p}} \psi_{\mathbf{p}}^{\dagger} H_{BdG}(\mathbf{p}, \Delta) \psi_{\mathbf{p}} \quad (1.49)$$

$$H_{BdG}(\mathbf{p}, \Delta) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varepsilon(p) & 0 & 0 & \Delta \\ 0 & \varepsilon(p) & -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta^* & -\varepsilon(-p) & 0 \\ \Delta^* & 0 & 0 & -\varepsilon(-p) \end{pmatrix} \quad (1.50)$$

$$H_{BdG}(\mathbf{p}, \Delta) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} H & \Delta \\ -\Delta^* & -H^* \end{pmatrix} \quad (1.51)$$

Podemos encontrar fácilmente el espectro de energía puesto que

$$H_{BdG}^2(\mathbf{p}, \Delta) = (\varepsilon(\mathbf{p})^2 + |\Delta|^2) \mathbf{I}_{4 \times 4} \quad (1.52)$$

Con lo cual podemos observar que dicho espectro es doblemente degenerado y las bandas tienen como valor propio de energía

$$E_{\pm} = \pm \sqrt{\varepsilon(\mathbf{p})^2 + |\Delta|^2} \quad (1.53)$$

Este espectro presenta un “gap” de energía siempre y cuando $|\Delta| \neq 0$ (ver figura 1.4). Presentando similitud con el espectro de energía de un material aislante.

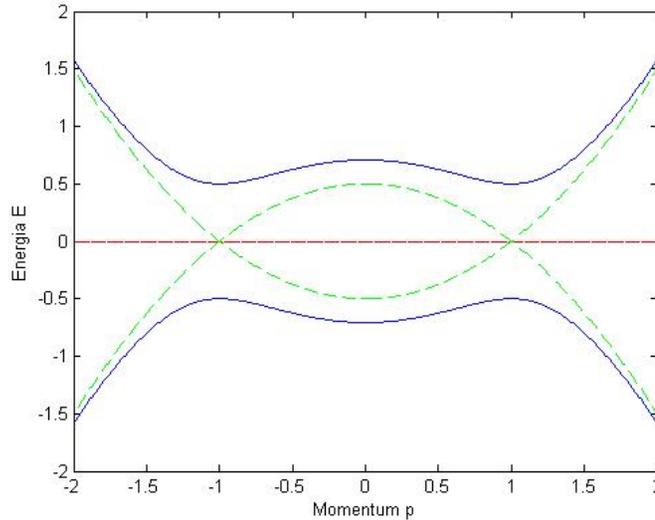


Figura 1.5: *relación de dispersión de un superconductor de onda S, 1-D. Para valores de $\mu = 0,5t$*

Sin embargo, una diferencia importante entre las excitaciones fermiónicas del gap en un estado aislante y un estado superconductor es que en estos últimos se tratan de cuasi partículas formadas por la combinación de estados partícula y estados huecos.

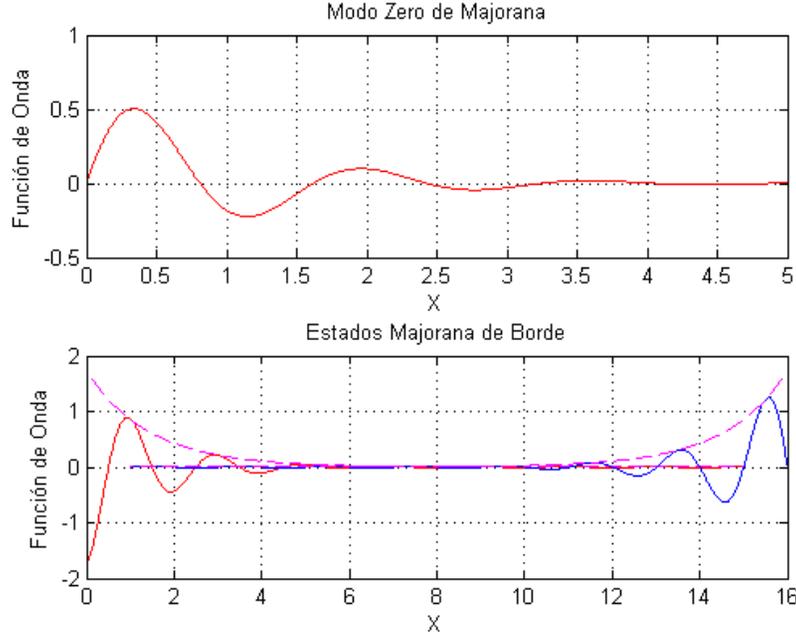


Figura 1.6: **arriba:** *Fermion de Majorana*, **abajo:** *MZMs en los limites de una cadena de Kitaev aplicando condiciones de borde a (1.54-1.57) y se toma una cadena de 16 átomos (Ver Anexo C)*

Esto lo podemos ver fácilmente en la definición de los operadores de creación de las cuasi partículas (“*estado fermionicos*”)

$$\gamma_{+,p\uparrow}^\dagger = e^{i\theta/2} \sin \alpha_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}\uparrow}^\dagger + e^{-\theta/2} \cos \alpha_{\mathbf{p}} c_{-\mathbf{p}\downarrow} \quad (1.54)$$

$$\gamma_{+,p\downarrow}^\dagger = -e^{i\theta/2} \sin \alpha_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}\downarrow}^\dagger + e^{-\theta/2} \cos \alpha_{\mathbf{p}} c_{-\mathbf{p}\uparrow} \quad (1.55)$$

$$\gamma_{-,p\uparrow}^\dagger = e^{i\theta/2} \sin \beta_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}\uparrow}^\dagger + e^{-\theta/2} \cos \beta_{\mathbf{p}} c_{-\mathbf{p}\downarrow} \quad (1.56)$$

$$\gamma_{-,p\downarrow}^\dagger = -e^{i\theta/2} \sin \beta_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}\downarrow}^\dagger + e^{-\theta/2} \cos \beta_{\mathbf{p}} c_{-\mathbf{p}\uparrow} \quad (1.57)$$

Los operadores $\gamma_{\pm, p\sigma}^\dagger$ crean una cuasi partícula en las bandas de energía E_{\pm} con momentum \mathbf{p} y espín σ , al mismo tiempo se cumple que

$$\tan \alpha_{\mathbf{p}} = \frac{\varepsilon(p) + \sqrt{\varepsilon(\mathbf{p})^2 + |\Delta|^2}}{|\Delta|} \quad (1.58)$$

$$\tan \beta_{\mathbf{p}} = \frac{\varepsilon(p) - \sqrt{\varepsilon(\mathbf{p})^2 + |\Delta|^2}}{|\Delta|} \quad (1.59)$$

$$\gamma_{+, \mathbf{p}\uparrow}^\dagger = \gamma_{-, -\mathbf{p}\downarrow}; \gamma_{+, \mathbf{p}\downarrow}^\dagger = \gamma_{-, -\mathbf{p}\uparrow} \quad (1.60)$$

1.6.1. Formalismo Bogoliubov-de-Gennes(BdG) para superconductores

Anteriormente ya hemos realizado una descripción del modelo de Kitaev: Superconductor de onda p ($1D$) sin espín, se trata de un modelo muy simple de superconductores topológicos que consiste en fermiones sin espín cuya importancia se da en que funciona perfectamente como un modelo de juguete de un modelo más complicado de materiales con espín o el caso de fermiones cuyos espines estén completamente paralizados debido a un campo externo o una ruptura de simetría TR debido a un campo magnético.

Primero consideramos el modelo de Kitaev de un hilo en 1-D (ver fig 1.3), bajo el formalismo BdG. Sea una cadena de átomos en 1-D que aportan solo un fermión sin espín (espín polarizado) cuyo hamiltoniano en segunda cuantización es

$$H = \sum_p c_p^\dagger \left(\frac{p^2}{2m} - \mu \right) c_p \quad (1.61)$$

Y el potencial de emparejamiento es de la forma ($\Delta' = \Delta p$)

$$H_\Delta = \frac{1}{2} \left(\Delta p c_p^\dagger c_{-p}^\dagger + \Delta^* c_{-p} c_p \right) \quad (1.62)$$

De donde se tiene que el hamiltoniano BdG a resolver sería

$$H_{BdG} = \sum_p \frac{1}{2} \psi_p^\dagger \begin{pmatrix} \frac{p^2}{2m} - \mu & \Delta p \\ \Delta^* p & -\frac{p^2}{2m} + \mu \end{pmatrix} \psi_p \quad (1.63)$$

Siendo $\psi_p = (c_1, \dots, c_p, c_1^\dagger, c_{-p}^\dagger)^T$ agrupando todos los operadores de creación y destrucción. Los valores propios de energía asociados a este hamiltoniano describen dos bandas de energía $E = \pm \sqrt{\varepsilon(p)^2 + |\Delta|^2 p^2}$ (ver figura 1.4), se observa que en el punto crítico $\mu = 0$ separa dos fases dentro del mismo material del mismo modo en que se observó en el modelo de Kitaev en la sección anterior. La topología no trivial inherente al emparejamiento débil conduce a la aparición de modos Majorana en una cadena con condiciones de frontera abiertas (MF desapareados en los extremos). En el caso de $\mu \neq 0$ los MZM se acoplan al resto de la cadena

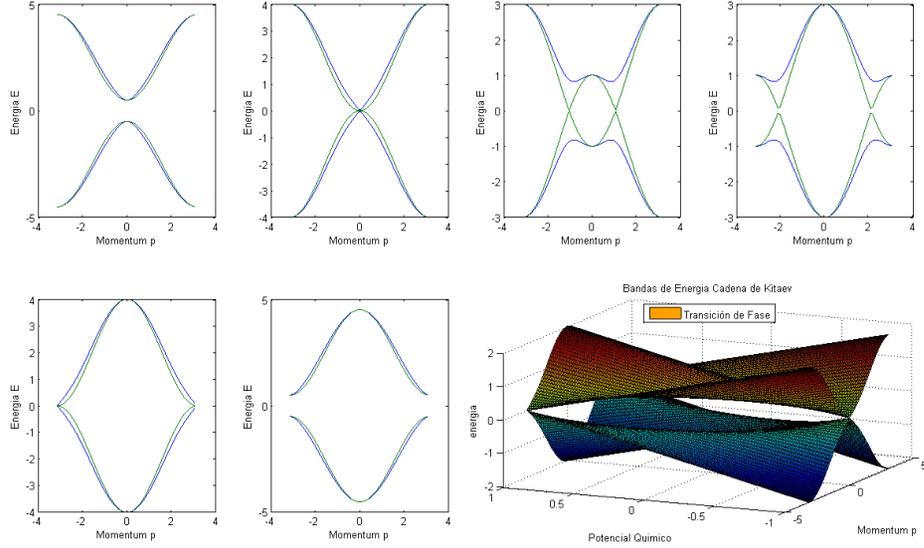


Figura 1.7: Gráfico de la relación de dispersión de un superconductor de onda P , 1-D. Para valores de $\mu = -2t, -1,5t - 0,5t, 0, 0,5t, 1,5t$ y $2t$

A modo de argumento de esta afirmación, se tiene que retomando el hamiltoniano de Kitaev en base a una aproximación de tight Binding

$$H_K = - \sum_{j=1}^N \mu c_j^\dagger c_j - \sum_{j=1}^{N-1} \left(t c_j^\dagger c_{j+1} + \Delta e^{i\phi} c_j c_{j+1} + h.c. \right) \quad (1.64)$$

Por simplicidad tomando $\Delta e^{i\phi} = |\Delta|$ se tiene que bajo el formalismo de Bogliubov-de-Gennes, asumiendo $t > 0$, el hamiltoniano descrito en el espacio de momentum mediante una transformada de Fourier

$$c_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_p e^{ipx_{a_0}} c_p; \quad c_j^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_p e^{-ipx_{a_0}} c_p^\dagger \quad (1.65)$$

$$H_{BdG} = \sum_p \frac{1}{2} \psi_p^\dagger \begin{pmatrix} -2t \cos p - \mu & 2i |\Delta| \sin p \\ -2i |\Delta| \sin p & 2t \cos p + \mu \end{pmatrix} \psi_p$$

permite evidenciar un espectro de energía doblemente degenerado tal que así

$$E = \pm \sqrt{(2t \cos p + \mu)^2 + 4|\Delta|^2 \sin^2 p} \quad (1.66)$$

En su forma compacta (1.65) se reescribe como

$$H_{BdG} = (-2t \cos p - \mu) \tau_z + 2\Delta \tau_y \sin p \quad (1.67)$$

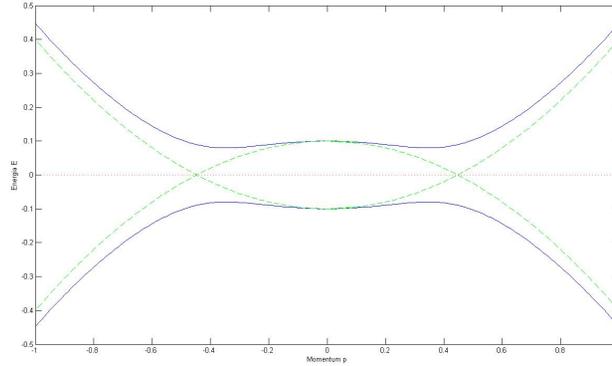


Figura 1.8: Gráfico de la relación de dispersión de un superconductor de onda P , 1-D. Para valores de $\mu = 0,5t$ □

En el caso de $|\Delta| \neq 0$ se presenta una peculiaridad ya que ambos términos dentro de la raíz tienden a desaparecer al mismo tiempo cuando $\mu_c = -2t$ lo cual implicaría que el gap entre ambos valores de energía también desaparecería en dicho punto crítico. Esta condición define dos líneas, indicadas en la Fig. 1.3 c , que marcan la fase límite entre las dos fases estables del modelo. (Según el principio general de continuidad adiabática que establece que dos fases son idénticas si pueden deformarse suavemente entre sí sin cerrar la brecha de excitación) Identificamos las región (1) una **fase trivial** cuando $\mu < -2t$ y (2) una **fase topológica** cuando $\mu > -2t$. Un cambio de fases entre ambas al presentar las mismas simetrías físicas se trata de un tipo especial de una transición de fase llamada transición de fase topológica. Las dos fases se distinguen por la presencia o ausencia de MZMs no emparejadas en los extremos de la geometría con condiciones de contorno abierto. Las implicaciones físicas de esta condición fueron descritas y expuestas con anterioridad en la presentación del modelo de Kitaev para un material superconductor de onda-p.

La pregunta que surge naturalmente en la búsqueda de sistemas superconductores topológicos es, *¿En ausencia de distinción de simetrías es posible distinguir teóricamente la topología fase de la fase trivial mediante el estudio de la mayor parte del sistema?*, la respuesta es afirmativa ya que tales fases pueden ser diferenciadas por medio de invariantes topológicos. Entre los invariantes topológicos mejor conocidos se encuentran el número de Chern, permitiendo diferenciar entre diferentes fases cuánticas Hall en sistemas cuánticos de Hall bidimensionales, y es uno de los invariantes que caracterizan aislantes topológicos en 2-D Y 3-D. Para los superconductores en 1-D, el invariante topológico relevante es el número de Majorana $M(H) = \pm 1$ formulado por primera vez por Kitaev quien mostró que todo sistema fermiónicos 1-D con orden SC se clasifican en dos categorías diferenciadas por su valor de M que indica la presencia o no de *MZMs* no emparejadas.

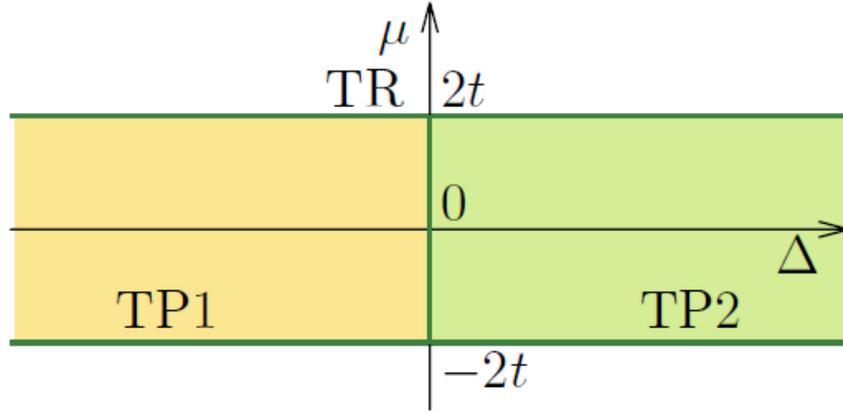


Figura 1.9: *Diagrama de fases de la cadena de Kitaev en función de $\Delta' = \Delta p$.*

La topología estudia objetos que en esencia presentan la peculiaridad de poder transformarse continuamente entre sí.[70] Mientras que, en materia condensada cabe preguntar si los hamiltonianos de dos sistemas cuánticos pueden transformarse continuamente el uno en el otro. De ser ese el caso, entonces se puede afirmar que dos sistemas son topológicamente equivalentes. Esto cambia drásticamente en el caso de sistemas con un gap de energía, entonces el hamiltoniano del sistema no tiene valores propios en un intervalo finito alrededor de la energía cero. En este caso *Dos sistemas cuánticos son topológicamente equivalentes si sus Hamiltonianos pueden deformarse continuamente entre sí sin cerrar el “gap” de energía*

En base a esto se busca algún camino que conecte H_K y H_{BdG} inicialmente se puede recurrir al conteo del número de niveles por debajo de la energía cero (E_F), es decir, el número de niveles de energía llenos. Esto es posible porque los valores propios de un hamiltoniano pueden tomar cualquier valor siempre y cuando no supere el nivel de Fermi. Por lo tanto, las transformaciones continuas existen exactamente entre los hamiltonianos con el mismo número de niveles de energía por debajo de la energía de Fermi.

1.6.2. Simetrías e Invariantes topológicos

En general, un cruce del nivel de Fermi entre los niveles de energía ocurre en presencia de una cantidad que se conserva. En el caso del Hamiltoniano de campo medio H_{BdG} de un superconductor si bien no conserva el número de partículas, sí conserva la paridad de este número. En otras palabras, formar y romper pares de Cooper no afecta si la red del material superconductor contiene ya sea un número

par o impar de electrones, es decir, la paridad de fermión sería una cantidad que se conserva.

Cualquier Hamiltoniano H_{BdG} anticonmuta con el operador de simetría partícula-Hueco (Ver Anexo B), $\Lambda = \tau_z K$, es decir

$$\begin{aligned}\Lambda H_{BdG} \Lambda &= -H_{BdG} \\ \tau_x H_{BdG} \tau_x &= -H_{BdG}^T\end{aligned}\quad (1.68)$$

Se revela que la existencia de cruces del nivel de fermi se debe a la conservación de la paridad de fermiones. La paridad de fermión, sin embargo, es una cantidad de muchos cuerpos, que no se puede describir directamente en términos de la imagen de una sola partícula del H_{BdG} . Para obtener una descripción del superconductor tuvimos que duplicar el número de grados de libertad mediante la introducción de agujeros haciendo que un par de Niveles de energía $\pm E$, no corresponde a estados cuánticos diferentes, sino a un único estado al que hemos denominado Cuasipartícula de Bogoliubov.

Cuando un par de niveles cruza la energía cero, la energía de excitación E cambia de signo y favorece la creación o destrucción de una cuasipartícula de Bogoliubov dentro del superconductor. En otras palabras estos cruces del Nivel de Fermi son interruptores de paridad de fermiones. Para definir formalmente este nuevo invariante se realiza una transformación del Hamiltoniano (1.65) en una matriz anti simétrica esto posible al hacer uso de la simetría partícula-hueco (1.68)

$$\begin{aligned}\bar{H}_{BdG} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} H_{BdG} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \\ \bar{H}_{BdG} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{H} - \mathbf{H}^* + \Delta - \Delta^* & -i\mathbf{H} - i\mathbf{H}^* + i\Delta + i\Delta^* \\ i\mathbf{H} + i\mathbf{H}^* + i\Delta - i\Delta^* & \mathbf{H} - \mathbf{H}^* - \Delta + \Delta^* \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (1.69)$$

La matriz Δ es antisimétrica debido a que los operadores de los fermiones anti conmutan (6.12), al igual $\mathbf{H} - \mathbf{H}^*$ es anti simétrica, así que de forma sencilla podemos notar que \bar{H}_{BdG} es matriz anti simétrica sesgada ($A^T = -A$ ó $a_{ji} = -a_{ij}$).

Una propiedad interesante de estas matrices anti simétricas, es lo que se denomina **Número de Pfaffian**

$$pf(A)^2 = \det(A) \quad (1.70)$$

Sí una matriz es similar a su propia transpuesta, deben tener los mismos valores propios. De ello se deduce que los valores propios de una matriz simétrica sesgada siempre vienen en pares, en particular los valores propios de (1.69) corresponden a $\pm E_n$ que tomando el producto de estos valores propios de energía se nos facilita el calcular el determinante de \bar{H}_{BdG}

$$Pf(A) = \pm \det(\bar{H}_{BdG}) = \pm \prod_n (-E_n^2) = \pm \prod_n (iE_n) \quad (1.71)$$

El signo del producto esté definido de forma única. En caso de un cambio de la paridad de los fermiones, el signo de Pfaffian cambia también entre los valores positivo y negativo (mientras que el determinante permanece igual). Esta característica del Número o polinomio de Pfaffian realmente lo convierte en lo que estamos buscando. Por el momento podemos definir el signo del Pfaffian como nuestro invariante topológico Q_{BdG} asociado a la simetría de paridad de fermiones presente en los superconductores.

$$Q_{BdG} = \text{sign} [Pf(i\bar{H}_{BdG})] = \pm 1 \quad (1.72)$$

A su vez Kitaev introdujo la noción del número de Majorana, por el momento No se intenta dar una derivación rigurosa del mismo como invariante topológico -una tarea que a menudo es difícil incluso para los investigadores avanzados en el campo- mas bien se le dará una explicación Heurística del mismo- sigue que cualquier hamiltoniano BdG invariante ante traslaciones se caracteriza por el momentum del cristal p , de todos sus posibles valores H_{BdG} presenta una simetría partícula-agujero para $p = 0, \pi$ los cuales satisfacen $p \equiv -p = |2\pi|$. De este modo, nos encontramos ante la posibilidad de usar a (1.72) como un invariante topológico de dos componentes, dado que este número no puede cambiar bajo transformaciones continuas dentro del conjunto de Hamiltonianos considerados (H_K y H_{BdG})

$$M = \text{sgn} [Pf[\tau_x H_{BdG}(0)], Pf[\tau_x H_{BdG}(\pi)]] \quad (1.73)$$

$$\tau_x H_{BdG}(p = 0, \pi) = (\pm 2t - \mu) \tau_x \tau_z = i(\pm 2t - \mu) \tau_y \quad (1.74)$$

Substituyendo (1.74) en la definición del Número de Majorana (1.73) esta última se transforma en

$$M = \text{sgn} [\mu^2 - (2t)^2] \quad (1.75)$$

Recuperando exactamente el criterio $|\mu| < 2t$ característica principal de la existencia de la superconductividad topológica en el modelo de Kitaev. Este invariante topológico también proporciona información sobre la topología de superconductores bidimensional, que se describen generalmente por un invariante topológico denominado como número de Chern, la invariante topológica (1.73) determina la paridad del número de Chern en superconductores topológicos bidimensionales, que es exactamente la condición para obtener número impar de modos Majorana en vórtices.

Dado que este número no puede cambiar bajo transformaciones continuas dentro del conjunto de Hamiltonianos a considerar. Y cada vez que un nivel de energía cruza la energía cero (Es exitado), el número de niveles por debajo de la energía de Fermi cambia. Por lo tanto, tal cruce cambia el invariante topológico. A eso lo llamamos una transición de fase topológica. Una vez identificado el invariante topológico, podemos

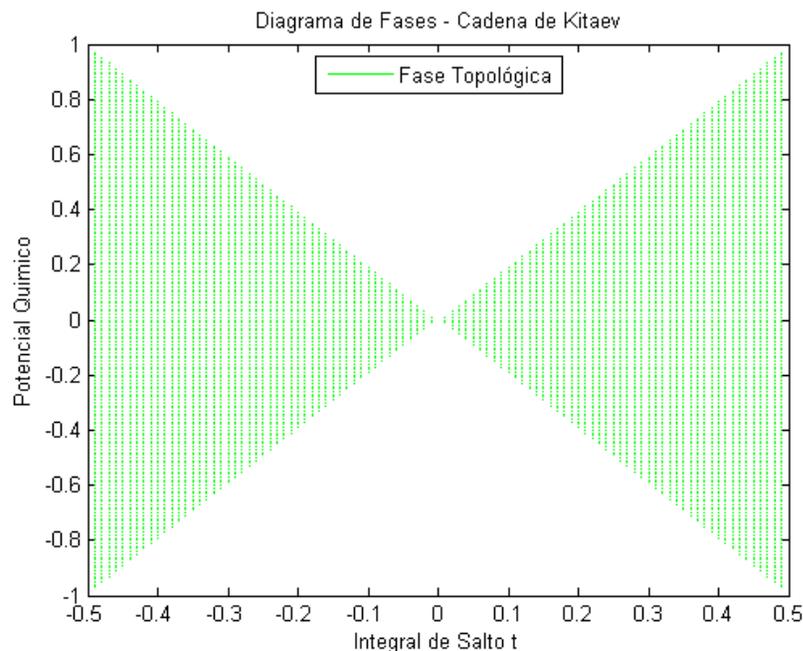


Figura 1.10: *Diagrama de fases de un superconductor de onda P, 1-D en el plano $\mu - t$*

clasificar todos los hamiltonianos cuánticos según su valor. De esta manera creamos clases de Hamiltonianos que son todos topológicamente equivalentes, y podemos hacer un seguimiento de todas las diferentes fases topológicas que estos Hamiltonianos pueden soportar, dando inicio al trabajo de probar las propiedades teóricamente predichas de los MFs y los sistemas de superconductores topológicos y diseñar configuraciones para una manipulación cada vez más avanzada de la información cuántica que pueden codificar.

1.6.3. Fases topológicas protegidas por simetrías

Las fases topológicas tienden a ser robustas bajo la acción de perturbaciones ambientales. Esta robustez está asociada a una simetría particular o un grupo de simetrías que “protege” la fase ante perturbaciones, por este motivo a estos estados de la materia se los denomina fases topológicas protegidas por simetrías (fases SPT). Las fases SPT se encuentran entre las más robustas fases de la naturaleza. Su función de onda de muchos cuerpos no se puede describir con orbitales puramente localizados, y la información que define a estas fases se almacena de manera no local, repartida por todo el sistema. Por lo tanto, sus propiedades físicas están protegidas de perturbaciones locales, como defectos, impurezas u otras imperfecciones materia-

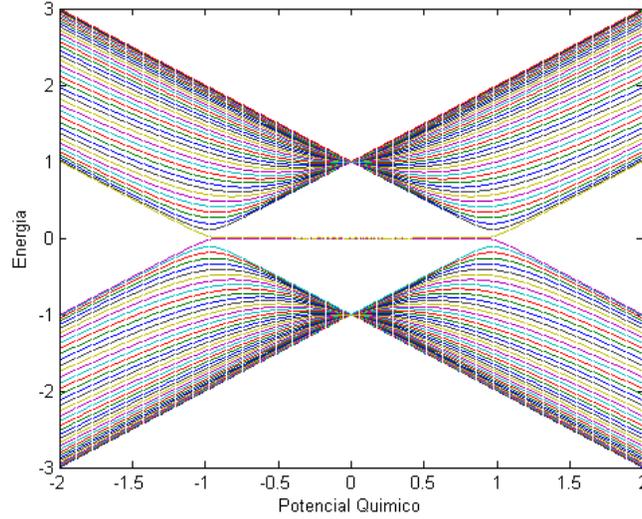


Figura 1.11: Gráfico de la relación de dispersión de un superconductor de onda P , 1-D. Para valores de $\mu = [-2t, 2t]$

les. En los últimos años, la búsqueda de fases de SPT ha generado muchos trabajos tanto en el lado teórico como en el experimental.

Uno de los logros más grandes de la física en el siglo pasado fue el entendimiento y la clasificación de las fases basado en el concepto de las rupturas espontáneas de simetrías (spontaneous symmetry breaking). Con este paradigma, desarrollado en primer lugar por Landau (*Ver Anexo D*), una fase es caracterizada de acuerdo a la simetría que es espontáneamente rota en la transición. Por ejemplo, la fase ferromagnética rompe la simetría rotacional de spin ($SU(2)$), aunque las interacciones entre los electrones respetan esta simetría. Otro ejemplo más cotidiano es la transición de un líquido a un sólido, en donde los iones se acomodan en una estructura periódica rompiendo de manera espontánea la simetría traslacional. En la década de los 80 se descubrió el efecto Hall cuántico (QHE), abriendo las puertas a una nueva noción en el estudio de las transiciones de fases que iba más allá del paradigma de Landau, a diferencia de las transiciones de fases continuas descritas por la teoría de Landau ninguna simetría es rota y ningún parámetro de orden puede ser identificado. Por otro lado, la distinción entre estas fases es topológica [49], esto significa que no se puede ir de manera continua, variando los parámetros del sistema, desde una fase a la otra sin cerrar el gap de energía en el proceso. Estas nuevas fases, denominadas fases topológicas, deberán ser caracterizadas por un invariante topológico, el cual no se modifica bajo una variación continua de los parámetros del sistema siempre y cuando no ocurra un cierre del “bulk gap” una transición de fases. Para el QHE la

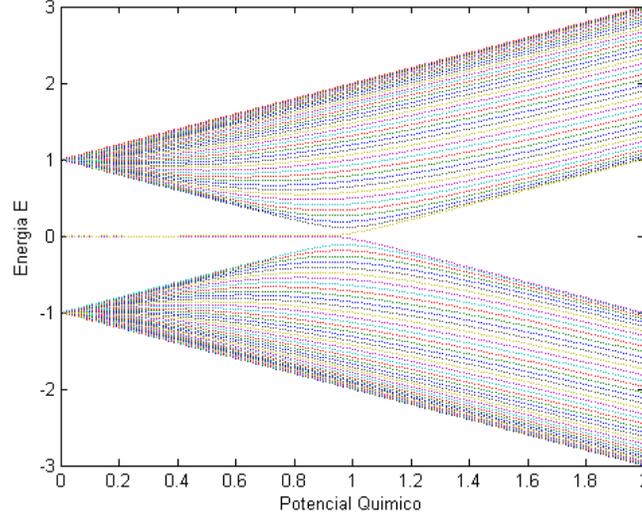


Figura 1.12: Gráfico de la relación de dispersión de un superconductor de onda P , 1-D. Para valores de $\mu = [0, 2t]$

conductividad Hall es un invariante topológico del sistema.

Principales simetrías en materiales topológicos

El teorema de Weigner que postula la forma general de un operación de simetría arbitraria S actuando en un estado x del espacio de Hilbert H se define como

$$Sx = (\phi(x)U)x \quad (1.76)$$

Donde U es una matriz unitaria o anti-unitaria y $\phi(x)$ es una fase de módulo 1. Puesto que este teorema es válido para toda simetría, se entiende que cualquier operador generador de simetrías es también unitario o anti-unitario dando así una pista clara de cómo encontrar la forma explícita de estos. Para materiales que muestran propiedades topológicas, las dos simetrías que son de importancia son: la simetría partícula-hueco (PHS) y la simetría de inversión temporal (TRS). Cuyos operadores se denominan Λ y T respectivamente. Y se tienen que, un operador A presenta simetría TR (PH) si conmuta con $T(\Lambda)$.

I.1 Simetría de inversión temporal:

Un sistema que presenta simetría TR es aquel invariante ante la siguiente transformación $[A, T] = 0$; o bien $A = TAT^{-1}$ donde

$$T : t \rightarrow -t \quad (1.77)$$

Para apreciar más a detalle como luce el operador T , se debe observar cual es su efecto en el conmutador $[\hat{x}, \hat{p}]$. Mientras la posición no se ve afectada por el operador T , en el caso del momentum que se encuentra asociado a una derivada con respecto al tiempo; al realizar la transformación $t \rightarrow -t$ el signo de \hat{p} también cambia, es decir

$$T [\hat{x}, \hat{p}] T^{-1} = T i \hbar T^{-1} = - [\hat{x}, \hat{p}] T T^{-1} = -i \hbar \quad (1.78)$$

Se evidencia que el operador de la TRS actúa como $T = i \sigma_y \kappa$, siendo proporcional al operador complejo conjugado κ el cual es un operador anti unitario .

I.2 Simetría partícula-hueco:

Una simetría partícula-agujero existe cuando un sistema es indiferente a describirlo en términos de partículas o en términos de agujeros (ausencia de partículas). En el formalismo de segunda cuantificación el efecto de un sistema que tiene PHS es fácil de ver, puesto que sí se sustituyen los operadores de creación del hamiltoniano en operadores de aniquilación, el hamiltoniano debe permanecer igual. Como consecuencia un sistema con PHS presenta un espectro de energía simétrico alrededor de $E = 0$.

De manera similar a la simetría de inversión temporal pero esta vez tomando la acción del operador Λ sobre el conmutador $[t, E] = i \hbar$, permite deducir la forma explícita del operador en cuestión. En este caso se tiene que

$$\Lambda i \hbar \Lambda^{-1} = -i \hbar \quad (1.79)$$

es decir, esta simetría lo que hace es “intercambiar” partículas por huecos, mediante el operador $\Lambda = \tau_x K$, donde, la matriz de Pauli τ_x actúa las veces de los grados de libertad hueco-partícula. A razón del signo menos por cada auto vector $\phi_i^v = (u_i^v, v_i^v)^T$ de energía ε_v existe un auto vector con energía $-\varepsilon_v$, dado por

$$(\Lambda \phi^v)_i = \tau^x \begin{pmatrix} u_i^v \\ v_i^v \end{pmatrix}^*$$

En el caso del Hamiltoniano de Bogoliubov de Gennes que actúa sobre conjunto de estados básicos $|n\rangle |\tau\rangle$ con $|\tau\rangle = \pm 1$ correspondientes a los electrones y huecos respectivamente. El escribir el Hamiltoniano en el espacio de momentum no afecta la simetría partícula-agujero. Se tiene que

$$\Lambda |p\rangle |\tau\rangle = \left(\sum_n e^{-ikn} \right)^* |n\rangle \tau_x |\tau\rangle^* = |-p\rangle \tau_x |\tau\rangle^*$$

Por lo tanto la acción de P sobre H_{BdG} en el espacio de momentum es

$$\Lambda H_{BdG} \Lambda^{-1} = \sum_k \tau_x H^*(p) \tau_x |-p\rangle \langle -p| = \sum_k \tau_x H^*(-p) \tau_x |p\rangle \langle p|$$

Lo cual implica que $\Lambda H_{BdG} \Lambda^{-1} = -H_{BdG}$, dada una solución con energía E y momentum p , existe la presencia de energía $-E$ y momentum $-p$.

I.3 Simetría Quiral Simetría Quiral Esta tercera simetría puede ser definida como el producto de los otros dos operadores, $C = TP$. E implica físicamente que los grados de libertad (el hamiltoniano) del sistema cuántico puede ser divididos en 2 Subsistemas H_A y H_B con lo cual el hamiltoniano original puede ser reescrito como

$$H = \begin{pmatrix} 0 & H_{AB} \\ H_{AB}^\dagger & 0 \end{pmatrix} \quad (1.80)$$

La presencia o ausencia de las simetrías anteriormente mencionadas es usada como una forma de clasificar tanto superconductores y aislantes topológicos. En función de todas las combinaciones que se pueden presentar de las simetrías en un sistema cuántico existen un total de 10 simetrías compuestas (Ver tabla 1).

Nomenclatura Cartan	TRS	PHS	CHS	d=1	d=2	d=3
<i>A</i> (unitario)-(Wygner-Dyson)	0	0	0	-	Z	-
<i>AI</i> (ortogonal)-(Wygner-Dyson)	1	0	0	-	-	-
<i>AII</i> -(Wygner-Dyson)	-1	0	0	-	Z_2	Z_2 -
<i>AIII</i> -(Quiral unitario)	0	0	1	Z	-	Z
<i>BDI</i> -(Quiral ortogonal)	1	1	1	Z	-	Z
<i>CII</i> -(Quiral)	-1	-1	1	Z	-	Z_2
<i>D</i> -(BdG)	0	1	0	Z_2	Z	-
<i>C</i> -(BdG)	0	-1	0	-	Z	-
<i>DIII</i> -(BdG)	-1	1	1	Z_2	Z_2	Z
<i>CI</i> -(BdG)	1	-1	1	-	-	Z

LISTA DE TABLAS 1.1: Clasificación de Aislantes y Superconductores topológicos en función de Las simetrías e invariantes topológicos.

El modelo de la cadena unidimensional de Kitaev en 1-D y del superconductor quiral de onda p pertenecen a la clase D, esto significa que presentan PHS mientras tienen una ausencia de TRS y CHS. A partir de la tabla 1 se observa que para sistemas de la clase D con dimensión $d = 1$ (Cadena de Kitaev) se espera que tenga un invariante topológico Z_2 (Número de Majorana), y para sistemas $d = 2$ presentan un invariante topológico Z (Número de Chern-Winding).

De momento, Se puede concluir del análisis presentado anteriormente que los fermiones de Majorana aparecen naturalmente en la descripción teórica de un superconductor genérico. El interés reciente en la física de la materia condensada ha sido centrado en los modos cero Majorana (MZMs), ya brevemente mencionado en relación con la condición de Majorana. Los MZM constituyen un caso especial de

fermiones majoranas que ocurren a la energía cero exacta y se localizan típicamente en espacio en las proximidades de defectos, como vórtices o dominios de paredes. Su propiedad clave es que el estado estacionario asociado con el MZM por sí mismo satisface la condición Majorana. Veremos como tales modos cero ocurren en los llamados superconductores topológicos y de hecho no obedecen el intercambio fermiónico ordinario siendo anyones no abelianos [115]. Es esta propiedad que ha motivado intensa teórica y estudios experimentales en la última década e hizo búsquedas para MZMs entre los subcampos más activos de materia condensada física. Dedicamos tiempo a continuación a estos modos cero de Majorana, superconductores topológicos y la explicación de las estadísticas de intercambio no abelianas. Es importante destacar que estos fenómenos asociados con Los MZM en sólidos solo se producen en sistemas unidimensionales y bidimensionales y no tienen análogo directo en la física de alta energía.

Capítulo 2

Superconductores Topológicos 2D

Antes de discutir los estados ligados a valores propios cero de energía localizados en defectos del parámetro de orden en materiales superconductores 2-D, es instructivo discutir cómo emergen tales soluciones en un hamiltoniano de Dirac unidimensional (1D). Las soluciones del estado ligado a energía cero para diversos sistemas discutidos en este capítulo pueden ser entendidos cualitativamente por mapeo de los hamiltonianos correspondientes en el problema de Dirac unidimensional.

En este capítulo se hace uso del argumento cualitativo que proporcionan las soluciones de Jackiw-Rebbi, como una imagen atractiva de estados de energía cero topológicamente robustos localizados en límites y defectos de parámetros de orden en superconductores $p_x + ip_y$ sin espín. Se da por finalizado el estudio de estos *superconductores de onda $p_x + ip_y$* , obteniendo el espectro de energía y la forma explícita de estos MZMs ubicados en los defectos topológicos como pueden ser los vórtices cuánticos. Al mismo tiempo se calcula el respectivo invariante topológico asociado a este modelo bidimensional (*Número de Chern-Winding*) con la finalidad de poder observar las características que diferencian la fase trivial como topológica presentes en este tipo de sistemas.

2.1. Soluciones Jackiw-Rebbi

Uno de los ejemplos de soluciones de estado de borde a energía cero en un sistema de materia condensada unidimensional fue investigado en los estados del dominio de pared del poliacetileno, demostrando la existencia de una solución de estado a energía cero localizada en un dominio pared del parámetro de orden, al recurrir a la resolución explícita de las ecuaciones de campo-medio [94][95]. Notablemente, este estado ligado de energía cero se muestra como una realización de lo que se conoce como MZ, asociado a la masa de solitones de un problema de Dirac 1D investigado

por Jackiw y Rebbi. El hamiltoniano de Dirac está dado por[100],

$$H_D = -\gamma^0 \gamma \cdot \vec{\nabla} + \gamma^0 m \quad (2.1)$$

Cumpléndose las relaciones

$$\gamma^0 \gamma^0 = \mathbf{I}, \gamma^0 \gamma^1 + \gamma^1 \gamma^0 = 0, \gamma^1 \gamma^1 = -\mathbf{I}; \gamma^0 = \sigma_z, \gamma^1 = i\sigma_x \quad (2.2)$$

El hamiltoniano (2.1) en la segunda cuantización toma la forma en 1-D

$$H_D^1 = \int dx [-iv_f \psi^\dagger \sigma_y \partial_x \psi + m(x) \psi^\dagger \sigma_z \psi] \quad (2.3)$$

Donde $\psi^\dagger = (f_1^\dagger(x), f_2^\dagger(x))$, siendo $f_{1,2}(x)$ dos campos fermiónicos independientes, y la velocidad de Fermi en reemplazo del factor de la velocidad de la luz, $c = 1$, de tal manera (2.3) se puede describir una ecuación efectiva de Dirac válida para una red cristalina. El segundo término en (2.3) presenta una masa efectiva de la cual se asume que presenta un cambio de signo en $x = 0$ (ubicación del domino pared), es decir, $m(-x) = -m(x)$.

A partir de lo anterior se tiene que el operador de la cuasi partícula

$$q^\dagger = \int dx [\phi_1(x) f_1^\dagger + \phi_2(x) f_2^\dagger(x)] \quad (2.4)$$

Satisface la siguiente condición de conmutación. Al desarrollar (2.3) se encuentra la ecuación de Dirac para la función de onda de 2 componentes $\phi^T(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x))$

$$-iv_f \sigma_y \partial_x \phi(x) + \sigma_z m(x) \phi(x) = \varepsilon \phi(x) \quad (2.5)$$

cuyo hamiltoniano se ve fácilmente que es

$$H_D^1 = -iv_f \sigma_y \partial_x + \sigma_z m(x) \quad (2.6)$$

y anti conmuta con σ_x , al igual que σ_y anti conmuta con σ_x y σ_z , es decir, $\{H_D^1, \sigma_x\} = 0$. Entonces, si es una función propia de (2.5) y valor propio dado que

$$H_D^1 \sigma_y \phi(x) = -\sigma_y \phi(x) H_D^1 = -\varepsilon \sigma_y \phi(x) \quad (2.7)$$

$\sigma_y \phi(x)$, también es una función propia con auto valor $-\varepsilon$. Como resultado, las soluciones de $\varepsilon = 0$, en (2.7) pueden ser estados propios de H_D^1 y σ_x . Denotando $\phi_0(x)$ como dicha solución $\sigma_x \phi_0(x) = \lambda \phi_0(x)$. A la par, definiendo $\varepsilon = 0$ en (2.7) y multiplicando por $i\sigma_z$ se obtiene

$$\partial_x \phi_0(x) = \frac{\lambda}{v_f} m(x) \phi_0(x), \text{ donde } \begin{cases} \phi_0(x) = e^{\frac{\lambda}{v_f} \int_0^x m(x') dx'} \phi_0(0) \\ m(x) = \pm \text{sign}(x) |m(x)| \end{cases} \quad (2.8)$$

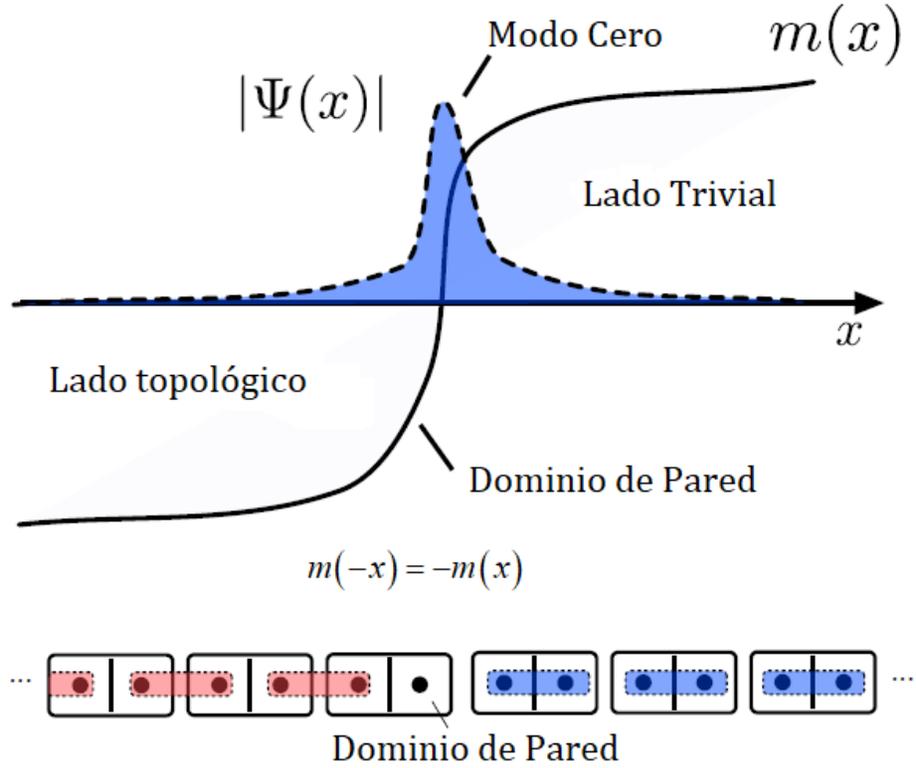


Figura 2.1: Representación grafica de un dominio de pared, para un sistema de Dirac unidimensional, en este caso $m(x)$ hace las veces de un valor variable de μ en modelo de la cadena de Kitaev

Se demuestra que para un cambio de signo hay un auto valor de energía cero del Hamiltoniano de Dirac 1-D, (ver fig 2.1) con una función de onda función normalizable para $\lambda = \mp 1$, que decae exponencialmente lejos del dominio de pared. Nótese que, la solución de energía cero es robusta ante variaciones en la función de distribución de masa $m(x)$, al igual que hay un cambio del signo del termino asociado a la masa para ciertos valores de x . Las soluciones normalizables existen para dos valores $m_1, m_2 > 0$

$$\begin{aligned} m(x) &= -m_1; & \text{si } x < 0 \\ m(x) &= +m_2; & \text{si } x > 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

En particular, las soluciones existen incluso si la masa al lado derecho del dominio de pared diverge $m_2 \rightarrow \infty$, es decir, la función de onda corresponde a auto valores cero de energía y se desvanece para $x > 0$. Sin embargo, sigue siendo distinto de cero y exponencialmente localizadas para $x \leq 0$. Con lo cual (2.8) supone un sistema

topológico cerca de un límite recto (interfaz) con el vacío, que puede ser moldeado cómo una ecuación de Dirac 1-D (en dirección perpendicular al límite) con un término de masa negativa. Mientras el vacío justo fuera del límite es una región con una masa positiva “infinita”, esto asegura la existencia de una función propia robusta de energía cero localizada exponencialmente en la dirección perpendicular al límite del medio topológico.

2.2. Superconductor 2-D sin Espín.

Los superconductores 2-D sin espín son sistemas que de manera análoga al caso en una dimensión soportan MZMs localizados en defectos de la red de fermiones ordinarios, como puede ser los bordes de esta. En el caso bidimensional se trata de un fenómeno conocido como vórtices cuánticos. (Ver Anexo C)

Un vórtice cuántico se caracteriza por una región no homogénea en un fluido superconductor, acompañado por la presencia de momentum angular. En el centro la densidad de electrones superconductores, n_s , y consecuentemente el parámetro de orden, tiende a cero. Para un vórtice con simetría rotacional $|\psi(\mathbf{r})|^2$ depende únicamente de r , con lo cual una aproximación simple para estos vórtices viene a ser

$$\psi(\mathbf{r}) = g(r) e^{iS(\mathbf{r})} \quad (2.10)$$

Siendo $g(r)$ una función real. Sea $\psi(\mathbf{r})$ una función propia del operador momentum angular, $L_z = i\hbar\partial/\partial\theta$, con lo cual $S(\mathbf{r}) = n\theta$ para un valor arbitrario de n y θ un ángulo en coordenadas polares. Por otra parte, se tiene que $\psi(r, \theta)$ sea uní-evaluada, es decir, $\psi(r, \theta) = \psi(r, \theta + 2\pi)$ dando lugar a que $n \in \mathbb{Z}$, a este número entero se le denomina vorticidad.

Anotación: Si una partícula cargada viaja en una región libre de campo que rodea otra región, en la que hay un flujo magnético atrapado Φ , entonces al completar un bucle cerrado, la función de onda de la partícula adquirirá un factor de fase adicional. Pero la función de onda debe ser de un solo valor en cualquier punto del espacio.

En 2-D el hamiltoniano de campo medio que describe las excitaciones en forma de quasipartículas de dicho sistema es $\Delta' = \Delta(p_x + p_y)$

$$H_{2D}^p = \sum_{\mathbf{p}} \xi_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}}^{\dagger} c_{\mathbf{p}} + \Delta \sum_{\mathbf{p}} [(p_x + ip_y) c_{\mathbf{p}}^{\dagger} c_{\mathbf{p}}^{\dagger} + h.c.] \quad (2.11)$$

Donde $\xi_{\mathbf{p}} = \varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu$ siendo $\varepsilon_{\mathbf{p}} \rightarrow \frac{\mathbf{p}^2}{2m^*}$ para valores pequeños de \mathbf{p} , y m^* es la masa efectiva, y se omite el operador asociado al espín del electrón puesto que se sigue considerando un sistema sin espín (o con espín polarizado). Read and Green demostraron que para el hamiltoniano (2.11) la función de onda de los pares de Cooper

sufre un cambio dramático el cual se da en función de μ . [6]

En el caso de $\mu < 0$, $g(r) \sim e^{-r/r_0}$ los pares están estrechamente acoplados y el superconductor se encuentra en una fase de acoplamiento fuerte.

Por otro lado en el caso de $\mu > 0$, $g(r) \sim \frac{1}{r}$ los pares están acoplados débilmente y el superconductor en cuestión se encuentra en una fase similar a la de un Superconductor BCS de emparejamiento débil.

La transición de fase en $\mu = 0$, ocurre cuando el gap de energía se cierra en el espacio de momentos para $\mathbf{k} = 0$, al igual que en el caso unidimensional no está asociada con ningún cambio en la simetría del estado superconductor pero si en su naturaleza topológica dejando de ser invariante ante transformadas de inversión temporal. El invariante topológico en cuestión asociado al hamiltoniano (2.11) puede ser deducido a partir del propio hamiltoniano escrito en la base de Nambu.

$$H_{2D}^p = \sum_{\mathbf{p}} \psi^\dagger(\mathbf{p}) H_{BdG}^p \psi(\mathbf{p}) \quad (2.12)$$

$$H_{BdG}^p = \mathbf{d}(\mathbf{p}) \cdot \sigma$$

Donde $\psi^\dagger(\mathbf{p}) = (c_{\mathbf{p}}^\dagger, c_{-\mathbf{p}})$ y $\psi(\mathbf{p})$ su conjugado. Mientras $\mathbf{d}(\mathbf{p})$ es un vector de 3 componentes definido de la siguiente manera, $\mathbf{d}(\mathbf{p}) = (\text{Re}(\Delta_{\mathbf{p}}), -\text{Im}(\Delta_{\mathbf{p}}), \xi_{\mathbf{p}})$; $\Delta_{\mathbf{p}} = \Delta_0(p_x + ip_y)$ y σ es un “Vector” de las matrices de Pauli.

Definición: El vector unitario correspondiente a $\mathbf{d}(\mathbf{p})$ como $\hat{\mathbf{d}}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{d}(\mathbf{p})}{|\mathbf{d}(\mathbf{p})|}$ provee un mapeo en 2-D del espacio de momentos en la superficie de una esfera definida por $|\hat{\mathbf{d}}(\mathbf{p})| = 1$. A medida que \mathbf{p} se mueve alrededor del espacio de momentos en 2-D el vector $\hat{\mathbf{d}}(\mathbf{p})$ delimita un área sobre la esfera unitaria. Al iniciar con $|\mathbf{p}| \rightarrow \infty$ un recorrido del espacio de momentos termina en el punto de $|\mathbf{p}| = 0$, el número de veces que el vector recorre la esfera unitaria es el invariante topológico denominado número de Chern (C) cuya definición formal es

$$C = \int \frac{d^2p}{4\pi} \left(\hat{\mathbf{d}} \cdot \left(\partial_{p_x} \hat{\mathbf{d}} \times \partial_{p_y} \hat{\mathbf{d}} \right) \right) \quad (2.13)$$

Geométricamente:

Para $|\mathbf{p}| \rightarrow \infty$ en cualquier dirección, $\xi_p \sim \frac{p^2}{2m^*}$, es dominante y $\hat{\mathbf{d}}$ apunta al Norte de la esfera unitaria. En la fase de acoplamiento fuerte de (2.12), $\mu < 0$ y $|\mathbf{p}| = 0$, $\hat{\mathbf{d}}_x, \hat{\mathbf{d}}_y = 0$, $\hat{\mathbf{d}}_z = -\mu > 0$, es decir continúa apuntando al polo norte. Así mismo en la fase de acoplamiento débil $\mu > 0$, el origen de la esfera en el espacio de momentos

$\hat{\mathbf{d}}_z = -\mu < 0$, y el vector unitario esta vez apunta al polo sur.

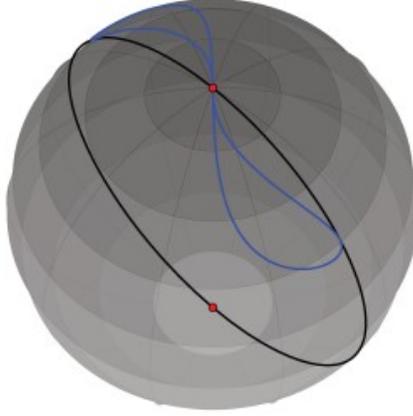


Figura 2.2: Representación gráfica en el espacio de momentum sobre una superficie esférica de las fases topológicas (a) Curva azul fase trivial (b) Curva negra fase topológica. [96]

Físicamente:

Estos MZMs no existen en la fase de fuerte acoplamiento, aun en la cercanía de los vórtices o bordes ($\mu < 0$) .

El número de Chern desaparece en la fase de acoplamiento fuerte mientras que adquiere un valor de en la fase de acoplamiento débil, su valor únicamente puede cambiar debido a una transición de estas fases topológicas, en el presente caso, ocurre debido a un cierre del “gap de energía” para $\mu = 0$. *Read and Green*[6], mostraron que las diferencias topológicas entra ambas fases da acoplamiento fuerte y débil; en la fase de emparejamiento débil ($\mu > 0$), la ecuación BdG $H_{2D}^p \psi(r) = E\psi(r)$ en la proximidad de vórtices o los bordes (donde el parámetro de orden Δ se desvanece) admite soluciones cuyo valor propio de energía es $E = 0$, así mismo el operador correspondiente en segunda cuantización de los estados de Bogliubov, es hermitico, $\gamma^\dagger = \gamma$.

Para poder entender esto considérese que un borde o límite del sistema se encuentra paralelo con el eje y, separando el sistema en una fase de emparejamiento débil en $x < 0$, y un estado de vacío en $x > 0$. Este estado de vacío se caracteriza por la

ausencia de partículas, que puede ser implementado teniendo un potencial relativamente alto (una pared) para $x > 0$, dicho potencial modifica el potencial químico en (2.11) como $\mu \rightarrow (\mu - V)$. Mientras que para $x < 0$ donde el emparejamiento es débil con $\mu > 0$, indica la presencia de un dominio de pared en función de μ , que permita dicho cambio de signo cerca al límite paralelo al eje-y, lo cual hace de dicho dominio de pared una plataforma ideal donde encontrar MZMs. Haciendo uso de la aproximación para valores pequeños de p se tiene que $\xi_p = \frac{p^2}{2m^*} - \mu \cong -\mu$, es posible ignorar el término cuadrático de p respecto al término lineal de p del parámetro de orden, con lo cual, para $E = 0$, las ecuaciones BdG para el espinor $\psi(r) = (u(r), v(r))^T$ cerca del límite paralelo al eje y puede escribirse como

$$\begin{aligned} i\Delta \frac{\partial v}{\partial x} &= \mu(x)u \\ i\Delta \frac{\partial u}{\partial x} &= -\mu(x)v \end{aligned} \tag{2.14}$$

Al reescribir estas ecuaciones en términos de $\psi(r)$ y las matrices de Pauli en el espacio de momentum es idéntica al ecuación de Dirac en 1-D (2.7) con $\varepsilon = 0$ y $\mu(x)$ jugando el rol de la variación espacial de la masa de Dirac. A partir de las soluciones de Jackiw-Rebbi (2.8) sigue que, en la fase de emparejamiento débil de la ecuación (2.11) existe una solución de energía robusta topológicamente para las ecuaciones BdG cerca del límite el cual actúa como un dominio de pared en función del potencial químico, y la función de onda correspondiente está localizada exponencialmente en dirección perpendicular del límite. Para la fase de acoplamiento fuerte ($\mu < 0$) de la ecuación (2.11) tanto para $x > 0$ (el vacío) y $x < 0$ (el sistema), en ausencia de un dominio de pared en función del potencial químico no hay garantía de que soluciones de energía cero existan en los límites.

2.2.1. Ecuaciones BdG de superconductores p+ip

Retomando la ecuación (2.11) el hamiltoniano en el régimen continuo toma la forma [97][98]

$$H = \int d^2r \psi^\dagger(\mathbf{r}) \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu \right) \psi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int d^2r d^2r' \left(\psi^\dagger(\mathbf{r}) D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') + h.c \right) \tag{2.15}$$

Sea $D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \Delta \left(\frac{r+r'}{2} \right) (\partial_{x'} + i\partial_{y'}) \delta^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ con $\delta^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ la función delta de Dirac en 2-D.

Mediante El formalismo BdG se pretende diagonalizar este hamiltoniano al igual que en el capítulo anterior mediante la definición de un conjunto de operadores de

cuasi partículas $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que (2.15) se puede reescribir como

$$H = E_{GS} + \sum_n E_n \Gamma_n^\dagger \Gamma_n \quad (2.16)$$

Estos operadores siguen preservando la estadística de los fermiones convencionales cuyas operaciones satisfacen

$$\begin{aligned} \{\Gamma_n, \Gamma_m^\dagger\} &= \delta_{m,n}, \\ \{\Gamma_n, \Gamma_m\} &= \{\Gamma_n^\dagger, \Gamma_m^\dagger\} = 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Para E_{GS} , la energía del estado fundamental. La sumatoria se realiza para todos los valores positivos de energía $E_n > 0$. Al mismo tiempo se tiene que los MZ denotados para $E_n = 0$ no contribuyen al espectro de energía obtenido de este hamiltoniano, su contribución se describe en la siguiente sección. La motivación de aplicar este formalismo se debe a que como se vio en el caso del modelo de Kitaev las bandas de energía positiva y negativas emergen de una única sumatoria para todos los valores propios positivos de E_n , esto en conjunción con la definición de cuasi partículas asociadas a valores positivos de energía.

La transformación de BdG permite definir la relación entre $\psi(\mathbf{r})$ y Γ_n ,

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) &= \sum_n (u_n(\mathbf{r})\Gamma_n + v_n^*(\mathbf{r})\Gamma_n^\dagger) \\ \Gamma_n &= \int d^2r (u_n^*(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) + v_n^*(\mathbf{r})\psi^\dagger(\mathbf{r})) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Al combinar (2.17) y (2.18) se obtienen las relaciones de ortonormalidad

$$\begin{aligned} \int d^2r [u_n^*(\mathbf{r})u_m(\mathbf{r}) + v_n^*(\mathbf{r})v_m(\mathbf{r})] &= \delta_{n,m} \\ \int d^2r [v_n(\mathbf{r})u_m(\mathbf{r}) + u_n(\mathbf{r})v_m(\mathbf{r})] &= 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

A su vez (2.19) se pueden tomar como la relación de ortogonalidad de un espinor de 2 componentes y su respectivo producto interno

$$\phi_n(\mathbf{r}) \equiv \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix}; \langle \phi_n | \phi_m \rangle \equiv \int d^2r \phi_n^\dagger(\mathbf{r})\phi_m(\mathbf{r}) \quad (2.20)$$

Para poder diagonalizar el hamiltoniano de forma sencilla se calcula $[H, \psi(\mathbf{r})]$ de dos diferentes maneras.

Primera forma

A partir de (2.17) y (2.18)

$$\begin{aligned} [H, \Gamma_n] &= -E_n \Gamma_n; \\ [H, \Gamma_n^\dagger] &= -E_n \Gamma_n^\dagger \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$[H, \psi(\mathbf{r})] = \sum_n (u_n(\mathbf{r}) [H, \Gamma_n] + v_n^*(\mathbf{r}) [H, \Gamma_n^\dagger]) \quad [H, \psi(\mathbf{r})] = \sum_n E_n (-u_n(\mathbf{r}) \Gamma_n + v_n^*(\mathbf{r}) \Gamma_n^\dagger) \quad (2.22)$$

Segunda Forma

Calculando explícitamente $[H, \psi(\mathbf{r})]$, teniendo en cuenta que el término H_Δ del hamiltoniano (2.15) en la variable compleja $z = x + iy$ y $\partial_{z^*} = \partial_x + i\partial_y = e^{i\theta}(\partial_r + \frac{i}{r}\partial_\theta)$

$$H_\Delta \equiv \frac{1}{2} \int d^2r d^2r' \psi^\dagger(\mathbf{r}) D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi^\dagger(\mathbf{r}') = \frac{1}{2} \int d^2r \psi^\dagger(\mathbf{r}) \Delta(\mathbf{r}) \partial_{z^*} \psi^\dagger(\mathbf{r}) \quad (2.23)$$

Por otro lado

$$\{\psi(\mathbf{r}), \psi^\dagger(\mathbf{r}')\} = \delta^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

y

$$\{\psi(\mathbf{r}), \psi(\mathbf{r}')\} = \{\psi^\dagger(\mathbf{r}), \psi^\dagger(\mathbf{r}')\} = 0 \quad (2.24)$$

Evaluando el conmutador de interés se obtiene

$$[H, \psi(\mathbf{r})] = \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \mu \right) \psi(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} \{\Delta(\mathbf{r}), \partial_{z^*}\} \psi^\dagger(\mathbf{r}) \quad (2.25)$$

Introduciendo la transformada de BdG (2.18) en (2.27) y comparando la expresión resultante con (2.22)

$$-E_n u_n \Gamma_n + E_n v_n^* \Gamma_n^\dagger = \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \mu \right) (u_n \Gamma_n + v_n^* \Gamma_n^\dagger) - \frac{1}{2} \{\Delta(\mathbf{r}), \partial_{z^*}\} (u_n^* \Gamma_n^\dagger + v_n \Gamma_n) \quad (2.26)$$

Igualando termino por termino se obtiene 2 ecuaciones en el formalismo BdG

$$\begin{aligned} - \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \mu \right) u_n(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \{\Delta(\mathbf{r}), \partial_{z^*}\} v_n(\mathbf{r}) &= E_n u_n(\mathbf{r}) \\ \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \mu \right) v_n(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \{\Delta^*(\mathbf{r}), \partial_z\} u_n(\mathbf{r}) &= E_n v_n(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.27)$$

2.2.2. MZMs radiales en vórtices de un superconductor $p+ip$

La excitación de vórtice más simple en un superconductor 2D se puede modelar como un punto que desaparece poco a poco Δ' (Núcleo de vórtice) y la fase superconductor tiene una fase de enrollamiento igual a 2π alrededor de dicho punto. Esto puede ser modelado como un agujero en el superconductor, donde Δ es automáticamente cero, y una fase de enrollamiento igual a 2π , del parámetro de orden alrededor del agujero. Por lo tanto, para una excitación de vórtice en la fase de emparejamiento débil de un superconductor $p_x + ip_y$ sin espín con un flujo cuántico $\frac{\hbar c}{2e}$, puede considerarse los límites del vórtice como un anillo circular de radio r_0 , que separa una región con de la región dentro del núcleo del vórtice modelada como vacío. Asumiendo la simetría azimutal en presencia de un único vórtice situado en el origen, y escribiendo el parámetro de orden superconductor en dicha región $\Delta' \equiv \Delta(r) = g_l^2(r) e^{il\theta + i\pi}$ donde, l es la vorticidad ($\hbar l$ es el momentum angular) las ecuaciones BdG cerca del vórtice pueden ser escritas en coordenadas polares.

Se tiene que en la fase emparejamiento débil y para un vórtice con un flujo cuántico Φ . Las ecuaciones BdG nuevamente admiten soluciones a valores de energía cero al igual que las soluciones de Jackiw-Rebbi cerca de un dominio de pared como si de un límite o borde se tratase. La solución de energía cero cerca del núcleo del vórtice existe con un momentum angular orbital $\hbar l = 0$. En general, las ecuaciones BdG de baja energía describen soluciones como modos de borde y simetría quiral que se propagan a lo largo del borde circular en $r = r_0$, y pueden ser escritas a partir de soluciones de la representación matricial de H_{BdG} de (2.29) se tiene

$$\begin{pmatrix} -\mu(r) & \frac{1}{2} \{\Delta(\mathbf{r}), \partial_{z^*}\} \\ -\frac{1}{2} \{\Delta^*(\mathbf{r}), \partial_z\} & \mu(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(r) \\ v(r) \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u(r) \\ v(r) \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

al incluir un término asociado al gauge del vórtice como $\Delta(r) = g_l^2(r) e^{il\theta + i\pi}$ se tiene que $l \in \mathbb{Z}$ por el requerimiento de que el parámetro de orden es uní-valorado. Un modo de Majorana se caracteriza por $u(\mathbf{r}) = v^*(\mathbf{r})$ al igual por $E = 0$, esto hace reducir (2.28) a una única ecuación

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 \right) - \mu \right\} u(\mathbf{r}) - g(r) e^{i\theta(\frac{l}{2}+1)} \left(\partial_r + \frac{i}{r} \partial_\theta \right) \left[g(r) v(\mathbf{r}) e^{i\theta \frac{l}{2}} \right] = 0 \quad (2.29)$$

Tomando en cuenta que el campo asociado a un fermión se requiere uní-valorado, en coordenadas polares $\psi(r, \theta + 2\pi) = \psi(r)$ se imponen restricciones a $u(\mathbf{r})$ y $v(\mathbf{r})$ según las cuales deben ser uní-valoradas para una rotación de 2π de θ . En particular se propone una aproximación donde son estados propios del momentum angular

$$\begin{aligned} u(r) &= \bar{u}(r) e^{im\theta} \\ v(r) &= \bar{v}(r) e^{-im\theta} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Con $m \in \mathbb{Z}$ siendo el momentum angular cuantizado. En concordancia con el criterio de los MF se cumple que, $\tilde{u} = \tilde{u}^* = \tilde{v}$, es decir, el coeficiente radial es real, en caso que tuviese una parte imaginaria las soluciones tenderían al infinito lo cual no permite una función de onda normalizable.

2.2.3. Efectos de la vorticidad en la presencia de MZ

A. Vorticidad Par

Al reemplazar (2.30) en (2.29) permite, observar una conexión entre la vorticidad y m mediante la expresión $m = (l + 1)/2$, según la cual l es impar de tal forma que $m \in \mathbb{Z}$ como lo cual se requiere nuevamente de una dependencia adicional en θ : $\bar{u}(r) \mapsto \bar{u}(r)e^{i\theta/2}$, sin embargo esto hace que $u(r)$ y $v(r)$ sean a su vez complejas entrando en contradicción con la condición de Majorana, es por esto que por el momento se seguirán tomando en cuenta todo l incluyendo los valores pares e impares. Pero, se excluye la posibilidad de obtener MZM para una vorticidad par.

B. Vorticidad Impar

Por el contrario, si la vorticidad es impar introduciendo (2.30) en (2.29) esta vez con $m = (l + 1)/2$ es posible eliminar la dependencia angular de (2.29) obteniendo una expresión reducida

$$\frac{\hbar^2}{2m} \partial_r^2 \bar{u} + \left(g^2 + \frac{\hbar^2}{2mr} \right) \partial_r \bar{u} + \left(\mu + \frac{g^2}{2r} + g \partial_r g - \left(\frac{l+1}{2} \right)^2 \right) \bar{u} = 0 \quad (2.31)$$

Si por otro lado se considerara el modelo $p_x - ip_y$, la ecuación resultante de los MZ se transforma en (2.31) al tomar $l \mapsto -l$, y presenta simetría para $l = -1, -3, -5, \dots$. Si el vórtice tiene un número impar de flujo cuántico $\frac{\hbar c}{2e}$, la función de onda BdG debe ser anti periódica en una rotación completa alrededor del centro del vórtice, $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$. A su vez, el espinor de la parte derecha de (2.30) es también anti periódico en una rotación $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$, al igual que sigue que l debe ser un entero incluido el cero. Por lo tanto un vórtice $\frac{\hbar c}{2e}$ (o vórtices con flujo con impar) admite una solución de energía cero para $l = 0$. Por el contrario, si el flujo dentro del núcleo del vórtice es un múltiplo de $\frac{\hbar c}{2e}$, la función de onda BdG debe ser periódica en $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$. Esto asegura que l debe ser entero impar, y habrá un MZ dentro del núcleo del vórtice incluso en la fase de emparejamiento débil de un superconductor de 2-D $p_x + ip_y$. A su vez la función de onda cumple con la simetría partícula-hueco haciéndola candidata a ser fermión de Majorana.

2.2.4. Resolución de la ecuación diferencial

Con la finalidad de facilitar la resolución de la ecuación (2.31) es preciso realizar una formulación adimensional de la misma mediante la introducción de nuevas variables, en particular la longitud de coherencia de Ginzburg-Landau, a , (ver Anexo C) $\rho \equiv \frac{r}{a}$, $\xi \equiv \frac{1}{2m}$, $\eta \equiv \frac{a^2}{\xi} \mu$, y $\bar{g} \equiv \sqrt{\frac{a}{\xi}} g$.

La ecuación adimensional se transforma

$$\partial_\rho^2 \bar{u} + \left(\bar{g}^2 + \frac{1}{\rho} \right) \partial_\rho \bar{u} + \left(\eta + \frac{\bar{g}^2}{2\rho} + g \partial_\rho \bar{g} - \left(\frac{l+1}{2\rho} \right)^2 \right) \bar{u} = 0 \quad (2.32)$$

Considérese 2 límites diferente de (2.32)

Primer Limite: $\bar{g}(\rho) = 0$ (Centro del Vórtice) y $\eta > 0$ ($\mu > 0$), en esta situación (2.32) se transforma en la ecuación reducida de Bessel,

$$\bar{u}'' + \frac{\bar{u}'}{\rho} + \left(\eta - \frac{(l+1)^2}{4\rho^2} \right) \bar{u} = 0 \quad (2.33)$$

Cuyas soluciones vienen dadas por las funciones de Bessel

$$\left\{ J_{\frac{|l+1|}{2}}(\sqrt{\eta\rho}), Y_{\frac{|l+1|}{2}}(\sqrt{\eta\rho}) \right\} \quad (2.34)$$

Puesto que para la normalización de las soluciones se debe cumplir $\rho |\bar{u}(\rho)|^2$ debe ser integrable surge un inconveniente puesto que $|J_n(x)|^p$ es integrable únicamente para $p > 2$, al mismo tiempo $Y_n(x=0)$ no es finita para $x=0$, lo cual da lugar a que (2.34) sean descartadas como soluciones aceptables.

Segundo Limite: Según lo sucedido respecto a las soluciones escritas como funciones de Bessel, y su inviabilidad para describir funciones de onda consistentes con la definición de la misma. Un camino para suplir este inconveniente surge al tomar en cuenta los términos dependientes de \bar{g} los cuales contribuyen a una supresión exponencial de las soluciones contribuyendo así con la normalización de las soluciones. La transformación de las soluciones consiste en

$$\bar{u}(\rho) = \chi(\rho) e^{-\frac{1}{2} \int_0^\rho d\rho' \bar{g}^2(\rho')} \quad (2.35)$$

Que al reemplazarse en (2.31) la ecuación se transforma en

$$\chi'' + \frac{\chi'}{\rho} + \left[\eta - \left(\frac{\bar{g}^2}{2} \right)^2 - \frac{(l+1)^2}{4\rho^2} \right] \chi \quad (2.36)$$

Donde, si el parámetro de orden se toma como constante $\bar{g}^2(\rho) \equiv \delta_0$ y $(\delta_0/2)^2 < \eta$ se tiene nuevamente una ecuación de Bessel esta vez para χ .

Finalmente, las soluciones con un parámetro de orden Homogéneo están dadas por

$$u(\rho) = \begin{cases} J_{\frac{|l+1|}{2}}(\sqrt{\eta - (\delta_0/2)^2} \rho) e^{-\frac{\delta_0}{2} \rho} & , \mu > m \frac{\delta_0^4}{8} \\ Y_{\frac{|l+1|}{2}}(\sqrt{\eta - (\delta_0/2)^2} \rho) e^{-\frac{\delta_0}{2} \rho} & , 0 < \mu < m \frac{\delta_0^4}{8} \end{cases} \quad (2.37)$$

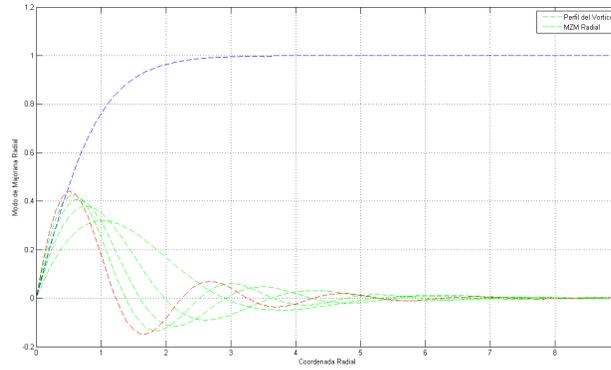


Figura 2.3: MZMs y perfil del vortice en un superconductor bidimensional sin espín.

2.2.5. Espectro de energía

A partir del hamiltoniano de una red bidimensional definido como:

$$H = \sum_{m,n} \left\{ -t \left(c_{m+1,n}^\dagger c_{m,n} + h.c \right) - t \left(c_{m,n+1}^\dagger c_{m,n} + h.c \right) - (\mu - 4t) c_{m,n}^\dagger c_{m,n} \right. \\ \left. + \left(\Delta c_{m+1,n}^\dagger c_{m,n}^\dagger + \Delta^* c_{m,n} c_{m+1,n} \right) + \left(i \Delta c_{m+1,n}^\dagger c_{m,n}^\dagger + \Delta^* c_{m,n} c_{m+1,n} \right) \right\} \quad (2.38)$$

Los operadores fermiónicos $c_{m,n}$ aniquilan fermiones en los puntos de la red (m, n) los cuales no cuentan con espín o bien el espín está totalmente polarizado a lo largo de la red. Se toma el parámetro de red $a = 1$ por simplicidad en los cálculos. La amplitud de emparejamiento es anisotrópica (tiene una fase adicional de i en la *dirección y*, en comparación con el *emparejamiento* en la *dirección x*). Debido a que el emparejamiento no ocurre en un único sitio, como en el caso de la cadena unidimensional de onda p, los términos de emparejamiento tendrán dependencia de momento.

Para obtener el hamiltoniano BdG, se tiene que Δ es invariante ante traslaciones, realizando una transformada de Fourier

$$H_{BdG} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} \psi_{\mathbf{p}}^{\dagger} \begin{pmatrix} \varepsilon(\mathbf{p}) & 2i\Delta^*(\sin p_x + i \sin p_y) \\ -2i\Delta^*(\sin p_x - i \sin p_y) & -\varepsilon(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \psi_{\mathbf{p}} \quad (2.39)$$

Donde $\varepsilon(\mathbf{p}) = -2t(\cos p_x + \cos p_y) - (\mu - 4t)$ y $\psi_{\mathbf{p}} = (c_{\mathbf{p}} \ c_{-\mathbf{p}}^{\dagger})^T$. En el caso del límite del continuo ($p \rightarrow 0$)

$$H_{BdG}^{(cont)} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} \psi_{\mathbf{p}}^{\dagger} \begin{pmatrix} \frac{p^2}{2m} - \mu & 2i\Delta^*(p_x + ip_y) \\ -2i\Delta^*(p_x - ip_y) & -\frac{p^2}{2m} + \mu \end{pmatrix} \psi_{\mathbf{p}} \quad (2.40)$$

Se evidencia una familiaridad al hamiltoniano en el espacio de momentos obtenido para el caso del modelo de Kitaev, tomando en cuenta que $m \equiv \frac{1}{2t}$ y $\mathbf{p}^2 = p_x^2 + p_y^2$. De forma análoga al caso del capítulo anterior se obtiene el espectro de las bandas de energía de las cuasi partículas del sistema que presenta un gap de energía para $\bar{\mu} = \mu - 4t \neq 0$

$$E_{\pm} = \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{2m} - \bar{\mu}\right)^2 + 4|\Delta|^2 p^2} \quad (2.41)$$

Se espera que el H_{BdG} exhiba diferentes fases en función de Δ y μ dada una integral de salto $t > 0$. Por simplicidad se toma un valor $t = 1/2$ y realizando una transformación de Gauge $c_{\mathbf{p}} \rightarrow e^{i\theta/2} c_{\mathbf{p}}, c_{\mathbf{p}}^{\dagger} \rightarrow e^{i\theta/2} c_{\mathbf{p}}^{\dagger}$, el hamiltoniano toma la forma: $H_{BdG}(\mathbf{p}) = (2 - \mu - \cos p_x - \cos p_y) \tau^x - 2|\Delta| \sin p_x \tau^y - 2|\Delta| \sin p_y \tau^x$ Cuya estructura es igual a la de un modelo de Dirac con una velocidad $v_f = 2|\Delta|$ y un término de “masa” $M(\mathbf{p}) = 2 - \mu - \cos p_x - \cos p_y$. En el caso $|\Delta| \neq 0$, este hamiltoniano tiene fases superconductoras separadas en determinados puntos críticos. El espectro para una red de las cuasi partícula es entonces, $E_{\pm}(\mathbf{p}) = \pm \sqrt{M(\mathbf{p})^2 + 4|\Delta|^2(\sin^2 p_x + \sin^2 p_y)}$. Los 3 puntos críticos ocurren para $(p_x, p_y, \mu) = (0, 0, 0); (\pi, 0, 2); (0, \pi, 2)$ y $(\pi, \pi, 4)$.

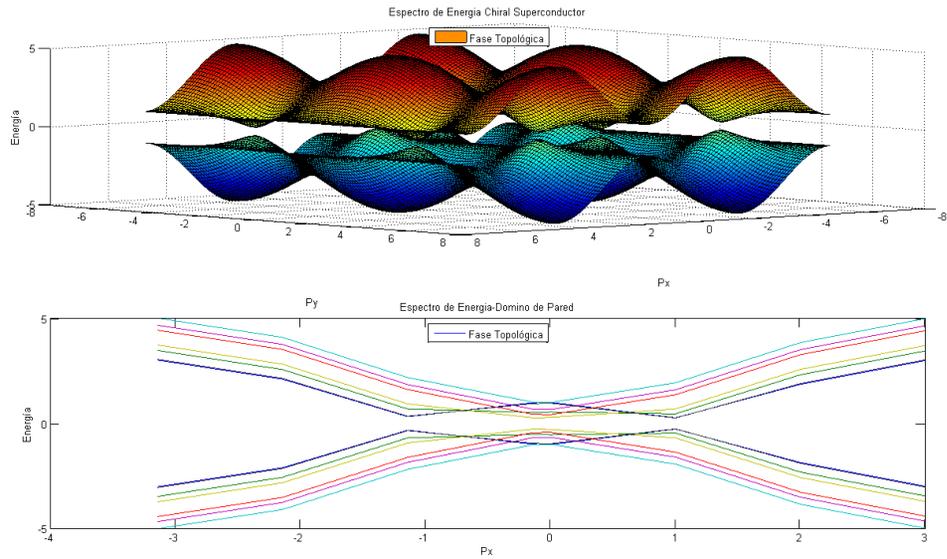


Figura 2.4: *Bandas de energía Y MZM en dominios de pared, para 2μ*

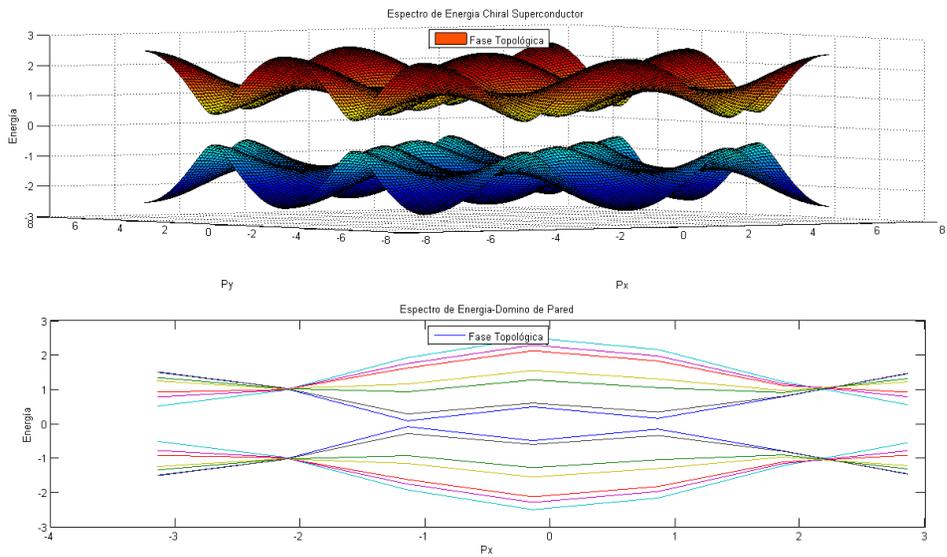


Figura 2.5: *Bandas de energía Y MZM en dominios de pared, para 3μ*

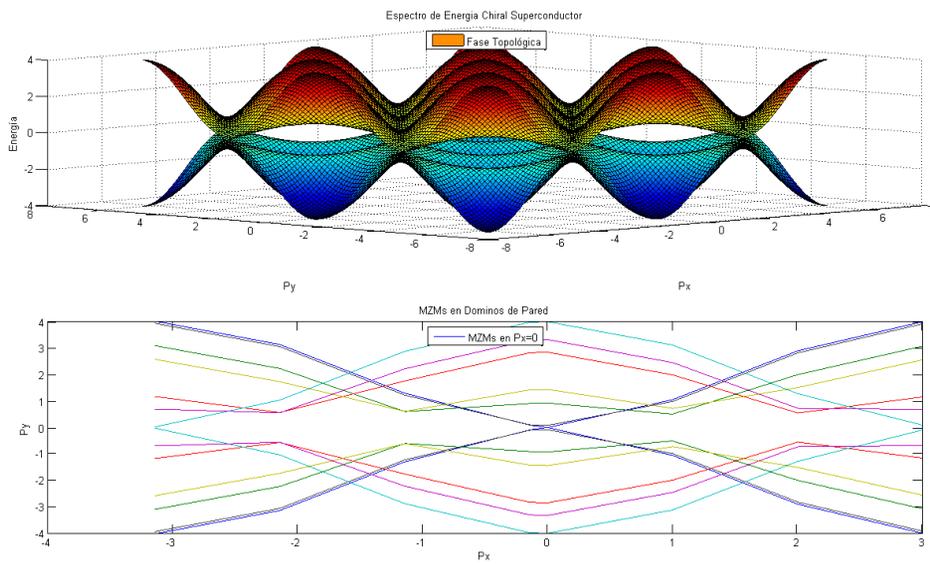


Figura 2.6: *Bandas de energía Y MZM en dominios de pared, para 4μ*

2.2.6. Puntos críticos e identificación de fases

A continuación, se demostrara que la fase trivial ocurre para $\mu < 0$ y $\mu > 4$ mientras la fase topológica ocurre en $0 < \mu < 2$ y $2 < \mu < 4$ presentando quiralidad opuesta. En la sección 2.2 se definió de forma rápida el número de Chern como invariante topológica, y su cálculo se realiza en breve, pero primero es necesario introducir algunos argumentos físicos sobre la naturaleza de las fases. Una forma de examinar el carácter de las fases, es realizando una interfaz entre ellas, y de encontrarse una interpolación entre estos dos regímenes que siempre presente un gap de energía, se corresponde a fases topológicas equivalentes, por el contrario, si ocurre un cierre de del gap de energía, se corresponde a fases topológicas distintas. Primero considérese la transición de fase en $\mu = 0$. La geometría a considerar es un dominio de pared donde

$$\mu = \mu(x) = \begin{cases} \mu(x) = -\mu_0, x < 0 \\ \mu(x) = \mu_0, x > 0 \end{cases} \quad (2.42)$$

Siendo μ_0 una constante positiva. Esta interfaz tiene la peculiaridad de ser invariante a lo largo del eje y , con lo cual el hamiltoniano de las cuasi partículas para esta geometría en 1-D

$$H_{BdG} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\mu(x) & 2i|\Delta| \left(-i\frac{d}{dx} + ip_y\right) \\ -2i|\Delta| \left(-i\frac{d}{dx} - ip_y\right) & \mu(x) \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

Se propone una aproximación inicial a los estados de la interfaz tal que

$$|\psi_p(x, y)\rangle = e^{ip_y y} \exp\left(\frac{1}{2|\Delta|} \int_0^x \mu(x') dx'\right) |\phi_0\rangle \quad (2.44)$$

Siendo $p_y = 0$, se puede observar que (2.43) es similar al problema resuelto para los estados de borde en el hilo superconductor propuesto por Kitaev. La ecuación resultante para un modo de energía cero es

$$H_{BdG} |\psi_0(x, y)\rangle = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -\mu(x) & \mu(x) \\ -\mu(x) & \mu(x) \end{pmatrix} |\phi_0\rangle = 0 \quad (2.45)$$

Donde $|\phi_0\rangle = 1/\sqrt{2}(1 \ 1)^T$, con lo cual

$$H_{BdG} |\psi_{p_y}(x, y)\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\mu(x) & 2i|\Delta| \left(-i\frac{d}{dx} + ip_y\right) \\ -2i|\Delta| \left(-i\frac{d}{dx} + ip_y\right) & \mu(x) \end{pmatrix} |\psi_{p_y}(x, y)\rangle \quad (2.46)$$

$H_{BdG} |\phi_0\rangle = -2|\Delta| p_y \tau^x |\phi_0\rangle = -2|\Delta| p_y |\phi_0\rangle$. El espinor $|\phi_0\rangle$ es un auto función de H_{BdG} , es decir, $|\psi_{p_y}\rangle$ también lo es y tiene un auto valor de energía igual a

$E(p_y) = -2|\Delta|p_y$. Se evidencia así la existencia de estados de borde en la interfaz de estas dos fases, habiendo un único modo fermiónico por cada valor de p_y , estos estados son además de modos quirales también cumplen con la condición de Majorana, una interpretación sencilla de estos fermiones de Majorana-Weyl, es la de observarlo como la mitad de un fermión de Weyl convencional, estos surgen dentro de los sistemas de efecto Hall cuántico entero (QHE) cuyo hamiltoniano puede ser escrito de la siguiente manera

$$H_{QH} = \hbar\nu \sum_p p n_p^\dagger \eta_p \quad (2.47)$$

De manera similar a lo estudiado en el capítulo 1, al transformar (1.29) a la base de Majorana

$$H_{QH} = \frac{1}{2} \sum_p p (\gamma_{1,p} \gamma_{1,-p} + \gamma_{2,-p} \gamma_{2,p}) \quad (2.48)$$

Se obtiene un hamiltoniano que es exactamente 2 copias del de Majorana, es decir,

$$H_{Borde}^{(Onda-p)} = \frac{1}{2} \sum_{p \geq 0} p \gamma_{-p} \gamma_p \quad (2.49)$$

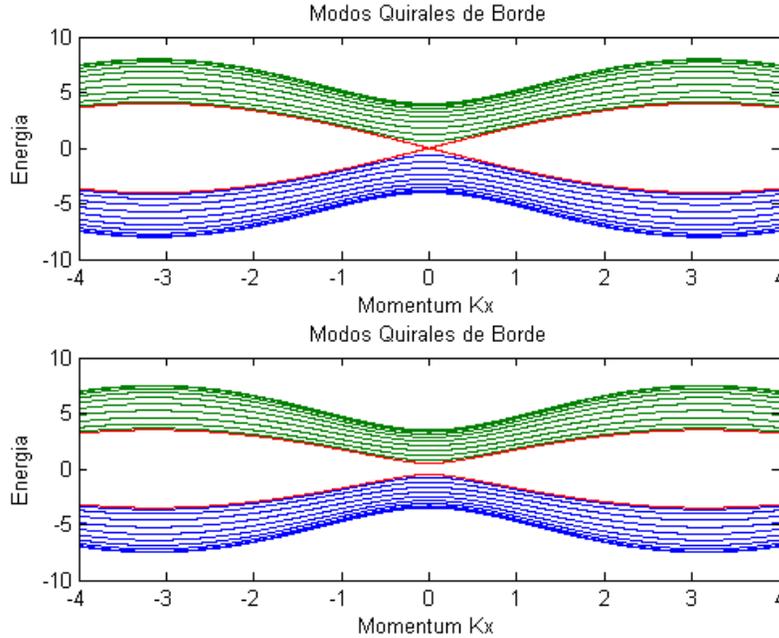


Figura 2.7: MZM en los bordes en una geometría cilíndrica de la red bidimensional, para 2μ y $2,5\mu$

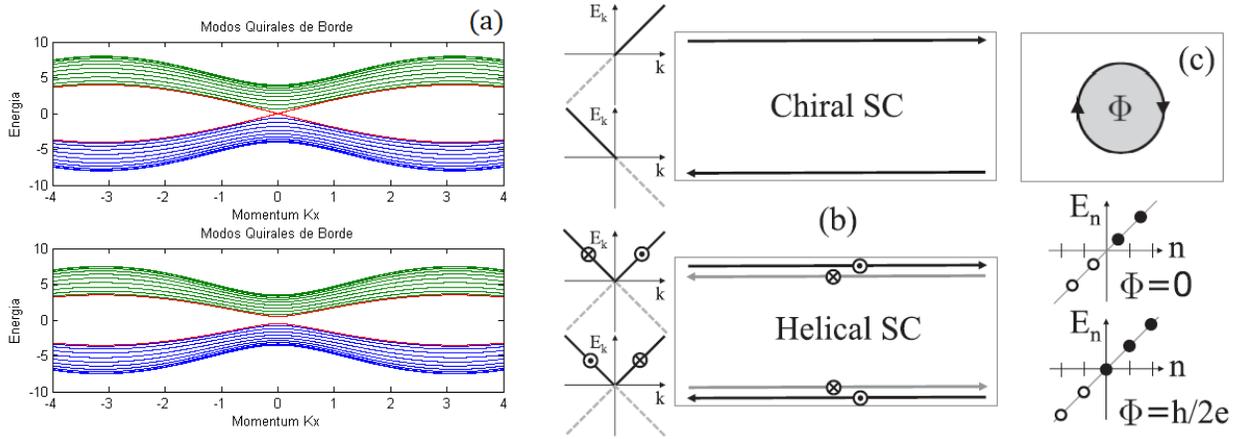


Figura 2.8: (a) Espectro de energía de un superconductor quiral en coordenadas cilíndricas a lo largo del eje y , y límites de bordes en el eje x , (b) comparación entre los estados de borde de un superconductor quiral y un superconductor helical (c) Efecto de un vórtice y su paridad en la presencia de estados MZM.[99]

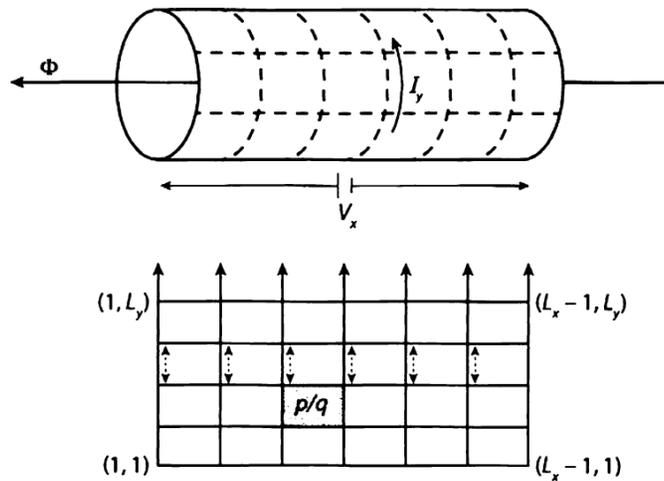


Figura 2.9: Modelo de una red bidimensional en la geometría de Laughlin(Periodica en una dirección y Abierta en la otra)

Los estados de borde presentes en un superconductor 2-D de Onda-P (fig 2.6), se observan al diagonalizar el hamiltoniano H_{BdG} unicamente con respecto a los terminos que dependen del momento K_x , las condiciones de borde se añaden al ubicar la red bidimensional sobre un cilindro de forma paralela al x lo cual hace que K_y presente valores periodicos alrededor de la circunferencia del cilindro, el hacer esto permite introducir condiciones de borde en una de las dimensiones de la red y de forma equivalente obtener un modelo efectivo de una red 2-D.

Para finalizar, se describe de forma más explícita el cálculo de la invariante topológica que permite distinguir el estado superconductor trivial del *superconductor quirral de onda p*, se retoma la ecuación (2.16) y (2.17) se tiene que el hamiltoniano BdG tiene la forma

$$H_{BdG} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} \psi_{\mathbf{p}}^{\dagger} d_a(\mathbf{p}, \mu) \tau^a \psi_{\mathbf{p}}$$

$$d_a(\mathbf{p}, \mu) = (-2|\Delta|p_y, -2|\Delta|p_x, (p^2/2m) - \mu) \quad (2.50)$$

Y retomando la definición del número de Chern, y la equivalente definición simplificada del número de Winding

$$\begin{aligned} C &= \int \frac{d^2p}{4\pi} \left(\hat{\mathbf{d}} \left(\partial_{p_x} \hat{\mathbf{d}} \times \partial_{p_y} \hat{\mathbf{d}} \right) \right) \\ N_w &= \frac{1}{8\pi} \int d^2p \varepsilon^{ij} \hat{d} \cdot \left(\partial_{p_x} \hat{d} \times \partial_{p_y} \hat{d} \right) \end{aligned} \quad (2.51)$$

Donde:

En forma explícita $\hat{d} = \frac{(-2|\Delta|p_y, -2|\Delta|p_x, (p^2/2m) - \mu)}{\left(4|\Delta|p^2 + \left(\frac{p^2}{2m} - \mu\right)^2\right)^{1/2}}$, al evaluar la anterior integral de forma numérica en función del potencial químico

$$N_w = \begin{cases} 0 & S_i, \mu < 0 \\ 1 & S_i, \mu > 0 \end{cases} \quad (2.52)$$

Evidenciando así 2 distintas fases separadas en el punto crítico $\mu = 0$. Así mismo existen otras dos transiciones de fases en $\mu = 2$ y $\mu = 4$. Siendo $0 < \mu < 2$ y $2 < \mu < 4$ superconductores topológicos.

Capítulo 3

Superconductores con Espín

En el presente capítulo se toma en cuenta el efecto del espín en la existencia de MZMs en presencia de defectos topológicos, dando lugar a indicativos de cómo obtener sistemas superconductores topológicos realistas a partir de los modelos ideales estudiados hasta el momento.

Para ello se estudia en máximo detalle el espectro de las bandas de energía de una estructura híbrida conocida como *nanohilos de Majorana* la cual presenta un fenómeno medible de acoplamiento espín-orbita de Rashba, y un efecto asociado al espín evidenciable bajo la acción de un campo magnético externo. Por último se presentan una recopilación de algunos resultados experimentales relacionados a la detección en laboratorios de sistemas superconductores topológicos 1-D (nanohilos de Majorana), dada la evidencia de fenómenos asociados a la superconductividad topológica presentes en este tipo de sistemas. Dichos fenómenos son: *La reflexión de Andreev*, y *El efecto Josephson de periodo 4π ó efecto Josephson Fraccional*; ambos proporcionan señales e indicios de que estos nanohilos hospedan efectivamente MZM asociados a defectos topológicos de borde.

3.1. Superconductores con Simetría TR

En esta sección se describen un sistema más general a los descritos hasta el momento. Al tomar en cuenta el espín en el término del emparejamiento de electrones.[97]

$$H_{\Delta} = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{2} \left[c_{\mathbf{p}\sigma}^{\dagger} \Delta_{\sigma\sigma'}(\mathbf{p}) \bar{c}_{-\mathbf{p}\sigma'}^{\dagger} + \bar{c}_{-\mathbf{p}\sigma} (\Delta^{\dagger})_{\sigma\sigma'}(\mathbf{p}) c_{\mathbf{p}\sigma'} \right] \quad (3.1)$$

Donde $\bar{c}_{\mathbf{p}\sigma} \equiv id_{\sigma\sigma'}^y c_{\mathbf{p}\sigma^*}$. En el caso de la superconductividad no convencional la convención comúnmente usada para un *emparejamiento de onda s* es $\Delta_{\sigma\sigma'} = I_{\sigma\sigma'}$ que al tratarse justamente de una matriz 2×2 puede descomponerse en una parte

escalar y una parte vectorial $\Delta_{\sigma\sigma'}(\mathbf{p}) = d_0(\mathbf{p})I_{\sigma\sigma'} + d_a(\mathbf{p})\sigma_{\sigma\sigma'}^a$, la forma explícita de cada termino es

$$\begin{aligned}
 I &: \frac{1}{2}d_0(\mathbf{p}) \left(c_{\mathbf{p}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{p}\downarrow}^\dagger - c_{\mathbf{p}\downarrow}^\dagger c_{-\mathbf{p}\uparrow}^\dagger \right) \\
 \sigma^x &: \frac{1}{2}d_1(\mathbf{p}) \left(c_{\mathbf{p}\downarrow}^\dagger c_{-\mathbf{p}\downarrow}^\dagger - c_{\mathbf{p}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{p}\uparrow}^\dagger \right) \\
 \sigma^y &: \frac{-i}{2}d_2(\mathbf{p}) \left(c_{\mathbf{p}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{p}\uparrow}^\dagger + c_{\mathbf{p}\downarrow}^\dagger c_{-\mathbf{p}\downarrow}^\dagger \right) \\
 \sigma^z &: \frac{1}{2}d_3(\mathbf{p}) \left(c_{\mathbf{p}\uparrow}^\dagger c_{\mathbf{p}\downarrow}^\dagger + c_{\mathbf{p}\downarrow}^\dagger c_{-\mathbf{p}\uparrow}^\dagger \right)
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

El termino identidad I está asociado al *emparejamiento singlete* del espín, mientras las matrices de Pauli se encuentran relacionadas con el *emparejamiento triplete* de los electrones. Por otro lado la denominada estadística de fermi comprende ciertas restricciones de las funciones $d_0(\mathbf{p})$ y $d_a(\mathbf{p})$, en el emparejamiento singlete de los electrones $d_0(\mathbf{p}) = d_0(-\mathbf{p})$, es decir, el termino comprende potencias pares del momentum

$$\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} d_0(\mathbf{p}) \left(c_{\mathbf{p}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{p}\downarrow}^\dagger - c_{\mathbf{p}\downarrow}^\dagger c_{-\mathbf{p}\uparrow}^\dagger \right) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} d_0(-\mathbf{p}) \left(-c_{\mathbf{p}\downarrow}^\dagger c_{-\mathbf{p}\uparrow}^\dagger + c_{\mathbf{p}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{p}\downarrow}^\dagger \right) \tag{3.3}$$

Mientras que en el emparejamiento de los electrones en forma de triplete $d_a(\mathbf{p}) = -d_a(-\mathbf{p})$, es decir, el termino comprende potencias impares del momentum.

$$\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} d_1(\mathbf{p}) \left(c_{\mathbf{p}\downarrow}^\dagger c_{-\mathbf{p}\downarrow}^\dagger - c_{\mathbf{p}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{p}\uparrow}^\dagger \right) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} d_1(-\mathbf{p}) \left(-c_{\mathbf{p}\downarrow}^\dagger c_{-\mathbf{p}\downarrow}^\dagger + c_{\mathbf{p}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{p}\uparrow}^\dagger \right) \tag{3.4}$$

En secciones anteriores se observó que en sistemas fermiónicos sin espín pueden presentar emparejamiento correspondiente a valores impares del momentum (Simetría Partícula-Hueco), lo cual correspondería a polarizar el espín de un sistema con emparejamiento triplete del espín. Al mismo tiempo habiendo discutido en *el capítulo 2- los superconductores quirales de onda p*, en dicho sistema se observó la existencia del fenómeno Hall cuántico anomalo en los bordes del superconductor (QAH) al presentarse lo que se conoce como corrientes de borde características de dicho fenómeno. Al momento de introducir un grado de libertad asociado al espín (\uparrow, \downarrow), en el caso del *superconductor bidimensional* se generan un fenómeno de Hall asociado a cada espín (QSH), al mismo tiempo que existe un rompimiento de *simetría TR* asociado a dos corrientes de borde en sentido opuesto. A este sistema superconductor se le

viene a conocer como *superconductor helicoidal*, cuyo hamiltoniano es

$$H_{Helicoidal} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} \psi_{\mathbf{p}}^{\dagger} \begin{pmatrix} \frac{p^2}{2m} - \mu & 0 & 0 & -\Delta(p_x + ip_y) \\ 0 & \frac{p^2}{2m} - \mu & \Delta(p_x - ip_y) & 0 \\ 0 & \Delta^*(p_x + ip_y) & -\frac{p^2}{2m} + \mu & 0 \\ -\Delta^*(p_x - ip_y) & 0 & 0 & -\frac{p^2}{2m} + \mu \end{pmatrix} \psi_{\mathbf{p}} \quad (3.5)$$

Notése que (3.5) puede ser pensado como dos copias del *superconductor quiral*. Donde $\psi_{\mathbf{p}} = (c_{\mathbf{p}\uparrow}, -c_{\mathbf{p}\downarrow})^T$ en la notación del vector \mathbf{d} , este estado es $\mathbf{d} = -i\Delta(p_x\hat{y} + p_y\hat{x})$.

- **Operador TR:** En esta base el operador de Inversión temporal es $T = \mathbf{I} \otimes I\sigma^y K$.
- **Operador C:** A su vez el operador de conjunción de carga es $C = \tau^x \otimes \sigma^y K$.

Dado que el hamiltoniano (3.5) tiene la forma de un hamiltoniano de Dirac, en base al análisis de los superconductores hecho hasta el momento, se tiene que para $\mu > 0$, el sistema presenta una *fase topológica no trivial* con modos de borde a energía cero. En cada borde existe un único *MF quiral* y otro *MF anti-quiral* de espín opuesto, el hamiltoniano del borde es

$$H_{edge} = \sum_p \Phi_p^{\dagger} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & -p \end{pmatrix} \Phi_p = \sum_p \Phi_p^{\dagger} p\sigma^z \Phi_p \quad (3.6)$$

Donde $\phi_{\mathbf{p}} = (\gamma_{\mathbf{p}\uparrow} \ \gamma_{\mathbf{p}\downarrow})$, siendo $\gamma_{\mathbf{p}\sigma}$ superposiciones de estados partícula-hueco con espín σ , soluciones de la ecuación (3.6) con límites abiertos. Este hamiltoniano es invariante ante inversión temporal $T = i\sigma^y \kappa$, a su vez satisface simetría de conjunción de carga con $C = \mathbf{I}\kappa$. Al verificar esto, se observa puesto que el hamiltoniano de borde es real,

$$\begin{aligned} TH_{edge}(p)T^{-1} &= p\sigma^y\sigma^z\sigma^y = -p\sigma^z = H_{edge}(-p) \\ CH_{edge}(p)C^{-1} &= p\sigma^z = -(-p)\sigma^z = -H_{edge}(-p) \end{aligned}$$

La tarea a continuación, es observar si es posible abrir el gap de energía del espectro de energía de los estados de borde, preservando *la simetría TR* (y *la simetría C*). Los posibles términos de masa que se pueden añadir al hamiltoniano son:

$$H'_{edge} = H_{edge} + m_0\mathbf{I} + m_a\sigma^a \quad (3.7)$$

El segundo término rompe la *simetría C*, por otro lado, el tercer término rompe la *simetría TR*. A su vez, m_x y m_z por su parte rompen la *simetría C*. Únicamente de no requerir la presencia de simetría de inversión temporal, es posible abrir el gap de energía en el caso de tomar un valor finito de $m_y\sigma^y$, esto robustece los estados de borde ante *simetría TR*.

Del mismo modo para el caso de dos estados de borde cuyo hamiltoniano es:

$$H_{edge}^{(2)}(p) = p(\mathbf{I} \otimes \sigma^z) \quad (3.8)$$

El cual presenta las mismas simetrías que el hamiltoniano de un único borde (3.6). Para encontrar un posible termino de masa, es necesario encontrar una matriz M que satisfaga tanto la simetría T como C, tal que, $\{M, \mathbf{I} \otimes \sigma^z\} = 0$. La última condición implica: $H_{edge}^{(2)}(p) + mM$ presenta un gap de energía si la condición de anti-conmutación se mantiene.

Al tomar $M = \tau^y \otimes \sigma^x$ bajo la acción del operador T, se demuestra que es invariante ante dicho operador, al igual que bajo el operador C ($CmMC^{-1} = mM = -mM^*$). Por último al igual que en el caso unidimensional y bidimensional es posible identificar y clasificar, los sistemas con espín en función de un invariante topológico. En el límite donde los bloques con espín \uparrow y \downarrow permanecen desacoplados, es posible definir 2 números de Winding, N_\uparrow y N_\downarrow que al preservarse la simetría TR cumplen con la condición $N_\downarrow + N_\uparrow = 0$, y en este límite puede definir un nuevo invariante topológico

$$v_{z_2} = \frac{1}{2}(N_\uparrow - N_\downarrow) \quad \text{mód } (2) \quad (3.9)$$

El número de Winding, tal cual como ha sido definido en el capítulo 2 indica la cantidad de los modos de borde. Si $v_{z_2} = 0$, hay un número par de parejas de estados de borde que no son estables. Cuando $v_{z_2} = 1$, existe un único par de estados de borde estables.

3.2. Nanohilos de Majorana

Una primera aproximación para abordar el problema de obtener Fermiones de Majorana en un sistema real, surge al entender el modelo de Kitaev como un boceto al cual debe añadirse nuevas interacciones hasta obtener un sistema con características reproducibles experimentalmente. Retomando el modelo de un superconductor de onda p unidimensional, escrito en el espacio de momentum

$$H_K = [-2t \cos(p) - \mu] \tau_z + 2\Delta \tau_y \sin(p) \quad (3.10)$$

Este modelo toma en cuenta un emparejamiento superconductor Δ de los electrones de la cadena y un espectro de dispersión normal dado por los términos proporcionales a μ y t . Sin embargo, se trata de un modelo insatisfactorio puesto que requiere de consideraciones poco realistas entre ellas y la más relevante es la consideración un sistema sin espín. De forma paralela la presencia de estados de borde desacoplados se asocia a valores y condiciones específicas de los parámetros μ , Δ y t , mencionadas en el formalismo del primer capítulo.

El siguiente punto de interés es el carácter superconductor, asociado al parámetro de orden superconductor.

Dado que en la cadena de Kitaev surge un acoplamiento entre electrones de átomos vecinos, implica que el acoplamiento superconductor Δ' es proporcional al momentum (Δp), un *emparejamiento de onda p*. Sin embargo, los superconductores reales en su mayoría presentan un *emparejamiento de onda s*, esto implica que el acoplamiento en su caso no depende del momentum, y es local en el espacio real. Por otro lado, los superconductores de altas temperaturas como cupratos o pnictidos si presentan un acoplamiento dependiente del momentum pero en este caso son de *tipo onda d u onda $s\pm$* . Así que con la finalidad de obtener MF, resulta necesario hacer uso de superconductores de *emparejamiento onda s* cuyos electrones presentan emparejamiento singlete, el cual debe ser modificado de tal manera que el sistema resultante pueda ser visto como un modelo efectivo *superconductor de onda p*. El hamiltoniano asociado al acoplamiento de los electrones en un sistema superconductor de onda s es:

$$H_{pair} = \Delta (c_{\uparrow}c_{\downarrow} - c_{\downarrow}c_{\uparrow}) + h.c \quad (3.11)$$

A partir del trabajo [101] se observa que el escenario antes mencionado puede ser realizado experimentalmente en una variedad de sistemas, entre los cuales el más prometedor son los *nanohilos de Majorana* que consisten en una heteroestructura de un *semiconductor* en proximidad de un *superconductor de onda s* (Ver fig 3.3). Los ingredientes físicos básicos son siempre los mismos en todos los casos:

1. **Acoplamiento próximo a un superconductor de onda s:** Emplear un fenómeno de superconductividad inducida por proximidad resulta apropiado en la discusión de sistemas unidimensionales mediante una teoría de campo-medio. El sistema en cuestión consiste en un semiconductor 1-D (Nanohilo), y está descrito por el hamiltoniano

$$\begin{aligned} H &= \int dx \left[\psi^{\dagger}(x) \left(\frac{p_x^2}{2m} + u\sigma_y p_x - \mu + \bar{B} \cdot \sigma \right) \psi(x) + \psi(x) (\Delta e^{i\phi} i\sigma_y) \psi(x) + h.c \right] \\ H &= \sum \int dr (\psi_{\sigma}^{\dagger}(r) H_0 \psi_{\sigma}(r)) + \int dr dr' (\psi_{\downarrow}(r) \Delta(r, r') \psi_{\uparrow}(r)) + h.c \end{aligned} \quad (3.12)$$

Donde $\Delta(r, r')$ es el potencial de emparejamiento superconductor (*parámetro de orden superconductor*) inherente del *superconductor de onda s*, el cual induce en el semiconductor un emparejamiento singlete entre los electrones del nanohilo.

2. **Polarización del espín (Ruptura de la simetría TR):** Todo sistema por lo general presenta espín, en el caso particular del espín (1/2), de forma inicial el sistema del nanohilo se toma cómo cadenas de Kitaev unidimensionales ubicada en forma paralela una al lado de la otra, es decir, el hamiltoniano (3.12) sería dos copias de 1.34, una por cada proyección del espín. De forma efectiva se obtiene 2 MF por cada condición de borde, a este fenómeno se le conoce como *degeneración de Kramer*, y las parejas de estos estados se les conoce como *pares de Kramer*, esta degeneración se encuentra ligada a la simetría TR presentes en los superconductores topológicos en 1-D, mencionada al final del primer capítulo.

Consecuentemente para obtener MF desacoplados localmente (*sin pares de Kramer*), es necesario romper la simetría TR entre las dos cadenas con espín opuesto, experimentalmente esto puede realizarse incluyendo una capa de un aislante ferromagnético, o un medio-metal en la Heteroestructura, o bien aplicando un campo magnético externo. Finalmente, el hamiltoniano con el espín polarizado describe dos sectores que pueden ser tratados de manera efectiva como un sistema sin espín. (*Ver fig. 3.6*). Por supuesto, dado que los electrones de un *superconductor de onda s* presentan un acoplamiento singlete se presenta un conflicto pues no es posible que conseguir un sistema que tenga *superconductividad inducida por proximidad de onda s* y a su vez polarización del spin, esto debido a los procesos que conservan el espín [102].

3. **Acoplamiento espín-orbita:** El conflicto mencionado en el ingrediente anterior es en verdad una oportunidad al incluir el acoplamiento espín orbita. Puesto que es más sencillo encontrar este acoplamiento en el sistema superconductor en lugar del sistema unidimensional. Nuevamente se evidencia una degeneración de Kramer, entonces, el momentum angular ya no es un número cuántico adecuado para la caracterización del sistema superconductor.

El efecto combinado del acoplamiento espín orbita, rompimiento de la simetría TR, y superconductividad inducida por proximidad (*ver fig.3.1*), es equivalente a tener un sistema efectivo de superconductividad asociada a electrones de acoplamiento triplete y un sistema sin espín, puesto que existe una pequeña mezcla de *acoplamiento de onda s y p*. De este modo el *acoplamiento superconductor inducida de onda s* presente en el nanohilo (3.11) se modifica en la dirección del campo Magnético \mathbf{B} y se obtiene de forma efectiva una componente en dicha dirección de un *acoplamiento inducido superconductor de onda*

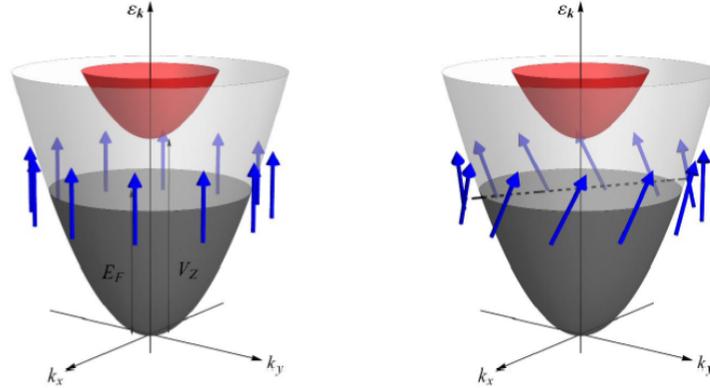


Figura 3.1: Izquierda, Los electrones sobre la superficie de fermi tienen el espín totalmente polarizado en función de un campo magnético. Derecha, Los electrones están polarizados en presencia de un campo magnético y acoplamiento espín orbita.[77].

p , justamente relacionado al rompimiento de la simetría TR. A diferencia de las correlaciones de onda-s las de onda p pueden transferirse a sistemas con polarización del espín, dando como resultado que el sistema unidimensional presente efectivamente superconductividad inducida por proximidad de onda p .

3.2.1. Aproximación experimental del modelo de Kitaev

Una vez mencionados los tres ingredientes que son requeridos para obtener un superconductor topológico no trivial de forma sintética. Se estudian sus efectos en uno de los sistemas más promisorios el de los nanohilos de Majorana cuya propuesta experimental es sencilla en su geometría.

Este sistema consisten en un nanohilo semiconductor puesto que la densidad de electrones es baja, es decir, el potencial químico se encuentra cerca del nivel de fermi, lo cual hace sencillo definir μ cerca de la condición de Majorana $\mu \rightarrow \mu - 2t$. Esto hace que la transición de fase entre los estados triviales y no triviales suceda para $\mu = 0$. Por supuesto, los semiconductores no presentan ningún fenómeno de superconductividad. Afortunadamente, es posible resolver este inconveniente al aproximar el semiconductor al *superconductor de onda s*, en lo que se conoce como una heteroestructura (*estructura híbrida*), el hacer esto genera un fenómeno de superconductividad inducida en el semiconductor. Si bien la geometría del sistema es sencilla, su implementación experimental no lo es tanto, pero por el momento no es necesario preocuparse por ello. Otro aspecto a tener en cuenta es considerar que μ sea pequeño en comparación al ancho de banda ($\mu \ll 2t$) al igual que el parámetro

superconductor $\Delta \ll 2t$. Esto se debe a que la superconductividad es un efecto bastante débil en comparación a la energía cinética de electrones.

Inicialmente tomando un límite al continuo del modelo de Kitaev, de tal manera que sea posible observar el efecto del espín en dicho modelo

$$H_K = (k^2/2m - \mu) \tau_z + 2\Delta\tau_y p \quad (3.13)$$

El inconveniente de incluir el espín es, dado que el punto del modelo de Kitaev es conseguir modos de Majorana no emparejados, al incluir una degeneración del espín de estos MF, el extremo de la cadena va a contener dos MZM que en formalismo de operadores es equivalente a tener un fermión ordinario a energía Cero. Una forma de añadir el espín y evitar este inconveniente es tener dos cadenas de Kitaev cada una asociada a un valor del espín i.e: Una cadena asociada a un valor del espín \uparrow es no-trivial ($\mu > 0$), mientras la otra cadena asociada al espín \downarrow es parte de la fase trivial ($\mu < 0$). El efecto del espín en el espectro de energía se observa introduciendo un campo magnético externo \mathbf{B} con la finalidad de identificar el efecto Zeeman \bar{B} (Campo de Zeeman) que este genera.

$$H_K = (k^2/2m - \mu - B\sigma_z) \tau_z + 2\Delta\tau_y p \quad (3.14)$$

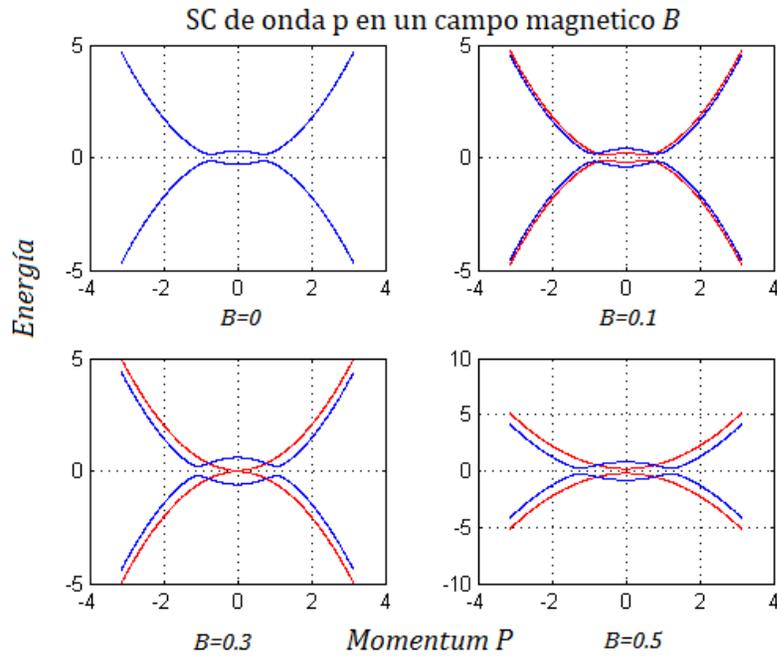


Figura 3.2: Espectro de energía de 2 cadenas de Kitaev A_{\uparrow} y B_{\uparrow} , en presencia de un campo magnético que varía entre 0 y 0.5

En la figura 3.2, se observa que para un valor dado de $\mu = 0,3$ a medida que el efecto del campo magnético \mathbf{B} aumenta los electrones ven polarizados su espín, y existe un cierre del gap de energía para 2 bandas con un mismo espín, en el espacio de partículas-hueco. Lo anterior implica que para valores de $|\mathbf{B}|$ tan grandes como μ , se puede obtener un fermión de Majorana al final de la cadena de Kitaev aun en la presencia del espín, a su vez los fermiones en el punto crítico $p = 0$ presentan un acoplamiento triplete del espín, con lo cual es posible entender como un sistema con el espín completamente polarizado funciona correctamente como modelo efectivo de un sistema sin espín.

Experimentalmente considérese un único hilo cuántico (estrictamente unidimensional) con *acoplamiento espín-orbita de Rashba* u , en presencia de *un campo de Zeeman* \bar{B} (Campo magnético externo) ,y acoplamiento superconductor inducido Δ' debido a la proximidad con un *superconductor de onda s*.

Siempre que se describe sistemas superconductores se incluye los grados de libertad de electrones y huecos en forma explícita (Formalismo BdG) introduciendo los espinores denominados espinores de Nambu. En el capítulo 1 se introdujo el formalismo de BdG en una de las 2 bases que se encuentra en la literatura (Ver sección 1.6), en dicha base él H_{BdG} y su respectivo espinor de Nambu $\psi^\dagger(k)$ en el espacio de momentum son

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{2} \sum_p [c_p^\dagger, c_p] H_{BdG} [c_{-p}^\dagger, c_p]^T \\
 H_{BdG} &= \begin{pmatrix} H & \Delta \\ -\Delta^* & -H^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_0 & \Delta \\ \Delta^\dagger & -H_0^T \end{pmatrix} \\
 \psi^\dagger(k) &= \begin{pmatrix} \psi_\uparrow^\dagger(k) & \psi_\downarrow^\dagger(k) & \psi_\uparrow(-k) & \psi_\downarrow(-k) \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Entre tanto, se introduce una nueva base la cual resultará extremadamente útil al final de este capítulo, en dicha base $\psi(k) = \begin{pmatrix} \psi_\uparrow(k) & \psi_\downarrow(k) & \psi_\downarrow^\dagger(-k) & -\psi_\uparrow^\dagger(-k) \end{pmatrix}$. Para reescribir el hamiltoniano (3.12) en esta nueva base, se introduce nuevamente las matrices de Pauli τ_i similares a σ_i tales que las matrices que actúan sobre el espinor de Nambu son matrices 4×4 e iguales a $\tau_j \otimes \sigma_i$,

$$H(r) = \begin{pmatrix} H_0(r) & 0_\sigma \\ 0_\sigma & \sigma_y H_0^*(r) \sigma_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_\sigma & \Delta^*(r, r') \mathbf{1} \\ -\Delta(r, r') \mathbf{1} & 0_\sigma \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

Tanto H_0 como $\mathbf{1}$ son matrices 2×2 . En esta nueva base se tiene que el hamiltoniano presenta simetría partícula-hueco ($P = \tau_y \otimes \sigma_y K$), es decir, en el espacio de electrones-hueco se doblan el número de estados propios del mismo.[100][101]

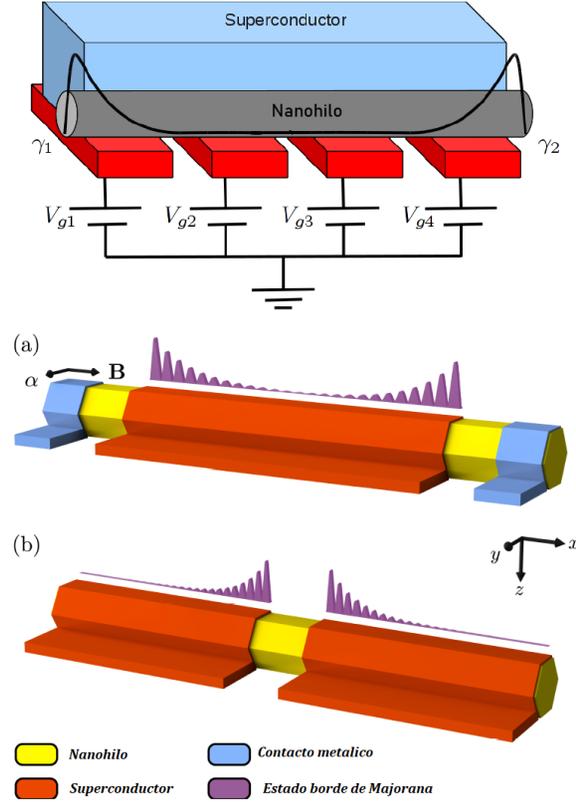


Figura 3.3: Esquema experimental de una heteroestructura Superconductor de onda $S(Nb \text{ o } Al)$ -Nanohilo semiconductor ($InAs \text{ o } InSb$). Figuras tomadas de [100][101]

En el esquema experimental de la figura 3.3, se observa un conjunto de electrodos acoplados a la heteroestructura, usados para controlar el potencial químico del nanohilo y controlar el paso del sistema a un régimen topológico. Los MF al igual que en el modelo de Kitaev, surgen en los bordes del semiconductor y decaen exponencialmente a lo largo del nanohilo. Este modelo puede implementarse para más de un nanohilo con lo cual es posible tener N MZMs en la búsqueda de aplicaciones prácticas para sus exóticas propiedades.

En el espacio de momentum, se tiene (3.16) se puede reescribir en forma compacta para un campo magnético perpendicular al *acoplamiento espín-orbita*

$$H = \left(\frac{p^2}{2m} + up\sigma_y - \mu \right) \tau_z - \bar{B}\sigma_z + \Delta\tau_x \quad (3.17)$$

Donde, $\bar{B} = (g\mu_B/2)\mathbf{B}$, siendo g el factor- g de Landé, μ_B el magnetón de Bohr. A su vez u denota la fuerza del *acoplamiento espín-orbita de Rashba*, que e encuen-

Semiconductores	<i>InAs</i>	<i>InSb</i>
Masa efectiva m	$0.023 m_e$	$0.014 m_e$
	$12000 eV/c^2$	$7200 eV/c^2$
Factor-g	8-15	40-50
$b/B = g\mu_B/2$	$0.2-0.4 meVT^{-1}$	$1-1.5 meVT^{-1}$
Energía espín orbita E_{SO}	$0.05-1 meV$	$0.05-1 meV$
Acoplamiento espín orbita α	$0.2-0.08 eV\text{\AA}$	$0.2-1 eV\text{\AA}$
Longitud espín orbita k_{SO}^{-1}	$180-40 nm$	$230-50 nm$
Nanohilos de Majorana		
Superconductores	<i>Al</i>	<i>NbTiN</i>
Campo critico B_c	$10 mT$	$10 T$
Temperatura crítica T_c	$1.2 K$	$15 K$
gap superconductor Δ_0	$0.2 meV$	$3 meV$
gap inducido por proximidad máx Δ	$0.2 meV$	$1 meV$

LISTA DE TABLAS 3.1: *Propiedades experimentales de algunos materiales utilizados en la fabricación de nanohilos de Majorana en la búsqueda de MF.*[100]

tra en dirección perpendicular al *campo de Zeeman* \bar{B} . El valor particular de cada parámetro depende precisamente del arreglo experimental (ver fig 3.3), se han realizado nanohilos de Majorana con un nano hilo semiconductor de *InAs* o *InSb*, en proximidad de delgada laminas superconductoras de *Al* o *NbTiN* (Ver tabla 2). El *InAs* o *InSb* presentan un acoplamiento espín orbita fuerte y un factor-g grande con lo cual es posible tener un campo de Zeeman grande con un campo magnético relativamente pequeño facilitando la obtención de MZM en forma experimental.

Más adelante en este capítulo se realizará una deducción más formal de (3.17) y del cambio de base descrita en (3.16). Por el momento se procede estudiar este hamiltoniano hasta el último detalle. Esta tarea se facilita restringiendo la respectiva expresión a los casos límite. En específico se consideran dos limites dependiendo del valor del campo de Zeeman con respecto al campo de acoplamiento espín-orbita el cual se mide mediante la relación $\varepsilon_{so} = mu^2$, asumiendo que $\Delta \ll \text{máx}\{\bar{B}, \varepsilon_{so}\}$. [102]

1. **Límite de Kitaev** ($\bar{B} \gg \varepsilon_{so}$): No tomando en cuenta el acoplamiento de espín orbita, y $\mu = 0$ los valores propios de energía vienen dados por la expresión:

$$\varepsilon_p = \pm \left(\frac{p^2}{2m} \pm \bar{B} \right) \quad (3.18)$$

En este caso consiste en dos parábolas asociadas al valor del espín \uparrow y espín \downarrow

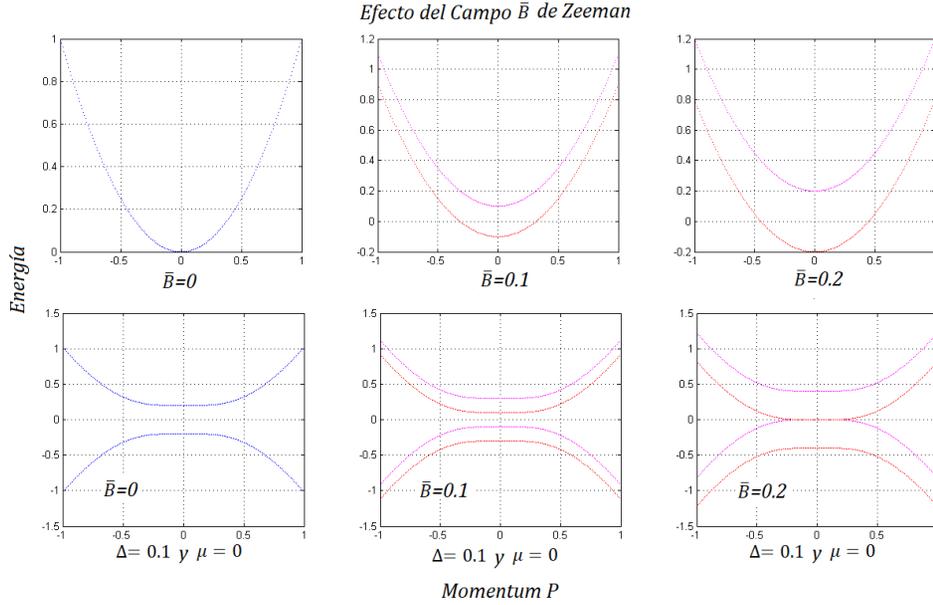


Figura 3.4: *Efecto Zeeman asociado al Espín en el espectro de energía, evidenciado por un campo magnético B que varía entre 0 y 0.2. Arriba, la parábola magenta corresponde al espín \uparrow , y la parábola roja al espín \downarrow . [100]*

Puesto que el *superconductor de onda s* presenta un acoplamiento de singlete, y que el campo magnético conserva el espín en la dirección z , las *excitaciones BdG* presentan un espín total, con lo cual se genera un inconveniente al querer obtener MZM dado que dichas cuasi partículas no deben tener espín ni ninguna otra propiedad para diferenciarse de sus antipartículas. El hecho de que los MZ aun presenten espín, afecta en que el gap de energía no puede ser abierto haciendo imposible tener un régimen topológico. Por otro lado, los MZ que se encuentran en los puntos donde el gap se cierra corresponden a bandas con espín opuesto, es decir, el sistema no corresponde a un sistema efectivo del modelo de una *cadena de kitaev sin espín*. Del mismo modo, las cuasi partículas BdG de nuestro interés no tiene en cuenta estados que correspondan a una mezcla de estados del espín ($d = uc_{\sigma}^{\dagger} + vc_{\sigma} = u^*c_{\sigma} + vc_{\sigma}^{\dagger} = d^{\dagger}$), cumpliéndose fácilmente la condición de Majorana de ser indistinguible de sus antipartículas.

En secciones anteriores se mencionó que el tomar en cuenta el valor del espín, estas excitaciones asociadas a la superconductividad inducida en el semiconductor se acoplan fácilmente al resto de la cadena haciendo una transición a la fase trivial de la misma.

Lo anterior puede entenderse formalmente para μ diferente de cero en el Hamiltoniano (3.17) varia su forma dado los diferentes valor de \bar{B} [102]

$$H = \left(\frac{p^2}{2m} - (\bar{B} + \mu) \right) \tau_z + p.t \rightarrow H = \left(\frac{p^2}{2m} - (\bar{B} + \mu) \right) \tau_z + p.t \quad (3.19)$$

En ausencia del acoplamiento espín orbita, el espín asociado a la cuasi partícula y anti cuasi partícula son $|d\rangle = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ y respectivamente $|d\rangle^\dagger = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ los cuales no presentarían ningún emparejamiento puesto que $\langle d | \Delta \tau_x | d \rangle = 0$, es decir, los pares de Cooper en **configuración de singlete no permiten inducir superconductividad** en un **sistema perfectamente polarizado**.

Al incluir el acoplamiento espín orbita para valores muy pequeños de este, se tiene que a partir de la teoría de perturbaciones de primer orden, este término modifica los espinores tal que así $|d\rangle = [1 \ -\mu p/2\bar{B} \ 0 \ 0]^T$ y $|d\rangle^\dagger = [0 \ 0 \ -\mu p/2\bar{B} \ 1]^T$, en este caso $\langle d | \Delta \tau_x | d \rangle = -\frac{\mu p}{\bar{B}} \Delta$. El hamiltoniano (3.19) es por tanto

$$H \simeq \left(\frac{p^2}{2m} - \bar{\mu} \right) \tau_z - \frac{\mu p}{\bar{B}} \Delta \tau_x \quad (3.20)$$

Cuya forma es la del hamiltoniano de un superconductor de onda p sin espín (1.63) tomando el parámetro de orden superconductor como un valor efectivo $\Delta' = u\Delta/\bar{B}$. Dado que $\varepsilon_{so} \ll$, implica que el nano hilo presenta una fase superconductoramente únicamente tomando en cuenta el acoplamiento espín orbita y en el límite de un campo de Zeeman fuerte.

2. **Limite Aislante topológico:** $\bar{B} \ll \varepsilon_{so}$: Tomando únicamente el efecto del acoplamiento espín orbita, a partir de (3.17) se tiene que el espectro de energía es

$$\begin{aligned} \varepsilon_p &= \frac{p^2}{2m} \pm \mu p = \frac{p^2}{2m} \pm \mu p + \frac{1}{2} m u^2 - \frac{1}{2} m u^2 \\ \varepsilon_p &= \frac{1}{2m} (p \pm \mu u)^2 - \frac{1}{2} m \mu^2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

En la figura 3.5 se observa la existencia de estados degenerados asociados al espín, a estos estados se les denomina pares de Krammer puesto que su

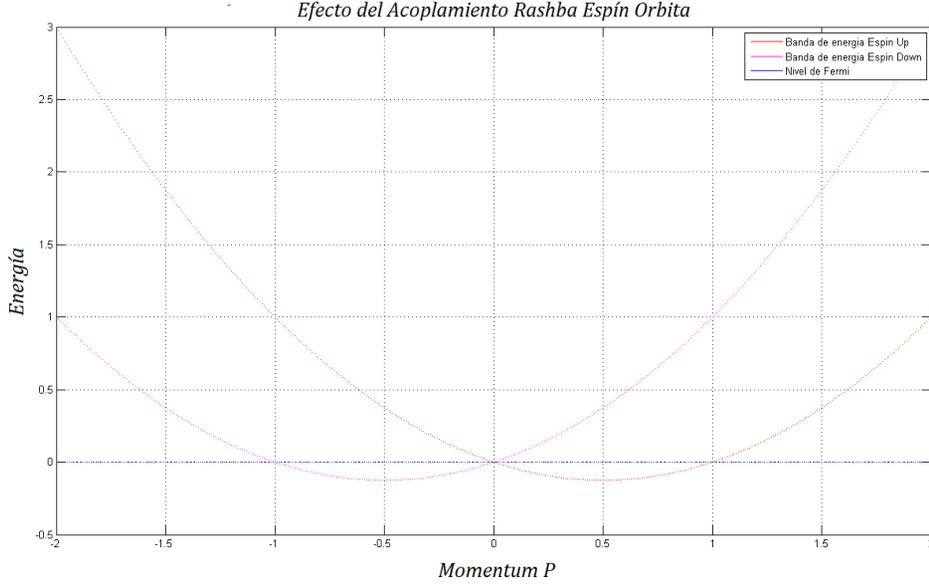


Figura 3.5: *Efecto del acoplamiento Rashba de espín-orbita en el espectro de energía (Degeneración de Krammer). Se toma $\mu = 0$, $u = 0,5$ y $\bar{B} = \Delta = 0$ en la ecuación (3.17).[102]*

respectivo estado cuántico presenta una degeneración de la energía tal que $E_{\downarrow}(p) = E_{\uparrow}(-p)$ (Degeneración de Krammer) la existencia de esta degeneración se encuentra asociada a que el hamiltoniano presenta simetría de inversión temporal. Por otro lado, la existencia de esta degeneración de los estados corresponde a tener dos cadenas de Kitaev con espín completamente polarizado, fenómeno similar al ocurrido en los aislantes topológicos donde se tienen dos corrientes de borde independientes asociadas cada una a un único valor del espín.

Al aplicar un campo magnético en dirección perpendicular al acoplamiento de espín orbital, dicho campo mezcla estos dos estados en $p = 0$ y abre el gap en $2\bar{B}$ (Ver fig. 3.10), con lo cual el espectro cambia en función del campo efectivo de Zeeman-Espín orbital resultante ($\sqrt{(up)^2 + \bar{B}^2}$) actuando sobre la componente del espín que es ortogonal tanto a \bar{B} como el acoplamiento espín orbital (ver fig. 3.6) de esta forma,

$$\varepsilon_p = \frac{p^2}{2m} \pm \sqrt{(up)^2 + \bar{B}^2} \quad (3.22)$$

En presencia del campo magnético y acoplamiento de espín orbital que rompe la conservación del espín, se levanta la degeneración de Kramer, asociado a

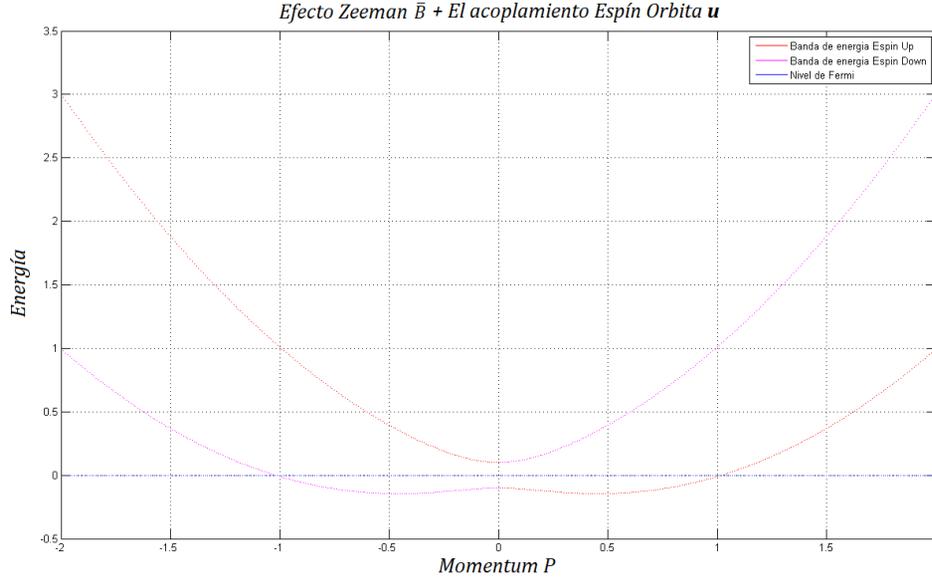


Figura 3.6: *Levantamiento de la degeneración de Kramer de la Heteroestructura (Ruptura de inversión TR). Se toma $\mu = 0$, $u = 0,5$, $\bar{B} = 0,2$ y $\Delta = 0$ en la ecuación (3.17).[102]*

una ruptura de la simetría TR, lo cual está asociado con un único modo de Majorana por borde y no dos (Asociados a la degeneración de Kramer). Se observa como los electrones presentan un espín en función del momentum p , en particular presentan espín opuesto respecto al valor $p = 0$, dando lugar a una cadena de Kitaev efectiva sin espín (ver fig. 3.6). A su vez se tiene que el MZ asociados a las bandas que se cierran en los puntos críticos presentan el mismo espín presentando un acoplamiento triplete o en su defecto corresponde a un sistema con el espín completamente polarizado. De este modo, al no existir una componente de espín que permita diferenciar la cuasi partícula de la anti cuasi partícula se tiene que dichas excitaciones de un nanohilo de Majorana son MZM.

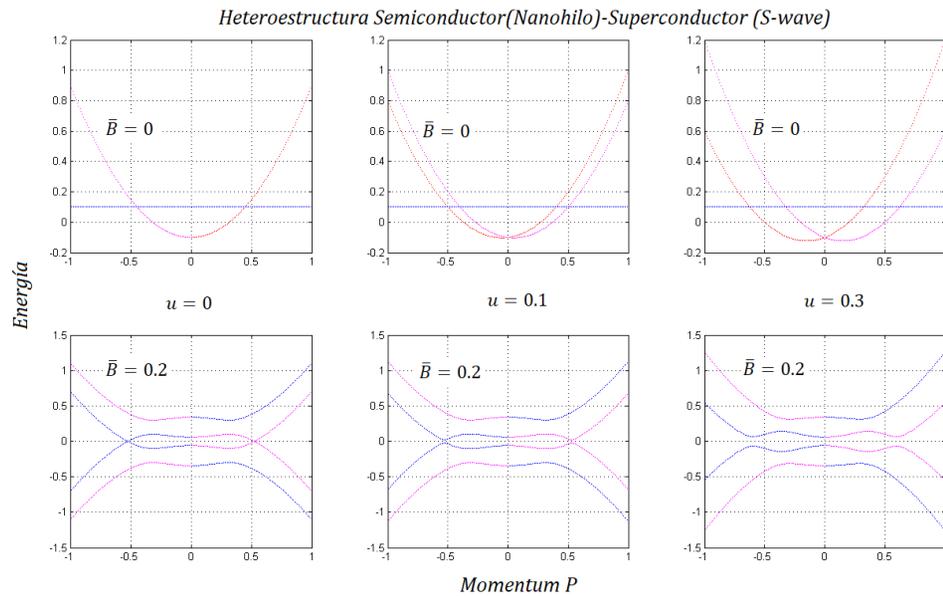


Figura 3.7: Arriba, Efecto del acoplamiento Rashba de espín-orbita en el espectro de energía (Degeneración de Kramer). Abajo, Espectro de energía en el límite de aislante topológico, se toma $u = 0, 0,1$ y $0,3$. [101]

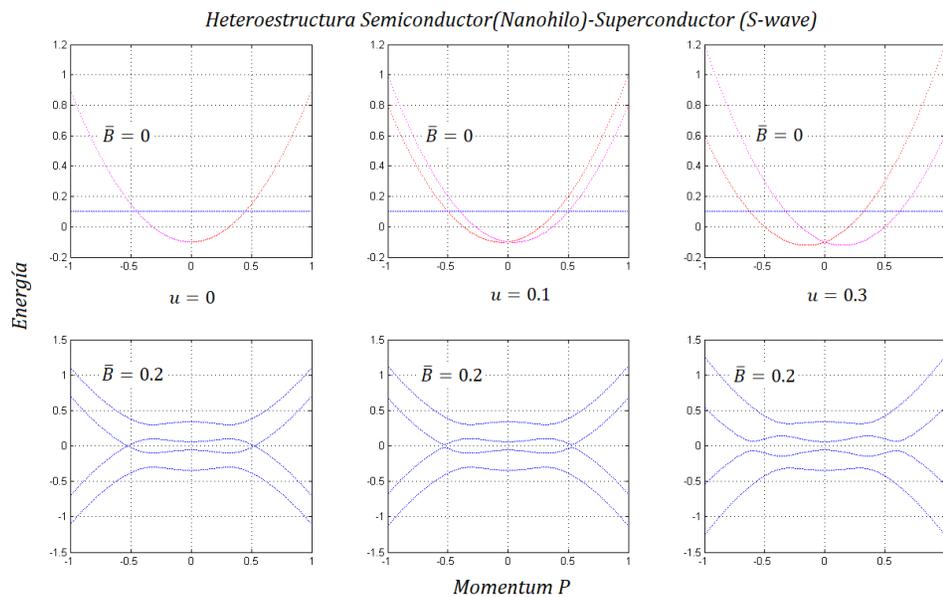


Figura 3.8: Arriba, Efecto del acoplamiento Rashba de espín-orbita en el espectro de energía (Degeneración de Kramer). Abajo, Espectro de energía en el límite de aislante topológico, se toma $u = 0, 0,1$ y $0,3$. [101]

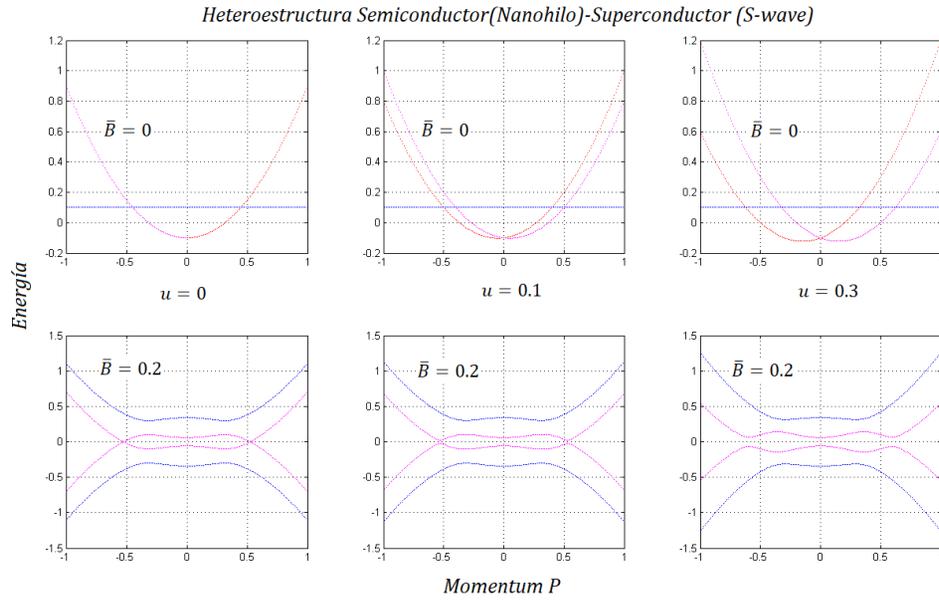


Figura 3.9: Arriba, Espectro de energía de un nanohilo con acoplamiento finito y campo de zeeman igual a cero, se grafica únicamente los valores propios de energía asociados a los electrones (Degeneración de Kramer). Abajo, Espectro de energía del nanohilo de majorana en la presencia de un campo de Zeeman \bar{B} , y acoplamiento de Rashba variable, en el límite de aislante topológico al tomar $u = 0, 0,1$ y $0,3$. [101]

El efecto del campo de Zeeman y del acoplamiento, Rashba espín orbita en el espectro de energía de la heteroestructura semiconductor-superconductor se observa en cuanto dicho espectro presenta dos mecanismos que cierran el gap de energía: **Primero**, Para valores del momentum cercanos a $p = 0$, el gap se cierra debido a la magnitud del campo de Zeeman \bar{B} (ver fig 3.11) y (ver fig 3.4); **Segundo**, para valores grandes de p , el cierre se debe únicamente al acoplamiento espín orbita (ver fig 3.9). Esto se puede observar rápidamente, tomando el hamiltoniano del nanohilo de Majorana (3.17) en el límite de aislante topológico

$$H \simeq up\sigma_x\tau_z - \bar{B}\sigma_z + \Delta\tau_x \quad (3.23)$$

Ahora dicho hamiltoniano presenta exactamente la forma del Hamiltoniano de un aislante topológico con lo cual espectro de energía está dado por la expresión $E_p = \pm\sqrt{(up)^2 + (\bar{B} \pm \Delta)^2}$, el gap se cierra para $\bar{B} = \pm\Delta$ y valores cercanos a $p = 0$, lo cual indica una transición de fase topológica.[102] El acoplamiento espín orbita y la aplicación de un campo de Zeeman, en aproximación al continuo es decir valores pequeños del momentum p , juegan un rol importante en la obtención de un sistema topológico.

Finalmente, es momento de realizar un análisis de la relación de dispersión para el nanohilo de Majorana.[100][101] Al tomar en cuenta los 3 ingredientes mencionados anteriormente mencionados, de forma que se observen los efectos de los mecanismos que abren y cierran el gap de energía para todos los valores de p .

Se retoma (3.12) en primera cuantización

$$H = \int dx \left[\psi^\dagger(x) \left(\frac{p_x^2}{2m} + u\sigma_y p_x - \mu + \bar{B} \cdot \sigma \right) \psi(x) + \psi(x) (\Delta e^{i\phi} i\sigma_y) \psi(x) + h.c \right]$$

Donde, $\bar{B} = (g\mu_B/2)\mathbf{B}$, siendo g es el factor-g de Landé, μ_B el magnetón de Bohr. A su vez u denota la fuerza del acoplamiento espín-orbita de Rashba, mientras el espinor $\psi(x)$ en el espacio real es igual a $\psi(x) = [\psi_\uparrow(x), \psi_\downarrow(x)]$. Para efectos de obtener un sistema que sea equivalente a un *superconductor de onda p*, el *acoplamiento espín-orbita* se encuentra en dirección perpendicular al campo de Zeeman y por último se toma $\phi = 0$. El nanohilo se encuentra ubicado a lo largo del *eje x*, la superficie del superconductor es perpendicular a la *dirección z*, mientras el acoplamiento espín orbita se toma en *dirección y*. Mediante una transformada de Fourier la función de onda es $\psi(p) = \int dp (e^{ipx}\psi(x))$, el hamiltoniano en el espacio de momentums

$$H = \int dp \left[\psi^\dagger(p) \left(\frac{p^2}{2m} + u\sigma_y p - \mu + \bar{B} \cdot \sigma \right) \psi(p) + \psi(p) (\Delta i\sigma_y) \psi(p) + h.c \right] \quad (3.24)$$

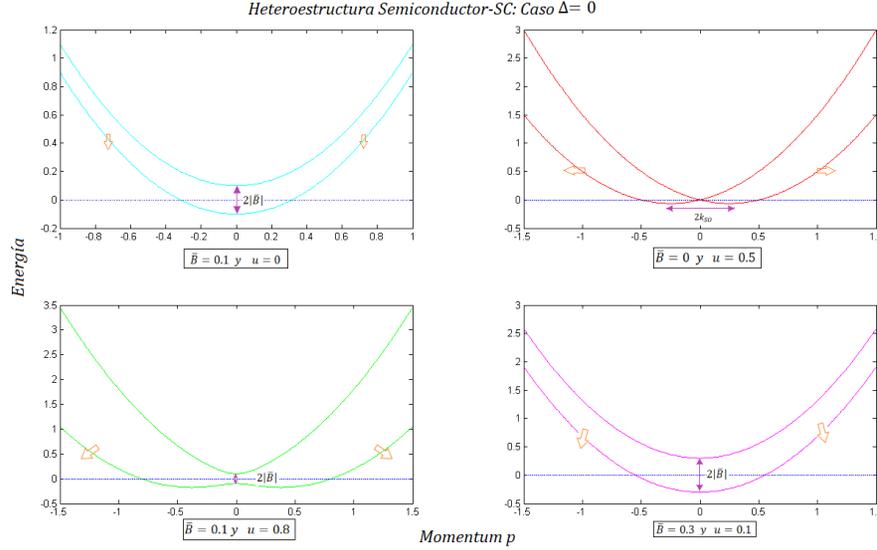


Figura 3.10: Espectro de energía y espín electrones del nanohilo semiconductor: **Arriba Izquierda**, Sin acoplamiento SO y campo \mathbf{B} finito; **Arriba Derecha**, Acoplamiento SO finito y sin campo magnético; **Abajo Izquierda**, El acoplamiento SO domina la apertura del gap de energía, los electrones presentan espín opuesto; **Abajo derecha**, El campo de zeeman \bar{B} domina el mecanismo de apertura del Gap, el espín está polarizado con el campo.

A. Caso $\Delta \ll \max\{\bar{B}, \varepsilon_{so}\} \equiv 0$: En este caso (3.24 se reduce a

$$H = \int dp \left[\psi^\dagger(p) \left(\frac{p^2}{2m} + u\sigma_y p - \mu + \bar{B} \cdot \sigma \right) \psi(p) \right] \quad (3.25)$$

Cuya forma compacta es $h(p) = \varepsilon_p \mathbf{1} + \mathbf{r}_p \cdot \sigma$ con: $\varepsilon_p = \frac{p^2}{2m} - \mu$; $\mathbf{r}_p = \bar{B} + up\hat{y}$ un campo magnético efectivo que toma en cuenta el aporte del campo de zeeman y del campo asociado al acoplamiento espín orbita. El espectro de energía en este caso es fácil de obtener resolviendo la ecuación característica $\det(h(p) - E(p)) = 0$, es decir

$$|h(p) - E \cdot \mathbf{1}| = \left| \begin{pmatrix} \varepsilon_p + \bar{B}_z & B_x + i(\bar{B}_y + ua) \\ \bar{B}_x + i(\bar{B}_y + ua) & \varepsilon_p - \bar{B}_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$E_{\pm} = \varepsilon_p \pm r_p = \frac{p^2}{2m} - nu \pm \sqrt{\bar{B}_x^2 + (\bar{B}_y + \alpha p)^2 + \bar{B}_z^2} \quad (3.26)$$

Esta relación es la forma general de la relación obtenida en (3.18) para un campo de Zeeman en la *dirección* z y $\mu = 0$. En este caso para un campo de Zeeman $\bar{B} > 0$, las bandas de energía no están degeneradas, mientras que para $\bar{B} = 0$ y $p = 0$, las bandas vuelven presentar degeneración de Krammer asociada al espín. El acoplamiento espín orbita como el campo de zeeman compiten para la polarización

del espín, en función también del momentum (*ver fig. 3.10*), como resultado, los electrones con la misma energía y momentum opuesto tienen un espín dirigido en diferentes direcciones.

B. Caso $\Delta > 0$: En este caso resulta de utilidad usar la nueva base del hamiltoniano H_{BdG} mencionada con anterioridad. Reescribiendo el hamiltoniano del nanohilo de majorana en el formalismo BdG

$$H = \int dp \left[\psi^\dagger(x) \left(\frac{p^2}{2m} + u\sigma_y p - \mu + \bar{B} \cdot \sigma \right) \psi(x) + \psi(p) (\Delta i\sigma_y) \psi(p) + h.c \right]$$

$$H_{BdG} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & -\Delta \\ -\Delta^* & -\mathbf{H}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(p) & -(\Delta i\sigma_y)^* \\ \Delta i\sigma_y & -\mathbf{H}(-p)^* \end{bmatrix}$$

Es posible cambiar el hamiltoniano a la base antes mencionada vía una transformación unitaria $U = \text{diag}(\mathbf{1}, \sigma_y)$, lo cual significa

$$UH_{BdG}U^\dagger = H_{BdG} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(p) & -\Delta \\ -\Delta & -\sigma_y \mathbf{H}(-p)^* \sigma_y \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$H_{BdG} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(p) & -\Delta \\ -\Delta & -T\mathbf{H}(p)T^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_p + B & -up & 0 & -\Delta \\ -u^*p & \varepsilon_p - B & -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta & -(\varepsilon_p + B) & -u^*p \\ -\Delta & 0 & -up & -(\varepsilon_p - B) \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Las simetrías *partícula-hueco* y de *inversión temporal* en esta nueva base son $\Lambda = \tau_y \otimes \sigma_y K$ y $T = i\sigma_y K$ respectivamente, es decir, mientras el operador de la simetría Partícula-Hueco cambio no lo hizo el de inversión temporal tal y como se definieron en (1.79) y (1.78). Este cambio de base resulta útil, puesto que el parámetro de orden superconductor asociado al fenómeno de superconductividad inducida por proximidad corresponde a una matriz unitaria respecto al sistema que se considera. Por otro lado, es fácil obtener el hamiltoniano asociado al grado de libertad de los huecos entendiéndolos como electrones bajo la acción del operador de inversión temporal, es por esto que su hamiltoniano se puede obtener al cambiar el signo de todos los términos que conservan esta simetría, y dejar con el mismo signo a aquellos que la rompen, es decir, los que son proporcionales al campo magnético \mathbf{B} . A partir de (3.28), es posible hallar la forma general de la expresión (3.14) en el espacio partícula-hueco. Puesto que (3.12) se puede escribir en el espacio de momentums de forma compacta tal que así

$$H(p) = (\varepsilon_p + up\sigma_y) \tau_z + \bar{B} \cdot \sigma - \Delta \tau_x \quad (3.29)$$

La relación de dispersión de las cuasipartículas se obtiene resolviendo la ecuación característica $\det(H_{BdG} - E(p)\mathbf{I}) = 0$.

$$E_{\pm} = \pm\sqrt{\varepsilon_p^2 + \bar{B}^2 + \Delta^2 - (up)^2} \pm 2\sqrt{(\bar{B}^2 - (up)^2)(\Delta^2 + \varepsilon_p^2)} \quad (3.30)$$

La expresión fue obtenida rápidamente mediante el programa Matlab introduciendo la matriz mediante variables simbólicas y hallando sus valores propios. Operando algebraicamente se tiene que tomando $\mathbf{r}_p = \bar{B} + up\hat{y}$, (3.30) para un campo \bar{B} perpendicular al acoplamiento espín orbita, puede rápidamente simplificarse tal que

$$E_{\pm} = \pm\sqrt{\varepsilon_p^2 + r_p^2 + \Delta^2} \pm 2\sqrt{(\varepsilon_p^2 r_p^2) + (\Delta^2 \bar{B}^2)} \quad (3.31)$$

Dada la anterior expresión, se obtuvieron las siguientes graficas

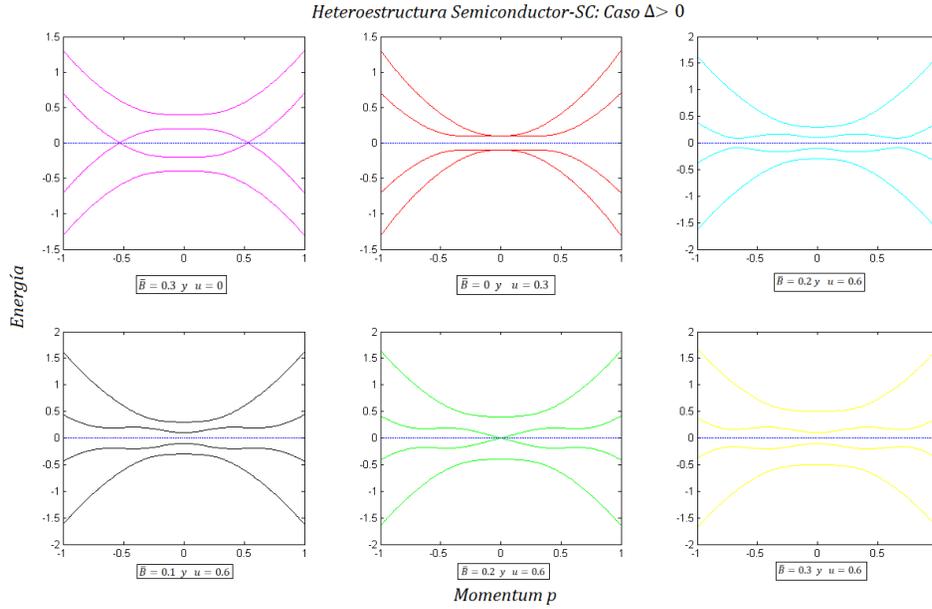


Figura 3.11: **Arriba**, Espectro de energía de un nanohilo en diferentes regimenes. **Abajo**, Espectro de energía del nanohilo de majorana en la presencia de un campo de Zeeman \bar{B} variable, y acoplamiento de Rashba $u = 0,6$. [100]

En la figura 3.11 se muestra que mientras, el acoplamiento de Rashba sea positivo, $u > 0$ y exista superconductividad inducida por proximidad en el nano hilo $\Delta > 0$ el sistema presenta un gap de energía ΔE_{SC} .

$$\Delta E_{SC} = 2E_-(p_{F_+}) \approx \frac{2u\Delta |p_{F_+}|}{\sqrt{\bar{B}^2 + (up_{F_+})^2}} \quad (3.32)$$

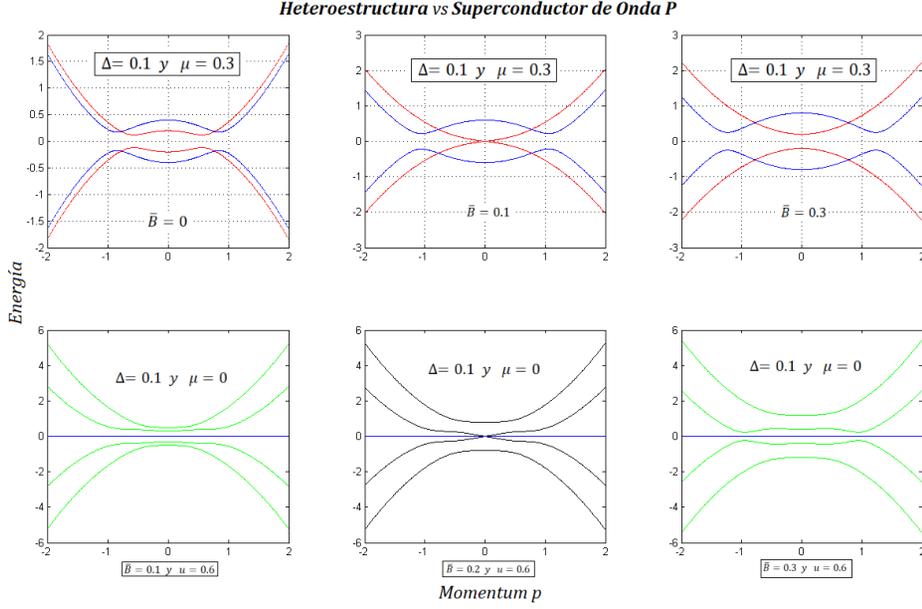


Figura 3.12: Comparación del espectro de energía de la cadena de Kitaev, y un nanohilo de Majorana: **Arriba**, un superconductor de onda p ; **Abajo**, Nanohilo de majoran en el régimen de un acoplamiento de espín orbita finito y campo de Zeeman variable.[100]

Donde, p_{F_+} , es el valor del momentum para el cual se cerraría el gap de energía en el caso que $\Delta = 0$. El valor de p_{F_+} , se obtiene a partir de (1.84) y hallar los puntos para los cuales dicha expresión se hace cero, $E(\pm p) = 0$

- Para $\bar{B} = u = 0$, el momentum para el que el gap se cierra es $k_\mu = \sqrt{2m\mu}$
- Para $\mu = u = 0$, el momentum para el cual el gap se cierra es $k_z = \sqrt{2m\bar{B}}$
- Para $b = \mu = 0$, el momentum para el cual el gap se cierra es $k_{SO} = mu$

, o en otras palabras solucionando la ecuación $\varepsilon_p^2 = r_p^2$

$$k_{F_\pm} = \sqrt{2k_{SO}^2 + k_\mu^2 \pm \sqrt{(2k_{SO}^2 + K_\mu^2)^2 - k_\mu^4 + k_Z^4}} \quad (3.33)$$

Por otro lado en la figura (3.12), se observa que para un valor fijo de μ , $u > 0$ en la presencia de un campo magnético variable, el espectro de energía empieza cerrarse para valores cercanos a $p = 0$, donde el gap de energía después de operar

algebraicamente viene dado por $\Delta E_z = 2E_{\pm}(0) = 2\left|\bar{B} - \sqrt{\mu^2 + \Delta^2}\right|$. Esta última condición está directamente relacionada con la transición de fase trivial y topológica del sistema, explícitamente se define como $\bar{B} \geq \sqrt{\mu^2 + \Delta^2}$. De este modo es posible obtener un sistema cuyo espectro de energía es equivalente al obtenido para un superconductor de onda p asociado al modelo de la cadena de Kitaev (*ver fig. 3.12*), y más importante aún este nuevo sistema efectivo puede ser implementado experimentalmente.

3.3. Señales experimentales de MZM

Existen materiales en los que surge de forma intrínseca *superconductividad de onda p* como un efecto de las interacciones de muchos cuerpos. Sin embargo, se tratan de sistemas muy raros. *Los candidatos mejor conocidos son: La fase superfluida del He, y el superconductor con emparejamiento triplete del espín Sr_2RuO_4 .* A la vez que, la implementación de vortices semicuántico capaces de hospedar MZM representan serios desafíos en ambos sistemas. Por otro lado, la realización de *superfluidos de onda p* con el espín polarizado en sistemas de átomos ultrafríos posee otros desafíos debidos a la corta vida de los pares de borde.[99] Debido a estas dificultades se tiene realizar, detectar y manipular MZM en superconductores topológicos intrínsecos como una ardua tarea. Apelando a la factibilidad y repetibilidad de resultados en la búsqueda de MF como cuasipartículas presentes en el fenómeno de superconductividad topológica, una alternativa promisoría desde el punto de vista de la ingeniería y experimentación son los superconductores topológicos sintéticos. Una de las propuestas más sencillas es la mencionada en las secciones anteriores, que como se discutió en su momento se trata de heteroestructura que combina un superconductor convencional con otro material que bien puede ser un semiconductor o un aislante topológico. Los pioneros de esta propuesta fueron por Fu y Kane mediante el uso de un *superconductor convencional de onda s* en combinación con un aislante topológico[16]. El siguiente paso fue reemplazar los aislantes topológicos con semiconductores que tecnológicamente hablando se tratan de materiales más amigables[61][63]. Uno de los desarrollos posteriores propone la realización de MZM en cadenas de átomos ferromagnética [103] sobre un sustrato superconductor. Teóricamente se pudo concluir que para la síntesis de un superconductor topológico se requiere de la combinación de: *Un acoplamiento espín-orbita, Un efecto de desdoblamiento de Zeeman y superconductividad inducida por proximidad.* Los primeros dos ingredientes proveen la plataforma de un sistema de fermiones sin espín, en forma efectiva, mientras la tercera provee el emparejamiento de los electrones en pares de Cooper. Al mismo tiempo, ser capaz de probar los modos cero de Majorana no se trata únicamente de un requerimiento para su investigación experimental, también permite ir varios pasos hacia adelante en la manipulación controlada de los mismos necesaria para la

computación cuántica.

Las características que necesitan ser demostradas pueden dividirse en tres: *(i)* MZM son *estados cuanticos a energia cero* y están localizados en defectos topologicos de los SC topologicos (Vortices, Borde, Dominios de pared, etc), *(ii)* Un par de MZM corresponde a un fermion de Dirac altamente deslocalizado, y *(iii)* Los MZM tienen una *estadística no abeliana*. Esta última propiedad representaría la última validación de la existencia de MZMs. Por supuesto, la prueba de estas propiedades envuelve todo tipo de experimentos y mediciones complejas, el primer paso natural es demostrar la existencia de estos estados de borde a un valor propio de energía cero, aún así se presentan todo tipo de efectos a tener en cuenta para lo que respecta a tener óptimas condiciones experimentales entre ellas: reducir el desorden debido a efectos del campo de Zeeman, la temperatura, así como el propio diseño de la nanoestructura.

Un fermión de Majorana es un objeto neutral que por tanto no puede acoplarse a un campo eléctrico, a su vez no poseen espín, es decir, tampoco pueden percibir los efectos de un campo magnético externo. Sin embargo, debido al fenómeno de no conservación de la carga asociado con la presencia de pares de Cooper (Un condensado superconductor), si un electrón entra al interior de un superconductor topológico, estos electrones deberían percibir la presencia de los MZ. Es por esto que los efectos en la conductividad o efecto túnel de la carga o espín proveen una herramienta conceptual simple pero fuerte como herramienta para la detección de MF mediante técnicas experimentales entre ellas la espectroscopía de efecto túnel. o STM.

A continuación se realizará una revisión teórica de algunos de los fenómenos asociados a la superconductividad topológica que permitan evidenciar la existencia de MZ en estos sistemas, así como también se dará a conocer ciertos resultados experimentales que se han hecho a lo largo de los años desde el inicio de la búsqueda en 2012.[35][106]

3.3.1. Reflexión de Andreev Anomala

Para entender cuál es el efecto en conductividad asociado a la presencia de un MZM en un material superconductor topológico (TSC), es instructivo primero comprender el caso de un superconductor convencional (S ó SC). El montaje experimental inicial es de lo más simple, consiste en un metal que presenta una interfaz con un superconductor y mediante la aplicación de un voltaje se observa que existe un paso de corriente a través de ambos bloques (*ver fig 3.13*); ahora bien existe un punto peculiar que lo diferencia de un circuito convencional, eso es la presencia de una corriente superconductora aun cuando el voltaje aplicado al sistema es más pequeño que el potencial asociado al gap superconductor. (*ver fig 3.14(a)*). La pregunta es: *¿Qué sucede con el electrón que llega a la interfaz N-S (Metal Normal-Superconductor) para valores pequeños de voltaje?*

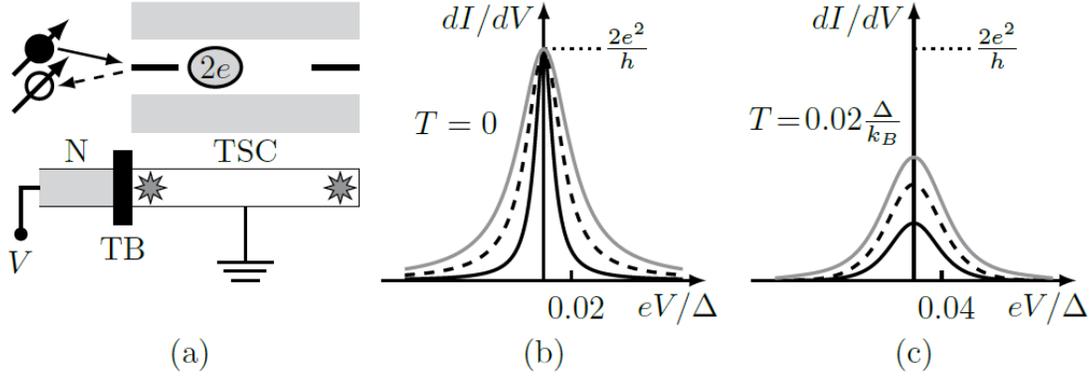


Figura 3.13: (a) *Metal convencional(N) acoplado a un superconductor topológico (TSC) con MZMs en los bordes* (b) *Diferencial de la conductancia a temperatura $T = 0$* (c) *Diferencial de la conductancia a una temperatura finita.*[99]

Al momento que un electrón llega a la interfaz con el superconductor, hay dos posibilidades que pueden tener lugar; una reflexión normal, según la cual el electrón simplemente se refleja en la interfaz con lo cual no existiría transferencia de carga entre los electrodos y por tanto no hay corriente que fluya a través del sistema, y en efecto esto ocurre aun cuando en la interfaz no haya un Superconductor. La segunda opción es un mecanismo asociado a la transferencia de carga y al cual se le conoce como reflexión de Andreev se da únicamente en el caso de tener una interfaz N-SC.

La reflexión de Andreev bien puede ser vista como un problema de transmisión a través de una única barrera (*ver fig 3.15-(a)*) entre N y SC; o por otro lado debido a la presencia del superconductor se tiene que tanto electrones como huecos participan en la transferencia de carga, conceptualmente, este último punto de vista se puede imaginar separar el lado metálico en dos secciones, una que únicamente conduce electrones mientras que la otra conduce únicamente mediante Huecos. Estas dos secciones se encuentran conectadas por el superconductor, que al momento de que el electrón incide en el SC se transmite un hueco al otro lado de la barrera. (*ver fig 3.14-(b)*) en esta imagen, el fenómeno de la reflexión de andreev puede ser entendido como un problema de transmisión por tunelamiento en una doble barrera.

En las figuras (3.14) y (3.15) cada electrón transfiere una carga $2e$ a través de la interfaz. Esto ocurre puesto que el electrón incidente presenta una retroreflexión debida al superconductor y se refleja un agujero de espín y velocidad opuestos pero igual cantidad de movimiento al electrón incidente. Se supone que la interfaz presenta una transparencia alta de modo que se reduce la posibilidad de una dispersión normal. (Ver fig 3.13). Dado que este par consta de un espín hacia arriba y espín

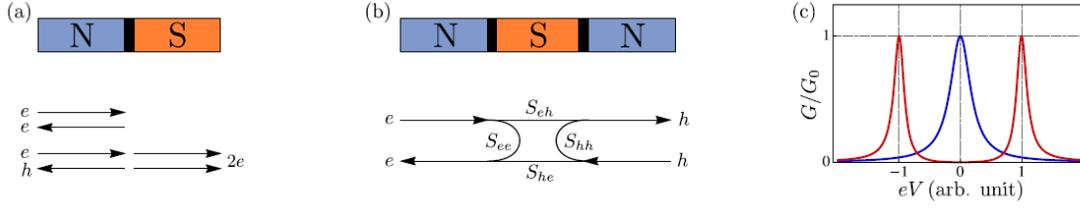


Figura 3.14: *Cuantización de la conductancia en un nanohilo de Majorana. (a) Experimento típico de conductancia donde el nanohilo se encuentra proximo a un metal a travez de una marrera de tunelamiento bajo un voltaje finito V_{bias} . (b) Reflexión de andreev como un problema de transmisión a traves de una barrera doble donde se presentan: S_{ee} (Reflexión normal), S_{eh} (Reflexión de Andreev). (c) La reflexión de Andreev presenta un pico de resonancia asociado a un MZ($E = 0$) y temperatura cero, para un voltaje de referencia $eV = 0$, el quantum de conductancia en este caso es $G_0 = 2e^2/\hbar$. [100]*

hacia abajo, un segundo electrón de espín opuesto al electrón incidente forma un par de Cooper en el superconductor, este fenomeno se le conoce como conservación de la carga.

Se define r_{eh} la amplitud para la relexión de Andreev, y su valor absluto al cuadrado $|r_{eh}|^2$, es la probabilidad de que un electrón incidente se refleje como un agujero. Una vez conocido r_{eh} , se puede conocer la conductancia $G(V)$, relacionada con la corriente superconductor que se genero como respuesta del pequeño voltaje V , $G(V) = \frac{dI}{dV}$. Al mismo tiempo, la conductancia se tiene que cumple con la relación

$$G(V) = 2G_0|r_{eh}|^2 \quad (3.34)$$

Si bien en este trabajo no se realiza la deducción de la ecuación (3.34), esta puede ser entedida intuitivamente. La conductancia es proporcional a la probabilidad $|r_{eh}|^2$ de la reflexión de Andreev, puesto que se tiene que para valores pequeños del voltaje este es el único mecanismo que permite la transferencia de carga. El factor 2, se debe a que cada reflexión de Andreev transfiera la carga asociada a un par de copper $2e$. Finalmente, $G_0 = e^2/h$, es el quantum de la conductancia, la constante de proporcionalidad fundamental que relaciona la corriente con los voltajes.

Una vez entendido lo que sucede en una interfaz convencional NS, se tiene que para el caso de un superconductor topológico que como se sabe en base al formalismo estudiado en el presente trabajo, a priori presenta un modo de Majorana asociado a sus bordes y es uno de estos bordes el que se encuentra en la interfaz con el metal. Se considera que el segundo modo se encuentra lo suficientemente alejado de la interfaz

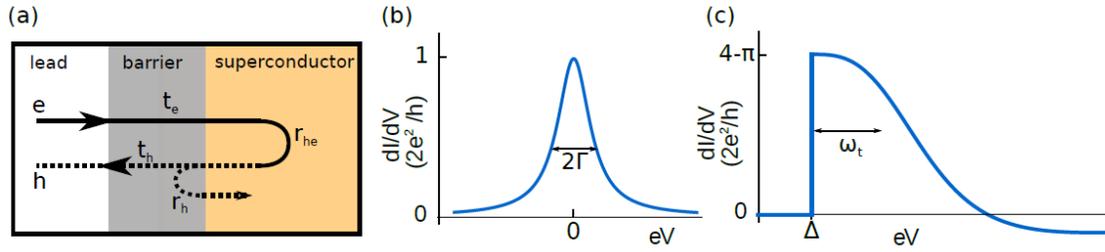


Figura 3.15: (a) Reflexión de andreev como un problema de transmisión a través de una barrera (b) Pico de resonancia cuantizado, el cual puede servir como prueba de un MZ aislado.[102]

y no presenta un rol en el transporte de carga. Surge la pregunta, *¿Cómo afectaría al fenómeno de la reflexión de Andreev, y en su defecto a la conductividad que presenta comúnmente el sistema N-S, la presencia de el MZM?*

Retomando el problema de reflexión de Andreev como un proceso de transmisión en la presencia de una barrera doble, según el cual se presenta una resonancia en el fenómeno de transmisión en la presencia de un estado de borde. Esto implica que la probabilidad $|r_{eh}|^2$ se ve mejorada dramáticamente si la energía del electrón incidente detecta a presencia del modo de borde. En este caso, la energía del electrón se define mediante el voltaje aplicado que a nivel experimental se tomara como V_{bias} , y puesto que en el caso de un MZM se trata de un modo a energía cero, se esperaría obtener un pico de resonancia en la conductancia de la interfaz a $V_{bias} = 0$ (ver fig 3.15.b). A nivel experimental la observación de este pico de resonancia es la forma más directa de medir la presencia de MZ que posiblemente sea un MZM de demostrarse las otras dos propiedades, esto se debe que la resonancia que se le esta asociando a los supuestos fermiones de Majorana bien se puede deber a cualquier estado de borde da baja energía. Dicho pico de resonancia se vera acompañado de otros dos picos relacionados con el par de Cooper a valores de voltaje diferentes de cero.

En la sección de resultados experimentales se explicara y tendran un poco más encuentra los por menores como la correlación de la conductancia con los procesos involucrados en la reflexión de Andreev anomala en materiales TSC (ver fig 3.13- (b) y (c), de manera más formal se partira de resultados experimentales obtenido mediante espectroscopia de efecto tunel, donde se pretende encontrar un fenomeno de reflexión de Andreev perfecto.

3.3.2. Efecto 4π de Josephson

Retomando el concepto del modelo de Kitaev presentado en el capítulo 1 con la finalidad de construir un sistema bidimensional con $2N$ MZM $(\gamma_{1,\dots,2N})$, que exhibe por tanto 2^N estados fundamentales totalmente degenerados. Al definir operadores de fermiones normales a partir de los MZM $f_i = (\gamma_{2i-1} + \gamma_{2i})/2$ y el operador número $n_j^* = f_j^\dagger f_j$, el estado fundamental colectivo puede ser convenientemente etiquetado por $|n_1, \dots, n_N\rangle$, donde, n_j son estados de Q-bits protegidos topológicamente. El efecto de Andreev y su aplicación como base fundamental de los experimentos de STM permite deducir la existencia de MZM tal y como se verá más adelante. Sin embargo no provee información de cómo los Q-bits se codifican.

Una forma de obtener esta información es preparar un sistema de 2 MF γ_1 y γ_2 aproximados adiabáticamente de forma que sus funciones de onda se solapen de forma apreciable (ver fig. 3.16 (a)). La hibridación de estos modos puede modelarse por el hamiltoniano $H_\varepsilon = i\frac{\varepsilon}{2}\gamma_1\gamma_2 = \varepsilon(n_1 - 1/2)$. Al tomar $\varepsilon > 0$, el sistema permanece en un estado fundamental si $n_1 = 0$, mientras que la fusión de γ_1 y γ_2 ($n_1 = 1$) produce una cuasipartícula de energía finita adicional. Es decir, se puede comprender el estado de n_1 como la detección de la presencia o ausencia de tal cuasipartícula.

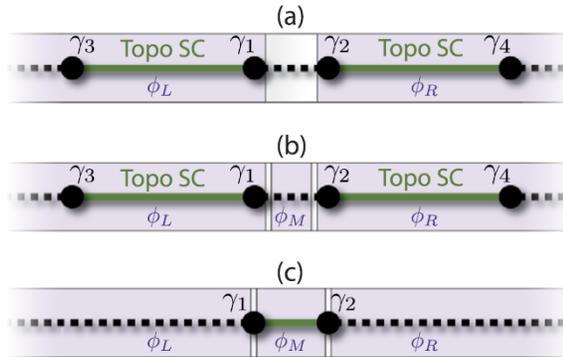


Figura 3.16: (a) Los fermiones de Majorana internos γ_1 y γ_2 ubicados a los bordes de las regiones topológicas median una componente adicional a la corriente convencional de Josephson de período 4π en función de φ , entre ambos TSC se encuentra una región aislante (Una barrera). (b) En la región intermedia entre los TSC es reemplazado por un superconductor o semiconductor (3.3), la corriente de Josephson de período 4π puede aislarse mediante mediciones de los denominados escalones de Shapiro. (c) Superficialmente es igual a (a) y (b) pero la corriente presenta un período de 2π en φ [40]

Otra señal experimental de la presencia de MZM es el efecto conocido como *efecto Josephson Fraccional* que consiste en evidenciar la fusión a través de lo que se conoce como unión de Josephson (JJ) que a diferencia del caso anterior se considera una

unión entre TSC y un metal normal (N-TSC); en este caso se trata de un mecanismo de transferencia de carga asociado a la unión entre dos superconductores que sean topológicos, los cuales se presumen que tiene MZM γ_1 y γ_2 asociados a los bordes, efectivamente dichos MZM se acoplarían uno con el otro de tal forma que pasarían a ser un fermión convencional con energía diferente a cero. Esta unión entre ambos TSC sigue presentando ciertos fenómenos asociados a las fases topológicas de los superconductores a pesar de la hibridación de los MZM. Esto último está relacionado con las dos componentes de la corriente I que puede fluir a través de dicha unión, asociado al fenómeno de transferencia de carga en la JJ en función de lo que se conoce como *diferencia de fase de Josephson* φ asociada al cambio de la fase superconductora $\phi_{R,L}$ en las dos regiones topológicas.

A través de esta unión pueden fluir dos tipos de corriente en forma paralela, es decir, $I = I_{2e} + I_e$. La corriente I_{2e} , denota la corriente de Josephson convencional debido a los pares de Cooper que atraviesan por efecto túnel la región intermedia entre ambos TSC, y su período se tiene que es de 2π en función de $\varphi = \Delta\phi$. [40] Por otro lado, se propuso que debido a la hibridación de modos $\gamma_{1,2}$ mediante una nueva contribución I_e [99].

Una forma de entender esta nueva contribución es modelar las dos regiones topológicas como dos copias del hamiltoniano (1.36) definiendo $\mu = 0$ y $\Delta = t$. Definiendo los operadores $c_{L,R}^\dagger$ que añaden fermiones a los segmentos topológicos, el Hamiltoniano es

$$H = \sum_{a=L,R} (H_a + H_\Gamma) = -\frac{t}{2} \sum_{x=1}^{N-1} (c_{ax}^\dagger c_{ax+1} + e^{i\phi_a} c_{ax} c_{ax+1} + h.c) - \Gamma (c_{LN}^\dagger c_{R1} + h.c) \quad (3.35)$$

Donde H_Γ describe el tunelamiento de un electrón a través de la barrera con fuerza $\Gamma > 0$. Recuerdese que H_a soporta MZM localizados en los sitios 1 y N de cada cadena. Por otro lado los MZM $\gamma_{1,2}$ de la unión están relacionados a los operadores de los fermiones de la red mediante las siguientes relaciones $c_{LN} = e^{i\phi_L/2}(\gamma_1 + i\gamma'_1)/2$, y $c_{R1} = e^{i\phi_R/2}(\gamma'_2 + i\gamma_2)/2$. Aquí $\gamma'_{1,2}$ están hibridados con los operadores en los sitios vecinos. Por tanto, c_{LN} y c_{R1} pueden proyectarse a un subespacio de energía cero de H_a al hacer

$$\begin{aligned} C_{LN} &= \frac{1}{2} e^{-i\phi_L/2} \gamma_1 \\ C_{R1} &= \frac{i}{2} e^{-i\phi_R/2} \gamma_2 \end{aligned} \quad (3.36)$$

Luego (3.36) y (3.35) describen un efecto de tunelamiento para un estado fermiónico a lo largo de la barrera cuyo hamiltoniano efectivo en el subespacio de bajas energías es

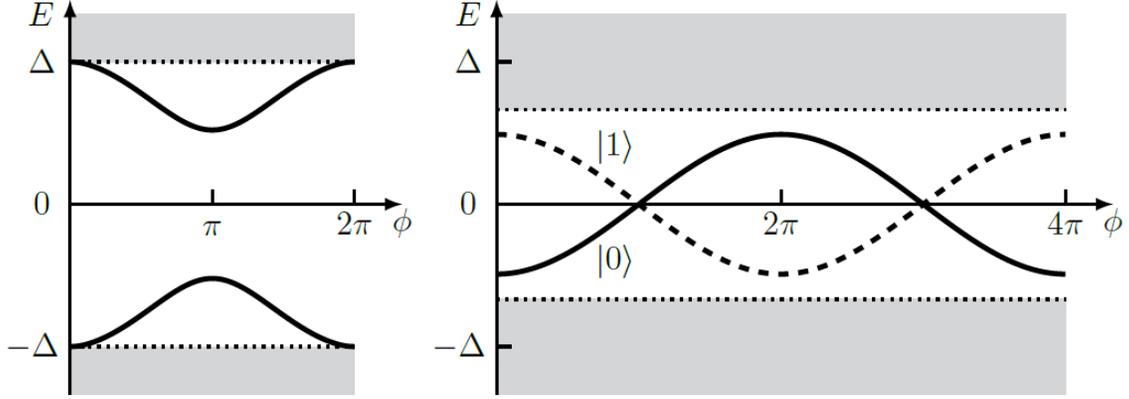


Figura 3.17: Energía como función de la diferencias de fases susperconductoras a través de una unión de Josepshon. Las areas grises corresponden a los niveles excitados de altas energías. Izquierda, Superconductor Topológico. Derecha, Superconductor topológico en el subespacio de bajas energía, los cruces para $\varphi = \pi, 3\pi$ estan protegido por la conservación de la paridad de los fermiones.[99]

$$H_{eff} = -\Gamma \left[\left(\frac{1}{2} e^{i\phi_L/2} \gamma_1 \right) \left(\frac{i}{2} e^{-i\phi_R/2} \gamma_2 \right) + h.c \right]$$

$$H_{eff} = -\frac{i\Gamma}{4} [e^{i\varphi/2} \gamma_1 \gamma_2 + h.c]$$

Siendo que $n_1 = \frac{i}{2} \gamma_1 \gamma_2$ el operador número de la cuasipartícula formada por los dos operadores de Majorana, se conserva $[H_{eff}, n_1] = 0$, esto permite encontrar un espectro de energía como la corriente I_e :

$$H_{eff} = -\frac{\Gamma}{2} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) (n_1 - 1/2)$$

$$I_e = \frac{2e}{\hbar} \frac{\langle H_{eff} \rangle}{d\varphi} = \frac{e}{2\hbar} \Gamma \sin(\varphi/2) (2n_1^i - 1) \quad (3.37)$$

A partir de (3.37) para un número de ocupación n_1^i fijo, y una unión de Josepshon constituida por dos superconductores topológicos se predice la existencia de una corriente de Josepshon de periodo 4π (*Efecto de Josepshon Fractional*) debido al efecto tunel de la mitad de un par de cooper a través de la interfaz(3.36). En contraste con la corriente convencional de Josepshon entre dos SC, cuyo periodo es de 2π dado que en dicho caso el paso de un par de cooper sería el causante de una corriente superconductora en un sistema de SC convencionales, (*ecuaciones de Josepshon*)

cuya expresión es

$$I(t) \equiv I_{2e} = 2e \frac{dE}{d\varphi} = I_c \text{sen}(\varphi(t)) \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{2eV(t)}{\hbar}$$

En el caso del sistema de dos TSC (*ver fig. 3.18 (a)*) el Hamiltoniano H_Γ que acopla MZ hace que los electrones y no unicamente los pares de Cooper puedan ser parte del proceso de transferencia de carga.

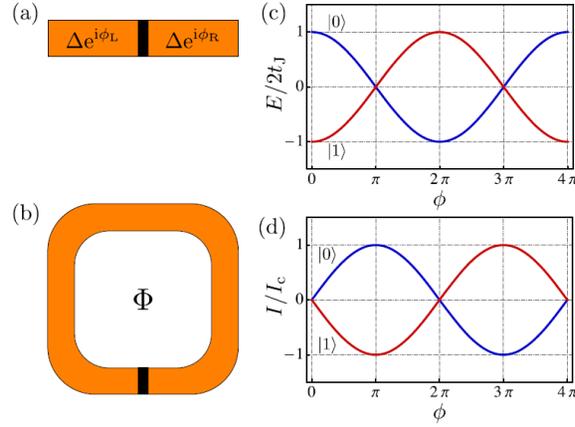


Figura 3.18: Efecto de Josephson fraccional en un Nanohilo de Majorana (a) Unión de Josephson realizado por la aproximación dos superconductores, modelados como dos segmentos 1-D acoplados mediante una barrera de tunelamiento, y diferentes fases superconductoras ϕ_R y ϕ_L . (b) Un superconductor 1-D en una geometría de anillo con una única unión de Josephson que encierra un campo magnético Φ . (c) Niveles de Energía asociados a una unión de Josephson como función de la fase $\varphi \equiv \phi$. (d) Corriente superconductor-Corriente de Josephson en función de $\varphi \equiv \phi$. [101]

Según lo anterior, la observación del efecto Josephson con periodo de 4π y su importancia en la detección de MZ, se debe a que justamente la paridad de los fermiones se preserva.

A partir de (3.37): Supongase un sistema tal que $\varphi = 0$ y paridad igual a 1, si el sistema inicia en un estado base de H_Γ y valor propio de energía $E = -\Gamma/2$ de modo que la paridad se conserva, para un cambio $\varphi = 0$ hasta 2π el estado cuántico es por tanto físicamente diferente puesto que su energía para $\varphi = 2\pi$ es $E = \Gamma/2$ en adición a un valor finito de la energía de las cuasipartículas asociadas a los otros fermiones de Majorana lejos de la interfaz (*ver fig 3.16*). Puesto que la paridad de fermiones global dicta que el sistema puede decaer de nuevo al estado fundamental

solo si los fermiones pueden transferirse entre los fermiones $\gamma_{1,2} \rightarrow \gamma_{3,4}$ situación que se excluye debido a la separación espacial entre los MZM de los extremos de cada sector TSC. El único modo de regresar el sistema al estado inicial es avanzar nuevamente desde 2π hasta 4π se obtiene el sistema de nuevo en su estado inicial, esta doble periodicidad en los estados físicos saca a relucir el efecto Josephson fractional o Efecto Josephson con periodo 4π . En este caso la presencia de fermiones de majorana permite el paso de electrones individuales (3.37) a través de la unión (*ver fig. 3.16*).

De forma experimental, la medición del efecto de Josephson de periodo 4π resulta en una señal inequívoca de la presencia de MZM en cuenta el signo de la corriente I_e (3.37) depende unicamente del número de ocupación n_i^i de la cuasipartícula formada por MZM en la unión.

3.3.3. Resultados Experimentales

I. Espectroscopia de efecto túnel

Antes de dar paso al experimental resulta de gran ayuda conocer la expresión de la corriente de Andreev desde el metal hacia el superconductor topológico mediante lo que se conoce como teoría de scattering.[40][102][105] De esta forma queda más claro como interpretar los resultados experimentales.

Tomando en cuenta todos los procesos de reflexión y retroreflexión en la figura 3.14 (a) o figura 3.15 (a). El mecanismo de transferencia de carga explícitamente consiste en: la amplitud asociada un electrón en la región del metal presenta un fenómeno de transmisión a través de la barrera, para valores de energía del electrón menores a la del gap superconductor $E = eV < \Delta$ al no haber modos de propagación en el superconductor en este caso el electrón transmitido se acopla a otro electrón con espín opuesto y forma un par de Cooper, por efectos de conservación de la carga se genera un hueco, el cual se refleja nuevamente a través de la barrera hacia el metal. En otras palabras, el electrón enviado a través de la barrera sufre una retroreflexión como un hueco en el límite con superconductor. Al final por reflexión de Andreev desde el punto de vista del metal convencional puede verse de forma efectiva que se ha dado una transferencia de una carga igual a $2e$ hacia el superconductor tal y como se menciona en la sección anterior.

La amplitud de probabilidad asociada a todos estos procesos es $t_h r_{he} t_e$, donde $r_{he}(r_e h)$ son la amplitud de la reflexión de Andreev; y $t_e(t_h)$, las amplitudes de transmisión de la barrera para electrones y huecos. De momento se deja la dependencia energética de estas amplitudes de forma implícita, en adición se tiene que la corriente total a través de la barrera no comprende un único fenómeno de Andreev sino que subsecuentemente a la primera reflexión existen más fenómenos de reflexión del mismo tipo para los electrones y huecos que ya se han visto reflejados, es por ello que la

amplitud total de reflexión para este fenomeno es

$$S_{he} = t_h[1 + r_{he}r_e r_{eh}r_h + (r_{he}r_e r_{eh}r_h)^2 + \dots]r_{he}t_e = \frac{t_h r_{he} t_e}{1 - r_{he}r_e r_{eh}r_h} \quad (3.39)$$

Con el fin de obtener la expresión de la corriente de tunelamiento, se multiplica la probabilidad de reflexión de Andreev por la *distribución de Fermi* de los electrones entrantes y los huecos salientes (*Al igual que el caso contrario- huecos incidentes y electrones reflejado*) definida como $n_f(\omega - eV)[1 - n_f(\omega + eV)]$ y se integra para todas las energías.

Lo corriente de Andreev para un supeconductor efectivo sin espín es entonces

$$I = \frac{1}{2}2e \int \frac{d\omega}{2\pi\hbar} |S_{he}|^2 [n_f(\omega - eV) - n_f(\omega + eV)] \quad (3.40)$$

La carga $2e$ en (3.40) se debe a que se transmite una carga asociada a un par de cooper por cada reflexión de Andreev. Se toma que el nanohilo que forma el TSC es lo suficientemente largo que el MF al otro extremo del nanohilo no se toma en cuenta, permitiendo obviar la transmisión a través del superconductor para lo que sucede en la interfaz. Luego la matriz de scattering \mathbf{S}_{eh} se reduce a una matriz (unitaria) \mathbf{r} de reflexión que cumple la siguiente relación con el operador de la simetria partícula hueco.

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_{ee} & r_{eh} \\ r_{he} & r_{hh} \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

$$\tau_x r(-E) \tau_x = r^*(E)$$

Del mismo modo, la relación entre las funiones de onda de las partículas incidentes y las reflejas tanto de forma normal como mediante reflexión de Andreev en el lado metálico de la barrera debe ser invariante tanto para huecos como para electrones. En este caso la reflexión de andreev se puede tomar como un problema de scattering a través de una barrera doble (*ver fig 3.15.b*) cuya ecuación es

$$\begin{pmatrix} \psi_e^+ \\ \psi_h^+ \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{ee} & \mathbf{r}_{eh} \\ \mathbf{r}_{he} & \mathbf{r}_{hh} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \psi_e^- \\ \psi_h^- \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

Donde ψ_e^- y ψ_h^- son los electrones y huecos incidentes mientras, ψ_e^+ y ψ_h^+ son los reflejados y $\mathbf{r}_{\alpha\beta}$ describen matrices tanto para la reflexión normal como la de Andreev.

A partir de 3.41 específicamente se tiene que para el nivel de Fermi $E = 0$, el cual está relacionado con las condiciones de superconductividad topológica tal y como se vio en los capítulos anteriores, se cumple $r_{ee} = r_{hh}^*$ y $r_{he} = r_{eh}^*$. Lo mismo ocurre

para la matriz \mathbf{r} en 3.42. Esto implica que $\det[\mathbf{r}(E = 0)]$ en ambos casos es real, y en función de las condición de unitariedad, dicho determinante toma unicamente dos valores $\det(\mathbf{r}) = \pm 1$.

Por otro lado, $|r_{ee}|^2 + |r_{eh}|^2 = 1$ con lo cual nos deja que si el determinante de la matrix de reflexión es igual a ± 1 , se corresponden a los dos siguientes casos (i) Un fenomeno de reflexión normal total $|r_{ee}| = 1$ ó bien (ii) Un fenomeno de reflexión de Andreev perfecto $|r_{eh}| = 1$. De ninguna manera existe un punto intermedio entre ambos casos, y notese que esta vez el $\det r$ toma las veces de invariante topológico para nuestro sistema, definido como $(-1)^\nu = \pm 1$, para $\nu = 0$ y $\nu = 1$ el sistema es trivial o topológico respectivamente. En otras palabras los posibles valores del determinante de la matriz ya sea para el caso de transferencia de carga por una barrera 3.41 o dos barreras 3.42 se encuentran constreñidos por la simetrias del sistema.

De (3.40), la conductancia $G(V) = dI/dV$ ($\omega = eV$) es proporcional a $|\mathbf{S}_{eh}| \sim |r_{eh}|$ tal y como se menciona en (3.34). La forma explicita de los elementos de la matriz \mathbf{r} ($|r_{eh}| \equiv \mathbf{r}$, tengase presente las tres notaciones que aparecen en la literatura) ya sea para el sistema de la figura 3.15 ó la figura 3.20 y que en efecto son los mismos, pueden obtenerse mediante diferentes metodos como: (i) cálculo via funciones de Green al relacionar la corriente de tunelamiento con las funciones de Keldysh Green[105], (ii) Mediante la formula Mahaux Weidenmüller [77], (iii) La formula de Landauer[100] o (iv) en su defecto a partir del hamiltoniano asociado al sistema N-TSC con el fin de obtener la relación entre las funciones de onda de los electrones que llegan y la función de onda de los huecos que se reflejan justo en el limite de la interfaz donde ambas deben coincidir [109][105][111], sin importar el método de obtención de dichos elementos finalmente se tiene que la conductancia asociada a un sistema Metal-TSC es

$$G(V) = \frac{2e^2}{h} |r_{eh}|^2 = \frac{2e^2}{h} \frac{\Gamma^2}{eV^2 + \Gamma^2} \quad (3.43)$$

Donde Γ es la razón del tunelamiento tanto de los electrones como de los huecos definida en función de la amplitud de transmisión de la barrera tal que, $\Gamma_{e/h} = \Gamma = \frac{1}{2} \Delta t_{e/h}^2$. [102] Existe un pico para $V = 0$ de altura $G(0) = 2e^2/h$ y ancho Γ respecto al cero (ver fig. 3.15), dicho valor cero del voltaje $V \equiv V_{bias} = 0$ es una de las magnitudes a medir en el montaje experimental de la espectroscopia de efecto tunel (STM). Lo interesante de la existencia de un valor de la conductancia a un valor cero de voltaje, es que no dependen del tamaño de la barrera sino de las simetrias del sistema, es decir, la unica forma de eliminar dicho valor es eliminando el MZM lo cual sucede unicamente al cerrar y abrir el gap de energía del TSC, es decir, al ocurrir una transición de fase, (ver fig. 3.21) y consecuentemente un campo del invariante topológico. Ahora bien esto es completamene cierto al menos para una temperatura $T = 0$ y para MZM a energia cero exactamente donde todo efecto

de las perturbaciones que puedan romper la paridad de los fermiones pueda no ser tomado en cuenta.

En base a lo anterior es posible explorar un modelo experimental denominado STM.[106][107] que consiste en reemplazar el material metálico por la punta de un microscopio de efecto tunel, la barrera es entonces la distancia entre la punta y el TSC.(*ver fig. 3.20*). Para completitud y poder evidenciar todos los resultados hasta el momento no solo en la búsqueda de fermiones de majorana sino en general de estados de borde de Andreev, categoría la que los MF pertenecen se refiere la lectura de [112], en el cual se encuentran los resultados mostrados a continuación para la STM y la evidencia del efecto Josephson de periodo 4π mostrados a continuación.

Los resultados experimentales recopilados en este trabajo eferentes a la anomalida de la reflexión de Andreev para un TSC se muestran en las figuras 3.19 3.21,3.22 y 3.23 tomadas de [105][35][103][77] respectivamente. Mientras un esquema del montaje experimental se encuentra en la fig 3.20 se tomo de [106]. Alguna de las figuras respecto al montaje experimental para las mediciones de etos dos fenomenos asociados a la superconductividad topológica fueron tomadas de [112]

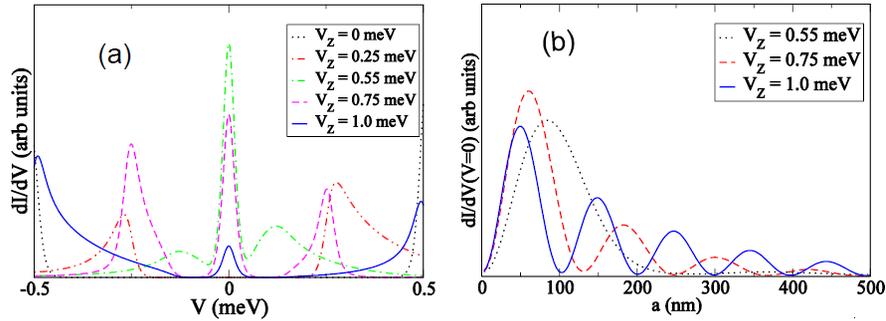


Figura 3.19: (a) Conductancia dI/dV esperada como función del voltaje V_{bias} para un montaje experimental de STM el nanohilo de majorana es de $InAs$, $\Delta = 0,5 meV$; Nb , $\mu = 0$, $\alpha = 0,1eV - \text{\AA}$ y $T = 100mK$. (b) Dependencia de la posición de la conductancia para un voltaje V_{bias} ubicada cerca del limite del nanohilo.[105]

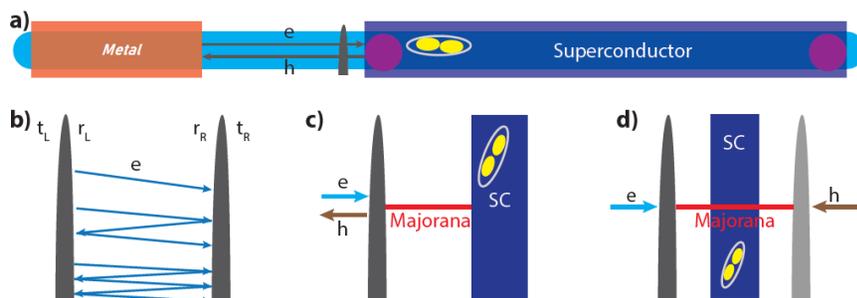


Figura 3.20: (a) Geometría Típica de un dispositivo sujeto a la detección de MZM de borde vía espectroscopia de efecto túnel (b) En la presencia de una doble barrera como en la fig. 3.14, los electrones pueden pasar a través de efecto túnel mediante diferentes trayectorias, por otro lado en el caso que los coeficientes a ambos lados de las barreras son iguales t_R y t_L , dicho túnelamiento presenta una unidad de probabilidad asociada todos los caminos posibles. (c) Y (D) Evento de tunelamiento en presencia de un MF, en este caso la punta del microscopio de efecto túnel actúa como en la fig. 3.15[106][107]

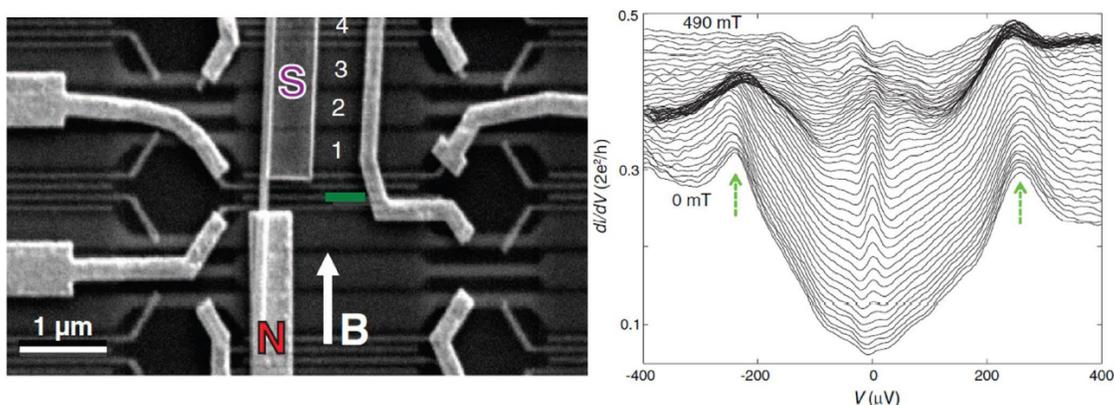


Figura 3.21: (a) Superconductor acoplado con un nanohilo de InSb para probar MZM (b) Pico de resonancia en V_{bias} cuando el campo de Zeeman es grande, que indica la existencia de MZM [35]. Por lo general en la configuración de un microscopio de efecto túnel (STM). La corriente de tunelamiento I que es equivalente a la debida por transferencia de carga en la interfaz N-TSC se mide a lo largo del hilo para todas las coordenadas en x y y y manteniendo un V_{bias} constante, sin embargo en el caso de ser usado para la espectroscopia de efecto túnel la punta permanece en un único lugar y variando el valor del voltaje V_{bias} se miden los valores de la corriente y mediante una diferenciación numérica se obtiene la gráfica de la Izquierda.[35][106]

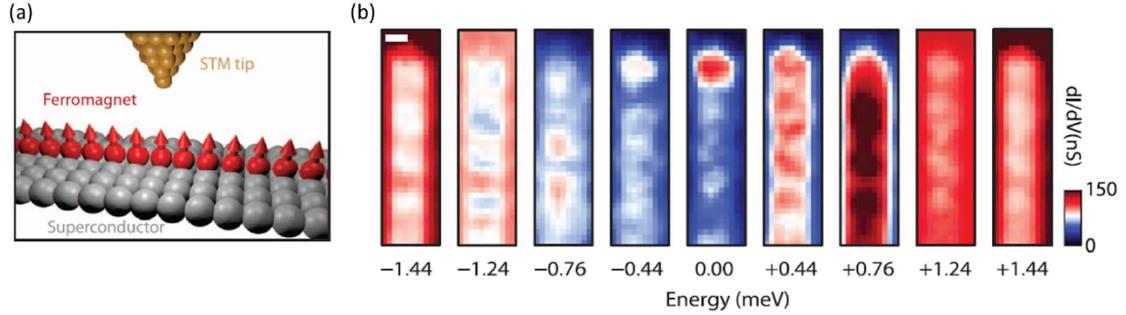


Figura 3.22: (a) *Átomos de Hierro sobre un film superconductor* (b) *Densidad local de los estados mediante un STM, Se observa una densidad de estados localizada en el borde del hilo a Energía cero, medidas tomadas por microscopia de efecto tunel de escaneo (STM)[103]*

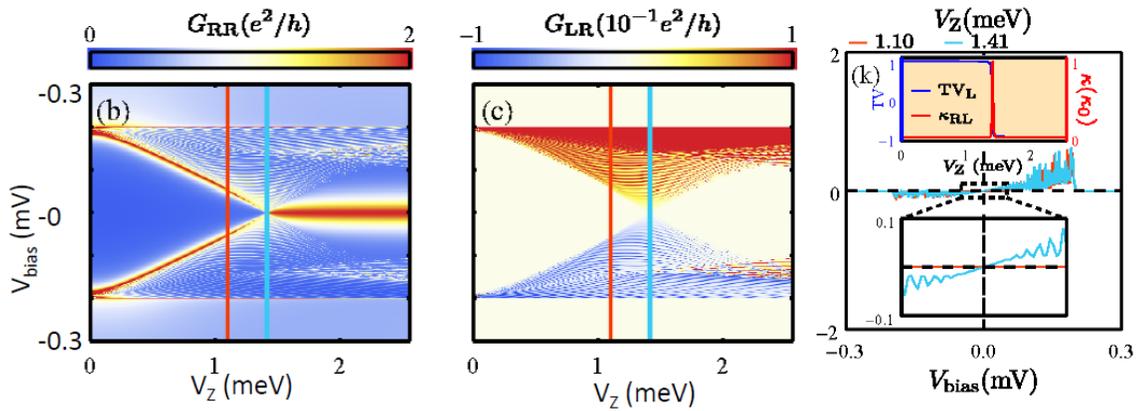


Figura 3.23: **Izquierda:** Conductancia $G = dI/dV$ en un nanohilo de majorana como función de un campo de Zeeman V_Z relativo al gap superconductor Δ , se observa un cierre del gap de energía para un valor crítico $V_{Zc}^2 = \Delta^2 + \mu^2$. **Centro** La conductancia no local entre el final del semiconductor/superconductor presenta un cierre del gap superconductor **Derecha:** La conductancia en el punto crítico cercano a un voltaje de cero presenta una dependencia lineal de V_{bias} [77].

II. Espectroscopia de Josepshon

Los aspectos experimentales a tomar en cuenta son:

1. La corriente I_e debe poderse separarse de la componente I_{2e} que fluye en paralelo. Con el fin de obtener una aproximación de la magnitud de las corriente a tratar se define $\Gamma \sim 1K$, es decir, $I_e^c = e\Gamma(2\hbar) \sim 10nA$ lo cual define la resolución de las mediciones de corriente que se deben afrontar.
2. Los operadores $\gamma_{1,2}$ realmente se acoplan con $\gamma_{3,4}$ para una energia caracteristica $\delta E \propto e^{L/\xi}$; para L la longitud de las regiones topológicas y ξ la longitud de coherencia, esta hibridación levanta la conservación de n_1 y restaura la periodicidad 2π de I_e .
3. A temperaturas finitas procesos inelásticos pueden causar trnasiciones entre los valores de n_1 , provocando telegraph noise en la medición de la corriente.[113]

En definitiva la corriente de la unión de Josepshon depende unicamente de las propiedades de los superconductores, y puede verse afectada por factores ambientales como la temperatura o un campo magnetico externo. Una forma de afrontar lo anterior es que la diferencia de fase φ debe verse modulada muy lentamente, y el cambio en la paridad ocurriría unicamente a la presencia de una cuasiparticula en el borde que rompa dicha simetria. Existen tres metodos para la modulación de φ [104]:

- *Efecto Josepshon AC*: Al aplicar un voltaje fijo V_{DC} a la JJ, la fase variaría linealmente con respecto al tiempo, y se evidencia según el periodo de la corriente a traves de la unión, que se genera una corriente AC (Efecto Josepshon AC) cuya frecuencia es la mitad a la frecuencia de Josepshon convencional de una Unión SC-SC, , lo que resulta en una clara señal de superconductividad topológica.[104][108]
- *Efecto Jospeshon AC Inverso*: Un fenómeno de radiación de microndas de una unica frecuencia ω puede inducir voltajes V_{DC} EN LA jj, en cuyo caso la fase de Josepshon toma la forma

$$\varphi(t) = \varphi(t) + n\omega t + a \sin(\omega t)$$

Y el voltaje corriente a traves de la JJ son tomando ($\hbar = 1$)

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{1}{2e}\omega(n + a\cos(\omega t)) \\ I(t) &= I_c \sum_{m=-\infty}^{\infty} [J_m(a) \sin(\varphi_0 + (n + m)\omega t)] \end{aligned} \quad (3.44)$$

- *Escalones de Shapiro*: Una última alternativa corresponde al efecto de lo que se conocen como escalones de Shapiro. En uniones de Josephson convencionales, la combinación de un voltaje V_{dc} y un voltaje AC $V_{AC}\sin(\omega t)$ se genera una corriente de Josephson (ver fig. 3.24)

$$I = I_J \sin(\varphi + 2eV_{dc}t - (eV_{ac}/\hbar)\cos(\omega t)) \quad (3.45)$$

Expandiendo esta expresión en funciones de Bessel, se observa que la corriente exhibe escalones como función del voltaje de referencia denominados escalones de Shapiro [104]. Dichos escalones se originan debido a la resonancia entre el voltaje AC y la fase debida al voltaje en DC que ocurre para $2eV_{dc} = n\hbar\omega$ con n entero. Esta condición cambia cuando la relación corriente-fase de Josephson es periódica en 4π y los escalones ocurren cuando $eV_{dc} = n\hbar\omega$. Los supuestos MF solo contribuyen cada segundo escalón de Shapiro, existiendo una asimetría par-impar en los mismos, esto brinda una fuerte señal de estados de Majorana (ver fig. 3.27).

Ciertos modelos experimentales resultan más sencillos que otros en cuanto a su implementación puesto que dicha observación experimental requiere de extensas regiones topológicas estables a ambos lados de la unión (ver fig 3.16). En base a esto los bordes presentes en los aislantes topológicos proveen una plataforma ideal para este tipo de experimentos. Sin embargo, de momento continuaremos con el sistema de un nanohilo de Majorana implementado tal y como se muestra en (3.3).

Uno de los montajes experimentales que permite evidenciar el efecto Josephson y su periodicidad propuesto en 2011 se encuentra a continuación [108]

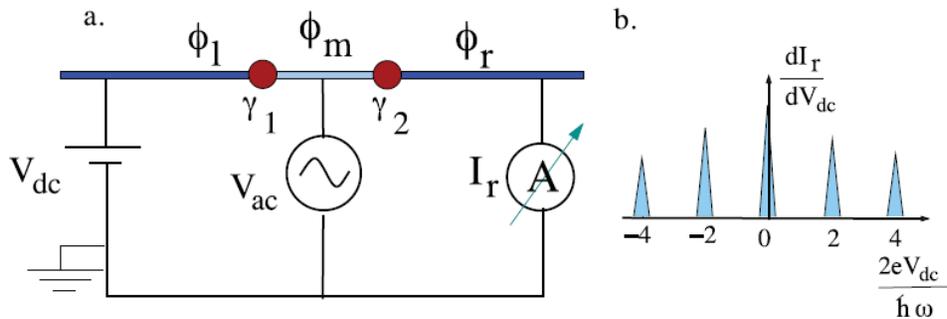


Figura 3.24: **Izquierda:** Esquema experimental para evidenciar el Efecto de Josephson AC. **Derecha:** La conductancia teórica para la configuración del circuito (a) permite predecir los antes mencionados escalones de Shapiro [108].

En 2012 se realizó una implementación del montaje de la figura 3.24, experimentalmente algunos de los resultados que se han obtenido son [109][110]

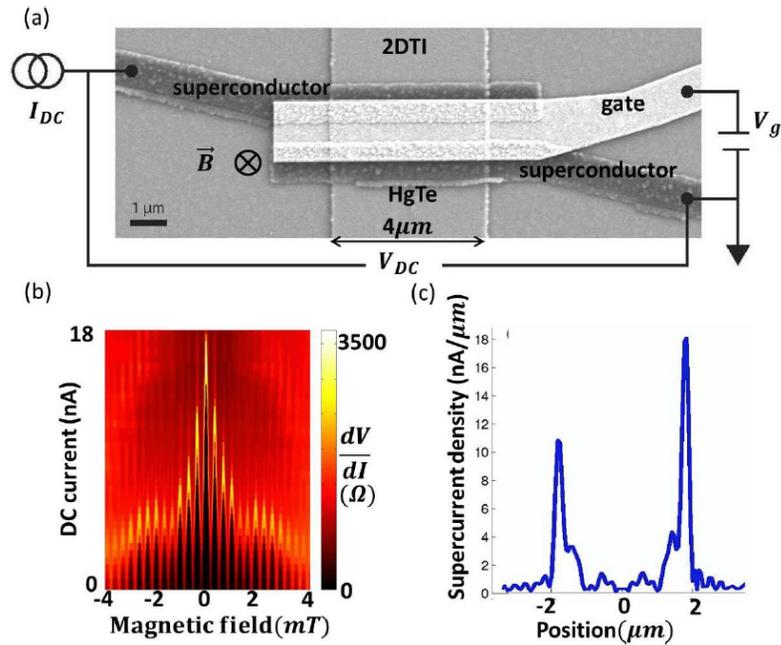


Figura 3.25: (a): Una unión de Josephson construida sobre un pozo cuantico de HgTe. (b): Patrón de interferencia de la conductancia. (c): Densidad de la supercorriente en el espacio real, obtenido mediante una transformada de fourier inversa de (b). [109].

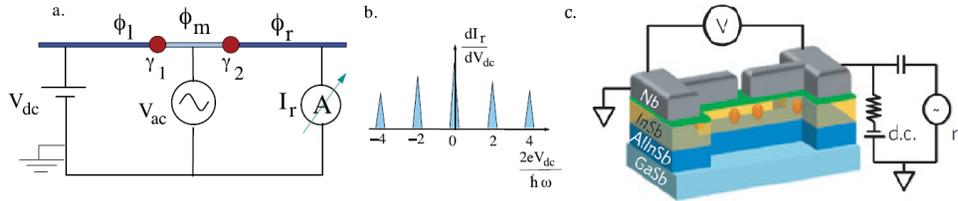


Figura 3.26: **a.** Esquema experimental para evidenciar el Efecto de Josephson AC. **b** La conductancia teorica para la configuración del circuito (a) permite predecir lo antes mencionados escalones de Shapiro. **c** Los puntos naranjas marcan los puntos donde se esperaba encontrar MF [108][110].

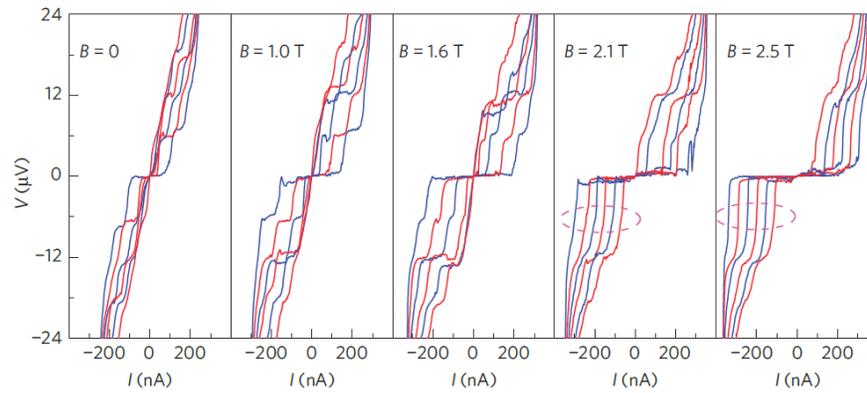


Figura 3.27: Graficas del voltaje característico $V(I)$ de una Unión de Josephson en la presencia de un campo magnetico B y un V_{bias} entre 3 y 6 mV en incrementos de 0,6mV. Para $B < 2T$, el rpimer escalón de Shapiro ocurre para $\Delta V = 6\mu V$, y para $B > 2T$, dicho escalon desaparece, y esta vez el primer escalon se encuentra en $12\mu V$. Este efecto es una señal del Efecto de Josephson Fraccional y de superconductividad topológica [110].

Capítulo 4

Computación cuántica topológica

La computación es un proceso en el cual se realiza un gran número en cantidad de operaciones simples. El componente principal de los computadores clásicos son los Bits. Cada uno de ellos puede tomar los valores de 0 o 1. Una serie de compuertas pueden cambiar estos valores al actuar de forma selectiva en ellos, y este proceso se estructura de tal forma que sirva para cumplir con cierto propósito, y que la información codificada en los bits al igual que los cambios realizados por las compuertas den como resultado la respuesta deseada. Mientras que sea posible construir algoritmos que puedan realizar cualquier proceso computacional, también es deseable encontrar una respuesta en un tiempo corto y con un uso de recursos razonables. Es por ello que existe una creciente demanda en elevar el poder computacional tanto para propósitos científicos como comerciales, esto ha llevado a un esfuerzo inmenso en la investigación de como incrementar tanto la velocidad como el procesamiento de los computadores basados en el concepto de la maquina universal de Turing, que desde su introducción se ha visto influenciada por la física en muchas formas. La mayor influencia se debe a la introducción de la lógica cuántica en los procesos computacionales. La posibilidad de una máquina de Turing cuántica fue inicialmente sugerida por David Deutsch. Al mismo tiempo Richard Feynman, se enfrentaba con la dificultad de simular sistemas cuánticos con los computadores clásicos, sugirió la posibilidad de construir una poderosa computadora a partir de los sistemas cuánticos que fácilmente pudiesen superar los computadores clásicos. La idea de la computación cuántica nació a la par de la apertura de numerosas aplicaciones potenciales.

Conceptualmente, los computadores cuánticos siguen el paradigma de sus contrapartes clásicas, junto con algunas modificaciones distintivas. En lugar del bit que describe los estados clásicos 0 y 1 de un sistema binario, existe el Q-bit. Dicho Q-bit codifica el estado binario de un sistema cuántico, que en general consiste en una superposición de los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$. La mecánica cuántica también permite la superposición entre muchos Q-bits, en lo que se conoce como estados entrelazados. La presencia del entrelazamiento incrementa dramáticamente la dimensión del espacio

de codificación. Dichos Q-bits se ven modificados por las compuertas cuánticas, las cuales consisten en operaciones unitarias que pueden generar cualquier transformación deseada de los estados. El principal obstáculo de las aplicaciones prácticas de los computadores computacionales es realizarlas físicamente en el laboratorio. Para que un proceso computacional sea realizable, se debe contar con la inicialización de los Q-bits, la creación de compuertas cuánticas y la lectura de la salida computacional. En cada una de estas etapas los errores inherentes a cualquier procedimiento experimental, pueden introducirse como perturbaciones incontrolables producidas por el ambiente.

Existe una búsqueda activa de nuevas arquitecturas de la computación cuántica que permitan resolver el problema de la decoherencia y errores ambientales de forma más eficiente que los modelos actuales. Motivados por la riqueza de la física cuántica, un gran número de esquemas de la computación cuántica han sido propuestos. Estos modelos computacionales novedosos se han basado en: Las mediciones, Raussendorf y Briegel; Transiciones adiabática, Farhi et al; fases geométricas, Zanardi y Rasetti; o en evoluciones topológicas, Kitaev. Aun así, ante su diversidad cada uno de ellos pueden ser vistos computacionalmente equivalentes a la máquina de Turing tanto clásica como cuántica. En el presente capítulo se implementa en forma teórica el modelo de un nanohilo de Majorana para más de un nano hilo con lo cual es posible tener efectivamente N cantidad de MF en la búsqueda de aplicaciones prácticas de otra de sus características exóticas, su estadística no abeliana mediante el intercambio de estas cuasi partículas en una unión T de 3 nano hilos, sin olvidar que la información que define a estas fases se almacena de manera no local proveyendo una capacidad de proteger la información ante perturbaciones ambientales locales. Por otro lado, antes de dar paso al concepto de computación topológica mediada por fermiones de Majorana, y un esquema básico del mismo, resulta esclarecedor entender algunos de los principios de la computación e información cuántica comúnmente usados en los esquemas computacionales anteriormente mencionados.

4.1. Q-bits y su manipulación

El primer elemento de codificación de la información cuántica son los Q-bits cuyos estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ pueden presentarse como una superposición lineal de la forma $|\psi\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle$ donde, a_0 y a_1 son números complejos los cuales cumplen con $|a_0|^2 + |a_1|^2 = 1$. En el momento que un Q-bit es medido, el estado colapsa a una de sus componentes, en particular en la base de los estados medibles $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ (base computacional) el estado colapsa en $|0\rangle$ con probabilidad $|a_0|^2$ o bien en $|1\rangle$ con probabilidad $|a_1|^2$. Los coeficientes pueden expresarse en términos de 2 ángulos: $a_0 = \cos \frac{\theta}{2}$ y $a_1 = e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2}$ que permiten obtener una representación del espacio bi-dimensional de un Q-bit como una esfera unitaria (Esfera de Bloch) cuyos polos Norte y sur

corresponden a $|0\rangle$ y $|1\rangle$ respectivamente.

Esta superposición es la responsable del aumento en la eficiencia de los algoritmos cuánticos comparados con sus contrapartes clásicas. Considérese un sistema cuántico de n -Q-bits cuyo espacio de Hilbert de dimensión 2^n es el producto directo del espacio de Hilbert asociado con los Q-bits, el estado general se encuentra definido por

$$|\psi\rangle = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n \in \{0,1\}^n} a_{i_1, i_2, \dots, i_n} |i_1, i_2, \dots, i_n\rangle \quad (4.1)$$

Donde la suma de los coeficientes complejos cumple con $\sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} |a_{i_1, i_2, \dots, i_n}|^2 = 1$, y $|i_1, i_2, \dots, i_n\rangle = |i_1\rangle \otimes |i_2\rangle \otimes \dots \otimes |i_n\rangle$. Nótese que la sumatoria se realiza sobre 2^n índices, lo cual da un indicio sobre un aumento exponencial del espacio de Hilbert en comparación con el espacio de codificación clásico de dimensión $2n$. Un ejemplo de (4.1), es el estado de 2 Q-bits $|\psi_1\rangle = a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle$ y $|\psi_2\rangle = b_0 |0\rangle + b_1 |1\rangle$ es de la forma

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = a_{00} |00\rangle + a_{01} |01\rangle + a_{10} |10\rangle + a_{11} |11\rangle \quad (4.2)$$

Cuánticamente es posible tener dos estados que describe estados entrelazados, consistentes con la superposición de estados compuesto, conocidos como estados de Bell o pares EPR.

$$|\Psi^\pm\rangle_{12} = \frac{|01\rangle \pm |10\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad |\Phi^\pm\rangle_{12} = \frac{|00\rangle \pm |11\rangle}{\sqrt{2}} \quad (4.3)$$

Según los cuales una medición sobre el Q-bit $|\psi_1\rangle$ permite conocer instantáneamente el estado del Q-bit $|\psi_2\rangle$. Estos estados entrelazados dan lugar a muchos efectos dramáticos dado que las propiedades globales del sistema de ambos Q-bits son irreducibles a mediadas locales, ejemplo de estos nuevos paradigmas son una codificación súper densa de la información, y un fenómeno conocido como teleportación fruto de la ruptura de las conocidas inecuaciones de Bell. Por último, se tiene que estos estados entrelazados no pueden ser descritos como estados puros, pero si es posible describirlo en base a las matrices de densidad por

$$\rho = \frac{1}{2} |0\rangle \langle 1| + \frac{1}{2} |1\rangle \langle 0| \quad \text{y} \quad \rho = \frac{1}{2} |0\rangle \langle 0| + \frac{1}{2} |1\rangle \langle 1| \quad (4.4)$$

Este formalismo también puede plantearse para un sistema donde un sistema debido a su interacción con el ambiente representado por el sistema asociado de ψ_2 y asumiendo que no es posible acceder a dicho Q-bit, en este caso la densidad del sistema viene dado por $\rho_{12} = |\psi_{12}\rangle \langle \psi_{12}|$ y la densidad asociado al sistema 1 con respecto a los índices del sistema 2

$$\rho_1 = \text{tr}_2(\rho_{12}) = \frac{1}{2} |0_1\rangle \langle 0_1| + \frac{1}{2} |1_1\rangle \langle 1_1| \quad (4.5)$$

Con lo cual, un sistema cuántico que interactúa con el ambiente es generalmente descrito como un estado mezclado. En el caso de un sistema en equilibrio térmico con su ambiente a temperatura igual a T , la matriz de densidad está dado por $\rho = \frac{e^{-E/K_B T}}{\text{tr}(e^{-E/K_B T})}$, y es posible obtener un estado puro únicamente en el límite $T \rightarrow 0$. Si computacionalmente los estados cuánticos se entrelazan debido a interacciones con el ambiente o debido al conocimiento de dicho estado a través del procedimiento de control, la computación cuántica proveería resultados erróneos. El objetivo de la computación cuántica topológica es mantener los estados computacionales lo más cercano posible a los estados cuánticos puros.

4.1.1. Compuertas cuánticas y proyecciones

Un protocolo de procesamiento cuántico de forma general consiste en inicializar el estado cuántico $|\psi\rangle$ (preparar) en base a una información clásica proveída por un dispositivo de control. El estado $|\psi\rangle$ evoluciona en el tiempo bajo operaciones cuánticas representadas por operaciones unitarias, y finalmente el proceso de edición se realiza mediante la proyección de la medición de los valores (PVM) de las componente de $|\psi\rangle$. A la luz del objetivo del presente trabajo basta con enfocarse en la evolución ideal de los estados cuánticos considerando operaciones unitarias U , para la manipulación de la información cuántica. El procesamiento de la información

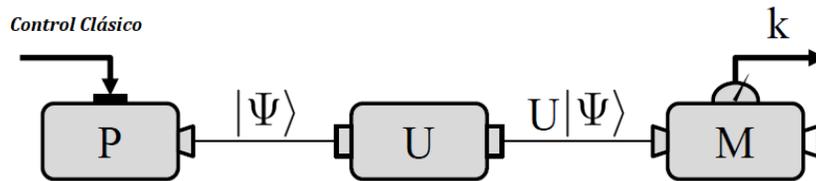


Figura 4.1: Esquema básico de las fases de un algoritmo de computación cuántica y manipulación de bits cuánticos (Q-bits). [99]

cuántica codificada es usualmente realizado por compuertas cuánticas, y consiste en evoluciones reversibles que operan uno a uno, en 2 o más Q-bits simultáneamente, en la misma forma que las compuertas clásicas. Esencialmente se busca recrear el comportamiento de las compuertas clásicas en base a la naturaleza cuántica consistente con matrices unitarias pertenecientes al grupo $U(2^n)$, cuya forma explícita se puede entender en base al efecto de las compuertas clásicas sobre los bits. por ejemplo, Clásicamente, existe una única compuerta lógica asociada con la manipulación de un único bit: La compuerta NOT. Es natural definir un análogo cuántico que evolucione el estado desde $|0\rangle$ a $|1\rangle$, y viceversa. El operador unitario χ que corresponde a la compuerta NOT se representa por la matriz de Pauli σ_x cuyo efecto sobre el Q-bit

es

$$\chi \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \chi \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Nótese que la compuerta cuántica NOT corresponde a una rotación en el espacio de Hilbert del Q-bit, en específico a una rotación de π respecto al eje-x en la esfera de Bloch. Dicha rotación también es posible definirla recto a los otros ejes-y y ejes-z.

$$X \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y \equiv \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad Z \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

En general, un operador unitario que actué sobre un Q-bit puede escribirse como $U = e^{i\alpha} R_{\hat{n}}(\theta)$, para una rotación arbitraria $R_{\hat{n}}(\theta)$ de θ respecto al eje \hat{n} y cuya representación es

$$R_{\hat{n}}(\theta) = \exp\left(-i\theta\hat{n} \cdot \frac{\sigma}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) I - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) (n_x X + n_y Y + n_z Z) \quad (4.8)$$

Donde $\sigma = (X, Y, Z)$ son las matrices de Pauli. Se tiene que $X = e^{i\pi/2} R_x(\pi)$ al igual que para Y y Z . En adición a las matrices de Pauli, otra operación para un único Q-bit es, la compuerta Hadamard

$$H \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

La cual realiza una transformación de los estados de la base computacional a estados cuánticos superpuestos (Base Hadamard), de la siguiente forma $|0\rangle \rightarrow (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2} \equiv |+\rangle$ y $|1\rangle \rightarrow (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2} \equiv |-\rangle$. Esta operación corresponde a una rotación de $\pi/4$ en la base original respecto al eje z. Por ultimo otras dos compuertas frecuentemente usadas con la llamada compuerta de fase (S) y la compuerta $\pi/8$ (T), que pueden ser obtenidas implementadas a partir de la compuerta de Pauli-Z, puesto que $Z = S^2$ y $S = T^2$.

En contraste a lo anterior, para las compuertas clásica AND, OR, XOR, etc, no es posible encontrar una correspondencia en el mundo cuántico como evoluciones unitarias puesto que estas compuertas son de carácter irreversibles mientras que las evoluciones U siempre son reversibles. Ahora bien, en el contexto de la teoría concierne a la existencia de una compuerta universal dentro de la computación clásica, se tiene que toda función Booleana puede ser implementada como una combinación de compuertas NAND. Finalmente, una de las operaciones más importante en la computación clásica corresponde a una operación de control, consistente con 2 bits cuya tabla de la verdad se obtiene mediante la siguiente consideración: Si x es cierto, $y \rightarrow -y$.

Con lo anterior, se tiene dentro del mundo cuántico que es posible realizar una operación que requiera de 2-Q-bits y realice la transformación del estado Q-bit objetivo $|\psi_T\rangle$ conociendo de antemano el estado del Q-bit de control $|\psi\rangle_c$, a este prototipo

de compuerta se conoce como compuerta C-NOT. Haciendo uso de la base computacional en (4.2) la representación matricial de esta compuerta y su acción sobre el estado de 2 Q-bits es

$$U_{CN} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad U_{CN} \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{10} \\ a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{10} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$CNOT \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |0\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle) \quad (4.11)$$

El cambio del estado de $|\psi_T\rangle$ bajo la acción de C-NOT corresponde a dejar el Q-bit sin ningún cambio si $|\psi_C\rangle = |0\rangle$ mientras que en el caso contrario se le aplica la matriz unitaria $U = \sigma_x$. Dentro de estas compuertas de control CU , la compuerta de control de fase (CP) correspondiente a $U = Z$ cuya representación es

$$U_{CN} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

La posibilidad de control del estado de un Q-bit con respecto al estado de otro se debe a la capacidad de generar estados entrelazados (4.11). Similarmente a las compuertas clásica, un circuito cuántico donde cualesquiera compuertas de múltiples Q-bits puede ser implementado como una combinación de compuertas CNOT y compuertas de un único Q-bit, lo importante es mantener un equilibrio entre la capacidad del circuito y el número de compuertas.

Por otro lado, la manipulación de información cuántica incluye un conjunto de operadores $\{P_i\}$ que al momento de actuar sobre un estado cuántico da como resultado una de sus componente en cierto sub espacio del espacio de Hilbert, una de sus aplicaciones es la de herramienta matemática para la medida de los Q-bits; i.e, el operador $P_0 = |0\rangle\langle 0| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ proyecta el estado $|\psi\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle$ a $|0\rangle$ con probabilidad $|a_0|^2 = \text{tr}(|\psi\rangle\langle\psi|P_0)$. Mientras que, el proyector al estado $|1\rangle$ está dado por $P_1 = I_{2 \times 2} - P_0$. Con lo cual una media a lo largo de cualquier dirección puede ser obtenida por el proyector $P = |\psi\rangle\langle\psi|$, donde $|\psi\rangle = \cos\theta|0\rangle + e^{i\phi}\sin\theta|1\rangle$.

4.1.2. Computación cuántica adiabática

Uno de los modelos novedosos que surgieron del concepto de computación cuántica, es el de la computación cuántica adiabática en la cual el algoritmo cuántico es

producido por un proceso adiabático. Para entender esto, considérese un Hamiltoniano con un estado fundamental no degenerado y un gap de energía bien definido respecto a los estados excitados (ver fig. 4.2). Asumiendo que el accionar sobre un conjunto particular que codifican Q-bits, se debe a un Hamiltoniano (4.13) y que este último puede ser cambiado en forma controlada, a través de la manipulación de los parámetros del mismo,

$$H(\lambda) = (1 - \lambda)H_i + \lambda H_f \quad (4.13)$$

Donde el parámetro varia de forma monótona en el tiempo, $\lambda = t/T$; H_i es el hamiltoniano inicial con un estado fundamental conocido $|\psi_i\rangle$; y H_f es el hamiltoniano final cuyo estado fundamental es único $|\psi_f\rangle$. Pese a que $|\psi_f\rangle$ en ciertas ocasiones ea difícil de determinar, el hamiltoniano H_f es fácil de obtener. Por ejemplo, En el caso de querer satisfacer ciertas condiciones en la resolución de un problema, se puede penalizar energéticamente a toda configuración que viola las condiciones que se quieren satisfacer, es decir H_f es el Hamiltoniano que no viole o bien viole el menor número de condiciones. La información se encuentra codificada en el estado fundamental del hamiltoniano, y el procesamiento de la misma, se debe entonces a los cambios de los parámetros del hamiltoniano hechos de forma adiabática permitiendo que el estado no entre en ninguno de sus estados excitados. Teóricamente, la condición que asegura estas transiciones adiabáticas corresponden a que la energía cinética que corresponde a la velocidad de cambio de los parámetros se menor a la del gap de energía sobre el estado fundamental, en estas condiciones el estado inicial puede ser preparado fácilmente mientras que el estado final sería la solución deseada del problema a resolver computacionalmente.

La característica principal de este modelo computacional es el requerimiento de que el hamiltoniano $H(\lambda)$ presente en todo momento un gap de energía para todo λ . i.e, considérese

$$\begin{aligned} H(\lambda) &= (1 - \lambda)H_i + \lambda H_f \\ H(\lambda) &= (1 - \lambda)(-\sigma_1^z - \sigma_2^z) + \lambda(-\sigma_1^z \sigma_2^z - \sigma_1^x \sigma_1^x) \end{aligned} \quad (4.14)$$

El estado fundamental de H_i corresponde al estado $|00\rangle$ y a medida que λ varía entre 0y 1, dicho cambio ocasiona que como resultado el estado fundamental de H_f sea uno de los estados entrelazados definidos en (4.3) para un sistema de 2 Q-bits. Durante este proceso el Hamiltoniano (4.14) siempre permanece con el gap de energía abierto. Es asombroso como el concepto de computación adiabática permite definirse un proceso computacional equivalente al modelo de circuitos descrito hasta el momento. En esta ocasión los algoritmos cuánticos pueden ser traducidos a Hamiltoniano, donde la computación no solo se realiza en evoluciones adiabáticas, sino que también en términos de interacciones precisas en el tiempo. A partir de este concepto novedoso resulta menos apresurado, el adentrarse en el concepto de computación cuántica

topológica, donde el gap de energía permanece constante a lo largo de la transición de los parámetros del sistema, y las coordenadas de las cuasi partículas presentes en estos proveen los parámetros de control del hamiltoniano.

4.2. Fase Geometrica y de Berry

Históricamente, el concepto de fase geométrica ha sido reconocido como un elemento genérico de la mecánica cuántica de manera reciente, particularmente después de la publicación en 1984 del trabajo de Michael Berry sobre los factores de fase que acompañan la evolución adiabática de sistemas cuánticos con variaciones lentas de parámetros externos. En dicho trabajo realizó la investigación de fases geométricas que se acumulan durante evoluciones cíclicas de sistemas cuánticos en un entorno clásico que cambia adiabáticamente. Al derivar el potencial gauge Mead-Truhlar y la correspondiente fase geométrica denominada, Fase de Berry, y demostrar que la fase Aharonov-Bohm generada por la presencia de un potencial vectorial, asociada a una modificación del parámetro de interferencia de partículas cargadas; representa un tipo especial de fase geométrica. Las derivaciones de Berry se restringieron a evoluciones cíclicas de estados cuánticos puros no degenerados. Esto genera fases geométricas Abelianas dependientes de la geometría del camino tomado por el hamiltoniano en el espacio. El mismo año, estas restricciones fueron subsecuentemente removidas por Wilczek y Zee apuntando a que el transporte adiabático de un estado degenerado de un conjunto de estados cuánticos genera una geometría No Abeliana de la fase geométrica.

Durante los años posteriores, se realizó un rápido progreso en el estudio del concepto de fase geométrica en el contexto de estados mezclados, en geometrías no cíclicas. Hoy en día, las fases geométricas juegan un rol central en muchas áreas de la física, incluyendo el estudio de sistemas de la materia condensada; por ejemplo, la fase de Berry a través de la zona Brillouin asociada con la dinámica de electrones en sólidos periódicos. Al mismo tiempo, es el concepto central en la teoría topológica de bandas y provee el mecanismo responsable de la estadística de anyones en correlación de sistemas de muchos cuerpos, un elemento esencial que puede ser usado en la creación de computación cuántica tolerante a fallas (Sistema de baja decoherencia)

4.2.1. Fase de Berry

Considérese un sistema cuántico descrito por un hamiltoniano $H = H(\mathbf{R})$ que depende de un conjunto de parámetros $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \dots)$ cuyo valor representa una configuración particular del entorno y corresponde a un punto en el espacio de parámetros μ . Un cambio en dichos parámetros es descrito por un conjunto de parámetros dependientes del tiempo y la evolución adiabática $\mathbf{R}(t)$ del sistema corresponde a

variar lentamente dichos parámetros a lo largo de un camino C en el espacio de parámetros. En consecuencia, la base orto normal de los estados puede ser elegida de forma instantánea, para cada \mathbf{R} , como la base orto normal $|n; \mathbf{R}\rangle$ dada para los valores propios de $H(\mathbf{R})$,

$$H(\mathbf{R}) |n; \mathbf{R}\rangle = E_n(\mathbf{R}) |n; \mathbf{R}\rangle \quad (4.15)$$

La ecuación (4.1) determina los vectores de estados más una fase, dicha transformación de fase representa una transformación de fase $|n; \mathbf{R}\rangle' = e^{i\zeta_n(\mathbf{R})} |n; \mathbf{R}\rangle$. Una elección natural de la fase para la remoción de un efecto arbitrario es la de requerir que la fase de cada $|n; \mathbf{R}\rangle$ sea univaluada a lo largo de C (Transformación de Gauge). En seguida al enfocarse en la evolución adiabática del sistema como $\mathbf{R}(t)$ moviéndose a lo largo del camino C . De acuerdo al teorema adiabático, si el sistema si el sistema inicia en un estado descrito por $|n; \mathbf{R}_0\rangle$, el estado propio instantáneo corresponde a $E_n(\mathbf{R}(t))$. El único grado de libertad en el problema, la fase puede determinarse solucionando la ecuación de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo cuya soluciones correspondiente a una condición inicial $|\psi_n(0)\rangle = |n; \mathbf{R}_0\rangle$ es

$$|\psi_n(t)\rangle = e^{iv_n(t)} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' E_n(\mathbf{R}(t')) \right] |n; \mathbf{R}(t)\rangle, \quad (4.16)$$

Donde la segunda exponencial representa la fase dinámica, la fase adicional v_n se conoce como la fase de Berry definida como

$$v_n(t) = \int_0^t d\mathbf{R} \cdot A^n(\mathbf{R}) = \int_0^t \langle n; \mathbf{R}(t') | \frac{d}{dt'} | n; \mathbf{R}(t') \rangle dt' \quad (4.17)$$

La fase de Berry proviene del hecho que los estados en t y $t + dt$ no son idénticos, y en analogía con el transporte de electrones en un campo magnético, se define $A^n(\mathbf{R})$ como un potencial vectorial, llamado conexión de Berry. Esta nueva cantidad es dependiente de un gauge, con lo cual bajo una transformación de gauge $|n; \mathbf{R}\rangle' \rightarrow e^{i\zeta_n(\mathbf{R})} |n; \mathbf{R}\rangle$; $A^n(\mathbf{R})$, también se transforma de manera similar.

$$A^n(\mathbf{R}) \rightarrow A^n(\mathbf{R}) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \zeta_n(\mathbf{R}) \quad (4.18)$$

En consecuencia, La fase de Berry también se modifica a lo largo del camino C , $v_n(T) \rightarrow v_n(T) + \zeta_n(\mathbf{R}_0) - \zeta_n(\mathbf{R}_T)$, para un instante de tiempo grande. Berry demostró que para evoluciones cíclicas donde se tiene $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_T$, y puesto que, el facto $e^{i\zeta_n(\mathbf{R})}$ es univaluado y asociado con una transformación de gauge implica que $\zeta_n(\mathbf{R}_T) - \zeta_n(\mathbf{R}_0) = 2\pi m$, como resultado la fase de Berry puede cambiar por un múltiplo de 2π representando así un observable físico.

4.2.2. Curvatura de Berry

La conexión de Berry (4.18) es una cantidad dependiente de la elección del gauge, en forma análoga al potencial vectorial de la electrodinámica. En base a esto, es posible tomar (4.17) como la circulación del potencial vectorial a lo largo de un camino cerrado C , de forma análoga al flujo magnético a través de una superficie delimitada por C . Llevando un poco más allá la analogía con la electrodinámica, introdúzcase un tensor del campo $\Omega_{\mu\nu}^n$ de gauge definido en términos de la conexión de Berry

$$\Omega_{\mu\nu}^n(\mathbf{R}) = \nabla_\mu A_\nu^n(\mathbf{R}) - \nabla_\nu A_\mu^n(\mathbf{R}) \quad (4.19)$$

A la expresión (4.19) se le define como el tensor de la curvatura de Berry. Si el espacio de parámetros es tridimensional, dicho tensor es posible escribirlo como un vector $\bar{\nabla} \times \mathbf{A}^n(\mathbf{R})$, lo cual provee una imagen intuitiva de la curvatura de Berry como un “campo magnético.” en el espacio de parámetros. Con lo cual, usando el teorema de Stokes puede reescribirse (4.17) como

$$v_n = \oint d\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\Omega}^n(\mathbf{R}) \quad (4.20)$$

O en otras palabras la fase de Berry es el flujo de la curvatura de Berry a través de la superficie delimitada por C . Ciertas aclaraciones son apropiadas en este punto. En primer lugar, a diferencia de v_n que está asociado con un camino cerrado, la curvatura de Berry es una cantidad local que caracteriza ciertas propiedades geométricas asociadas con el estado en el conjunto de parámetros \mathbf{R} . Por otro lado, la conexión de Berry se calcula usando pequeños cambios univaluados de los vectores propios definidos en cierto camino del espacio de parámetro; ahora bien, la curvatura de Berry definida en (4.19) para el caso general de una dimensión arbitraria de M , sugiere que esta puede entenderse como resultado de una “interacción residual” del n -ésimo nivel de energía con los otros niveles de energía proyectados como resultados de la aproximación adiabática realizada.

4.2.3. Fase adiabática No Abeliana

En la sección previa se consideró la evolución adiabática de un sistema cuántico con estados no degenerados $E_n(\mathbf{R})$, al asegurar una curvatura de Berry finita. A continuación, se levanta dicho requerimiento y se permite el nivel de energía n^{th} presenta un número de degeneraciones g_n independientes de \mathbf{R} . Para cualquier valor dado de los parámetros $\mathbf{R} \in M$, el conjunto de estados propios $|n, a; \mathbf{R}\rangle$ con $a = 1, 2, \dots, g_n$, provee una base ortonormal del subespacio de degeneraciones asociado con el n -ésimo nivel de energía. Nuevamente se asumen los estados base como univaluados, por tanto, para una evolución cíclica $\mathbf{R}(T) = \mathbf{R}(0)$ se cumple $|n, a; \mathbf{R}_T\rangle = |n, a; \mathbf{R}_0\rangle$.

Similarmente al caso anterior la elección de las bases es arbitraria, sin embargo, dos elecciones cualesquiera están relacionadas por una transformación unitaria

$$|n, a; \mathbf{R}\rangle' = \sum_{b=1}^{g_n} |n, b; \mathbf{R}\rangle U_{ba}^n(\mathbf{R}) \quad (4.21)$$

Donde $U_{ba}^n(\mathbf{R})$ son los elementos de la matriz unitaria $U^n(\mathbf{R}) \in U(g_n)$. Con $U(N)$ designando el grupo unitario de grado N . A continuación, considérese una evolución cíclica, al asumir el estado inicial $|\psi_n(0)\rangle$ perteneciente al subespacio degenerado de energía. El teorema adiabático, implica que no existe transferencia entre los estados excitados y los estados degenerados separados por un gap de energía Δ (*ver fig. 4.2*), con lo cual el estado final para cualquier valor de tiempo t se encuentra en el mismo subespacio. En particular terminado un ciclo, la fase nuevamente puede determinarse solucionando la ecuación de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo en el subespacio de estados degenerados que esta vez presenta la forma

$$|\psi_n(T)\rangle = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt E_n(\mathbf{R}(t)) \right] \hat{U}_C^n |\psi_n(0)\rangle \quad (4.22)$$

Donde \hat{U}_C^n corresponde a un operador unitario que rota la base de vectores en el subespacio degenerado, mediante la relación definida en (4.21). Y comparando (4.22) con (4.16) se observa como el operador \hat{U}_C^n representa la generalización No Abelianas de la fase de Berry $e^{i\gamma_n} \in U(1)$, el carácter No-Abeliano se puede observar a partir de la definición de la conexión de Berry que consiste en una matriz hermitiana A_μ^n de dimensión $g_n \times g_n$ cuyos elementos son

$$A_{ab}^n(\mathbf{R}) = i \langle n, a; \mathbf{R} | \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} | n, b; \mathbf{R} \rangle \quad (4.23)$$

De forma análoga a la sección anterior la generalización No-Abeliana de la fase de Berry puede formalmente expresada en términos de \mathbf{A}^n como una exponencial proporcional al operador \mathbf{P} que denota el orden de los caminos. Esta generalización fue descubierta por Wilczek y Zee

$$U_C^n = \mathbf{P} \exp \left(\oint_C d\mathbf{R} \cdot \mathbf{A}^n(\mathbf{R}) \right) \quad (4.24)$$

Nótese que, las marices $\mathbf{A}_\mu^n(\mathbf{R})$ no conmutan y su orden se representa en el operador \mathbf{P} , con lo cual U_C^n es de naturaleza topológica.

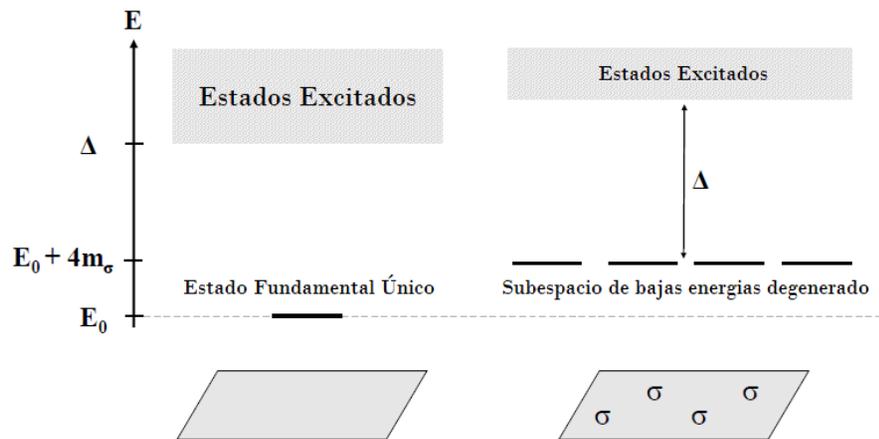


Figura 4.2: Diagrama de energía en el subespacio de bajas de energías. izquierda, sistema no degenerado. derecha, sistema degenerado, anyones.

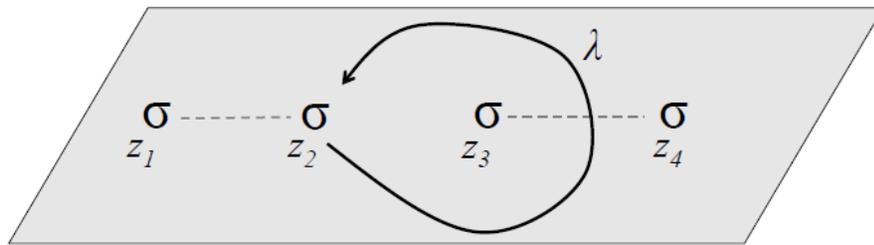


Figura 4.3: Esquema del proceso de trenzado No abeliano de un sistema de 4 Aniones, en base a la manipulación de un parámetro del hamiltoniano.[114]

4.3. Computación con Anyones

La computación cuántica topológica es un campo de investigación de rápido crecimiento donde confluyen la física, matemática y la ciencia computacional. La convergencia de estos temas presenta un significado más allá de la realización de cierta aplicación y generar un nuevo paradigma. El pensar acerca en la materia cuántica topológica desde el punto de vista de la computación cuántica es más fructífero que simplemente pensar en las preguntas estándar de la física de la materia condensada.

La computación cuántica topológica se realiza mediante el empleo de anyones para codificar y manipular información en una manera que son resistentes en contra de las perturbaciones ambientales. Los anyones son excitaciones de cuasi partículas de estados topológicos bidimensionales cuyas propiedades de intercambio son diferentes a las partículas convencionales bosones y fermiones. Aquellos anyones relevantes para la computación cuántica son los anyones No abelianos, cuya estadística de Brai-

ding/Trenzado de las líneas de mundo es no Abelianas ver fig. 4.5). En las siguientes secciones se hará uso de la terminología partícula, anyon y cuasi partícula de forma intercambiable.

En un computador topológico cuántico la información se codifica de forma no local al usar múltiples estados de cuasi partículas, lo cual la hace inmune a errores causados por perturbaciones locales y generar tolerancia a los fallos. La estadística de intercambio, es pues un elemento central tanto de la descripción cuántica del mundo como en la computación topológica. El intercambio de dos partículas idénticas en un sistema cuántico de muchos cuerpos representa una operación de simetría, y consecuentemente las propiedades físicas del estado cuántico no se ven afectadas, es decir, la función de onda es consistente con esta simetría. En el caso de un sistema tridimensional, existen solo dos tipos de partículas: bosones y fermiones caracterizados por funciones de onda simétricas y anti simétricas respectivamente bajo el intercambio de dos partículas que bien puede ser vista geoméricamente bajo un proceso adiabático en forma equivalente al proceso de que una partícula gire alrededor de otra ubicada en el origen del sistema de coordenadas, en un camino cerrado que siempre y cuando este pueda ser modificado en forma continua, sin intersectar la posición de la partícula ubicada en el origen la función de onda no se ve afectada (Ver fig. 4.4). En el caso tridimensional cualquier cambio de la función de onda está sujeto al signo de la función de onda una vez finalizado el intercambio de las partículas. Si el signo se mantiene se trata de bosones, en el caso contrario corresponde al intercambio de fermiones.

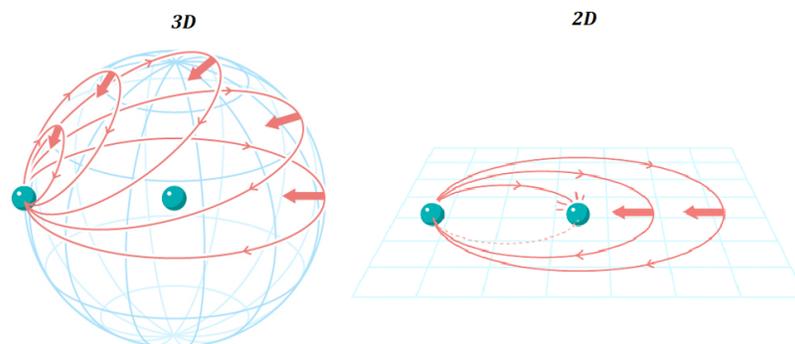


Figura 4.4: *Proceso de traslación de una partícula alrededor de otra, Izquierda; En 3-D Todos los posibles caminos pueden deformarse unos en otros con lo cual el resultado final son equivalentes. Derecha; En 2-D, debido a la reducción a un sistema con un grado de Libertad menos, el proceso de rotar una partícula alrededor de la otra no es equivalente a dejarla en su posición inicial.*

Las propiedades del intercambio de partículas en una y dos dimensiones son fun-

damentalmente diferentes al caso anterior. El intercambio unidimensional la estadística de intercambio no está bien definida porque para darse dicho efecto las partículas deberían atravesarse una a otra. Por otro lado, los sistemas bidimensionales son ricos en comportamientos diversos, esencialmente por que el camino particular que encierra a una partícula en el origen no puede ser deformado de forma continua (ver fig. 4.4) sin que las partículas deban pasar a través una de otra. Es por ello que en el caso 2-D es posible tener una rotación no trivial de una partícula alrededor de otra, lo cual implica que los estados inicial y final de un sistema no necesariamente idénticos. Es esta diferencia entre el intercambio 3-D ($\pi_1 \{\mathbb{R}^3 - \{0\}\} = 1$ - Todo camino puede ser deformado a un punto sin pasar por el origen) y 2D ($\pi_2 \{\mathbb{R}^2 - \{0\}\} = \mathbb{Z}$ - No todos los caminos son triviales alrededor del origen) en forma natural es topológica.

En base las secciones anteriores, considérese a continuación un intercambio en contra de las manecillas del reloj de dos partículas idénticas en 2D. Como resultado de este proceso, la función de onda se transforma por un factor de fase $\psi(r_1, r_2) \rightarrow e^{i\theta} \psi(r_1, r_2)$. Realizar un intercambio ahora en la dirección de las manecillas del reloj no necesariamente deja el sistema en su estado inicial, puesto que $e^{2i\theta}$ puede ser arbitraria en función de θ , y diferente de 0 (Bosones) y π (Fermiones). Las partículas para los que $\theta \neq 0, \pi$ se denominan Aniones con estadística θ . Para un sistema 2D de partículas idénticas N , los caminos asociados con el intercambio de las partículas (ver fig. 4.4) pertenecen a clases topológicas con correspondencia uno a uno con los elementos de un grupo de Braid (Trenzado). La evolución del sistema está dada por la acción del grupo de Braid en estado cuántico de las múltiples cuasi partículas, y se puede representar como un factor de fase $e^{im\theta}$, donde m es el número de intercambios de 2 partículas en la dirección contraria a las manecillas del reloj (En la dirección de las manecillas del reloj se añade un seno menos). En esta representación el intercambio es abeliano en cuanto el número m no depende en específico del orden de las operaciones de trenzado. En adición a los aniones Abelianos, se puede asumir un sistema cuántico de N cuasi partículas cuyas posiciones están fijas inicialmente y presenta degeneración de los estados cuánticos, $\psi_{\alpha=1,2,\dots,g}$ es una base orto normal del sub espacio de estados degenerados.

En este caso un elemento del grupo se representa por una matriz $g \times g$, cuya acción viene definida por

$$\psi_\alpha \rightarrow [\rho(\sigma)]_{\alpha\beta} \psi_\beta \quad (4.25)$$

Consecuentemente, el intercambio de dos partículas corresponde a una rotación del espacio de Hilbert degenerado de N -cuasi partículas. Donde en general $\rho(\sigma)$ y $\rho(\sigma')$ corresponde a dos operaciones de trenzado diferentes y que no conmutan, la evolución de los sistemas depende en específico del orden de las operaciones de intercambio tal y como se observó en la sección anterior. Las cuasi partículas caracterizadas por este tipo de evoluciones estadísticas se denominan anyones No abelianos.

La única forma de realizar transformaciones unitarias en este sub espacio de cuasi partículas se debe mediante el trenzado de las mismas. Esta propiedad, junto a la riqueza del grupo de Braid, son indicios clave que permiten una computación cuántica topológica con este tipo de anyones.

4.3.1. Braiding, tipos de partícula, reglas de fusión y propiedades de intercambio

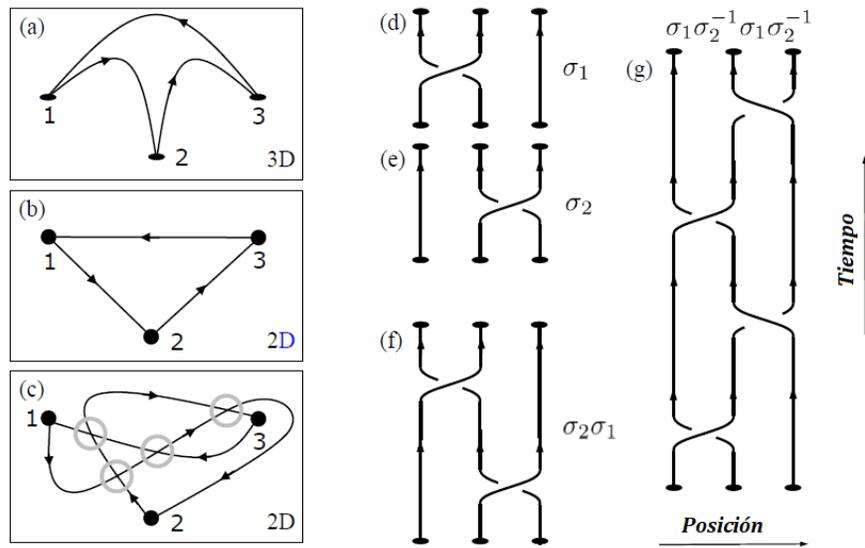


Figura 4.5: (a-c) Representación gráfica de las trayectorias en el espacio real, (d-g) Líneas de mundo de un sistema de cuasi partículas. La evolución en (b) corresponde al elemento del grupo de trenzado del panel (f), la evolución en (c) se representa en el panel (g). Tanto (f) como (g) pueden expresarse en términos de operaciones elementales como se muestra en (d)-(e).[46]

Considérese un sistema de N partículas con posiciones iniciales $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_N$ a un tiempo inicial t_i y posiciones finales $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_N$ a un tiempo final t_f . La trayectoria de las partículas corresponden a N líneas de mundo (trenzas) en un espacio de dimensiones $(d + 1)$. En el caso bidimensional, un elemento del grupo de Braid puede representarse gráficamente como un conjunto de líneas de mundo que inician en las posiciones iniciales y finalizan en las posiciones finales, las cuales corresponden a N diferentes puntos en el eje horizontal, y el tiempo se representa en el eje y. La distinción entre un intercambio en dirección de las manecillas del reloj corresponde a identificar qué línea de mundo pasa “por encima” sobre otra. (ver fig. 4.5 (d)-(e)-(f) y (g)), y en el efecto algebraico de los operadores σ_i (sentido contrario manecillas del reloj) y su inverso σ_i^{-1} (Sentido manecillas del reloj), los

cuales $\sigma_i \neq \sigma_i^{-1}$, con $1 \leq i \leq N - 1$. Un elemento del grupo de Braid puede escribirse como un producto de los generadores de dicho grupo. Gráficamente esto corresponde a deformaciones continuas de las líneas de mundo (ver fig. 4.5 (g)). Los generadores $\sigma_{i,j}$ presentan las siguientes relaciones básicas:

$$\sigma_i \sigma_j \neq \sigma_j \sigma_i, \quad \text{para } |i - j| = 1$$

;

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad \text{para } |i - j| \geq 2$$

Bajo la perspectiva de explicar todos los tipos de partículas existentes como anyones y definir sus propiedades, se asume que la dinámica del sistema en el subespacio de bajas energías se describe únicamente en términos de los aniones. Bajo esta premisa las posibles evoluciones están limitadas a tres escenarios.

1. *Los anyones pueden crearse o aniquilarse en pares.*
2. *Los anyones pueden fusionar para formar otro tipo de Anyones*
3. *Los anyones pueden intercambiarse adiabáticamente.*

El marco formal que captura las propiedades de estos aniones corresponde a la teoría topológica cuántica de campos. Por otro lado, dentro del marco de la computación cuántica topológica mucha de la rigurosidad formal puede ser omitida en virtud de un modelo minimalista que provea una estructura de un modelo de aniones que presenta una protección asociada al espacio de bajas energías mencionado en la subsección 4.2.3. A la luz de un modelo completo este debe presentar los diferentes tipos de aniones como un sistema trivial y el respectivo de vacío, etiquetado como $\mathbf{1}$ que corresponde a no tener aniones.

Considérese un conjunto de partículas $\phi_0 \equiv \mathbf{1}, \phi_a, \phi_b, \dots$, donde ϕ_a, ϕ_b, \dots pueden ser vistos como cargas topológicas por cada Anión, y como tales satisfacen las reglas de conservación. Las reglas de combinar 2 aniones se denominan reglas de fusión. Estas reglas corresponden a conocer como 2 aniones se comportan colectivamente sin tomar en cuenta las interacciones entre estos. Por ejemplo, fusiones 2 fermiones equivale a un bosón de espín 1 o 0. En el caso de los aniones abelianos, la regla de fusión es simple $\phi_n \times \phi_k = \phi_{n+k}$. Donde ϕ_k denota la partículas de tipo k , y su antipartícula corresponde a $\phi_{-k} \equiv \bar{\phi}_k \equiv -k$. Recuérdese que en ciertas situaciones la antipartícula y la partícula pueden coincidir, como es el caso de los fermiones de Majorana. En general, la regla de fusión de 2 aniones toma en cuenta todos los canales de fusión (formas de interacción) para el conjunto de partículas antes definido puede definirse como

$$\phi_a \times \phi_b = \sum_c N_{ab}^c \phi_c \quad (4.26)$$

En el caso de partículas abelianas el orden en esencia no es importante, $\phi_a \times \phi_b = \phi_b \times \phi_a$, (4.26) expresa como la fusión de las partículas ϕ_a y ϕ_b puede resultar en cualquier partícula ϕ_c para $N_{ab}^c \neq 0$. Los aniones abelianos presentan un único modo de fusión $N_{nk}^q = \delta_{n+k,q}$, mientras los aniones no abelianos $N_{ab}^c > 1$. Esta última característica da como resultado una evidencia de la estadística no abeliana como una evaluación entre las diferentes fusiones. Mientras que la estadística abeliana corresponde a la evolución de un único estado por un factor de fase.

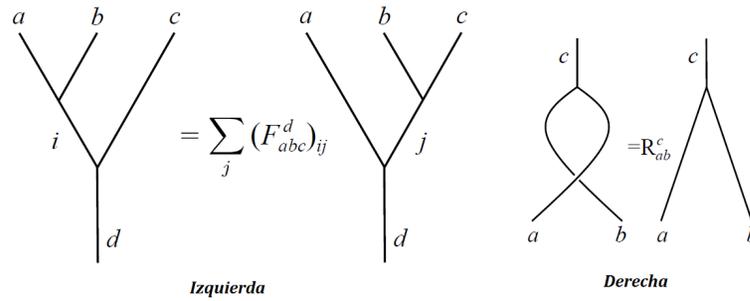


Figura 4.6: Izquierda, correspondencia entre el proceso de fusión de 3 aniones con un canal fijo de fusión, pero diferentes ordenes en el proceso de fusión. La matriz F puede ser vista como una rotación en el espacio de los estados intermedios de fusión. Derecha, representación simbólica de un intercambio en contra de las manecillas del reloj de los aniones a y b en un tipo de partícula c . El proceso de intercambio genera una fase R_{ab}^c .

A continuación, considérese el caso particular de la fusión de 3 aniones ϕ_a, ϕ_b y ϕ_c en una partícula ϕ_d . Se puede fusionar ϕ_a y ϕ_b en una cuasi partícula intermedia ϕ_i que se fusiona posteriormente con ϕ_c para obtener ϕ_d . O bien ϕ_b y ϕ_c se fusionan en ϕ_j para que finalmente se fusione con ϕ_a . Sí bien el estado final es el mismo, los estados intermedios no lo son, estos estados hacen parte del espacio conocido como el espacio de Hilbert anionico con lo cual las elecciones antes mencionadas corresponde a diferentes elecciones de la base de dicho espacio, y se define una relación entre las bases mediante la matriz de fusión \mathbf{F} , que puede ser vista como la rotación en el espacio de los estados intermedios. La dimensión de las matrices f_{abc}^d cuyos elementos $\{f_{abc}^d\}_i^j$ relacionan los 2 diferentes procesos, depende de los posibles anyones que surgen de las fusiones $|i\rangle = \sum_j (F_{abc}^d)_j^i |j\rangle$, explícitamente

$$|\phi_a, \phi_b \rightarrow \phi_i\rangle |\phi_i, \phi_c \rightarrow \phi_d\rangle = \sum_j (F_{abc}^d)_j^i |\phi_b, \phi_c \rightarrow \phi_j\rangle |\phi_a, \phi_j \rightarrow \phi_d\rangle \quad (4.27)$$

Retomando el caso de 2 partículas ϕ_a y ϕ_b que se fusionan en un canal particular ϕ_c . El intercambio de las 2 partículas no cambia el canal de fusión, luego la carga topológica total del par es una propiedad no local, que indica cuando una partícula

corresponde el vacío, bosón y /o fermión. En consecuencia, el intercambio en contra de las manecillas del reloj corresponde a multiplicar la función del sistema por un factor R_{ab}^c , o en otras palabras a un semigiro o rotación de la partícula ϕ_c , (ver fig. 4.6).

$$|i\rangle = (F_{abc}^d)^{-1} R_{ab}^c (F_{abc}^d) |i\rangle \quad (4.28)$$

En el análisis del proceso de braiding o trenzado de aniones corresponde a un proceso que requiere de determinar: i) Los tipos de partículas envueltas, ii) Las reglas de fusión N_{ab}^c , iii) La matriz \mathbf{F} y iv) La matriz \mathbf{R} (4.28). En contraste al caso abeliano donde existe un único canal de fusión; en el caso no abeliano se tiene una degeneración en el espacio de Hilbert de los anyones.

4.3.1.1. Aniones de Isyng

Son un modelo que consiste en partículas no triviales ψ y σ cuyas reglas de fusión satisfacen

$$\begin{aligned} \mathbf{1} \times \mathbf{1} &= \mathbf{1} & \mathbf{1} \times \psi &= \psi & \mathbf{1} \times \sigma &= \sigma \\ \psi \times \psi &= \mathbf{1} & \psi \times \sigma &= \sigma & \sigma \times \sigma &= \mathbf{1} + \psi \end{aligned} \quad (4.29)$$

Lo última de estas reglas de fusión codifica la naturaleza no abeliana como se observará más adelante. Por el momento, dadas (4.29) la base del espacio de Hilbert de los anyones de Ising corresponde a los dos canales de $|\sigma, \sigma; 1\rangle, |\sigma, \sigma; \psi\rangle$. Esta degeneración hace que en el caso de los anyones no abelianos, $R_{ab}^c = e^{i\theta_{ab}^c}$. La operación de trenzar las líneas de mundo de los aniones asigna diferentes fases asociada con los diferentes canales de fusión en función del orden y dirección de los intercambios. En el caso de los anyones de Ising las matrices \mathbf{R} (Un canal fijo de fusión) pueden ser obtenidos usando lo que se conoce como identidad Hexagonal (Ver anexo E).[114]

$$R_{\sigma\sigma}^1 = e^{-\pi i/8}, R_{\sigma\sigma}^\psi = e^{\pi i/8}, R_{\psi\psi}^1 = -1 \quad \text{y} \quad R_{\sigma\psi}^\sigma = i \quad (4.30)$$

Físicamente, las relaciones de fusión (4.26) y (4.29) pueden ser entendidos en el contexto de un *superconductor topológico de onda p*. El estado de vacío $\mathbf{1}$ es un condensado de pares de Cooper. Los fermiones ψ son cuasi partículas de Boglioubov que al emparejarse $|\psi \times \psi\rangle$ se vuelven parte del vacío, el condensado de pares de Cooper. Y los aniones σ corresponden a MZM ya sea hospedados en vórtices de sistemas bidimensionales o modos de pared en el caso unidimensional. En el caso de 2 vórtices que hospeden MF independientes bien corresponden a un modo fermiónico no local ψ , que bien puede estar desocupado ($\sigma \times \sigma \rightarrow \mathbf{1}$) u ocupado ($\sigma \times \sigma \rightarrow \psi$). Es por esto que dentro del paradigma de la computación cuántica basado en el uso de Q-bits de carga, de tenerse un par preparado en un canal de fusión dado. Para la

implementación de un Q-bit se requiere 4 anyones como mínimo de tal forma que el canal de fusión de uno de los pares cambia por efecto de la operación de trenzado. Considérese la fusión de 3 anyones cuya canal de fusión total es fijo σ . El espacio de fusión intermedio es $\sigma \times \sigma \rightarrow \mathbf{1}$ y $\sigma \times \sigma \rightarrow \psi$. Haciendo uso de lo que se conoce como identidad pentagonal e identidad hexagonal, las matrices \mathbf{F} y \mathbf{R} están dadas por

$$F_{\sigma\sigma\sigma}^{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} R_{\sigma\sigma}^{\mathbf{1}} & 0 \\ 0 & R_{\sigma\sigma}^{\psi} \end{pmatrix} = e^{-i\frac{\pi}{8}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

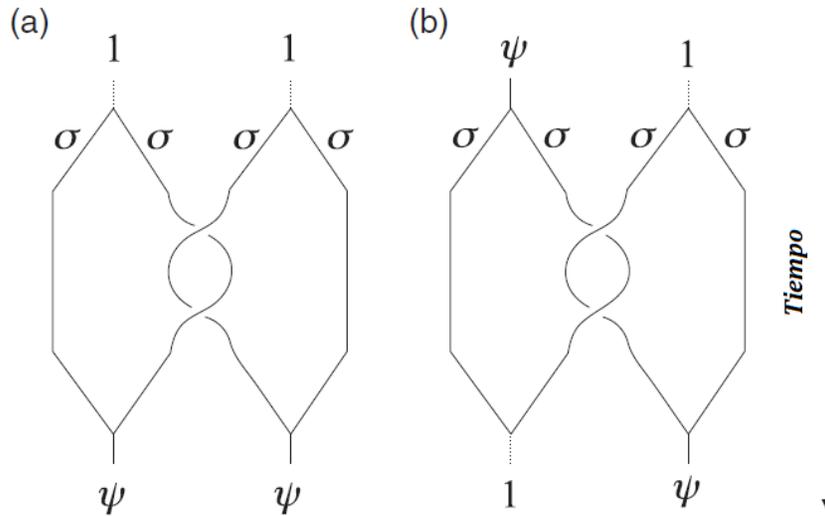
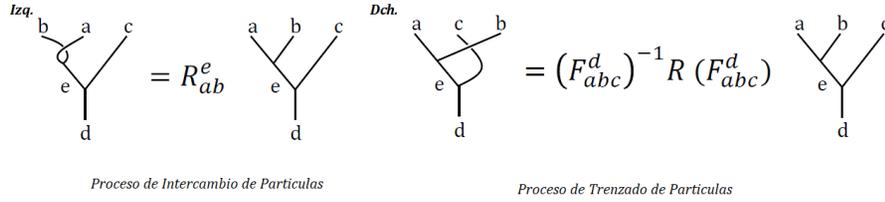


Figura 4.7: Representación de las líneas de mundo de un par de aniones de Ising σ (a) generados del vacío, en este caso el proceso de trenzado causa un cambio del canal de fusión (b) uno generado del vacío otro de una partícula ψ (fermión), tras el proceso de trenzado existe una teleportación del fermión de uno de los pares de anyones al otro.

Para una derivación explícita de (4.31) se refiere la lectura del libro de Jiannis Pachos [114] y del Anexo E. Ahora, tómesese en cuenta las implicaciones del trenzado de líneas de mundo y fusión de los aniones de Ising. En un sistema de 4 anyones, cuya matriz \mathbf{B} asociada al intercambio de los aniones en función de (4.28) y (4.31) está dado por

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}^{-1} R^2 \mathbf{F} = e^{-i\pi/4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

En el caso de que los 2 pares de aniones surjan del vacío. El estado de los 2 pares es $|\sigma, \sigma \rightarrow \mathbf{1}\rangle |\sigma, \sigma \rightarrow \mathbf{1}\rangle$. Al trenzar 2 aniones de pares diferentes con lo cual el canal de fusión ya no es fijo sino que hace parte del espacio intermedio (una superposición del estado $\mathbf{1}$ y ψ), luego el efecto de rotación se toma al aplicar $R_{\sigma\sigma}^{\alpha}$, donde α es $\mathbf{1}$



Proceso de Intercambio de Partículas

Proceso de Trenzado de Partículas

Figura 4.8: El intercambio de dos aniones genera una fase $R_{ab}^c = e^{i\theta_{ab}^c}$, en otras palabras R_{ab}^c corresponde a una matriz diagonal dependiente del canal de fusión. Cuando el proceso de intercambio se realiza después de un proceso de fusión la acción de intercambio, afecta a los estados del subespacio intermedio de fusión mediante la matriz F con lo cual el intercambio le da a diferentes canales de fusión entre b y c , una fase diferente.

o ψ . De forma similar a (4.28) el canal de fusión del primer par cambia después del trenzado con la tercera partícula de acuerdo a

$$|\sigma, \sigma \rightarrow \mathbf{1}\rangle = \sum_{\beta} |\sigma, \sigma \rightarrow \beta\rangle B_{\beta\mathbf{1}} = e^{-i\pi/4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{\beta\mathbf{1}} \quad (4.33)$$

$$B_{\beta\gamma} = \sum_{\alpha} [(F^{-1})_{\sigma\sigma\sigma}^{\sigma}]_{\beta\alpha} (R_{\sigma\sigma}^{\alpha})^2 [(F^{-1})_{\sigma\sigma\sigma}^{\sigma}]_{\alpha\gamma} = e^{-i\pi/4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{\beta\gamma} \quad (4.34)$$

como un factor de fase (ver fig. 4.8). Consideraciones de este tipo se pueden hacer para un sistema donde uno de los pares es creado del vacío y otro de un fermión (ver fig. 4.7). En otras palabras, el proceso de trenzado de 3σ , puede ser implementado como una compuerta NOT. Esto hace que los aniones de Ising son los principios de la computación cuántica debido a su posible realización como MZM en heteroestructura de nanohilos de Majorana. Ahora bien, se tiene que las transformaciones unitarias mediante un proceso de trenzado no son suficientes para la implementación de todas las operaciones unitarias, con lo cual y a la luz de un algoritmo universal de computación cuántica es necesario la implementación de una compuerta de fase $\pi/8$ de tal forma que sea posible obtener una transformación arbitraria. Esta operación no estaría protegida topológicamente, pero es posible implementar los protocolos de corrección de errores desarrollados para la computación cuántica. [99][114]

4.3.2. Computación topológica con MZM

En lo que resta de capítulo, se hará especial hincapié en la naturaleza no abeliana de los MZM localizados en vórtices o dominios de pared y como esta propiedad puede ser explotada para la implementación de computación cuántica. En el capítulo 2, se mostró como en un superconductor quirral los MZM se encuentran ligados con un fenómeno de vórtices cuánticos, y la estadística no abeliana se encuentra asociada con

el intercambio de estos vórtices. Por otro lado, en sistemas 1-D el intercambio no está propiamente definido. Sin embargo, es posible entender un fenómeno de intercambio al implementar un sistema de varios nanohilos de Majorana en un modelo semi-unidimensional. Otro modo de realizar intercambio de fermiones de majorana puede implementarse mediante el cambio de posición de los dominios de pared y de los MZM sin solapar las funciones de onda de los MF, es decir, no se levanta la degeneración del estado fundamental en un sistema de N-anyones. Al retomar el hamiltoniano de los nanohilos de Majorana y el resultado obtenido como condición crítica para la presencia de MZM, $\bar{B} \geq \sqrt{\mu^2 + \Delta^2}$, se puede implementar de forma inicial un método de manipulación de estos aniones de Ising. Considérese aplicar un voltaje para variar el potencial μ uniformemente a lo largo del hilo, de este modo la condición crítica se define en función de dicho potencial químico, $|\mu| < \mu_c = \sqrt{\bar{B}^2 - \Delta^2}$ con lo cual la aplicación de cierto voltaje permite crear, remover o modificar la posición de MZM. Una dificultad intrínseca de este proceso surge en el momento de cerrar el gap se pueden generar nuevas cuasi partículas, para evitar este inconveniente es pertinente que la modificación de μ sea de carácter adiabático mediante el uso de una serie de compuertas de voltaje (ver fig. 4.9) acopladas a la heteroestructura que afectan de forma local el potencial químico en regiones muy pequeñas del nanohilo y longitud L_{Gate} al ocasionar cruces del nivel de fermi de manera también local con lo cual siempre existe un Gap de energía remanente asociado a la compuerta $E_{Gap} \sim \hbar v \pi L_{Gate}$. Asumiendo $g\mu_B |B_z|/2 \sim 2|\Delta|$ y $\hbar v \sim 0,1eVA$, entonces $v \sim 10^4 m/s$; el gap para una longitud de $0,1\mu m$ es del orden de $1K$, un aspecto a considerar a la hora de elegir materiales que pueden soportarlos como él *InAs*. El uso de las compuertas de forma local permite manipular MF (ver fig 4.9) que al surgir en pares la degeneración del estado fundamental aumenta junto con la capacidad de realizar computación cuántica. En particular, 2N fermiones de Majorana generan fermiones de energía cero cuyo número de ocupación especifica un estado de Q-bits topológicos. Si bien el trenzado no adiabático permite la manipulación de Q-bits este proceso no se puede dar en un sistema estrictamente unidimensional debido a que 2 fermiones no pueden ocupar un mismo estado cuántico y/o posición.

4.3.2.1. Trenzado de Fermiones de Majorana y estadística No abeliana

La manipulación adiabática de los fermiones de Majorana permite su aplicación en computación cuántica. En la presente sección se explora un arreglo de 3 nanohilos que permite de forma accesible el intercambio de MZM, en lo que se conoce como unión T. De forma inicial, se toman los tres nanohilos como 3 regiones topológicas de un único segmento, existe un MF por cada región. Como ejemplo ilustrativo (ver fig. 4.9) adonde los segmentos a la izquierda y derecha son topológicos, es decir, $\mu = 0$ y $t = |\Delta|$. Por el momento se omite el segmento vertical como no topológico. Se tiene que la fase ϕ superconductora es $\phi = \phi_{L/R}$, $C_{L,N}$ el fermión en la posición N de

la cadena de Kitaev a la izquierda y $C_{R,1}$ el fermión en la posición 1 de la cadena de Kitaev a la derecha. Ambos fermiones están débilmente acoplados mediante el hamiltoniano

$$H_\Gamma = -\Gamma \left(C_{L,N}^\dagger C_{R,1} + h.c \right) \quad (4.35)$$

En la base de Majorana

$$H_\Gamma \sim i \frac{\Gamma}{2} \cos \left(\frac{\phi_L - \phi_R}{2} \right) \gamma_{B,N}^L \gamma_{A,1}^R \quad (4.36)$$

Con lo cual ambos MF se combinan en un fermión ordinario salvo para $\phi_L - \phi_R = \pi$, a estas uniones se les conoce como uniones de tipo π . La relación (4.36) puede ser usada en el contexto de Nanohilos semiconductores.

En la fase topológica el hamiltoniano de los nanohilos de Majorana puede reducirse a un hamiltoniano de una única banda como el del modelo de Kitaev, cuando $g\mu_B |B_z| \gg mu^2$ y definir

$$\psi_{\uparrow x} \sim \frac{u(\hat{y} + i\hat{x})}{g\mu_B |B_z|} \quad \psi_{\downarrow x} \sim \psi_x \quad (4.37)$$

Con ψ_x un operador fermionico asociado a la banda de más baja energía

$$H_{eff} \sim \int dx \left[\psi_x^\dagger \left(-\frac{\hbar^2 \partial_x^2}{2m} - \mu_{eff} \right) \psi_x + |\Delta_{eff}| e^{i\varphi_{eff}} \psi_x \partial_x \psi_x + h.c \right] \quad (4.38)$$

Donde $\mu_{eff} = \mu + \bar{B}$ y $|\Delta_{eff}| e^{i\varphi_{eff}} \approx \frac{u|\Delta|}{g\mu_B |B_z|} e^{i\varphi_{eff}} (\hat{y} + i\hat{x})$. A partir de (4.38), 2 nanohilos con un ángulo recto entre ambos presentan una fase de $\pi/2$ lo cual el sistema se aleja del punto crítico de $\phi_L - \phi_R = \pi$. El proceso de trenzado puede hacerse de 2 formas: En contra de las manecillas del reloj (ver fig 4.9 b-d), y a favor de las manecillas del reloj (ver fig. 4.9 e-g) tanto en contra como a favor de las manecillas del reloj. Este modelo permite como realizar el intercambio de fermiones de Majorana. Sin embargo, no resulta evidente la estadística no abeliana. Para ello de momento avanzaremos a un sistema bidimensional que en presencia de vórtices que hospedan MZM, estos sistemas fueron descritos en el presente trabajo capítulo 2, en estos superconductores $p + ip$ la naturaleza No Abeliana se estudia mediante el intercambio de 2 vórtices o más.

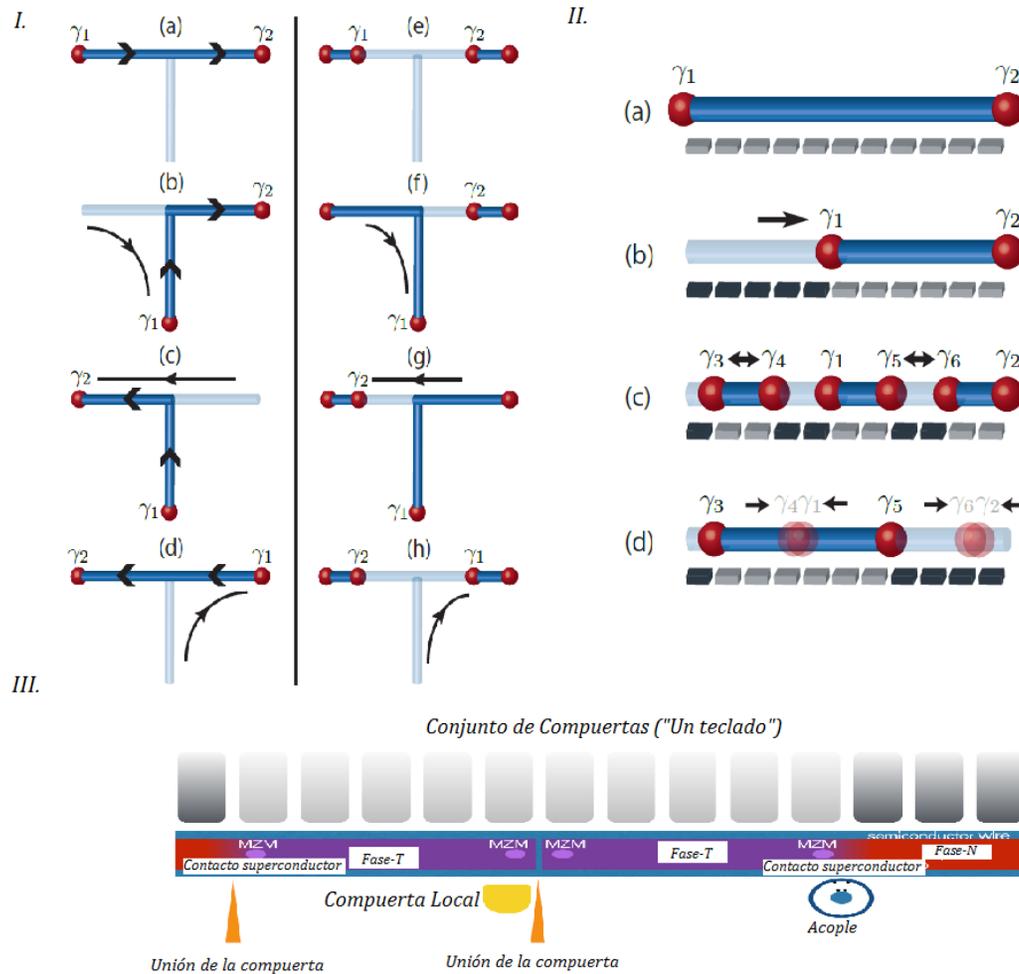


Figura 4.9: **I.** Unión de tipo T, vista como tres segmentos de un nanohilo de Majorana con fases superconductoras $\phi_{A,B,C}$ (a) Si un único segmento es topológico la interacción mediante tunelamiento Γ no puede destruir los MZM (b) 2 Regiones topológicas donde los MZM $\gamma_{1,2}$ se acoplan en un fermión ordinario excepto en la uniones π . (c) Si las tres regiones son topológicas $\gamma_{1,2,3}$ se acoplan en un fermión convencional y un modo de Majorana protegido topológicamente. **II.** Intercambio adiabático de Aniones de Ising (Majorana) en una unión tipo T asociado al movimiento de los dominios topológicos mediante el cambio de parámetros como el potencial químico debido a la aplicación de un voltaje local. **III.** Ejemplo de un superconductor topológico unidimensional. Las compuertas a lo largo del nano hilo controlan el potencial Químico de modo que puedan moverse los bordes de la región topológica donde se localizan los MZM.

4.3.2.2. Intercambio de Fermiones de Majorana- Q-bits Topológicos

El caso inicial más sencillo es considerar 2 vórtices que hospedan a un único MZM γ_1 y γ_2 . Considérese el intercambio adiabático $U(t)$ de $\gamma_{1,2}$. En el límite adiabático y la presencia de un gap finita de energía estos MZM permanecen estables durante la transformación unitaria $\gamma_n(t) = U(t)\gamma_n(0)U(t)^\dagger$; mientras el “gap” de energía permanece abierto la paridad de fermiones se conserva, la evolución $U(t)$ de un estado de los 2 modos de Majorana se restringe al estado fundamental con una paridad fija de los fermiones, luego

$$U\gamma_1U^\dagger = \chi_2\gamma_2, \quad \text{y} \quad U\gamma_2U^\dagger = \chi_1\gamma_1 \quad (4.39)$$

Siendo χ_1 y χ_2 factores de fase. Los operadores γ_i son idempotentes en función de la estadística de Clifford que estos cumplen (), lo que sigue, $(U\gamma_nU^\dagger)^2 = \chi_n^2 = 1$ y $\chi_n = \pm 1$. Considérese también la evolución adiabática del operador número del operador del estado fundamental del sistema $n_M = \frac{1}{2}(1 + i\gamma_2\gamma_1)$

$$Un_MU^\dagger = \frac{1}{2}(1 + iU\gamma_2\gamma_1U^\dagger) = \frac{1}{2}(1 - i\chi_1\chi_2\gamma_2\gamma_1) \quad (4.40)$$

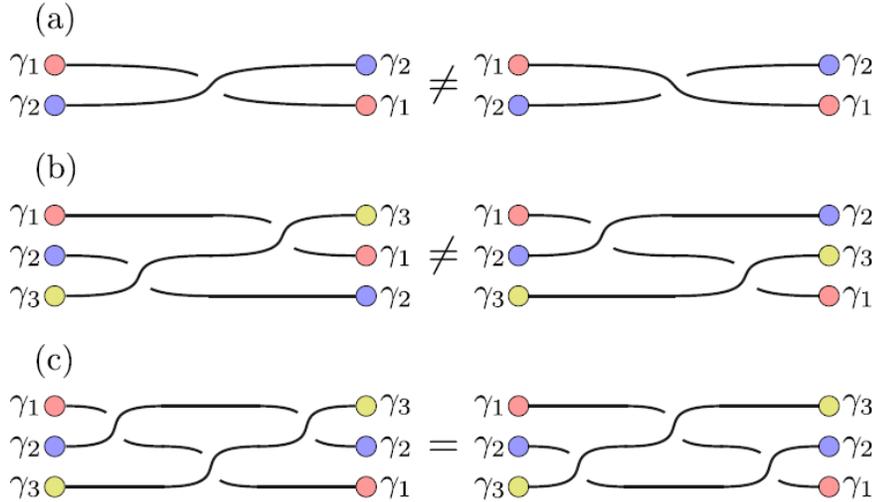


Figura 4.10: Operaciones de trenzado de modos de Majorana mediante operaciones no abelianas (a) La operación U_{12} y U_{21} no son equivalentes. (b) La composición de las transformaciones $U_{12}U_{23}$ y $U_{23}U_{12}$ no conmutan. (c) Esquema de la ecuación de Yang-Baxter (4.46).[100]

Es decir, la paridad de fermiones se conserva dado que no puede cambiar durante el proceso de intercambio. i.e. $Un_MU^\dagger = n_M$, dando lugar a $\chi_1\chi_2 = -1$ con lo cual existen 2 posibilidades $\chi = \chi_2 = -\chi_1 = 1$ ó -1 . La elección entre 1 ó -1 depende

del hamiltoniano que gobierne el intercambio de 2 MZM γ_n y γ_m que bien se puede describir con $\chi = \pm 1$ como

$$\begin{aligned}\gamma_n &\rightarrow -\chi\gamma_m \\ \gamma_m &\rightarrow \chi\gamma_n\end{aligned}\tag{4.41}$$

En el caso de $\chi = 1$

$$\gamma_p \rightarrow U_{nm}\gamma_p U_{nm}^\dagger\tag{4.42}$$

El operador U de la operación de trenzado tiene la forma de (4.34)

$$U_{nm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \gamma_n\gamma_m) = \exp\left(\frac{\pi}{4}\gamma_n\gamma_m\right)\tag{4.43}$$

A partir de la identidad de Taylor, junto a $(\gamma_n\gamma_m)^2 = -1$.

$$e^{\alpha\gamma_n\gamma_m} = \cos \alpha + \sin \alpha\gamma_n\gamma_m$$

La transformación inversa corresponde a $\chi = -1$, es $U_{nm}^\dagger = U = U_{mn}$

$$U_{mn} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \gamma_n\gamma_m) = \exp\left(-\frac{\pi}{4}\gamma_n\gamma_m\right)\tag{4.44}$$

En base (4.43) y (4.44) se observa ambas formas de trenzado a favor o en contra de las manecillas del reloj no son equivalentes. En la figura (4.10 a), se representa del proceso de trenzado U_{12} y su inverso $U_{21} = U_{12}^\dagger$. En otras palabras, dicho proceso no corresponde a una re-etiquetación pues al aplicar 2 veces la transformación unitaria (4.43) no se recupera el estado inicial

$$U_{nm}^2 = \gamma_n\gamma_m$$

$$\begin{aligned}\gamma_n &\rightarrow -\gamma_m \rightarrow -\gamma_n \\ \gamma_m &\rightarrow +\gamma_n \rightarrow -\gamma_m\end{aligned}\tag{4.45}$$

Para un conjunto de $2N$ fermiones de Majoranas el operador de trenzado entre MF vecinos $U_{n,n+1}$ genera los operadores U_{nm} , y su inverso U_{mn} al igual que todas las posibles combinaciones incluyendo el operador $\mathbf{1}$ de tal forma que es posible describir todas las transformaciones unitarias. El trenzado de MF es no Abelian, siendo que los operadores U no conmuta: El resultado de la composición de 2 o más operadores depende del orden en que se realizan. Estos operadores conmutan con su inverso, $[U_{mn}, U_{nm}] = 0$; y operadores de otro par de Majorana $[U_{mn}, U_{pq}] = 0$, siendo p, q, n y m parejas diferentes de MF. Otro ejemplo particular es el trenzado de 2 modos de Majorana n y m para luego ser intercambiado uno de ellos con un tercero p , este

proceso no es equivalente al proceso inverso $[U_{nm}, U_{mp}] = \gamma_n \gamma_p$, el resultado final de dicho proceso depende del orden $U_{nm}U_{mp} \neq U_{mp}U_{nm}$. Esta última operación para U_{12} y U_{23} junto a su combinación $U_{12}U_{23}, U_{23}U_{12}$; se muestran en la (fig.4.10 b). Ambos diagramas no son equivalentes. Un último caso es

$$U_{nm}U_{mp}U_{nm} = U_{mp}U_{nm}U_{mp} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_m \gamma_p + \gamma_n \gamma_m) \quad (4.46)$$

La expresión (4.46) se conoce como ecuación de Yang-Baxter y aparece en el estudio de modelos integrales en mecánica estadística, teoría cuántica de campos, teoría de campos conformes, cuántica de grupos y teoría de nudos, cuyo diagrama se encuentra en (fig.4.10 c).

Finalmente, se deduce la anterior para un sistema bidimensional sin espín que contiene una colección de $2N$ MZM hospedados en vórtices que se encuentran separados cuyas posiciones están dado por los vectores de posición r_i ($1 \leq i \leq 2N$), a la vez que los flujos magnéticos da cada vórtice es $h/2e$. La presencia de un vórtice cambia el parámetro de orden superconductor por una fase $e^{i\phi}$, es decir, el intercambio de un vórtice equivale a rotarlo alrededor de otro (una variación de la fase igual 2π). En general, un cambio ϕ de la fase SC es equivalente a rotar la fase del operador de Aniquilación por $\phi/2$, $\hat{\psi}(r) \rightarrow e^{i\phi/2}\hat{\psi}(r)$. En consecuencia, el MZM tiene la forma

$$\gamma_i = \int d^2r \left[u_i(r) e^{i\frac{\phi_i}{2}} \hat{\psi}(r) + u_i(r) e^{-i\frac{\phi_i}{2}} \hat{\psi}(r) \right] \quad (4.47)$$

Donde, $u_i(r)$ es la función de onda del MZM y la fase ϕ_i depende del ángulo relativo entre r_i y la posición de los otros vórtices. Tomar adiabáticamente el vórtice i (el correspondiente MZM) alrededor del vórtice j existe un cambio de la fase 2π , $\phi_i \rightarrow \phi_i + 2\pi$ que corresponde a un cambio de signo del operador de Majorana (4.47), $\gamma_i \rightarrow -\gamma_i$; con la finalidad de contar el número de cambios de fase recurre al concepto de corte de Rama (Branch-Cut) del análisis complejo, en el momento que el vórtice i MZM pasan por dicho corte radial al vórtice j se añade un signo menos adicional. Para un intercambio de 2 vórtices i, j en contra o favor de las manecillas del Reloj, los vórtices intercambian de posición. En el caso particular de 4 vórtices (Un sistema de 2 Q-bits), $N = 2$. Los MZM pueden emparejarse en 2 fermiones complejos

$$f_1 = \frac{1}{2}(\gamma_1 + i\gamma_2) \quad f_2 = \frac{1}{2}(\gamma_3 + i\gamma_4) \quad (4.48)$$

El sistema tiene un estado fundamental y una base natural para el subespacio del estado fundamental está dado por los auto vectores $|n_1 n_2\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle$, donde $|n_i\rangle$ es un estado propio del operador $\hat{n}_i = f_i^\dagger f_i$. Asumiendo que se inicia en un estado particular de la base $|\psi_i\rangle = |n_1 n_2\rangle$ y se realiza un intercambio de $\gamma_{2,3}$. El estado final en términos de $U_{2,3}$

$$|\psi_f\rangle = U_{2,3} |n_1 n_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|n_1 n_2\rangle + i(-1)^{n_1} |1 - n_1\rangle, |1 - n_2\rangle] \quad (4.49)$$

Nótese que $|\psi_i\rangle$ y $|\psi_f\rangle$ tienen la misma paridad total de fermiones. El intercambio corresponde a una rotación, es esta transformación revela la estadística No Abelianas del cambio de posición de vórtices generando un factor i.e., $|\psi_f\rangle = e^{i\theta} |\psi_i\rangle$. A partir de una aproximación del sistema bidimensional es posible argumentar que un MF en un nanohilo semiconductor se transforma de la misma forma que uno ligado a un vórtice., y por tanto exhibir estadística no Abelianas. Por ejemplo, considérese de forma simple el intercambio de fermiones de Majorana $\gamma_{1,2}$ como se ilustra en la figura (4.9 I.(a)-(d)). En cada paso del intercambio, hay 2 estados degenerados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ con $|1\rangle = f^\dagger |0\rangle$, siendo $f = (\gamma_1 + i\gamma_2)/2$ en principio es posible deducir la regla de transformación de la fase de Berry $\chi_n \equiv \text{Im} \int d_t \langle n | \partial_t | n \rangle$ adquirido por el estado fundamental de muchos cuerpos. La evolución unitaria del Q-bit está restringida en los estados fundamentales que tengan una paridad fermionica fija.

Todos los posibles procesos de trenzado para un sistema de 4 MF pueden ser generadas por los procesos de entrelazado entre MF vecinos dados por

$$\begin{aligned} U_{12} &= \exp\left(\frac{\pi}{4}\gamma_1\gamma_2\right) = \exp\left(i\frac{\pi}{4}\left(1 - 2f_1^\dagger f_1\right)\right) \\ U_{12} &= \exp\left(\frac{\pi}{4}\gamma_1\gamma_2\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \gamma_2\gamma_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + i\left(f_1^\dagger - f_1\right)\left(f_2^\dagger - f_2\right)\right) \quad (4.50) \\ U_{12} &= \exp\left(\frac{\pi}{4}\gamma_1\gamma_2\right) = \exp\left(i\frac{\pi}{4}\left(1 - 2f_2^\dagger f_2\right)\right) \end{aligned}$$

Estos operadores pueden escribirse matricialmente en la base del estado fundamental que seria 4- veces degenerado: $|00\rangle, |11\rangle, |01\rangle$ y $|10\rangle$ como

$$U_{12} = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\pi}{4}} & & & \\ & e^{-i\frac{\pi}{4}} & & \\ & & e^{-i\frac{\pi}{4}} & \\ & & & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix} \quad U_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i & & \\ i & 1 & & \\ & & 1 & i \\ & & i & 1 \end{bmatrix} \quad U_{34} = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\pi}{4}} & & & \\ & e^{-i\frac{\pi}{4}} & & \\ & & e^{-i\frac{\pi}{4}} & \\ & & & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

A partir de las anteriores expresiones de forma algebraica se tiene que las otras operaciones de trenzado $U_{13} = U_{12}U_{23}U_{21}$, $U_{24} = U_{23}U_{34}U_{32}$ y $U_{14} = U_{12}U_{23}U_{34}U_{32}U_{21}$. Se observa que estos operadores son diagonales respecto a la paridad de los fermiones, al mismo tiempo que dicha propiedad es intrínseca de los superconductores. En este sentido la computación cuántica topológica está protegida por la conservación en la paridad de fermiones.

4.3.3. Desafíos de La computación topológica con MZM y el porvenir.

Un conjunto de compuertas cuánticas se define como universales si cualquier evolución unitaria de un número dado de Qbits puede generarse a partir de la imple-

mentación de alguna secuencia de los elementos de dicho conjunto. Una elección de compuertas cuánticas universales es el conjunto formado por la compuerta T, la compuerta de Hadamart y la compuerta C-NOT. Un subconjunto de estas evoluciones unitarias se representa mediante el grupo de Clifford generado por las compuertas de Clifford i.e, La compuerta S, La compuerta Haddamart y la compuerta C-NOT, este subconjunto no es universal, pero lo puede ser en adición de la compuerta T. Esto último se debe principalmente que las compuertas de Clifford generan únicamente rotaciones $\pi/2$ alrededor de los tres ejes de la esfera de Bloch; y en adición de rotaciones de $\pi/4$ a través de una compuerta T permite rotaciones arbitrarias respecto a ejes arbitrarios. Las compuertas de Pauli mencionadas en la sección 4.1.1, al igual que la compuerta de Haddamart y Compuerta S pueden implementarse vía Q-bits de Majorana como una composición de operados de trenzado actuando sobre un Q-bit con paridad fija

$$\begin{aligned}
X &= -i(U_{23})^2 = -i\gamma_2\gamma_3, \\
Y &= -i(U_{31})^2 = -i\gamma_3\gamma_1, \\
Z &= -i(U_{12})^2 = -i\gamma_1\gamma_2, \\
H &= -iU_{12}U_{23}U_{12} = -iU_{23}U_{12}U_{23} \\
S &= e^{i\frac{\pi}{4}}U_{21}
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Nótese que la relación de Haddamart H está dada por la ecuación de Yang-Baxter (4.46). En adición la compuerta C-NOT puede implementarse de una forma topológicamente protegida mediante la combinación de mediciones del operador de la paridad de Fermiones y una compuerta de un único Q-bit implementada mediante el entrelazamiento de las líneas de mundo. Es por esto que se tiene que los MZM permiten implementar compuertas de Clifford protegidas topológicamente. Sin embargo sigue existiendo una limitación intrínseca a los fermiones de Majorana y es que la compuerta T sigue sin poderse implementar mediante el trenzado de aniones y manteniendo la protección topológica, con lo cual de momento existe una imitación para poder conseguir un proceso de computación cuántica universal y protegido topológicamente. Es en este momento que la corrección de errores es necesaria, la cual se ve especialmente beneficiada por las operaciones protegidas topológicas. Por ejemplo, se puede hacer uso de lo que se conoce como destilación de estados mágicos "Magic-state Distillation", [99] con la finalidad de aumentar la fiabilidad de las compuertas T y su implementación para la computación cuántica mediada por MZM que como se observó en los capítulos anteriores son físicamente viables.

Una vez inicializado un estado cuántico, y su posterior manipulación, el paso final de un algoritmo en la computación es la lectura del estado cuántico resultante. Como los estados de base computacional ($|00\rangle, |01\rangle, |11\rangle$ y $|10\rangle$) corresponden a patrones distintos resultados de la fusión de pares de aniones, las mediciones proyectivas se realizan fusionando físicamente los aniones y detectando los resultados de fusión.

Cómo se hace esto en la práctica depende de los aniones en cuestión y de la física microscópica que les da origen. Para los anyones de Ising existe en principio una forma sencilla de hacerlo. Una fusión por pares puede resultar solo en el vacío (en un condensado superconductor) o en una partícula y (una partícula masiva permanece) esta distinción en el cambio de energía del sistema es en principio detectable y sirve como método para realizar mediciones en la base computacional. [99][114]

Los desafíos generales que pueden afectar a la computación cuántica topológica son entre variados y complejos de solucionar : Primero, en cuanto a la presencia de aniones no deseados, estos pueden aparecer en nano-hilos de Majorana debido al desorden. Segundo, Al igual que los dominios se pueden mover mediante el cambio del potencial químico proporcionando una manera de manipular los Q-bits, el desorden a lo largo del cable, exhibido por un potencial químico localmente aleatorio, puede causar que partes del nano hilo estén accidentalmente en la fase topológica o trivial. Esto provoca dominios de pared adicionales a lo largo del cable que alojarán modos Majorana adicionales no contabilizados. Si bien es alentador que este efecto se puede mitigar al emplear protocolos de cambio de energía de carga de Josephson. Tercero, Los sistemas basados en Majorana también pueden sufrir fugas a un material que funcione como depósito externo. Suceso que resulta muy plausible a pesar de que el q-bit de Majorana está protegido por la paridad de fermión que es exacta en un sistema cerrado. Puesto que, los esquemas físicos para realizar los alambres de Majorana requieren depositar un nano hilo con acoplamiento espín-orbita sobre un superconductor de onda s del cual los pares de Cooper pueden introducirse en el semiconductor como resultado de la superconductividad inducida por proximidad. Si los pares de Cooper pueden introducirse en el nano hilo, también pueden hacerlo las cuasi partículas de Bogoliubov. En otras palabras, el *superconductor de onda S* también puede servir como un depósito de partículas y romper la conservación de la paridad de fermiones. Esto establece límites en las escalas de tiempo qué tan rápido debe realizarse el cálculo cuántico antes de que ocurra tal envenenamiento de la información. Alentadoramente, las heteroestructuras para nano hilos topológicos exhiben tiempos largos del envenenamiento que pueden hacer tales errores manejables.

Finalmente, en cuanto a la cuestión de la temperatura finita, los superconductores de onda p pueden ser más robustos que los estados intrínsecamente ordenados topológicamente. Dado que los modos Majorana están ligados a las paredes de dominio, no son creados espontáneamente por fluctuaciones térmicas. La brecha de energía protege los estados localizados en las paredes de dominio de los estados extendidos, lo que sugiere que la protección de la brecha de energía debería ser suficiente. De hecho, los estudios demuestran que los q-bits de Majorana toleran temperaturas finitas, lo que no debería suponer un obstáculo fundamental. Si bien es muy alentador, se debe tener en cuenta que los modos Majorana no proporcionan todo el potencial de la computación cuántica protegida topológicamente, ni mucho menos cualquier esquema basado en aniones es una panacea para todos los problemas de la computación

cuántica. La protección a nivel de hardware que proporcionan es muy deseable, pero todos vienen con sus propias deficiencias para superar. Sin embargo, teniendo en cuenta los problemas abiertos que enfrentan los esquemas no topológicos y el rápido progreso en la preparación y el control de los estados topológicos de la materia que acoge los modos Majorana, superar estos desafíos es un precio justo a pagar por la robustez que viene con el cálculo cuántico topológico. Ya existen maneras de ir más allá de Majorana: modos basados en las mismas construcciones. Reemplazando los nanos hilos semiconductores acoplados a la órbita de espín con estados de borde de los estados cuánticos fraccionarios abelianos de Hall se pueden realizar modos conocidos como parafermiones que permiten un conjunto de compuertas más grande, aunque todavía no universal. Mientras que el estado cuántico de Hall fraccional Read-Rezayi que hospeda los aniones de Fibonacci podría ser demasiado frágil, se ha propuesto que los estados colectivos de modos de para fermión pueden dar lugar a un estado análogo que apoya a los aniones de Fibonacci. Dado que los estados cuánticos fraccionarios abelianos están bien establecidos experimentalmente, no es demasiado descabellado imaginar que la tecnología actual puede ser empujada a realizar modos de para fermión y, estirando la imaginación un poco más, tal vez incluso anyones Fibonacci. De momento, una ruta más realista podría ser alguna a mitad de camino que goza de algunos de los beneficios de la información cuántica topológica de almacenamiento y procesamiento, mientras que no es completamente una computadora cuántica topológica como se describe aquí. Uno de estos esquemas es construir códigos de superficie que apoyen a los anyones abelianos de los q-bits basados en hilos de Majorana y diseñar protocolos tolerantes a fallas para promover tales sistemas en computadoras cuánticas universales. Otra es acoplar los q-bits de Majorana a q-bits de espín no topológicos, lo que permite realizar un conjunto de puertas universales. Cualquiera que sea la ruta utilizada, los principios generales subyacentes a cualquier esquema topológico se basarán en las operaciones básicas descritas en este capítulo.

Conclusiones

1. A través de reducir el formalismo utilizado en la descripción de los fermiones de Majorana estos últimos aparecen naturalmente en la descripción teórica de un superconductor convencional. El interés reciente en la física de la materia condensada ha sido centrado en los modos cero Majorana (MZMs), ya brevemente mencionado en relación con la condición de Majorana.

Los MZM constituyen un caso especial de fermiones majoranas que ocurren a la energía cero exacta y se localizan típicamente en espacio en las proximidades de defectos, como vórtices o dominios de paredes. El estado estacionario asociado con el MZM por si mismo satisface la condición Majorana. Es esta extremadamente interesante propiedad que ha motivado intensa teórica y estudios experimentales en la búsqueda entre los subcampos más activos de materia condensada.

2. Los fermiones de Majorana aparecen naturalmente en la descripción teórica de un superconductor toy-model , el cual permite encontrar indicaciones de que características deben presentarse en aquellos sistemas que permiten hospedar estos MF como cuasipartículas.

Es posible entender el modelo bidimensional de un superconductor $p_x + ip_y$, a partir de una reducción del problema en un modelo de Dirac equivalente 1-D. Se evidencio geométricamente una forma de identificar tanto la fase topológica como trivial, a partir de la definición del Número de Chern y Número de Winding.

3. Mediante aproximaciones a un sistema realista es posible deducir las características requeridas para la implementación de un sistema experimental relativamente sencillo en su geometría así como las condiciones asociadas a la presencia de una fase superconductora topológica.

Actualmente existen varios frentes de investigación, tanto en la búsqueda de nuevas geometrias de heteroestructuras cuyo comportamiento sea similar o mejor que el de los nanohilos de majorana como en geometrias que faciliten la

maipulación y lectura de estos modos,por ejemplo: Grafeno bicapa rotada un ángulo mágico. En base a los avances y estudios experimentales se mantiene abierta la exploración de la estadística no abeliana de forma practica en estos MZ, tanto para demostrarla (En cuyo que caso se tratara de MZM) como en la búsqueda de métodos para la manipulación para su aplicación en la computación cuántica. [63][78][115]

Parte I
ANEXOS

Anexos A

Notación Tensorial

De forma introductoria consideremos 2 vectores cualesquiera definidos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} A &= (A_1, A_2, A_3), \\ B &= (B_1, B_2, B_3) \end{aligned} \tag{A.1}$$

Se tiene que el producto escalar de dos vectores cualesquiera se define de la siguiente forma

$$A \cdot B = A_i B_i = \delta_{ij} A_i B_j = \delta^{ij} A_i B_j \tag{A.2}$$

Nótese que se abrevian la escritura de los sumatorios en el caso de índices repetidos, convención introducida por Einstein, utilizada para así reducir la escritura de sumatorios entendiéndose que en la expresión resultante un índice indica la suma sobre todos los posibles valores del mismo. Ampliando la definición de superficie euclidiana tridimensional al espacio-tiempo de 4 dimensiones, se requiere redefinir los vectores en esta nueva variedad, en consecuencia, cualquier punto en esta variedad se especificará únicamente por cuatro coordenadas.

Hay 2 vectores que podemos definir en esta variedad: $x^\mu = (ct, X)$ y $x_\mu = (ct, -X)$, donde $\mu = 0, 1, 2, 3$. Esta notación se denomina contravariante y covariante. Los vectores contravariantes y covariantes están relacionados unos con otros a través del tensor métrico de la variedad cuatridimensional conocida como el espacio de Minkowsky, es decir

$$\begin{aligned} x_\mu &= \eta_{\mu\nu} x^\nu \\ x^\mu &= \eta^{\mu\nu} x_\nu \end{aligned} \tag{A.3}$$

Donde, los tensores métricos son matrices simétricas, es decir, $\eta_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} = \delta_v^u$.

Definición A.1 : *Generalizar el producto escalar en el espacio de Minkowsky permite definir la longitud de un vector y, por ejemplo, poder conocer la longitud entre dos puntos.*

$$\begin{aligned} A \cdot B &= A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu \\ A \cdot B &= \eta^{\mu\nu} A_\mu B_\nu = \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu \\ A \cdot B &= A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$x^2 = (x^0)^2 - \mathbf{X}^2 = c^2 t^2 - \mathbf{X}^2 \quad (\text{A.5})$$

Dada esta notación también podemos definir los siguientes operadores llamados contra gradiente y cogradiente (tomando $c=1$)

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right); \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right). \quad (\text{A.6})$$

Y construir el operador D'Alambertiano, como generalización del Laplaciano al espacio de Minkowsky de 4 dimensiones

$$\square = \partial^2 = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (\text{A.7})$$

Definición A.2: *La posición, energía y el momento pueden definir cuadvectores a los que llamaremos vectores de energía-momentum o cuadvimomentum.*

Por simplicidad en la notación de ahora en adelante se toma $c=1$

$$p^\mu = (E, \mathbf{p}) p_\mu = (E, -\mathbf{p}) \quad (\text{A.8})$$

A su vez, dada la representación en mecánica cuántica de la energía $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$, y momentum $\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla$ como operadores, los cuadvectores antes definidos toman la forma:

$$p^\mu = i\hbar \partial^\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, -i\hbar \nabla \right), p_\mu = i\hbar \partial_\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, i\hbar \nabla \right). \quad (\text{A.9})$$

Definición A.3: *En el formalismo para la descripción del sistema cuántico de una única partícula se parte de la ecuación de energía dada por el hamiltoniano en el caso clásico, dado que se trata de un sistema físico no relativista.*

De este modo al describir cada uno de los observables como operadores Hermíticos se obtiene la ecuación de Schrödinger

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\psi \quad (\text{A.10})$$

La ecuación anterior se puede escribir de forma más abreviada como $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi$, donde, el hamiltoniano H de forma general es

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(X) \quad (\text{A.11})$$

Donde, $\psi(X, t)$ representa la función de onda, p denota el momentum de la partícula y $V(X)$ el potencial atrás ves del cual se mueve la partícula. Este formalismo es no relativista ya sea para una partícula libre o en presencia de un potencial, vease que esta ecuación es invariante ante transformaciones de Lorentz [64-68]. Una ecuación relativista, por otro lado, debe ser invariante en todos los marcos de referencia inerciales.

Anexos B

Modelo de Tight Binding

La comprensión y predicción de estos superconductores topológicos no convencionales requiere necesariamente una sinergia de estructura de bandas y efectos de interacción electrónica.

La aproximación de enlace fuerte consiste en lo siguiente: en una hilera de átomos, cada uno con un electrón fuertemente ligado, los niveles energéticos cambian según se varía la distancia entre átomos vecinos [73] [74]. A medida que los átomos se acercan suficientemente, las funciones de onda individuales solapan, dando lugar a estados electrónicos extendidos en toda la red cuyos niveles de energía tomarán valores ligeramente distintos de los correspondientes al átomo individual. De la misma forma, esta aproximación se basa en la suposición de que los átomos del cristal están tan separados que las funciones de onda de los electrones asociados con átomos vecinos se superponen sólo en menor grado.

I. Combinación lineal de orbitales atómicos

I.1 Hamiltoniano atómico y de la red cristalina

En una red cristalina el hamiltoniano de una partícula simple es

$$H = H_{at} + \Delta U, \quad (\text{B.1})$$

Donde H_{at} es el hamiltoniano de un solo átomo y $\Delta U = V(r) - v_a(r)$ encierra todas las diferencias entre el potencial en el cristal y el potencial de un átomo aislado. Aquí, se asume que $\Delta U \rightarrow 0$ en el centro de cada átomo en el cristal.

Los estados de una partícula en el cristal son entonces $\psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ tales que

$$H \psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = E_{n\mathbf{k}} \psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (\text{B.2})$$

El índice n indica la banda o nivel de energía, y \mathbf{k} es un vector de onda que para casos prácticos ubicaremos en la primera zona de Brillouin.

Las funciones de onda atómicas, $\phi_i(\mathbf{r})$ son estados propios de H_{at}

$$H_{at}\phi_i(\mathbf{r}) = \epsilon_i\phi_i(\mathbf{r})$$

Donde ϵ_i es la energía del nivel de energía i en un átomo aislado. Estas funciones de onda decaen rápidamente lejos de $\mathbf{r} = 0$ y así la integral de solapamiento entre las funciones de onda localizadas en puntos distintos de la red cristalina es pequeña.

Es por esto que los orbitales atómicos son ortonormales, tal que

$$\gamma(|\mathbf{R}|) = \int \phi_i^*(\mathbf{r}) H \phi_i(\mathbf{r} + \mathbf{R}) dr = \begin{cases} 1, i = j; \mathbf{R} = 0 \\ 0, i \neq j; \mathbf{R} \neq 0 \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

I.2 Teorema de Bloch

Los estados de una sola partícula deben obedecer el teorema de Bloch

$$\Psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}\Psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (\text{B.4})$$

Donde \mathbf{R} es un vector de traslación en el espacio real del cristal. Claramente, un solo orbital atómico no satisface el teorema de Bloch, pero fácilmente podemos obtener una combinación lineal de orbitales atómicos que si lo hace

$$\Psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{R}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} \phi_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}), \quad (\text{B.5})$$

Donde N es el número de puntos de la red en el cristal y el factor de $1/\sqrt{N}$ nos asegura de que los estados de Bloch están normalizados

II. Cálculo de la estructura de bandas

II.1 Una única banda-S En una red cristalina, de solo un átomo por celda unitaria, y que solo los orbitales atómicos $S\phi_s(\mathbf{r})$ contribuyen a los estados del cristal, solo existe una única banda ($n = 1$) con lo cual solo existe un estado de Bloch tal que

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{R}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} \phi_s(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \quad (\text{B.6})$$

Haciendo fácil el encontrar la relación de dispersión calculando el valor esperado de la energía

$$E(k) = \int \psi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) H \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (\text{B.7})$$

Integrando en todo el espacio, se obtiene que para

$$\begin{aligned}\Psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{R}') &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{R}''} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{R}'+\mathbf{R}'')} \phi_n(\mathbf{r} - (\mathbf{R}'')) \\ E(k) &= \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{R}} \sum_{\mathbf{R}'} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{R}'-\mathbf{R})} \int \phi_s^*(\mathbf{x}) H \phi_s(\mathbf{x} - (\mathbf{R}' - \mathbf{R})) d\mathbf{x}\end{aligned}\quad (\text{B.8})$$

Ahora para cada vector \mathbf{R} , se tiene que $\mathbf{R}' - \mathbf{R} = \mathbf{R}''$, es solo otro vector de traslación. Sustituyendo en la ecuación anterior por \mathbf{R}'' se simplifica

$$E(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{R}''} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}''} \int \phi_s^*(\mathbf{x}) H \phi_s(\mathbf{x} - \mathbf{R}'') d\mathbf{x}\quad (\text{B.9})$$

A continuación, se separan los términos de la suma sobre \mathbf{R}'' considerando el rango de los orbitales atómicos $s, \phi_s(\mathbf{r})$. Los orbitales atómicos están estrechamente localizados: Son usualmente más grandes cuando $|\mathbf{r}|$ es pequeño y decae rápidamente para $\mathbf{r} = 0$.

Sí $\mathbf{R}'' = 0$ entonces la integral en (B.9) se convierte

$$\int \phi_s^*(\mathbf{x}) H \phi_s(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int \phi_s^*(\mathbf{x}) \epsilon_s \phi_s(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \epsilon_s\quad (\text{B.10})$$

Puesto que $H \phi_s(\mathbf{x}) = \epsilon_s \phi_s(\mathbf{x})$ y los estados atómicos $\phi_s(\mathbf{x})$ son normalizados. En $\mathbf{R}'' = 0$ obtenemos ϵ_s , la energía de los orbitales atómicos en un átomo aislado. Sí, $|\mathbf{R}''|$ es grande esperamos que la integral

$$\int \phi_s^*(\mathbf{x}) H \phi_s(\mathbf{x} - \mathbf{R}'') d\mathbf{x} \approx 0$$

el solapamiento entre funciones de onda separadas por un \mathbf{R}'' es pequeño. Típicamente en un cálculo semi-empírico del modelo de tight binding únicamente serán incluidos términos donde $|\mathbf{R}''|$ es pequeño, por ejemplo, sea $\mathbf{R}'' = \tau$ el vector de traslación entre un átomo y su vecino más cercano, entonces

$$E(\mathbf{k}) = \epsilon_s + \sum_{\tau} e^{i\mathbf{k}\cdot\tau} \int \phi_s^*(\mathbf{x}) H \phi_s(\mathbf{x} - \tau) d\mathbf{x}\quad (\text{B.11})$$

Finalmente, en un cálculo empírico de tight binding, no se evalúa la integral de solapamiento. En vez de eso se le reemplaza con un parámetro, γ , ajustandolo para que coincida con el experimento.

$$E(\mathbf{k}) = \epsilon_s + \sum_{\tau} e^{i\mathbf{k}\cdot\tau} \gamma(|\tau|) \quad \gamma(|\tau|) = \int \phi_s^*(\mathbf{x}) H \phi_s(\mathbf{x} - \tau) d\mathbf{x}\quad (\text{B.12})$$

Haciendo el uso de esta relación, se investiga el efecto en la estructura de bandas del deformamiento o esfuerzos sobre la red cristalina.

II.2 Una única banda-S en un cristal unidimensional

En un cristal unidimensional los vectores de traslación son $R = na_0\mathbf{i}$, donde, n es un número entero, a_0 es la separación entre átomos vecinos e \mathbf{i} es un vector unitario en la dirección x . En este caso hay dos vecinos cercanos, cuyos vectores de traslación $\tau = \pm a_0\mathbf{i}$ Entonces, si $E(\mathbf{k}) = \epsilon_s + \sum_{\tau} e^{i\mathbf{k}\cdot\tau} \gamma(|\tau|)$, en un cristal de una dimensión sabemos que los únicos vectores de onda que tienen significado en este caso, \mathbf{k} son en la dirección \mathbf{i} , así que $\mathbf{k} = k\mathbf{i}$. Entonces

$$\begin{aligned} E(k) &= \epsilon_s + \gamma(a_0) (e^{ika_0} + e^{-ika_0}) \\ E(k) &= \epsilon_s + 2\gamma(a_0) \cos(ka_0) \end{aligned} \tag{B.13}$$

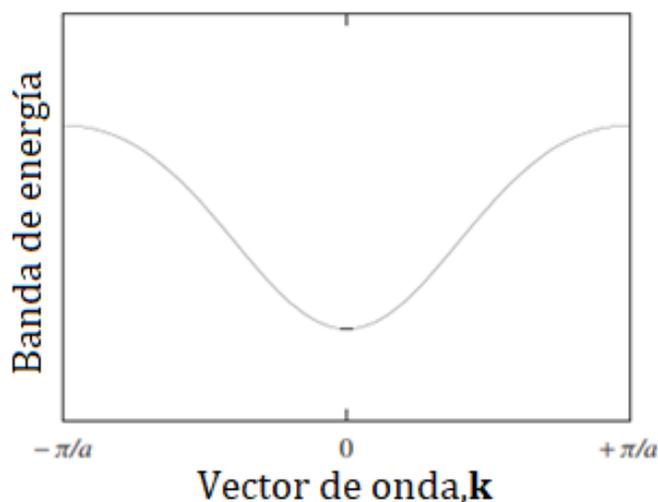


Figura B.1: Relación de dispersión en un cristal 1D según la aproximación de Tight Binding.[74]

II.3 El efecto del ajuste de la integral de solapamiento, γ .

El parámetro γ determina el ancho de las bandas y la curvatura de estas, se puede realizar el ajuste del valor de γ para coincidir con el experimento. Por otro lado, al conocer como γ varía según la separación interatómica, es posible conocer como el ancho de las bandas cambia cuando el cristal sufre algún esfuerzo. A medida que $\gamma(b)$

decrece la curvatura de la banda también decrece. La masa efectiva es inversamente proporcional a la curvatura y a medida que $\gamma(b)$ es pequeña la masa efectiva tiende a ser grande.

Esta es la relación de dispersión para una única banda s en un cristal $1D$. Describe cómo cambia la energía en función de, k . (Ver Fig. 1.6) A su vez también nos da el ancho de banda el cual es igual a 4γ , esta es la diferencia entre el valor de energía mínimo y máximo permitido de la banda.

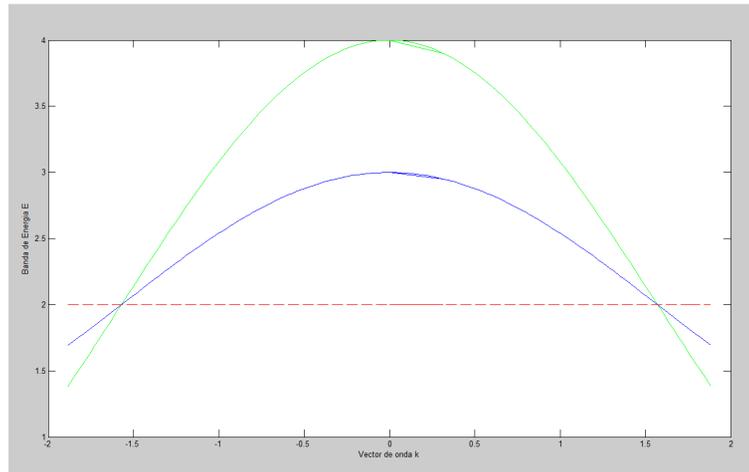


Figura B.2: *Relación de Dispersión para una red bidimensional en función de $\gamma(a) = 0,5eV$, y diferentes valores de $\gamma(b)$; $\gamma(b) = 1eV$ la línea verde y $\gamma(b) = 0,5 eV$ la línea azul.*[71]

II.4 Una única banda-S en un cristal tridimensional

Generalizando a tres dimensiones. Se sigue teniendo

$$E(\mathbf{k}) = \epsilon_s + \sum_{\tau} e^{i\mathbf{k}\cdot\tau} \gamma(|\tau|)$$

En esta ocasión $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ y τ , en general también tendrá x, y y z . Por ejemplo, en una red cristalina cubica centrada en la cara, los vectores de los 12 vecinos más cercanos son $\tau = (\pm 1, \pm 1, 0) a/2; (\pm 1, 0, \pm 1) a/2; (0, \pm 1, \pm 1) a/2$ El primer término de la sumatoria se obtiene de la siguiente manera

$$\begin{aligned} & e^{ia(k_x+k_y)/2} + e^{ia(k_x+k_y)/2} + e^{ia(-k_x+k_y)/2} + e^{-ia(k_x+k_y)/2} \\ &= [e^{ia(k_x)/2} + e^{-ia(k_x)/2}] + [e^{ia(k_y)/2} + e^{-iak_y)/2}] \\ &= 4 \cos(k_x a/2) \cos(k_y a/2) \end{aligned} \tag{B.14}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} E(k_x, k_y, k_z) &= \epsilon_s + 4\gamma(|\tau|) \left(\cos\left(\frac{k_x a}{2}\right) \cos\left(\frac{k_y a}{2}\right) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \cos\left(\frac{k_y a}{2}\right) \cos\left(\frac{k_z a}{2}\right) + \cos\left(\frac{k_z a}{2}\right) \cos\left(\frac{k_x a}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

Donde $|\tau| = a/\sqrt{2}$, para pequeños valores del vector de onda, al igual que para los electrones libres se obtiene una expresión cuadrática isotrópica

$$E(\mathbf{k}) = \epsilon_s + \gamma(|\tau|)a^2 \mathbf{k}^2 \tag{B.15}$$

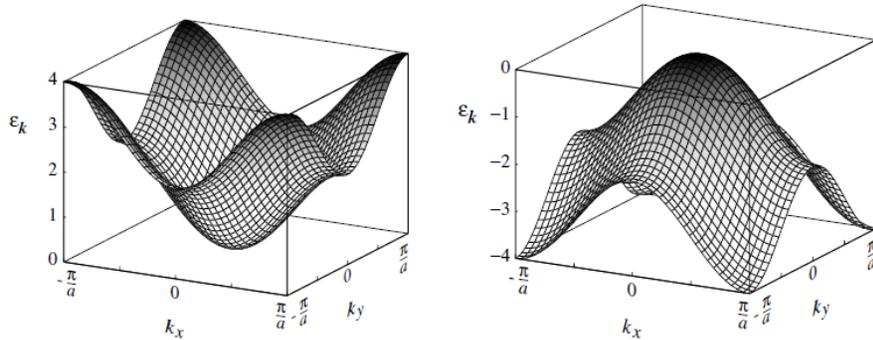


Figura B.3: Banda de energía tipo S en el modelo de Tight binding para una red cubica, a la izquierda γ es negativa y a la derecha γ es positiva.[75]

II.6 El origen de bandas de energía

En el caso de un cristal con N átomos y un solapamiento nulo entre los estados atómicos obtendremos N niveles de energía degenerados por cada estado atómico. Como la integral de solapamiento aumenta estos niveles se transforman en bandas, cada una de las cuales contiene N diferentes valores permitidos de \mathbf{k} (Ver Fig. 1.8). En general, un material tiene más de un átomo por celda unitaria y, en aplicaciones modernas. En un cristal con una base de N_b átomos (y donde solo un tipo de orbitales contribuye a las bandas) podemos hacer N_b combinaciones lineales de orbitales atómicos que satisface el teorema de Bloch.

$$\Phi_{i\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{R}_i} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_i} \phi(\mathbf{r}-\mathbf{R}_i) \quad (\text{B.16})$$

El índice $i = 1, 2, \dots, N_b$ indica los diferentes átomos en la base y el vector \mathbf{R}_i son vectores de traslación que nos llevan entre cada átomo i . Los estados de la red cristalina pueden ser expandidos como una combinación lineal de los N_b estados de Bloch.

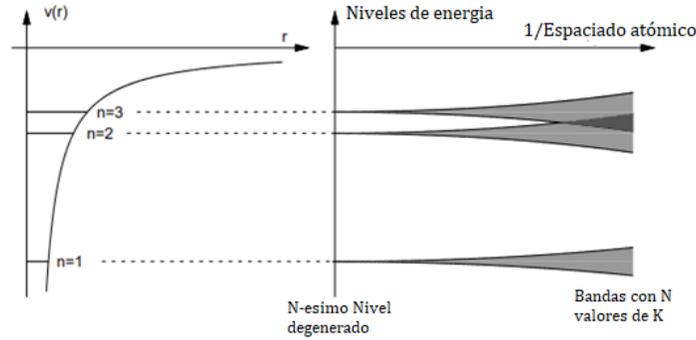


Figura B.4: Estructura de bandas en el modelo de Tight Binding. Izquierda Los niveles de energía en el caso de un solo átomo. Derecha los niveles de energía de una red cristalina de N átomos, en función de la integral de solapamiento (el inverso de la distancia entre átomos).[85]

$$\begin{aligned} \psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) &= \sum_i c_{i\mathbf{k}} \Phi_{i\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \\ &= \sum_i c_{i\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{R}_i} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_i} \phi(\mathbf{r}-\mathbf{R}_i) / \sqrt{N} \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Para encontrar $\psi_{n\mathbf{k}}$, debemos minimizar el valor esperado de la energía con respecto a los coeficientes, $c_{i\mathbf{k}}$, lo cual nos dejan el siguiente sistema de ecuaciones

$$\sum_i (H_{ij} - \delta_{ij} E(\mathbf{k})) c_{j\mathbf{k}} = 0 \quad (\text{B.18})$$

Donde $H_{ij} = \langle \Phi_{i\mathbf{k}} | H | \Phi_{j\mathbf{k}} \rangle$. Las ecuaciones de (4.31) tienen soluciones no triviales solo si el determinante

$$|\mathbf{H} - E(\mathbf{k}) \mathbf{I}| = 0 \quad (\text{B.19})$$

Donde \mathbf{H} es una matriz de elementos, H_{ij} , e \mathbf{I} es la matriz identidad

Anexos C

Cadena de Kitaev abierta

El modelo ideal desarrollado en el capítulo de un superconductor topológico 1-D exhibe estados de borde de Majorana descritos por el hamiltoniano (1.42) cuya forma compacta en el espacio de momentums es

$$H(p) = \left(\frac{p^2}{2m} - \mu \right) \tau_x - \delta p \tau_x \quad (\text{C.1})$$

De donde se pudo observar que el espectro de dispersión presenta un cierre del gap de energía para valores particulaes de $p = 0$ y $\mu = 0$ que coinciden con el paso de la fase topológica a la trivial de este sistema. El hamiltoniano en (C.1) es equivalente a un hamiltoniano de Dirac con masa $m = -\mu/\delta^2$, y el rol realizado por la simetria particula-antiparticula es reemplazado por el de la simetria particula-hueco. Tal y como se observo en el capítulo 2 los modos zeros en este tipo de sistemas se localizan en los limites entre una región trivial (el vacío) y una no trivial. Para verificar esto considerese un superconductor seminfinito 1-D, en el cual las funciones propias de estos MZ deben satisfacer

$$\left[(-\eta \partial_x^2) \tau_x + i \delta \partial_x \tau_y \right] \psi(x) = 0 \quad (\text{C.2})$$

donde $\eta = 1/2m$, con la finalidad de obtener modos localizados, esto requiere que la función de onda $\psi(x)$ se desvanezca al infinito, es decir, $\psi(0) = \psi(\infty) = 0$. Multiplicando por $i\tau_y$ se tiene

$$\left[(-\eta \partial_x^2) \tau_x + i \delta \partial_x \tau_y \right] \psi(x) = 0 \quad (\text{C.3})$$

Que las funciones de onda deben ser estados propios de τ_x y valores propios $s = \pm 1$, y dada la condición en el infinito se toma como aproximación de las soluciones a $\psi(x) \propto e^{-\lambda x}$ con lo cual

$$\psi(x) \propto \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-\lambda x}, \psi(x) \propto \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-\lambda x}, \quad (\text{C.4})$$

Al sustituirlas en la ecuación (C.3) se obtienn las siguientes ecuaciones algebraicas

$$\eta\lambda^2 - \Delta\lambda + \mu = 0, \quad \eta\lambda^2 + \Delta\lambda + \mu = 0, \quad (\text{C.5})$$

de las cuales solo la primera presenta ambas raices reales mayores a cero para δ y $\mu > 0$ dadas por

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2\eta} \left(\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4\eta\mu} \right) \quad (\text{C.6})$$

Finalmente el modo cero de enegia consiste en un función de onda completamente real

$$\psi(x) = \frac{1}{Z} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (e^{-\lambda_+x} - e^{-\lambda_-x}) \quad (\text{C.7})$$

La ecuación (C.7), representa un función de onda de un MZM que decae exponencialmente desde la posición $x = 0$ (*ver fig.1.6*); con $1/Z$ un factor de normalización definido su cuadrado como $Z^2 = 1/\lambda_+ + 1/\lambda_- - 4/(\lambda_+ + \lambda_-)$ y la tasa de decaimiento esta definida por los valores de $|\lambda_{\pm}|$ correspondiente a una longitud caracteristica $\xi_{\pm} = 1/|\lambda_{\pm}|$. El modo de Majorana obtenido para el caso del limite con el vacio es obtenido de manera analoga a los solitones de Jackiw-Rebbie particular (C.7) siendo uno para el caso $\eta \rightarrow 0$. Tal y como se menciona en el capitulo 2 donde las soluciones de la ecuación de Dirac corresponden a una interfaz entre regines con masas positivas y negativas.

De forma analoga consiste el problema de obtener las funciones propias localizadas en los limites de una cadena de Kitaev completamente fñita bajo lo que se conoce como condiciones abiertas de borde. Retomando la ecuación del modelo tigth binding para un superconudctor de onda p (1.64)

$$H_K = - \sum_{j=1}^N \mu c_j^\dagger c_j - \sum_{j=1}^{N-1} \left(t c_j^\dagger c_{j+1} + \Delta e^{i\phi} c_j c_{j+1} + h.c. \right) \quad (\text{C.8})$$

Recuerdese que la presencia de estados de borde de Majorana en la fase no trivial se da para la condición de Majorana $|\mu < 2t|$ dichos fermiones de Majorana ocasionan que el Hamiltoniano final debido a la presencia de estos MZM presente un estado fermionico menos, es decir d_{N-1} con respecto a los fermiones inicales c_N (*ver fig.C.1*). Dicha variación en la paridad de los fermiones convencionales que es posible evidenciarla experimentalmente corresponde a la superposición de dos fermiones de Majorana localizados exponencialmente en los limites de la cadena. Con la finalidad de obtener los MZ de la ecuación (C.8) se considera un estado fermiónico ordinario

$$d_M^\dagger = \sum_{j=1}^N (\psi_{A,j} \gamma_{A,j} + \psi_{B,j} \gamma_{B,j}) \quad (\text{C.9})$$

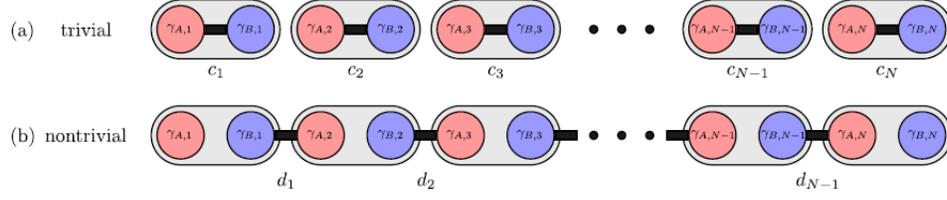


Figura C.1: *a. Fase Trivial cadena de Kitaev que cuenta con N fermiones ordinarios c_j localizados en cada punto de la cadena. b. Fase topológica cadena de Kitaev que cuenta con $N - 1$ operadores d_j localizados a lo largo de la cadena y un fermión convencional deslocalizado en función de 2 MZM*

el cual de tratarse de un MZ debe satisfacer $[H_K, d_M^\dagger] = 0$, y al calcular directamente dicha relación de conmutación se obtiene un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \mu\psi_{B,j} + (t - \Delta)\psi_{B,j+1} + (t + \Delta)\psi_{B,j-1} &= 0 \\ \mu\psi_{A,j} + (t + \Delta)\psi_{A,j+1} + (t - \Delta)\psi_{A,j-1} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Que matricialmente corresponde a

$$\begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \psi_j + \begin{bmatrix} t - \Delta & 0 \\ 0 & t + \Delta \end{bmatrix} \psi_{j+1} + \begin{bmatrix} t + \Delta & 0 \\ 0 & t - \Delta \end{bmatrix} \psi_{j-1} = 0 \quad (\text{C.11})$$

Intentando extender estas ecuaciones a todos los sitios de la cadena se añaden dos posiciones $j = 0$ y $j = N + 1$ y se impone que la función de onda de Majorana sean cero, es decir que en la búsqueda de valores propios a valor de energía cero requiere que las funciones de onda desaparezcan al final de la cadena lo cual da lugar realizar una aproximación sencilla a las mismas ($\psi_0 = \psi_{N+1} = 0$)

$$\psi_j = z^j \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (\text{C.12})$$

Luego el sistema de ecuaciones a resolver es

$$\begin{bmatrix} \mu + (t - \Delta)z + (t + \Delta)/z & 0 \\ 0 & \mu + (t + \Delta)z + (t - \Delta)/z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{C.13})$$

Que presenta soluciones no triviales solo si alguno de los elementos de la matriz principal es cero dando así como resultados dos ecuaciones cuadráticas en función de los valores de z_\pm y $z'_\pm = 1/z_\pm$ dados por

$$\begin{aligned} z_\pm &= \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4(t^2 - \Delta^2)}}{2(t + \Delta)} \\ z'_\pm &= \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4(t^2 - \Delta^2)}}{2(t - \Delta)} \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

A partir de la formula Vieta para las ecuaciones cuadraticas se tiene que

$$z_+ z_- = \frac{t - \Delta}{t + \Delta} < 1 \quad (\text{C.15})$$

es decir si $z = z_{\pm}$, es decir uno de los elementos de la diagonal es cero mientras el otro no lo es, con lo cual $[\beta, \alpha] \propto [0, 1]$, o bien $[\beta, \alpha] \propto [1, 0]$ y se tienen dos solUciones a energia cero y ortogonales

$$\begin{aligned} \psi_j^B &= (B_+ z_+^{-j} + B_- z_-^{-j}) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \psi_j^A &= (A_+ z_+^{-j} + A_- z_-^{-j}) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Los coeficientes se determinan a partir de las condiciones de borde. Si $|z_{\pm}| < 1$, entonces la función de onda ψ_j^B decrete mientras ψ_j^A a lo largo de la cadena. En este caso $\psi_0^B = \psi_{N+1}^A = 0$ puede satisfacerse en el limite de $N \rightarrow \infty$ donde las condiciones de borde $\psi_0^A = \psi_{N+1}^B = 0$ correspondende a

$$\begin{aligned} B_+ z_+^{-N-1} &= -B_- z_-^{-N-1} \\ A_+ &= -A_- \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Igualando ambas relaciones se tiene

$$\begin{aligned} \psi_j^B &= \frac{1}{Z} (z_+^{N+1-j} + z_-^{N+1-j}) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \psi_j^A &= (z_+^j + A_- z_-^j) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

y el factor de Normalización Z se obtiene imponiendo la condición $Z^2 = \sum_{j=1}^N |z_+^{2j}| + |z_-^{2j}| - 2\text{Re}((z_+ z_+^*)^j)$. Estos MZM de majorana presentan un decaimiento exponencialmente en su energía $E_M \propto e^{-N/\xi_M}$. la Hibridación de estos Estados de borde de Majorana pueden describir un hamiltoniano efectivo.

$$H_{eff} = \frac{i}{2} E_M \gamma_A \gamma_B = E_M \left(n_M - \frac{1}{2} \right) \quad (\text{C.19})$$

donde n_M es el operador número cuyo significado físico es de gran importancia en la aplicación de la computación cuántica úes sus valores propios se definen en base de la presencia o no de un fermión deslocalizado en los bordes de un *SC de onda p* que puede implementarse como la señal física asociada a un estado cuántico el cual definir como un q-bit de baja decoherencia.

Anexos D

Teoria de Ginzburg-Landau

La teoría propuesta por V. Ginzburg y L. Landau corresponde a una teoría capaz de predecir aspectos importantes de transiciones de fase de segundo orden. De igual forma prueba ser útil en sistemas con un parámetro de orden no homogéneo. La idea básica es asumir que la energía libre puede ser expandida como potencia de un parámetro de orden, ϕ , en proximidad a la temperatura crítica T_c . Dicho parámetro ϕ se asume igual a cero en la fase normal $T > T_c$. Alrededor de la temperatura crítica el parámetro de orden es pequeño, y la energía libre puede expandirse como la siguiente suma de potencias.

$$F = F_n + \lambda\phi + \alpha\phi^2 + \gamma\phi^3 + \frac{\beta}{2}\phi^4 \quad (\text{D.1})$$

El requerimiento de $\phi = 0$ debe ser un mínimo de F en la fase normal implica que $\lambda = 0$. Ginzburg y Landau asocian el parámetro de orden con una pseudo función de onda, $\phi = \psi(\mathbf{r})$, describiendo la densidad de electrones $n_s = |\psi(\mathbf{r})|^2$. Y dado la naturaleza compleja de $\psi(\mathbf{r})$ a su vez que F debe ser real, se tiene que es posible descartar el término de ϕ^3 . En la presencia de un potencial vectorial \mathbf{A} y un fenómeno con energía cinética, la densidad de la energía libre se escribe como

$$f(\mathbf{r}) = f_n + \alpha|\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi(\mathbf{r})|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| \left(-i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c}\mathbf{A} \right) \psi(\mathbf{r}) \right|^2 \quad (\text{D.2})$$

I.1 Vórtices cuánticos

Un vórtice cuántico se caracteriza por ser una región no homogénea en un fluido superconductor, acompañada por la presencia de un momentum angular. En el núcleo del vórtice la densidad de electrones superconductores, n_s , y consecuentemente el parámetro de orden tienden a cero. Para un vórtice con simetría rotacional $|\psi(\mathbf{r})|^2$ depende únicamente de r . La aproximación básica de este vórtice se debe a

$$\psi(\mathbf{r}) = h(r)e^{iS(r)} \quad (\text{D.3})$$

Para $h(r)$ una función real. Sí $\psi(\mathbf{r})$ se asume como una función propia del operador momentum angular, $L_z = i\hbar\partial_\theta$ se tiene que $S(\mathbf{r}) = n\theta$, para θ un ángulo arbitrario en coordenadas polares, y $n \in \mathbb{Z}$ dado el requerimiento de $\psi(r, \theta + 2\pi) = \psi(r, \theta)$. El entero n es llamado vorticidad. En el caso de un material superconductor, es posible no considerar la parte de la energía cinética de la energía libre (1.63). En base a esto para que la expansión de potencias tenga un mínimo finito, debe asumirse que $\beta > 0$. Esto significa que si $\alpha > 0$, entonces f presenta un mínimo cuando $|\psi|^2 = 0$ (Fase Normal). Por otro lado, $\alpha < 0$ (Fase superconductor) con un mínimo en $|\psi_\infty|^2 = -\frac{\alpha}{\beta}$. Una transición de fases ocurre formalmente ocurre para $\alpha \propto (T - T_c)$ y β constante, lo cual, implica que la fase normal ocurre para $T > T_c$. En el caso, de un sistema libre de un campo $\mathbf{A} = 0$, esta vez manteniendo el término de energía cinética. Las ecuaciones dinámicas están determinadas a partir del problema variacional $\delta F/\delta\psi^* = 0$.

$$\frac{\delta}{\delta\psi^*} \int f(\psi\psi^* \cdot \nabla\psi, \nabla\psi^*) dV = 0$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2\psi - \alpha\psi - \beta|\psi|^2\psi = 0 \quad (\text{D.4})$$

se refiere a una de las ecuaciones de Ginzburg-Landau. Asumiendo que $T < T_c$ y redefiniendo $\alpha \rightarrow -\alpha > 0$, al reescalar la función de onda con su valor de equilibrio, $\psi_\infty = \sqrt{\alpha/\beta}$. E introduciendo una variable a conocida como la longitud de coherencia de Ginzburg-Landau como escala de la longitud $\widehat{\psi} \equiv \frac{\psi}{\psi_\infty}$ y $\rho \equiv \frac{\mathbf{r}}{a}$ con

$$a \equiv \frac{\hbar}{\sqrt{2m^*\alpha}} \propto (T_c - T)^{-1/2} \quad (\text{D.5})$$

Se tiene que (1.65) tiene la forma $\nabla^2\widehat{\psi} + (1 - |\widehat{\psi}|^2)\widehat{\psi} = 0$ (1.69) Al resolver esta última ecuación con las condiciones de borde $|\widehat{\psi}(\rho = 0)| = 0$ y $|\widehat{\psi}(\rho = \infty)| = 1$, reemplazando la pseudo función de onda (1.64), se tiene que dichas soluciones corresponden a la presencia de un vórtice en $\rho = 0$.

Anexos E

Identidades Hexagonal y Pentagonal

Las matrices F y R que permiten definir una operación de trenzado de 2 o más anyones se encuentran acompañadas de unas reglas de fusión que satisfacen a su vez unas ecuaciones simples de consistencia (4.29), estas condiciones restringen dramáticamente la multiplicidad de los posibles modelos de forma que para cumplirse las mismas reglas de fusión tan solo se necesita de un número finito y relativamente pequeño de maneras distintas. La cantidad reducida hace posible imaginarlas bajo una interpretación geométrica de las mismas, es por ello que resulta sencillo determinar las diferentes posibilidades de como hacer un proceso de Braiding en base a lo que se conoce como identidades pentagonal y Hexagonal.

Considerese el proceso de fusión de 4 anyones (*ver fig.E.1*) . La interpretación de dicha representación geometría es la siguiente:

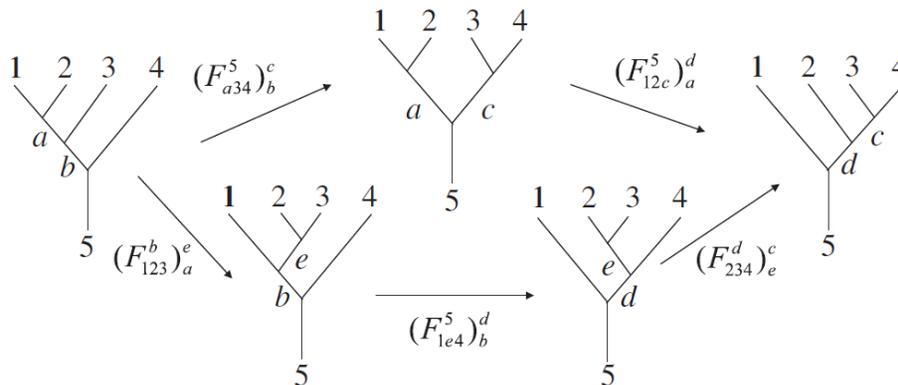


Figura E.1: Representación geométrica de la identidad pentagonal tomando en cuenta todos las posibles operaciones de fusión

1. Se parte del diagrama más a la izquierda con un cierto orden de fusión.
2. Se asigna como un resultado específico la fusión entre, a y b , que tienen un canal de fusión total fijo, 5 .
3. Empleando los dos movimientos F representados en la ruta superior es posible revertir completamente el orden de la fusión y transformar el diagrama de fusión inicial de la izquierda al diagrama de la derecha.
4. Es posible conectar el diagrama de la izquierda y derecha siguiendo una ruta completamente diferente que incluye tres movimientos F , lo cual se puede observar en el camino inferior de la figura (E.1)

Lo anterior resulta en un axioma puesto que estos dos procesos deben resultar equivalentes, tanto el descrito en el camino superior como inferior. Dicho de otra manera, si hay una interpretación única de los estados de fusión por los diagramas de fusión, entonces las transformaciones distintas con movimientos debido a aplicaciones de matrices F que conectan los diagramas más a la izquierda y más a la derecha deben ser idénticas. Imponer este axioma da lugar a la identidad pentagonal

$$(F_{12c}^5)_a^d (F_{a34}^5)_b^c = \sum_e (F_{234}^d)_e^c (F_{1e4}^5)_b^d (F_{123}^b)_a^e \tag{E.1}$$

Esta ecuación precede una relación entre los elementos de las posibles matrices F de determinado modelos. A partir de la sumatoria sobre e se permite tomar en cuenta todos los tipos posibles de partículas que pueden verse involucradas en los diagramas de fusión.

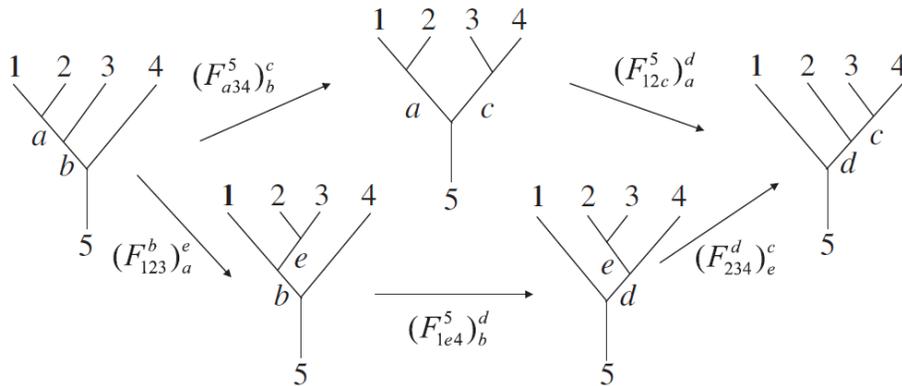


Figura E.2: Representación geométrica de la identidad hexagonal tomando en cuenta todos las posibles operaciones de fusión como de braiding

Una nueva identidad puede ser obtenida mediante el empleo de procesos de braiding o trenzado adicionales (ver fig. E.2). Considerese 3 aniones con un canal de fusión fijo 4, a través del canal de fusión a , este diagrama se encuentra ubicado a la izquierda de la figura y será el punto de partida. Mediante la aplicación alternada de matrices F y R es posible intercambiar el orden de fusión inicial de dos maneras distintas en forma similar al descrito en la figura (E.1). Al demandar que tanto el camino superior como inferior sean equivalentes da lugar a la identidad hexagonal

$$\sum_b (F_{231}^4)_b^c R_{1B}^4 (F_{123}^4)_a^b = R_{13}^c (F_{213}^4)_a^c R_{12}^a \quad (\text{E.2})$$

Finalmente, se tiene en cuenta que las identidades hexagonal y pentagonal se vuelven triviales para los modelos abelianos, cuya fase estadística puede ser arbitraria. Los modelos aniónicos no abelianos están completamente determinados de forma consistente por las identidades (E.1) y (E.2) sin la necesidad de otras condiciones. Para un número dado de tipos de aniones con reglas de fusión fijas, las soluciones de estas dos ecuaciones polinómicas dan un conjunto discreto posiblemente vacío de matrices F y R . Esto se asemeja al carácter discreto de las soluciones de ecuaciones cuadráticas. La discreción en las soluciones es conocida como rigidez de Ocneanu está de acuerdo con la naturaleza discreta de los modelos topológicos. Por lo tanto, los modelos topológicos no están conectados continuamente entre sí, lo que proporciona gran parte de su resistencia contra perturbaciones erróneas.[114]

Bibliografía

- [1] Frank Wilczek. Majorana returns. *Nature Physics*, 5 614,-618. 2009.
- [2] A. Stern. Non-Abelian states of matter. *Nature*, 464:187, 2010.
- [3] C. Nayak, S. H. Simon, A. Stern, M. Freedman, and S. Das Sarma. Non-Abelian anyons and topological quantum computation. *Rev. Mod. Phys.*, 80:1083, 2008.
- [4] G. Moore and N. Read. Nonabelions in the fractional quantum hall effect *Nucl. Phys. B*, 360:362, 1991.
- [5] N. B. Kopnin and M. M. Salomaa. Mutual friction in superfluid 3He: Effects of bound states in the vortex core *Phys. Rev. B*, 44:9667, 1991.
- [6] N. Read and D. Green. Paired states of fermions in two dimensions with breaking of parity and time-reversal symmetries and the fractional quantum Hall effect *Phys. Rev. B*, 61:10267, 2000.
- [7] K. Sengupta, I. Zutic, H. J. Kwon, V. M. Yakovenko, and S. Das Sarma. Midgap edge states and pairing symmetry of quasi-one-dimensional organic superconductors *Phys. Rev. B*, 63:144531, 2001.
- [8] D. A. Ivanov. Non-Abelian Statistics of Half-Quantum Vortices in p-Wave Superconductors *Phys. Rev. Lett.*, 86:268, 2001.
- [9] C. Zhang, S. Tewari, R. M. Lutchyn, and S. Das Sarma. $p_x + ip_y$ Superfluid from s-Wave Interactions of Fermionic Cold Atoms *Phys. Rev. Lett.*, 101:160401, 2008.
- [10] Y. E. Kraus, A. Auerbach, H. A. Fertig, and S. H. Simon. Majorana fermions of a two-dimensional $p_x + ip_y$ superconductor *Phys. Rev. B*, 79:134515, 2009.
- [11] M. Wimmer, A. R. Akhmerov, M. V. Medvedyeva, J. Tworzydly, and C. W. J. Beenakker. Majorana Bound States without Vortices in Topological Superconductors with Electrostatic Defects *Phys. Rev. Lett.*, 105:046803, 2010.

-
- [12] M. Sato, Y. Takahashi, and S. Fujimoto. Non-Abelian Topological Order in s-Wave Super fluids of Ultracold Fermionic Atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 103:020401, 2009.
- [13] M. Sato, Y. Takahashi, and S. Fujimoto. Non-Abelian topological orders and Majorana fermions in spin-singlet superconductors. *Phys. Rev. B*, 82:134521, 2010.
- [14] S. Das Sarma, C. Nayak, and S. Tewari. Proposal to stabilize and detect half-quantum vortices in strontium ruthenate thin films: Non-Abelian braiding statistics of vortices in a $px + ipy$ superconductor *Phys. Rev. B*, 73:220502(R), 2006.
- [15] M. Z. Hasan and C. L. Kane. Colloquium: Topological insulators *Rev. Mod. Phys.*, 82:3045, 2010.
- [16] L. Fu and C. L. Kane. Superconducting Proximity Effect and Majorana Fermions at the Surface of a Topological Insulator. *Phys. Rev. Lett.*, 100:096407, 2008.
- [17] P. G. de Gennes. Boundary Effects in Superconductors. *Rev. Mod. Phys.*, 36:216, 1964.
- [18] Y.-J. Doh, J. A. van Dam, A. L. Roest, E. P. A. M. Bakkers, L. P. Kouwenhoven, and S. De Franceschi. Tunable supercurrent through semiconductor nanowires. *Science*, 309:272, 2005.
- [19] J. A. van Dam, Yu. V. Nazarov, E. P. A. M. Bakkers, S. De Franceschi, and L. P. Kouwenhoven. Josephson π -junction in nanowire quantum dots *Nature*, 442:667, 2006.
- [20] J. D. Sau, R. M. Lutchyn, S. Tewari, and S. Das Sarma. Generic New Platform for Topological Quantum Computation Using Semiconductor Heterostructures. *Phys. Rev. Lett.*, 104:040502, 2010.
- [21] J. Alicea. Phys. Majorana fermions in a tunable semiconductor device *Rev. B*, 81:125318, 2010.
- [22] A. R. Akhmerov, J. P. Dahlhaus, F. Hassler, M. Wimmer, and C. W. J. Beenakker. Quantized Conductance at the Majorana Phase Transition in a Disordered Superconducting Wire *Phys. Rev. Lett.*, 106:057001, 2011.
- [23] Y. Oreg, G. Refael, and F. von Oppen. Helical Liquids and Majorana Bound States in Quantum Wires. *Phys. Rev. Lett.*, 105:177002, 2010.

- [24] R. M. Lutchyn, J. D. Sau, and S. Das Sarma. Majorana Fermions and a Topological Phase Transition in Semiconductor-Superconductor Heterostructures. *Phys. Rev. Lett.*, 105:077001, 2010.
- [25] P. Hosur, P. Ghaemi, R. S. K. Mong, and A. Vishwanath. Majorana Modes at the Ends of Superconductor Vortices in Doped Topological Insulators *Phys. Rev. Lett.*, 107:097001, 2011.
- [26] J. Nilsson, A. R. Akhmerov, and C. W. J. Beenakker. Splitting of a Cooper pair by a pair of Majorana bound states. *Phys. Rev. Lett.*, 101:120403, 2008.
- [27] L. Fu and C. L. Kane. Josephson current and noise at a superconductor/quantum-spin-Hall-insulator/superconductor junction. *Phys. Rev. B*, 79:161408(R), 2009.
- [28] J. Linder, Y. Tanaka, T. Yokoyama, A. Sudbø, and N. Nagaosa. Unconventional Superconductivity on a Topological Insulator. *Phys. Rev. Lett.*, 104:067001, 2010.
- [29] V. Gurarie, L. Radzihovsky, and A.V. Andreev. Quantum phase transitions across p-wave Feshbach resonance. *Phys. Rev. Lett.*, 94:230403, 2005.
- [30] S. Tewari, S. Das Sarma, C. Nayak, C. Zhang, and P. Zoller. Quantum Computation using Vortices and Majorana Zero Modes of a $px + ipy$ Superfluid of Fermionic Cold Atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 98:010506, 2007.
- [31] J. D. Sau and S. Tewari. Topological invariants for spin-orbit coupled superconductor nanowires. *arXiv:1111.5622*, 2011.
- [32] J. Klinovaja, S. Gangadharaiah, and D. Loss. Electric-field-induced Majorana Fermions in Armchair Carbon Nanotubes. *Phys. Rev. Lett.*, 108:196804, 2012.
- [33] R. Egger and K. Flensberg. Majorana fermions in superconducting nanowires without spin-orbit coupling. *Phys. Rev. B*, 85:235462, 2012.
- [34] J. D. Sau and S. Das Sarma. Realizing a robust practical Majorana chain in a quantum-dot-superconductor linear array. *Nature Communications*, 3:964, 2012.
- [35] V. Mourik, K. Zuo, S. M. Frolov, S. R. Plissard, E. P. A. M. Bakkers, and L. P. Kouwenhoven. Signatures of Majorana fermions in hybrid superconductor-semiconductor nanowire devices. *Science*, 336:1003, 2012.

- [36] J. R. Williams, A. J. Bestwick, P. Gallagher, Seung Sae Hong, Y. Cui, Andrew S. Bleich, J. G. Analytis, I. R. Fisher, and D. Goldhaber-Gordon. Unconventional Josephson Effect in Hybrid Superconductor-Topological Insulator Devices. *Phys. Rev. Lett.*, 109:056803, 2012.
- [37] L. P. Rokhinson, X. Liu, and J. K. Furdyna. Observation of the fractional ac Josephson effect: the signature of Majorana particles. *arXiv:1204.4212*, 2012.
- [38] M. T. Deng, C. L. Yu, G. Y. Huang, M. Larsson, P. Caroff, and H. Q. Xu. Observation of Majorana Fermions in a Nb-InSb Nanowire-Nb Hybrid Quantum Device. *arXiv:1204.4130*, 2012.
- [39] A. Das, Y. Ronen, Y. Most, Y. Oreg, M. Heiblum, and H. Shtrikman. Evidence of Majorana fermions in an Al - InAs nanowire topological superconductor. *arXiv:1205.7073*, 2012.
- [40] J. Alicea. New directions in the pursuit of Majorana fermions in solid state systems. *Reports on Progress in Physics*, 75:076501, 2012.
- [41] C. W. J. Beenakker. Search for Majorana fermions in superconductors. *arXiv:1112.1950*, 2011.
- [42] A. Y. Kitaev. Unpaired Majorana fermions in quantum wires. *Physics-Uspekhi*, 44:131, 2001.
- [43] [A. Yu. Kitaev. Fault-tolerant quantum computation by anyons. *Ann. Phys.*, 303:2, 2003.
- [44] W. Bishara, P. Bonderson, C. Nayak, K. Shtengel, and J. K. Slingerland. Interferometric signature of non-Abelian anyons. *Phys. Rev. B*, 80:155303, 2009.
- [45] F. Hassler, A. R. Akhmerov, C.-Y. Hou, and C. W. J. Beenakker. Anyonic interferometry without anyons: How a flux qubit can read out a topological qubit. *New Journal of Physics*, 12:125002, 2010.
- [46] J. Alicea, Y. Oreg, G. Refael, F. von Oppen, and M. P. A. Fisher. Non-Abelian statistics and topological quantum information processing in 1D wire networks. *Nature Physics*, 7:412, 2011.
- [47] S. Bravyi. Phys. Universal quantum computation with the $\nu = 5/2$ fractional quantum Hall state. *Rev. A*, 73:042313, 2006.
- [48] L. S. Georgiev. Topologically protected gates for quantum computation with non-Abelian anyons in the Pfaffian quantum Hall state. *Phys. Rev. B*, 74:235112, 2006.

- [49] J. D. Sau, S. Tewari, and S. Das Sarma. Universal quantum computation in a semiconductor quantum wire network. *Phys. Rev. A*, 82:052322, 2010.
- [50] L. Jiang, C. L. Kane, and J. Preskill. Interface between Topological and Superconducting Qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 106:130504, 2011.
- [51] P. Bonderson and R. M. Lutchyn. Topological Quantum Buses: Coherent Quantum Information Transfer between Topological and Conventional Qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 106:130505, 2011.
- [52] M. Leijnse and K. Flensberg. Quantum Information Transfer between Topological and Spin Qubit Systems. *Phys. Rev. Lett.*, 107:210502, 2011.
- [53] M. Leijnse and K. Flensberg. Scheme to measure Majorana fermion lifetimes using a quantum dot. *Phys. Rev. B*, 84:140501(R), 2011.
- [54] J. C. Budich, S. Walter, and B. Trauzettel. Failure of protection of Majorana based qubits against decoherence. *Phys. Rev. B*, 85:121405(R), 2012.
- [55] D. Rainis and D. Loss. Majorana qubit decoherence by quasiparticle poisoning. *Phys. Rev. B*, 85:174533, 2012.
- [56] J. Männik and J. E. Lukens. Effect of Measurement on the Periodicity of the Coulomb Staircase of a Superconducting Box. *Phys. Rev. Lett.*, 92:057004, 2004.
- [57] J. Aumentado, M. W. Keller, J. M. Martinis, and M. H. Devoret. Nonequilibrium Quasiparticles and $2e$ Periodicity in Single-Cooper-Pair Transistors *Phys. Rev. Lett.*, 92:066802, 2004.
- [58] S. Ryu, A. Schnyder, A. Furusaki, and A. Ludwig. Topological insulators and superconductors: tenfold way and dimensional hierarchy. *New Journal of Physics*, 12:065010, 2010.
- [59] I. C. Fulga, F. Hassler, A. R. Akhmerov, and C. W. J. Beenakker. Scattering formula for the topological quantum number of a disordered multimode wire. *Phys. Rev. B*, 83:155429, 2011.
- [60] A. C. Potter and P. A. Lee. Multichannel Generalization of Kitaev's Majorana End States and a Practical Route to Realize Them in Thin Films. *Phys. Rev. Lett.*, 105:227003, 2011.
- [61] T. D. Stanescu, R. M. Lutchyn, and S. Das Sarma. Majorana fermions in semiconductor nanowires. *Phys. Rev. B*, 84:144522, 2011.

- [62] A. C. Potter and P. A. Lee. Engineering a $p + ip$ superconductor: Comparison of topological insulator and Rashba spin-orbit-coupled materials Phys. Rev. B, 83:184520, 2011.
- [63] J. D. Sau, S. Tewari, and S. Das Sarma. Experimental and materials considerations for the topological superconducting state in electron- and hole-doped semiconductors: Searching for non-Abelian Majorana modes in 1D nanowires and 2D heterostructures. Phys. Rev. B, 85:064512, 2012.
- [64] Ashaks Das, Lectures On Quantum Field Theory Phys. University Of Rochester, USA World Scientific, 2008.
- [65] L. I. Schiff, Quantum Mechanics, McGraw-Hill, New York, 1968.
- [66] J. D. Bjorken Y S. Drell, Relativistic Quantum Mechanics, McGraw-Hill, New York, 1964.
- [67] C. Itzykson Y J-B. Zuber, Quantum Field Theory, McGraw-Hill, New York, 1980.
- [68] A. Das, Lectures on Quantum Mechanics, Hindustan Publishing, New Delhi, India, 2003.
- [69] S. R. Elliot y M. Franz, Colloquium: Majorana Fermions in Nuclear, Particle and Solid State Physics, arXiv:1403.4976V2, 1 Dec 2014.
- [70] L. Bascones, B. Valenzuela and M.J. Calderón, Superconductividad (ICMM-CSIC) Divulgacion Supercondcutividad ,Fases Topológicas (2021, Septiembre 1), [Online], <https://wp.icmm.csic.es/superconductividad/materiales-superconductores/superconductores-topologicos>.
- [71] M. Eimmer, S. N. Perge. Slide: Experiments on Majorana Fermions In 1D Topological Superconductors Sergey Frolov, [Online], <https://pitt.hosted.panopto.com/Panopto/Pages/Viewer.aspx?id=78661e9c-959e-4a50-b71b-34c7e5f5ae6c>
- [72] J. Alicea, «New directions in the pursuit of Majorana Fermions in solid states systems,» Reports on progress in Physics, vol. 75, n° 7, 2012.
- [73] M. Roy, Rutgers School of arts and Sciences ; Physics Astronomy, 7 Mayo 2015. [En línea]. Available:<http://www.physics.rutgers.edu/~eandrei/chengdu/reading/tight-binding.pdf>. [Último acceso: 20 Agosto 2021].

- [74] M. T. Dove, «Oxford Master Series in condensed matter physics,» de Structure and Dynamics: an atomic view of materials, Reino Unido, Oxford University press, 2002, p. 110.
- [75] J. Sólyom, «Band Structure in the Empty Lattice,» de Fundamentals of the physic of solids VOL 2, Berlín, Springer-Verlag, 2009, p.112.
- [76] C. Kittel, Introduction to Solid State physics, Berkeley: John Wile Sons, Inc, 2005.
- [77] J. Sau y S. Tewari, «From majorana fermions to topological quantum computation in semiconductor/superconductor heterostrcutures,» , arXiv:210503769v1, 2021.
- [78] J. Alicea, Y. Oreg, G. Refael, V. F. Oppen y M. P. Fisher, «Non abelian statistics and topological quantum information processing in 1D wire etworks,» nature physics, vol. 7, pp. 412-417, 2010.
- [79] E. Majorana (1932). Il Nuovo Cimento 9 (2): 4350. doi:10.1007/BF02960953.
- [80] L. Borsten y M. J. Duff, «Majorana Fermions in Particle Physics, Solid State and Quantum Infomation,» The Subnuclear Series: The future of our Physics Including New Frontiers, vol. 53, pp. 77-121, 2017.
- [81] Wong, L. M., Law, K. T. (2011). Realizing DIII Class Topological Superconductors using wave Superconductors. arXiv:1110.4575.
- [82] X. L. Qi y C. S. Zhang, «Topological Insulator and superconductors,» Reviews of Modern Physics, vol. 4, n° 83, pp. 1057-1110, 2011.
- [83] M. Franz y L. Molekamp, Topological Insulators, vol. 6, M. Cohen, Ed., Oxford: Elsevier, 2013.
- [84] A. Cook y Franz. M., «Majorana Fermions in Proximity Coupled Topological Insulator nanowire,» Physical Review B, vol. 84, n° 20, 2011.
- [85] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin, Solid State Physics, Holt Saunders International edition
- [86] Bernevig, B. (2013). Topological Insulators and Topological Superconductors. Princeton: Princeton University p.p193-199 <https://doi.org/10.1515/9781400846733>
- [87] Huang, H., Xu, Y., Wang, J., Duan, W. (2016). Emerging topological states in quasi-two-dimensional materials. Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Molecular Science, 7(4), e1296. doi:10.1002/wcms.1296

- [88] P. Ghosh, J. Sau, S. Tewari, and S. Das Sarma, Phys. Rev. B 82, 184525 (2010).
- [89] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, and M. den Nijs. Quantized hall conductance in a two-dimensional periodic potential. Phys. Rev. Lett., 49:405-408, Aug 1982
- [90] Shinsei Ryu et al 2010 New J. Phys. 12 065010. arXiv:0912.2157
- [91] Nieuwenhuizen, L. (2015). Kitaev model on the honeycomb and diamond lattices Majorana hopping and vortex excitations in 2D and 3D[Tesis de maestría, University of Amsterdam]. <https://scripties.uba.uva.nl/search?id=608064>
- [92] Schnyder, A. P., Ryu, S., Furusaki, A., Ludwig, A. W. W. (2008). Classification of topological insulators and superconductors in three spatial dimensions. Physical Review B, 78(19). doi:10.1103/physrevb.78.195125
- [93] A. Kitaev. Periodic table for topological insulators and superconductors. In AIP conference proceedings, volume 1134, pages 22-30. American Institute of Physics, 2009.
- [94] R. Jackiw and C. Rebbi,(1976) Solitons with fermion number 1/2, Phys. Rev. D 13, 3398.
- [95] R. Jackiw and J. R. Schrieffer,(1981) Solitons with fermion number 1/2 in condensed matter and relativistic field theories Nucl. Phys. B 190, 253 (1981).
- [96] Loïc Herviou. Topological Phases and Majorana Fermions. Superconductivity [cond-mat.supr-con]. Université Paris-Saclay, 2017. English. NNT : 2017SACLX036. tel-01651575
- [97] Bernevig, B. (2013). Topological Insulators and Topological Superconductors. Princeton: Princeton University Press. <https://doi.org/10.1515/9781400846733>
- [98] Røising, Henrik Schou. Topological superconductivity and majorana fermions. MS thesis. 2016.
- [99] Stanescu, Tudor D. Introduction to topological quantum matter quantum computation. CRC Press, 2016.
- [100] Marra, Pasquale. Majorana nanowires for topological quantum computation: A tutorial., Journal of Applied Physics 132.23 (2022): 231101. ,arXiv preprint arXiv:2206.14828 (2022).
- [101] Leijnse, Martin, and Karsten Flensberg. Introduction to topological superconductivity and Majorana fermions. Semiconductor Science and Technology 27.12 (2012): 124003.

- [102] von Oppen, Felix, Yang Peng, and Falko Pientka. Topological superconducting phases in one dimension. *Topological Aspects of Condensed Matter Physics* (2015): 387-447.
- [103] Nadj-Perge, Stevan, et al. Observation of Majorana fermions in ferromagnetic atomic chains on a superconductor. *Science* 346.6209 (2014): 602-607.
- [104] Heiselberg, Peder. Shapiro steps in Josephson Junctions. Niels Bohr Institute, University of Copenhagen (2013).
- [105] Sau, Jay D., et al. Non-Abelian quantum order in spin-orbit-coupled semiconductors: Search for topological Majorana particles in solid-state systems. *Physical Review B* 82.21 (2010): 214509.
- [106] Mourik, Vincent, et al. "Signatures of Majorana fermions in hybrid superconductor-semiconductor nanowire devices." *Science* 336.6084 (2012): 1003-1007.
- [107] Overney R.M Nue UniQue. Scanning Tunneling Microscopy and Spectroscopy *https://depts.washington.edu/nanolab/NUeUNIQue/Background/AFM.pdf* (2019)
- [108] Jiang, Liang, et al. Unconventional Josephson signatures of Majorana bound states. *Physical review letters* 107.23 (2011): 236401.
- [109] Lee, Shu-Ping. Signatures of Topological Superconductors. California Institute of Technology, 2015.
- [110] Rokhinson, Leonid P., Xinyu Liu, and Jacek K. Furdyna. The fractional ac Josephson effect in a semiconductor/superconductor nanowire as a signature of Majorana particles. *Nature Physics* 8.11 (2012): 795-799.
- [111] Beenakker, C. W. J. Quantum transport in semiconductor-superconductor microjunctions. *Physical Review B* 46.19 (1992): 12841.
- [112] Prada, Elsa, et al. From Andreev to Majorana bound states in hybrid superconductor/semiconductor nanowires. *Nature Reviews Physics* 2.10 (2020): 575-594.
- [113] Fu, Liang, and Charles L. Kane. Josephson current and noise at a superconductor/quantum-spin-Hall-insulator/superconductor junction. *Physical Review B* 79.16 (2009): 161408.
- [114] Pachos, Jiannis K. Introduction to topological quantum computation. Cambridge University Press, 2012.

- [115] Narozniak, Marek, et al. Quantum gates for Majoranas zero modes in topological superconductors in one-dimensional geometry. *Physical Review B* 103.20 (2021): 205429.