

Desarrollo de la alfabetización matemática mediante la implementación de escenarios de investigación, para contribuir a la formación de ciudadanos críticos



Ana Cristina Agredo Franco

Juan Camilo Chaves Muñetón

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN - CAUCA

2024

Desarrollo de la alfabetización matemática mediante la implementación de escenarios de investigación, para contribuir a la formación de ciudadanos críticos



Requisito parcial para optar al título de Licenciada(o) en Matemáticas

Ana Cristina Agredo Franco

Juan Camilo Chaves Muñetón

Director de Práctica Pedagógica:

Dr. Aldo Iván Parra Sánchez

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

POPAYÁN - CAUCA

2024

Nota de Aceptación

El Presente trabajo fue aprobado por:

Dra. Gabriela Inés Arbeláez Rojas
Coordinadora del programa de Licenciatura en Matemáticas

Dr. Aldo Iván Parra Sánchez
Director de Práctica Pedagógica

Gabriel Mancera Ortiz
Evaluador.

Popayán, 05 de junio de 2024

Dedicatoria

A mis padres, por su amor y apoyo incondicional.

Por inculcarme siempre la disciplina, la responsabilidad y el ferviente deseo de luchar por mis sueños. Gracias por ser mi inspiración y motivación constante para no desfallecer ante los obstáculos y alcanzar mis metas.

A mi hermana, por brindarme su cariño y apoyo durante todo este proceso.

A mis amigos, por ser un soporte y animarme constantemente.

A todos aquellos que me han brindado su ayuda.

Ana Cristina Agredo Franco

A mi familia, por toda su fe y confianza en que este logro se viera alcanzado.

A mi madre, cuyo sacrificio y amor sin igual han sido esa luz que guía mi andar.

A mi padre, su ejemplo de constancia y dedicación me han enseñado el valor del esfuerzo y la perseverancia.

A mi novia, por su amor, compañía y constante apoyo en este largo camino.

A mis amigos, por hacer del tercer tiempo un encuentro de risas y anécdotas para nunca olvidar.

Juan Camilo Chaves Muñetón

Agradecimientos

De Ana:

Primeramente, doy gracias a Dios, por brindarme la oportunidad de vivir esta experiencia, marcada por grandes aprendizajes que han enriquecido nuestra formación.

A nuestro director de práctica pedagógica, el profesor Aldo Iván Parra Sánchez, le agradezco por guiarnos a lo largo de este recorrido lleno de desafíos y oportunidades. Sus aportes, cuestionamientos y consejos fueron fundamentales para impulsarnos y orientarnos en esta travesía, motivándonos cada día a confiar en nosotros mismos.

A la Institución Educativa Alejandro de Humboldt, especialmente a los estudiantes del curso 7-1 y 7-3, quienes con su colaboración, ideas y energía enriquecieron nuestra experiencia.

También quiero agradecer a nuestro evaluador, el profesor Gabriel Mancera Ortiz, por su disposición para brindarnos apreciaciones y orientaciones fundamentales para esta investigación.

Al profesor Ole Skovsmose, cuyas ideas fundamentan nuestra investigación. Agradecemos su generosidad al atender nuestras inquietudes.

Por último, quiero agradecer a la Universidad del Cauca, nuestra alma máter; al cuerpo docente y a nuestros compañeros por contribuir significativamente a nuestra formación como educadores matemáticos y por ser un apoyo incondicional y constante a lo largo de este camino.

De Camilo:

En primer lugar, quiero agradecer a Cristina por su infinita paciencia, por todo su esfuerzo y dedicación para llevar a término este proceso. Esta práctica pedagógica no hubiera sido igual de enriquecedora sin sus ideas y contribuciones.

Estoy profundamente agradecido con nuestro director de práctica pedagógica, el profesor Aldo Parra. Su orientación experta, sus conocimientos y consejos, fueron decisivos para esos momentos de incertidumbre. Gracias por esa motivación y estímulo constante a seguir creciendo académicamente.

Al evaluador de esta práctica pedagógica, el profesor Gabriel Mancera, gracias por su tiempo y valiosos comentarios, no hay duda de que sus sugerencias han contribuido significativamente al enriquecimiento de este trabajo.

Gracias a aquellos profesores y profesoras de la Universidad del Cauca que contribuyeron en mi formación académica, estoy seguro que su enseñanza influyó positivamente en el desarrollo de este trabajo de grado.

Contenido

Resumen	11
1. Introducción	12
2. CONTEXTO	14
2.1. Institución Educativa	14
2.2. Contexto del Aula	15
3. PROBLEMÁTICA	19
3.1. PLANTEAMIENTO Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	19
3.2. Justificación	21
4. OBJETIVOS	23
4.1. OBJETIVO GENERAL	23
4.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS	23
5. MARCO REFERENCIAL	24
5.1. Marco de Antecedentes	24
5.2. Marco Teórico Conceptual	29
5.2.1. Educación Matemática Crítica	29
5.2.2. Crítica y Pensamiento Crítico	30
5.2.3. Alfabetización Matemática	31
5.2.4. Ambientes de Aprendizaje y Escenarios de Investigación	34
5.2.4.1. Ambientes de Aprendizaje.	34
5.2.4.2. Escenarios de Investigación.	36
5.2.5. Categorías de Análisis	37
5.2.5.1. Características del Conocer Reflexivo.	38
5.2.5.2. Actos Dialógicos.	40

6. DISEÑO METODOLÓGICO	44
6.1. Técnicas e Instrumentos de la Estrategia Analítica	48
7. Presentación y Discusión de los Datos	57
7.1. Desafiando el Enfoque Tradicional: un Análisis Desde los Actos Dialógicos	57
7.1.1. <i>Cuadrado de Cuadrados (Primer AA Tipo 2)</i>	57
7.1.2. <i>Asalto al Castillo (Segundo AA Tipo 2)</i>	68
7.1.3. <i>El Problema de Josefo (AA Tipo 4)</i>	80
7.1.4. <i>Reflexionando Desde la Investigación Crítica</i>	96
7.2. Explorando Resistencias en los AA Tipo 6 y el Surgimiento de las Características del Conocer Reflexivo	97
7.2.1. <i>¿Qué Pasaría si la Marihuana Fuera Legal? Examinando las Características del Conocer Reflexivo en 7-1</i>	97
7.2.2. <i>El Robo en el Salón de Clase, Examinando las Características del Conocer Reflexivo en 7-3.</i>	106
7.2.3. <i>Resistencias en los AA Tipo 6</i>	111
7.3. Sobre la Evaluación	122
7.4. ¿Qué Pasó con el Desarrollo de la Alfabetización Matemática?	126
8. Conclusiones y Consideraciones	136
9. Referencias	146
10. Anexos	152

Tabla de figuras

Figura 1: Distribución por edad y estrato socioeconómico de los estudiantes del curso 7-1.	16
Figura 2: Distribución por edad y estrato socioeconómico de los estudiantes del curso 7-3.	17
Figura 3: Dinámica de trabajo en la clase de matemáticas.	17
Figura 4: Ambientes de aprendizaje	35
Figura 5: Modelo de la investigación crítica.	45
Figura 6: Fases de la metodología.	48
Figura 7: Taller de cartografía con los estudiantes de 7-1, ubicación en los distintos sectores de Popayán.	50
Figura 8: Taller de cartografía social con estudiantes del curso 7-3 de la I.E Alejandro de Humboldt.	51
Figura 9: Uso del cubo de Rubik para entender la expresión “cuadrado de cuadrados”.	59
Figura 10: El tamaño de los palitos influye en la cantidad de los mismos.	63
Figura 11: Cuadrícula de tamaño 3x3.	64
Figura 12: Fórmula de recursividad a partir de la propuesta de MC.	65
Figura 13: La idea de AV para encontrar la mínima cantidad de palitos.	66
Figura 14: Se explora la idea de AV con todos los estudiantes comprendiendo su funcionamiento.	68
Figura 15: Explorando la propuesta de BS.	72
Figura 16: Los estudiantes averiguan sobre el triángulo de Pascal y presentan sus características.	74
Figura 17: Consideraciones sobre la probabilidad de cada jugador de acuerdo a las condiciones del estudiante SS.	77
Figura 18: Se proponen varias ilustraciones sobre la situación de Josefo y los 40 judíos.	81
Figura 19: Identificando regularidades en el Problema de Josefo.	87

Figura 20: Exploración de la idea que los estudiantes CE y EA propusieron.	94
Figura 21: Conversión de dólares a pesos colombianos.	103
Figura 22: Cantidad de objetos más robados en 7-1 y el valor estimado, de acuerdo a los datos recolectados por un grupo de 7-3.	108
Figura 23: Gráficas y tablas realizadas por algunos grupos para la recolección e ilustración de información en el AA tipo 6.	120
Figura 24: Disposición de los estudiantes del curso 7-3 en el último escenario de investigación.	121
Figura 25: Frecuencia de los actos dialógicos en los AA tipo 2 y 4, en los cursos 7-1 (izquierda) y 7-3 (derecha).	127
Figura 26: Frecuencia de las características del conocer reflexivo en los cursos 7-1 (izquierda) y 7-3 (derecha).	132

Resumen

Este documento se presenta como requisito para optar al título de Licenciado(a) en Matemáticas, de la Universidad del Cauca. Se enmarca en la Educación Matemática Crítica (en adelante EMC), y busca identificar la manera en la que la implementación de tres tipos de escenarios de investigación posibilita el desarrollo de la alfabetización matemática, en estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Alejandro de Humboldt (IE-AdH), con el fin de contribuir a la formación de ciudadanos críticos.

Teniendo en cuenta la complejidad de gestionar una práctica pedagógica que se considera dentro del paradigma crítico, que atienda a las particularidades de los estudiantes y su contexto, se realizó un trabajo desde la Investigación Crítica, en la cual mediante la interacción entre las situaciones actual, imaginada y dispuesta, a través de los procesos imaginación pedagógica, organización práctica y razonamiento crítico, es posible generar situaciones de enseñanza y aprendizaje que impulsan la formación de ciudadanos conscientes de su entorno y con la capacidad de cuestionar las injusticias y desigualdades de la sociedad.

Para la consecución del objetivo planteado en esta práctica pedagógica, desde la investigación crítica implicó una variedad de actividades como: observación a la población de interés, diseño de instrumentos, análisis de datos y constitución de escenarios. Además, se establecieron como sustento para el análisis de datos las categorías del conocer reflexivo propuestas por Mancera (2020) y los actos dialógicos descritos en Alrø y Skovsmose (2012), a raíz de lo observado en la intervención.

Palabras clave: Alfabetización matemática, escenarios de investigación, conocer reflexivo, educación matemática crítica, investigación crítica.

1. Introducción

Las prácticas de enseñanza en matemáticas que se realizan en la mayoría de instituciones educativas de nivel secundario, se ubican dentro de los límites del aula y su *microcontexto*; las clases se desarrollan bajo una misma dinámica -conocida dentro de la EMC como paradigma del ejercicio- que se divide en dos momentos: en el primer momento, el profesor explica un tema y algunos métodos de resolución de ejercicios, en el segundo, los estudiantes resuelven ejercicios con base en la explicación y cuya solución ya es conocida con anticipación por el profesor. De esta manera, el aula de matemáticas se convierte en un espacio monótono y aburrido, en el cual se considera al estudiante meramente como un receptor de información, “minimizando y anulando en los casos extremos al sujeto político que participa activamente en la construcción de sus condiciones sociales y culturales” (Manzano, 2016, p. 19).

Por lo anterior, es imperante transformar las prácticas tradicionales de enseñanza de las matemáticas por unas que reconozcan el contexto sociocultural del estudiante y en las cuales, se fomente la participación activa. En este sentido, como respuesta surgen los escenarios de investigación en lo propuesto por Skovsmose (2000) para promover el desarrollo de la alfabetización matemática (entendida como una competencia que integra habilidades para entender y actuar frente a las matemáticas mismas y situaciones del contexto real) y con ello contribuir a la formación de ciudadanos reflexivos que aborden problemas complejos desde una perspectiva matemática crítica (Skovsmose, 1994). A continuación, se consigna el proceso seguido desde esta perspectiva, para abordar el problema planteado en esta práctica pedagógica.

En el segundo capítulo, se presenta el contexto en el cual se encuentra enmarcado el colegio donde se llevó a cabo la práctica pedagógica; de igual manera, se mencionan algunos datos que se obtuvieron mediante la observación y que permitieron caracterizar el aula de matemáticas. En el tercer capítulo se describe de manera detallada el problema que se aborda en

este documento, las motivaciones que dieron origen para contemplar dicho problema y la relevancia de esta temática. De igual manera, con base en los intereses que se persiguen y en correspondencia con la formulación del problema, en el cuarto capítulo se establecen los objetivos orientadores de esta práctica pedagógica.

En el quinto capítulo, se presenta el marco de antecedentes y la fundamentación teórica de la práctica pedagógica. En la primera parte, se describen algunos antecedentes en los cuales se propone contribuir al desarrollo de la competencia democrática, mediante la implementación de ambientes de aprendizaje en el sentido que propone Skovsmose (2000) y que han sido un gran soporte para el desarrollo de este trabajo. En la segunda parte, se presentan algunos elementos conceptuales de la EMC, tales como: crítica, pensamiento crítico, alfabetización matemática, escenarios de investigación y diálogo.

Posteriormente, en el capítulo seis se describe la estrategia analítica y los instrumentos diseñados para la consecución de los objetivos planteados en esta práctica pedagógica; se describen actividades e instrumentos diseñados para: la caracterización de las realidades socioculturales de los estudiantes; la identificación de las dinámicas de aula de matemáticas en las que se encuentran inmersos; recolección de información y análisis de datos obtenidos de los escenarios de investigación que se pudieron configurar en la intervención con los estudiantes.

En el capítulo siete, se presentan los datos obtenidos a la vez que se realiza su respectiva discusión considerando el marco referencial. En este capítulo se describen los diferentes hallazgos y limitaciones que tuvieron lugar durante la inmersión en cada uno de los cursos, reflexionando sobre la relación entre los escenarios de investigación y la alfabetización matemática bajo la dirección de la investigación crítica. Finalmente, se presentan las conclusiones que se derivan de la discusión, así como algunas recomendaciones en términos de cuestiones y tensiones a abordar en futuras investigaciones.

2. Contexto

Al tratar de contribuir en la formación de ciudadanos críticos, es importante tener en cuenta el contexto de los participantes; para efectos de esta práctica pedagógica, se consideran los contextos: institucional y del aula. Son aspectos importantes a contemplar puesto que, a través de estos, es posible identificar y reconocer las dificultades, fortalezas e intereses de los estudiantes, permitiendo así de acuerdo con Sánchez y Torres (2009), que se realice una invitación atractiva para los estudiantes en la constitución de los escenarios de investigación.

2.1. Institución Educativa

La Institución Educativa Alejandro de Humboldt fue fundada el 6 de abril de 1844, ubicada en la zona urbana de Popayán, Cauca, precisamente en la comuna 4 de esta ciudad con dirección en la carrera 2N # 5N-404 en el barrio Pomona. Es una Institución Educativa mixta con modalidad académica de carácter público, calendario A y ofrece educación desde el nivel preescolar, básica primaria, básica secundaria y media, distribuidos en tres jornadas: mañana, tarde y noche; cuenta con cuatro sedes: Central, Yanaconas, Pueblillo y Sendero.

De acuerdo a un estudio socio demográfico realizado por la institución en la Sede Central, el 91% de estudiantes provienen de familias clasificadas en los estratos 0, 1, 2 y 3, mientras que el 9% está distribuido en los estratos 4 y 5, reflejando que la mayoría de estudiantes provienen de familias de escasos recursos económicos; además, este informe permite afirmar que la mayoría de estudiantes se encuentran ubicados en la periferia de la ciudad y en el sector rural. Por otro lado, el sustento de estas familias es principalmente la economía informal (vendedores ambulantes, servicio doméstico, trabajo en areneras y ladrilleras, entre otros) y de ayudas que reciben del programa de Familias en Acción. La institución cuenta con un número significativo de niños

provenientes de familias en situación de desplazamiento político y socioeconómico (Sabogal, 2014).

Debe señalarse que este centro educativo y su comunidad no están exentos de problemáticas sociales. Si bien es cierto que la Sede Central se ubica en un sector que no está tan afectado por situaciones de vulnerabilidad, sus estudiantes si lo están, principalmente por: violencia, desplazamiento forzado, condiciones de pobreza, núcleos familiares disfuncionales, pandillismo. De igual manera, dentro de las aulas se presentan algunas dificultades - como se catalogan en el Proyecto Educativo Institucional (PEI) - entre las cuales se encuentran: mal uso del celular, consumo de sustancias psicoactivas, interrupción de clase, acoso escolar, entre otras.

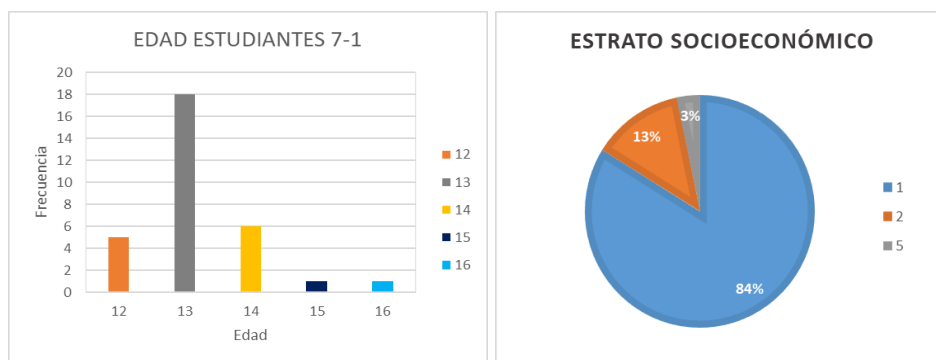
Por otro lado, en el Proyecto Educativo Institucional “Hacia una cultura de bienestar escolar”, se plantea que el enfoque pedagógico del colegio es un enfoque socio crítico, en el cual los procesos educativos están proyectados a la conformación de una comunidad comprometida con su propia transformación, “no basta con conocer, es fundamental actuar con conocimiento” (PEI). Lo anterior es un motivo que impulsó a llevar a cabo esta práctica pedagógica dentro de esta institución educativa.

2.2. Contexto del Aula

Esta práctica pedagógica se llevó a cabo con estudiantes de grado séptimo, específicamente con los cursos 7-1 y 7-3, con un total de 61 alumnos, 31 de 7-1 y 30 de 7-3. Para la caracterización de los participantes, se diseñó y aplicó una encuesta a cada curso con las mismas preguntas (Anexo 1), para obtener información sociodemográfica específica de los estudiantes; de igual manera, en cada curso se realizó una observación a las clases de matemáticas realizadas por la profesora titular, con el fin de identificar el contexto del aula de matemáticas.

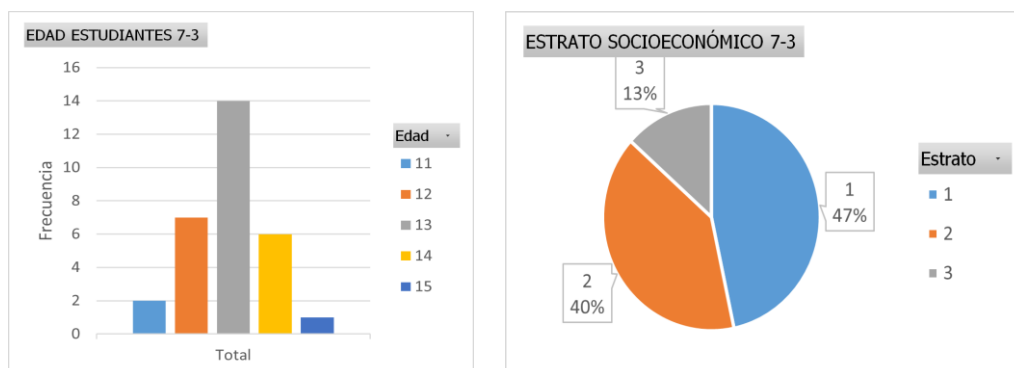
De acuerdo con los datos obtenidos de la encuesta, se obtuvo que los participantes de 7-1 son estudiantes entre los 12 y 16 años de edad, clasificados en los estratos 1 y 2, tan solo un estudiante de estrato 5. Se pudo identificar que el ingreso económico de sus familias proviene de la agricultura, servicio doméstico, ventas ambulantes, construcción.

Figura 1: Distribución por edad y estrato socioeconómico de los estudiantes del curso 7-1.



Por otro lado, los estudiantes del curso 7-3 tienen entre 11 y 14 años de edad, clasificados en los estratos 1, 2 y 3; los ingresos económicos de sus núcleos familiares provienen de la agricultura, construcción, servicio doméstico, servicio de moto taxi. Además, esta encuesta permitió identificar que muchos estudiantes viven en barrios que están, o muy al norte o muy al sur de la ciudad, barrios considerablemente distanciados de su colegio; en general, estos son los barrios y veredas en los cuales hay una mayor población teniendo en cuenta ambos cursos: vereda Pueblillo, vereda El Sendero, barrio Yanaconas, barrio Pomona.

Figura 2: Distribución por edad y estrato socioeconómico de los estudiantes del curso 7-3.



Por último, es importante mencionar la dinámica en la clase de matemáticas que se pudo identificar en el análisis de las observaciones realizadas, y que es común en ambos cursos; el hecho de que la dinámica en ambos cursos sea similar se debe a que las clases de matemáticas están dirigidas por la misma profesora. Lo primero que se pudo identificar, es que es muy común en el desarrollo de las clases que la profesora introduzca un tema y posteriormente deje ejercicios o problemas para que los estudiantes los resuelvan. Asimismo, el trabajo en estas clases es individual y bajo una lógica de premio-castigo, lo cual genera un ambiente poco propicio a actividades de tipo reflexivo.

Figura 3: Dinámica de trabajo en la clase de matemáticas.



Nota. Los estudiantes se ubican en fila con el fin de presentar la solución de los ejercicios propuestos, donde los diez primeros en desarrollarlos reciben puntos como bonificación.

A continuación, se presenta un ejemplo de ejercicio y problema que se plantean en las clases de matemáticas de ambos cursos:

- Simplificar la expresión: $-2\frac{1}{5} + 0,4 + \frac{22}{10} - \frac{2}{5}$
- Una familia ha consumido en un día de verano 1 litro y medio de agua, $\frac{2}{3}$ de litro de jugo de naranja, $\frac{3}{4}$ de litro de néctar de durazno. ¿Cuántos litros de líquidos han bebido?

En la observación no participante que se realizó, se pudo evidenciar que una vez se han propuesto los ejercicios o problemas, la profesora pasa puesto por puesto para resolver dudas; la clase se desarrolla así alrededor de cuarenta minutos y los estudiantes desatienden la clase: aprovechan para sacar el celular, hacer tareas de otras asignaturas o buscar copia del ejercicio de matemáticas.

Como consecuencia, los estudiantes tienen poco o nulo interés en las clases, que se puede evidenciar cuando empiezan a usar los celulares, o en algunas de sus acciones, gestos o comentarios cuando deben resolver ejercicios o la profesora está explicando un tema. En estas clases los estudiantes adoptan una postura pasiva, sin lugar para generar reflexiones críticas y aún más preocupante, alejados de su proceso de aprendizaje (Sánchez y Torres, 2009), puesto que, la planeación de la clase está centrada en seguir algoritmos y solucionar guías que se manejan dentro de la institución educativa.

3. Problemática

3.1. Planteamiento y Formulación del Problema

El contexto de la institución y del aula de matemáticas abordados anteriormente, son elementos fundamentales que reflejan la problemática a investigar, se puede observar que a pesar de que en el PEI de la institución educativa se resalta la importancia de “interpretar y desarrollar políticas dirigidas a fomentar una sociedad de ciudadanos activos, responsables y críticos capaces de crear junto con otros un entorno social adecuado para vivir” (p. 29), existe un contraste y gran diferencia en comparación con el plan de área de matemáticas y la organización de las clases de matemáticas, pues aunque en el plan de área el objetivo general está enmarcado por “potenciar el pensamiento reflexivo, crítico y creativo de los estudiantes que coadyuve a interpretaciones de su realidad para luego ser traducidas en elaboraciones conceptuales y/o modelos” (IE-AdH, 2023, p. 29), en la malla curricular que se presenta dentro de él se observa que su enfoque principal no es precisamente establecer situaciones del contexto que desarrollen dichas competencias, sino que por el contrario privilegia los contenidos, dándole mayor relevancia a los objetos matemáticos que los estudiantes “deben comprender” en grado séptimo.

De igual manera, como se mencionó en el anterior apartado, las clases de matemáticas se ubican bajo la organización del paradigma del ejercicio, donde prima la enseñanza de las temáticas señaladas en las guías y en el plan de área, así el trabajo en clase es individual – sintomático de ello es la distribución por filas en los salones – de manera que el rol del estudiante se resume a ser simplemente mero receptor de conocimiento, lo que a su vez impide la generación de espacios de indagación, reflexión y criticidad; esto conlleva a afirmar que las clases usuales no permiten en los estudiantes el desarrollo de habilidades para entender y actuar - con y desde las matemáticas - frente a las matemáticas mismas y situaciones del contexto real, lo que dificulta el proceso de formación de sujetos críticos a partir de la educación matemática.

En el contexto de la EMC, de acuerdo con Skovsmose (2000), la alfabetización matemática es un aspecto fundamental para contribuir al desarrollo de ciudadanos críticos y participativos en la sociedad. Es por esto que resulta importante cuestionar y repensar estas prácticas en el aula de matemáticas con el fin de ayudar al desarrollo de la alfabetización matemática en los estudiantes de la Institución Educativa Alejandro de Humboldt y contribuir a su formación como sujetos críticos. Así, este trabajo de investigación se enfoca en examinar la relación que surge entre la implementación de los tres tipos de escenarios de investigación propuestos por Skovsmose (2000), el desarrollo de la alfabetización matemática y su incidencia en la formación de sujetos reflexivos, críticos capaces de cuestionar y tomar decisiones a partir de los conocimientos matemáticos adquiridos.

Cabe mencionar, que en esta práctica pedagógica se busca destacar la importancia de implementar escenarios de investigación como una opción para promover reflexiones y desarrollar la alfabetización matemática en los estudiantes. Sin embargo, es importante tener en cuenta que no se pretende establecer estos escenarios como la única posibilidad o alternativa para este propósito. Es necesario reconocer que el trabajo con diferentes ambientes de aprendizaje también es fundamental en el proceso educativo, pues de acuerdo con Skovsmose (2000) “Más bien, mi propuesta es apoyar una educación matemática que se mueva por los distintos ambientes presentados (...)” (p.17). El objetivo es resaltar el valor que los escenarios de investigación tienen dentro de este marco, como una estrategia que puede enriquecer la experiencia de aprendizaje y fomentar un pensamiento crítico y reflexivo en los estudiantes.

En este sentido, surge el siguiente interrogante: ¿De qué manera la implementación de escenarios de investigación contribuye al desarrollo de la alfabetización matemática en el intento de formar ciudadanos críticos?

3.2. **Justificación**

A pesar de los amplios aportes de muchos educadores matemáticos para transformar las prácticas educativas en matemáticas, en Colombia existen muchos adeptos al paradigma del ejercicio, en el cual se considera al estudiante como un ser meramente cognitivo que solo realiza ejercicios después de que el profesor haya explicado un tema. Esta secuencia limita la reflexión y participación de los estudiantes, lo que a su vez impide el desarrollo de la alfabetización matemática; de acuerdo con Fresneda-Patiño (2021), esto se traduce en un obstáculo para formar estudiantes críticos desde la educación matemática.

Por lo anterior, la exigencia de estudiar matemáticas, que se encuentra en la mayoría de currículos de Colombia, debería estar relacionada al derecho que tienen los ciudadanos a estar bien informados y a la defensa de una sociedad democrática. Es por esto que se encuentra en la implementación de escenarios de investigación una alternativa dentro de la EMC, en la cual, sin descuidar el rigor matemático, el estudiante puede “interpretar y actuar en una situación social y política que ha sido estructurada por las matemáticas” (Skovsmose, 2000, p. 110), procurando la articulación con el contexto sociocultural y sus intereses.

Para estructurar el trabajo de la práctica pedagógica, decidimos hacer una revisión sistemática de literatura¹ en la cual se pudo encontrar algunas investigaciones con objetivos similares a los que se proponen en este trabajo. No cabe duda de que estas investigaciones han aportado elementos teóricos esenciales y pautas para el diseño metodológico de esta práctica pedagógica. Sin embargo, bajo nuestro criterio, en algunos de ellos (v. gr. Correa y Hoyos, 2019; Páez, Sierra y Rubio, 2018) se muestra un trabajo centrado en el objeto matemático, despojando

¹ Se consultaron artículos en bases de datos como Redalyc, Dialnet y repositorios de universidades como la Universidad Pedagógica Nacional, Universidad del Cauca, Universidad Francisco José de Caldas. Se utilizaron las siguientes ecuaciones de búsqueda: "escenario de investigación" AND ("alfabetización matemática" OR "competencia democrática"), matemáticas AND ("conocer reflexivo" OR "competencia reflexiva").

de protagonismo al estudiante en la construcción de su propio conocimiento, lo cual le impide leer y escribir el mundo desde las matemáticas (Gutstein, 2006); en otros (v. gr. Fresneda y Sarmiento, 2018; Amaya y Espinosa, 2020; Alvis et al., 2019), se implementa únicamente un tipo de escenarios de investigación (con referencia en la vida real) dejando sin explorar los otros dos tipos de escenarios definidos por Skovsmose (2000): con referencia en las matemáticas puras y con referencia en una semirrealidad.

En el marco de este trabajo, con el reto de hacerle frente a la enseñanza tradicional de las matemáticas se implementaron tres escenarios de investigación en los distintos tipos de referencia, ya que, de acuerdo con Skovsmose (2000) “es importante organizar tal reto también en términos de los ambientes de aprendizaje de tipo (2) y (4)” (p. 123). Además, en la revisión sistemática y los antecedentes se puede identificar que, a pesar de los esfuerzos por transformar las prácticas educativas tradicionales, son pocas las investigaciones encaminadas a implementar ambientes de aprendizaje tipo 2 y 4 dentro del marco de la EMC.

4. Objetivos

4.1. Objetivo General

Identificar los aportes que brinda la implementación de escenarios de investigación a la formación de ciudadanos críticos, en el proceso de desarrollar la alfabetización matemática.

4.2. Objetivos Específicos

- Constituir a los estudiantes como sujetos participantes en la planeación y desarrollo de los escenarios de investigación, a través del conocimiento de sus intenciones e intereses.
- Caracterizar las formas en que los escenarios de investigación contribuyen al desarrollo de la alfabetización matemática, a partir de las características propuestas por Mancera (2020) y Alrø y Skovsmose (2012).

5. Marco Referencial

5.1. Marco De Antecedentes

En el marco de la educación matemática crítica, se han llevado a cabo diversos estudios e investigaciones que buscan abordar problemáticas sociales presentes en el contexto de los estudiantes, con el fin de destacar la importancia de las matemáticas como una herramienta para su comprensión. A continuación, se describen los principales hallazgos, entre los cuales se destacan algunas investigaciones centradas en el desarrollo de la competencia democrática o del conocer reflexivo, utilizando ambientes de aprendizaje tipo 6 expuesto por Skovsmose (2000)².

Amaya y Espinosa (2020) diseñaron e implementaron un ambiente de aprendizaje innovador teniendo como referencia el consumo del azúcar y las consecuencias en la salud. El objetivo principal de su investigación fue promover el desarrollo de la competencia democrática en estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa Distrital German Arciniegas, dentro del contexto de la clase de matemáticas.

A través de este ambiente de aprendizaje, los autores buscaban contribuir a la formación de sujetos críticos y reflexivos, estimulando la participación activa de los estudiantes en el desarrollo de actividades, la toma de decisiones, y el diálogo entre los participantes. De esta manera se brindó a los estudiantes la oportunidad de explorar, cuestionar y reflexionar sobre las implicaciones sociales de las matemáticas.

Para ello, en su investigación utilizaron bases de la metodología de investigación crítica y una investigación etnográfica, bajo un enfoque metodológico cualitativo. El estudio incluyó la implementación del ambiente de aprendizaje, seguido de la recopilación de datos a través de

² La noción de ambiente de aprendizaje surge de relacionar la organización de la actividad en el aula con la producción de significado que puede obtener el estudiante a partir de dicha organización. Un ambiente de aprendizaje tipo 6, alude a un tipo de organización de actividades referentes a situaciones de la vida real. En la sección del marco teórico conceptual se describe a mayor detalle esta noción.

observaciones, registros escritos y entrevistas. Los resultados obtenidos proporcionaron información valiosa sobre la forma en que los estudiantes interactuaron con el ambiente de aprendizaje y cómo esto contribuyó al desarrollo de su competencia democrática, así como a la comprensión de conceptos matemáticos.

Por otro lado, la tesis de maestría de Fresneda y Sarmiento (2018), se enfoca en el desarrollo de la competencia democrática en el contexto de la clase de matemáticas. El objetivo principal de esta investigación fue explorar estrategias pedagógicas que promovieran la competencia democrática en los estudiantes, fomentando su participación activa, el diálogo y el pensamiento crítico en el aprendizaje de las matemáticas.

Una de las motivaciones de esta investigación fue la observación de que las clases usuales de matemáticas no ofrecen condiciones que permitan el desarrollo de la competencia democrática en los estudiantes, como respuesta a esto, se optó por realizar el montaje de un escenario educativo de aprendizaje centrado en el cuidado de sí en el uso de las motos, con el objetivo de proporcionar un contexto relevante y significativo para los estudiantes.

El estudio se llevó a cabo con estudiantes del curso 803 de la Institución Educativa Departamental Ricardo Hinestrosa Daza, utilizando un enfoque cualitativo basado en la metodología de la investigación crítica. Para recopilar datos, se realizaron observaciones en el aula de matemáticas, se llevaron a cabo entrevistas a los estudiantes y se analizaron videos de la implementación del escenario educativo de aprendizaje.

Los resultados obtenidos proporcionaron información importante sobre la forma en que los estudiantes interactuaron con la estrategia pedagógica propuesta y cómo esto influyó en el desarrollo de su competencia democrática. Se destaca el impacto positivo que tuvo en promover la participación activa, el diálogo y una postura crítica y reflexiva en los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas. Además, se analizaron las implicaciones de estos hallazgos para

la enseñanza de las matemáticas y se ofrecieron recomendaciones para mejorar la práctica educativa en este sentido.

Mancera (2020), en su tesis de doctorado aborda el tema del conocer reflexivo en el contexto de la modelación matemática desde una perspectiva socio crítica. El objetivo principal de esta investigación fue indagar cómo se puede caracterizar y desarrollar el conocer reflexivo en contextos de modelación matemática, teniendo en cuenta aspectos sociales críticos. Así, la tesis se enfoca en entender cómo la modelación matemática puede ser una herramienta que permita la comprensión de situaciones problemas reales de la sociedad y generar la reflexión crítica en los estudiantes.

El estudio se llevó a cabo en una institución educativa pública ubicada en la localidad Rafael Uribe de Bogotá, Colombia, con estudiantes de último grado de educación media que viven en condiciones de vulnerabilidad social. Se utilizó una metodología de investigación crítica, que incluyó observaciones, entrevistas a los estudiantes y un análisis documental para recopilar datos.

Los resultados obtenidos proporcionan una comprensión más profunda de cómo se puede promover el conocer reflexivo en el contexto de la modelación matemática y cómo esto puede contribuir a una mejor comprensión de los problemas sociales y su relación con las matemáticas. Además, los resultados permitieron caracterizar el conocer reflexivo que desarrollan estudiantes que viven en condiciones de vulnerabilidad social en cuatro rasgos, teniendo en cuenta los actos dialógicos y las cualidades del diálogo expuestas por Alrø y Skovsmose (2002).

Arias y Tamayo (2020), en su investigación abordan la búsqueda del conocer reflexivo en los estudiantes de grado octavo que pertenecen al grupo EMA (Encuentros Matemáticos Alternativos) a través de un enfoque socio crítico, centrándose en un ambiente de modelación matemática que se desarrolla bajo tres situaciones del contexto relevantes para los estudiantes. El

objetivo principal de la investigación es explorar los componentes del conocer reflexivo e identificar y analizar los obstáculos que se presentan en este proceso.

La perspectiva socio crítica que adopta la investigación les permite comprender y tener en cuenta los factores sociales, culturales y políticos que influyen en el desarrollo del conocer reflexivo de los participantes del grupo EMA. A través del marco metodológico de la investigación crítica y el uso de técnicas e instrumentos como: revisión documental, observación, notas de campo, entre-vistas, producciones de los estudiantes y registros audiovisuales, se recopilaron los datos necesarios para analizar las experiencias de los participantes del grupo EMA e identificar los obstáculos que interfirieron en los espacios de interacción y discusión generados por el ambiente de modelación matemática.

Los resultados y conclusiones de este estudio permiten generar una comprensión más profunda de los obstáculos que dificultan la búsqueda del conocer reflexivo en el grupo EMA en cuanto nos permiten tener en cuenta aspectos sociales y políticos que influyen en el compromiso y actitud de los estudiantes frente a las actividades propuestas, que promuevan el desarrollo de actitudes críticas en los estudiantes.

Pardo y Poveda (2021) diseñaron e implementaron un ambiente de modelación matemática, por medio del cual pretendían dar cuenta del posible desarrollo del conocer reflexivo en estudiantes de grado noveno del Colegio Colsubsidio Ciudadela en Bogotá. Teniendo en cuenta que este trabajo de investigación se realizó en un ambiente virtual, debido a la emergencia sanitaria por la COVID -19, el objetivo era identificar las características del conocer reflexivo en el desarrollo de dicho ambiente de modelación en la modalidad Enseñanza Remota de Emergencia (E.R.T.).

Durante el desarrollo del estudio, diseñaron encuestas, entrevistas y montaje de escenarios bajo la metodología de investigación crítica, que les permitió recolectar información con base en

las características propuestas por Mancera (2020). De acuerdo al análisis de resultados, a pesar de no presenciar algunas características por las limitaciones que impone la virtualidad, concluyen que es posible evidenciar dentro de las reflexiones que se generan con la implementación de modelación matemática, un desarrollo en el conocer reflexivo.

Esta investigación nos aportó elementos a tener en cuenta en la configuración de escenarios de investigación con referencia en situaciones de la vida real, como por ejemplo, los intereses de los estudiantes. De igual manera, nos brindó un acercamiento teórico y práctico de las características del conocer reflexivo y cómo se pueden desarrollar desde este tipo de escenarios.

Por último, Correa y Hoyos (2019) se plantean como objetivo determinar cómo aulas no prototípicas permiten generar escenarios de investigación para facilitar la comprensión del orden en los números enteros. Esta práctica pedagógica se desarrolló con estudiantes de grado séptimo de la Sede José Antonio Galán N° 1 de la Institución Educativa Los Comuneros, en Popayán – Cauca.

Esta práctica pedagógica nos brindó pautas para abordar realidades que pueden convertirse en insumos para la configuración de escenarios de investigación. De acuerdo al análisis de la información recolectada por medio de encuestas, entrevistas y producción escrita de los estudiantes, los autores concluyen que las aulas no prototípicas permiten configurar escenarios de investigación para la comprensión del orden en los números enteros. Sin embargo, las conclusiones se realizan con base en ejercicios dentro del tema abordado y no con base en reflexiones críticas de los estudiantes, aspecto esencial que se quiere identificar en el presente documento.

5.2. Marco Teórico Conceptual

5.2.1. *Educación Matemática Crítica*

Para tener un atisbo de lo que puede ser considerado como Educación Matemática Crítica, es necesario examinar los enfoques que permitieron su surgimiento. Por un lado, la EMC tiene sus inicios en una corriente de pensamiento filosófico llamada Teoría Crítica, desarrollada por Jürgen Habermas a mediados del siglo XX, asociada históricamente a la escuela de Frankfurt, cuya finalidad era repensar las posibilidades del desarrollo social frente al auge del capitalismo que había en esa época. Por otro lado, se encuentra la pedagogía de la liberación de Paulo Freire, en la cual se argumenta que la educación no es neutral, sino que responde a intereses económicos, ideológicos, políticos, culturales y que responden al contexto y perspectivas que tiene cada persona. Por último, el enfoque que Ubiratán D'Ambrosio había empezado a articular sobre etnomatemática, en la cual se concibe a las matemáticas como una actividad arraigada a la cultura (Valero et al., 2015).

El término Educación Matemática Crítica es acuñado por primera vez por Marilyn Frankenstein (1983) en Estados Unidos y por Ole Skovsmose (1985) en Europa; sin embargo, se considera como principal exponente de la EMC a Skovsmose al lograr conectar la educación matemática con los tres enfoques mencionados anteriormente. De esta manera, tal como lo expresan Valero et al. (2015), desde el punto de vista de Skovsmose (2014), la EMC puede asumirse como:

[...] una manera de entender la educación matemática que gira en torno a *preocupaciones* como trabajar por la justicia social y en contra de la exclusión y supresión social, abrir nuevas posibilidades para los estudiantes y abordar críticamente los usos de las matemáticas en todas sus formas y aplicaciones. (p. 289)

En otras palabras, la EMC en el sentido propuesto por Skovsmose – sin intención de definir esta amplia y compleja noción en una simple frase - es una corriente filosófica que se ocupa de formular y expresar las preocupaciones sociales, ambientales y políticas sobre las matemáticas y la educación matemática. Es importante para la EMC, estimular mediante la educación matemática, la formación de ciudadanos preparados para criticar cualquier forma de conocimiento matemático establecido, así como la formación de ciudadanos preparados para recurrir a recursos matemáticos que permitan cuestionar el orden establecido, casos de injusticia social y ambiental (Skovsmose, 2023).

Es decir, lo social antecede a lo matemático (Gorgorió et al., 2006) y es por esto que, en las prácticas de la educación matemática tal como afirma Abreu (2000), el aula es un *microcontexto* en el cual interactúan alumnos y profesor como seres sociales, pero no puede ser despojado del *macrocontexto* en el que están inmersos tanto el aula, los participantes y sus prácticas educativas.

5.2.2. *Crítica y Pensamiento Crítico*

En primer lugar, de acuerdo con Skovsmose (2023) la noción de crisis se interpreta como una situación dinámica y contingente que demanda ser afrontada críticamente. Si bien la crítica puede ser una respuesta ante una crisis, es importante distinguir entre la mera reacción y una respuesta reflexiva que busque identificar alternativas y posibles soluciones. Además, las crisis no son fenómenos meramente conceptuales, sino que forman parte de la realidad social, es decir, “crisis se interpreta como un término que se refiere tanto a las crisis de hecho como a las potenciales” (Skovsmose, 1999, p. 14) lo que implica que la actividad crítica no se limita a meras construcciones mentales, sino que tiene sus fundamentos en la realidad objetiva.

En cuanto a la crítica, en su esencia, constituye un pilar fundamental en la investigación y la formación de individuos con una visión reflexiva y analítica de la realidad. Desde la perspectiva de Skovsmose (1999), ser crítico implica no sólo prestar atención a situaciones críticas, sino también reaccionar ante ellas, conectando esta noción con los significados derivados

de la idea de acción y tomar una decisión. Este enfoque se alinea con la epistemología crítica, donde se destaca la importancia de la reflexión, la intención y el diálogo como elementos esenciales para el desarrollo de sujetos críticos, como señalan Alrø y Skovsmose (2002). De esta manera:

Los sujetos críticos se relacionan en este caso con los estudiantes y el profesor, mientras que dentro de los múltiples objetos de crítica, Skovsmose resalta las matemáticas y sus aplicaciones en la sociedad como el objeto central de crítica. Desde la perspectiva de esta propuesta, los objetos de crítica están contenidos en situaciones particulares de crítica, denominadas escenarios de investigación. (Manzano, 2016, p. 22)

Por otro lado, el pensamiento crítico, según Glaser (1941, como se citó en León, 2014) implica tres dimensiones:

(a) una actitud de estar dispuesto a considerar de manera pensante los problemas y asuntos que caen en el rango de nuestra experiencia, (b) conocimiento de los métodos de la investigación lógica y el razonamiento y (c) cierta habilidad en la aplicación de estos métodos. (p. 164)

En este sentido, el pensamiento crítico se articula con habilidades cognitivas y destrezas que permiten interpretar, analizar, inferir y explicar, necesarias para evaluar y discutir críticamente sobre información relevante y tomar decisiones fundamentadas.

5.2.3. *Alfabetización Matemática*

Una vez entendida la EMC como una expresión de preocupaciones sobre las ideas y prácticas que tienen lugar en la educación matemática, en aras de formar una ciudadanía crítica, sería natural preguntarse por las condiciones para alcanzar tal objetivo. En este sentido, Skovsmose (2011) señala la alfabetización matemática como una de esas condiciones, entendida como la capacidad de interpretar y actuar frente a situaciones sociales y políticas que han sido estructuradas por las matemáticas, es decir, el conocimiento matemático - que se supone debe aprenderse en la escuela - al servicio de la sociedad.

No obstante, esta idea de alfabetización no se puede fijar únicamente en la habilidad de leer y escribir, sino, como se precisó anteriormente, la capacidad de interpretación y acción va ligada a un ejercicio de crítica: “la alfabetización matemática como un constructo radical debe enraizarse en un espíritu de crítica y en un proyecto de posibilidades que capacite a la gente para participar en la comprensión y transformación de su sociedad.” (Skovsmose, 1997, p. 213). En otras palabras, un individuo debe estar en la capacidad de comprender lo que las matemáticas pueden hacer en la sociedad, reconocer el empoderamiento y desempoderamiento de una comunidad con el uso de las matemáticas.

Siguiendo con lo anterior, la alfabetización matemática puede ser entendida como una “social response-ability” (Skovsmose, 2011), en la cual el sujeto tiene la habilidad para responder a diferentes retos en situaciones asociadas al desarrollo tecnológico, responder en situaciones de crisis con apoyo del conocimiento matemático. En consecuencia, Skovsmose (1999) menciona:

[...] si la alfabetización matemática tiene un papel que jugar en la educación crítica, similar pero no idéntico al papel de la alfabetización, entonces la alfabetización matemática debe verse como una composición de diferentes competencias: la matemática, la tecnológica y la reflexiva. En especial, el conocer reflexivo tiene que desarrollarse para darle a la alfabetización matemática un carácter potenciador. (p. 130)

De acuerdo con lo anterior, un conocimiento matemático reducido a la habilidad de reproducir y ejecutar cálculos y algoritmos, no es suficiente para la lectura de una situación en términos de las posibles acciones para la transformación de la misma, así, la alfabetización matemática se concibe como una competencia integrada además, por el conocer tecnológico y el conocer reflexivo, siendo el primero relacionado con la aplicabilidad de las matemáticas y habilidades para la construcción de modelos para el logro de fines tecnológicos (Skovsmose, 2001); y el segundo tiene que ver con la interpretación de la situación tecnológica y su evaluación

con respecto a las consecuencias éticas y sociales que implica abordar tal situación con las herramientas matemáticas seleccionadas (Skovsmose, 1999).

Por otro lado, para Jablonka (2003) la alfabetización matemática es la capacidad de un individuo para usar y aplicar las matemáticas. Esto implica tener una comprensión conceptual de los objetos matemáticos, así como fluidez en los procedimientos, competencia importante para evaluar críticamente los aspectos de la cultura circundante, en particular de aquellas prácticas que involucran las matemáticas. Lo anterior, con el fin de “construir” una realidad social diferente al mismo tiempo que se evalúa y comprende el papel de las matemáticas en dichos aspectos culturales.

Además, Eva Jablonka presenta cinco tipos de alfabetización matemática, considerando que la noción expuesta anteriormente puede cambiar su sentido con base en la “utilidad” que se quiere obtener de esta. Por esto, es importante plantearse, ¿para qué la alfabetización matemática? En este sentido, no es posible dilucidar una concepción sin antes tener claro la práctica social específica a tratar; las concepciones son: alfabetización matemática para el desarrollo del capital humano, alfabetización matemática para la identidad cultural, alfabetización matemática para la conciencia ambiental, la alfabetización matemática para el cambio social, y alfabetización matemática centrada en la ciudadanía.

La primera de estas concepciones hace referencia a aquella que explora los intentos de generar estándares medibles para la competencia matemática en diferentes culturas, es decir, una alfabetización funcional que promueva la adquisición de competencias específicas para el desempeño adecuado dentro de una comunidad determinada. La alfabetización matemática para la identidad cultural, pretende establecer una relación entre las prácticas etnomatemáticas y las matemáticas académicas, sin embargo, la autora considera que se puede caer en el riesgo de limitar la alfabetización a la recuperación del conocimiento local. La tercera concepción,

considera vincular la competencia matemática con las preocupaciones ambientales globales de manera que se desarrollen alternativas adecuadas al momento de intervenir en estas problemáticas (Jablonka, 2003).

La alfabetización matemática para el cambio social pretende superar las matemáticas académicas tradicionales, para considerar las matemáticas como una herramienta de crítica para abordar situaciones de relevancia social o política, esto implica acercarse al conocimiento de manera crítica y cuestionar los intereses a los cuales responde. Por último, para Jablonka (2003), la alfabetización matemática centrada en la ciudadanía es una concepción que enfatiza en la evaluación crítica de los aspectos de la cultura circundante que involucran las matemáticas, es decir, se enfoca en comprender y evaluar las prácticas matemáticas dentro de una cultura.

Cabe mencionar que en aras de alcanzar los objetivos planteados, esta práctica pedagógica se desarrolló bajo las dos últimas concepciones de alfabetización matemática, teniendo en cuenta que la incorporación de escenarios de investigación rompe la monotonía de las clases tradicionales de matemáticas, lo que permite introducir reflexiones críticas frente a situaciones del contexto de los estudiantes y, que eventualmente, termina en la posibilidad de pensar alternativas para la transformación de esa realidad.

5.2.4. Ambientes de Aprendizaje y Escenarios de Investigación

5.2.4.1. Ambientes de Aprendizaje.

Cuando se centra la atención en las prácticas educativas que tienen lugar en el aula de matemáticas, Skovsmose (2000) señala algunos contrastes con respecto a las dinámicas que generan dichas prácticas. Esos contrastes resultan de cruzar dos dimensiones: los paradigmas dentro de los cuales tienen lugar las prácticas educativas y las referencias en las cuales se desarrollan. Con respecto a la primera dimensión, existen dos tipos de paradigmas, el paradigma

del ejercicio y el paradigma de los escenarios de investigación; en cuanto a las referencias, se entienden como las bases para los significados que los estudiantes pueden construir de los objetos matemáticos (Scaglia, 2015) y, pueden ser de tres tipos, las matemáticas mismas, semirrealidad y situaciones de la vida real.

Con relación a la primera dimensión, el paradigma del ejercicio es muy característico de la educación matemática tradicional, pues traza un único camino a través del currículo: “En primer lugar el profesor presenta algunas ideas y técnicas matemáticas y a continuación los estudiantes trabajan en ejercicios seleccionados por el profesor” (Skovsmose, 2000, p.3), de manera tal, que existe una clara relación autoritaria profesor-estudiante, reflejada en las respuestas premeditadas – casi que controladas – dadas por los estudiantes.

Como ya se mencionó anteriormente, al cruzar las dos dimensiones expuestas resulta lo que Skovsmose (2000) denomina ambientes de aprendizaje (AA), que se pueden resumir en la Figura 4:

Figura 4: Ambientes de aprendizaje

		Formas de organización de la actividad de los estudiantes	
		Paradigma del ejercicio	Escenarios de investigación
Tipo de referencia	Matemática pura	(1)	(2)
	Semirrealidad	(3)	(4)
	Situaciones de la vida real	(5)	(6)

Nota. Tomado de Skovsmose (2000).

Ahora bien, dichos ambientes se pueden caracterizar por el uso de la información y las tecnologías, recursos económicos, antecedentes y porvenires de los estudiantes, entre otros

(Manzano, 2016). Además, la matriz no es una clasificación rigurosa de los ambientes de aprendizaje en términos de “mejor” o “peor” en la cual se fijan límites entre ellos, por el contrario, el desarrollo de una clase de matemáticas debería “pasear” por los diferentes ambientes de aprendizaje. “Es importante que los estudiantes y el profesor juntos encuentren un camino entre los diferentes ambientes de aprendizaje” (Skovsmose, 2000, p. 17).

5.2.4.2. Escenarios de Investigación.

Los escenarios de investigación son una alternativa que propone Ole Skovsmose a las clases de matemáticas desarrolladas únicamente desde el paradigma del ejercicio. “Los estudios empíricos de la comunicación en la clase tradicional han mostrado graves consecuencias de este patrón de comunicación en la actividad del estudiante. ... Parece que los estudiantes dan respuestas instrumentales y asumen una responsabilidad mínima en ello.” (Alrø & Skovsmose, 2012, p. 149). Una alternativa que rompe la monotonía de las clases, despoja de autoridad al profesor y a los libros de texto para devolverla al estudiante como sujeto comprometido con su propio aprendizaje.

Tal como lo expresan Almeida y Chamoso (2001, como se citó en Scaglia, 2015):

Con “la excusa” de estudiar matemáticas se pueden generar espacios de discusión muy interesantes, donde los alumnos intercambien opiniones, defiendan sus ideas, aprendan a expresar argumentos y a defenderlos. [...] donde se anime a los estudiantes a poner en duda cada cosa que se presente, a aportar discusiones y explicaciones de los fenómenos, a criticar cada situación. Los alumnos deberán especular con la posibilidad de que las conjeturas sean ciertas o falsas, de un modo paciente, escuchando y respetando el punto de vista de otros. (p. 223)

En función de lo anterior, para que exista la posibilidad de desarrollar la alfabetización matemática es necesario trabajar en un “contexto” determinado, es por esto que Skovsmose (2000) propone el escenario de investigación como “una situación particular que tiene la potencialidad para promover un trabajo investigativo o de indagación” (p. 5). De esta manera, los escenarios de investigación trascienden la visión tradicional de las clases de matemáticas, al no considerar únicamente las competencias matemáticas, sino también las situaciones del contexto que se encuentran inmersas dentro de la propuesta.

Por otro lado, la potencialidad que se le atribuye a un escenario de investigación para generar un proceso indagativo en los estudiantes, radica en una invitación, no puede ser una imposición. Es decir, la situación per se no es suficiente para la constitución de un escenario, éste “solo se constituye como tal si los estudiantes sí aceptan la invitación. Un escenario de investigación es en sí una relación” (Skovsmose, 2000, p. 8). Lo que para algunos estudiantes es llamativo, puede no estar dentro de las consideraciones de otro grupo de estudiantes, es por esto que, al momento de establecer un escenario de investigación es importante que las actividades en las cuales participan estudiantes y profesor estén provistas de significado para ellos.

5.2.5. *Categorías de Análisis*

Para identificar el desarrollo de la alfabetización matemática en estudiantes del grado séptimo de la Institución Educativa Alejandro de Humboldt y teniendo en cuenta que está conformada por tres conoceres: matemático, tecnológico y reflexivo, y que “(...) Los diferentes tipos de conoceres se integran de diversas maneras” (Skovsmose, 1994, p. 136), se opta por tomar como categorías de análisis las características del conocer reflexivo desde una perspectiva socio crítica propuestas por Mancera (2020) y los actos dialógicos propuesto por Alrø y Skovsmose (2012).

5.2.5.1. Características del Conocer Reflexivo.

Pensando en el otro: Esta característica del conocer reflexivo, se basa en la preocupación y consideración hacia los demás, es decir, hace referencia a la capacidad de una persona para considerar y entender las perspectivas, necesidades y circunstancias de los demás. En lugar de ver al otro como un reflejo de uno mismo, se reconoce al otro como un ser humano único, que experimenta sufrimiento y se le otorga importancia a su bienestar. Esto implica alejarse de una visión egocéntrica y reconocer la existencia y los derechos de los demás individuos, por lo que resulta importante hacer la distinción entre la cara y el rostro del otro. El encuentro con el rostro del otro nos exige abandonar la actitud de indiferencia y reconocer la profunda humanidad que reside en su sufrimiento (Guedes, 2007, como se citó en Mancera, 2020).

Lectura crítica y matemática: esta característica del conocer reflexivo “hace referencia a la capacidad de comprender y evaluar las diferentes prácticas que involucran las matemáticas” (Mancera, 2020, p. 213), así, permite analizar y cuestionar de manera crítica y reflexiva los textos y recursos matemáticos, considerando su contexto social, cultural y político. De esta manera, se destaca la importancia de comprender y evaluar críticamente las diferentes prácticas que involucran las matemáticas. Esto implica ir más allá de la mera decodificación de palabras y lenguaje escrito, y comprender la relación entre el texto matemático y su contexto. (Freire, 1989, como se citó en Mancera, 2020).

Prácticas con las matemáticas: Esta característica se refiere al uso y aplicación de las matemáticas, vistas como una herramienta que permite comprender y abordar problemáticas y situaciones presentes en el contexto del estudiante. De este modo, resulta importante “considerar el constructo disposiciones-intenciones-acciones” (Mancera, 2020, p. 215), con el fin de promover en los estudiantes motivaciones y significados en el aprendizaje de las matemáticas, y

de esta manera los estudiantes opten por participar activamente en las prácticas con las matemáticas.

Además, según Mancera (2020), las prácticas con las matemáticas deben ir más allá de los contenidos curriculares establecidos, promoviendo una visión más humana que considere al otro y a lo otro. Esto implica que los estudiantes comprendan que las matemáticas pueden ser aplicadas en su vida cotidiana y en su propia realidad, fortaleciendo así sus vínculos sociales. Esta forma de percibir prácticas con las matemáticas implica reflexionar acerca de los conocimientos matemáticos que se orientan en las instituciones educativas, con el fin de buscar superar la idea de que las matemáticas son universales y estáticas, reconociendo su dependencia cultural, su construcción histórica y social.

Colectividad: Esta característica según Mancera (2020), enmarca la importancia del trabajo colaborativo, valorando la participación activa y conjunta entre los participantes. La colectividad también implica reconocer que las acciones y decisiones propias tienen un impacto en los demás, y que el trabajar en conjunto contribuye al logro de resultados más significativos y enriquecedores. Esta capacidad y disposición de los individuos para trabajar de manera colaborativa y participativa es una forma de promover la igualdad de voces, la solidaridad y el respeto mutuo, reconociendo la importancia de la diversidad y la interacción social.

La colectividad permite superar la visión individualista, permitiendo reconocer al otro. Esta interacción genera un intercambio de ideas, reflexiones y argumentos. Se busca que el grupo funcione como una unidad, donde cada integrante exprese su punto de vista y se tomen decisiones de manera conjunta. Para ello, la noción de diálogo se torna importante, explicaremos a continuación los desarrollos teóricos que esta práctica explora.

5.2.5.2. Actos Dialógicos.

Alro y Skovsmose (2012) definen el diálogo como un *proceso de indagación* en busca de nuevas comprensiones, donde los participantes se comprometen con curiosidad, crítica y reflexión hacia los demás y el tema en discusión. El diálogo implica cuestionar nuestras comprensiones actuales y examinar tanto lo nuevo como lo conocido, así este proceso no sigue un camino predefinido. Por lo que participar en un diálogo implica sumergirse en el proceso de investigación (Alro y Skovsmose, 2012).

En esta perspectiva, el diálogo implica la *toma de riesgos*, como: abordar temas inesperados, perder el control o enfrentar obstáculos. Así, ofrece la oportunidad de explorar y adoptar nuevas posibilidades. Por esta razón, *mantener la igualdad* se convierte en un principio fundamental en el diálogo, con el fin de promover el respeto por la diversidad. Esto no significa que todos los participantes involucrados en el diálogo sean iguales en conocimiento o habilidades, sino que, lo que se pretende es mantener una relación interpersonal equitativa y respetuosa (Alro y Skovsmose, 2012).

De este modo, según Alro y Skovsmose (2012) los actos dialógicos nos permiten examinar y comprender los diferentes elementos que componen un diálogo. A partir de investigaciones identificaron ocho actos dialógicos que no deben ser vistos como únicos, y que, además, surgen de manera flexible y no necesariamente en un orden fijo y predeterminado. Estos actos dialógicos son: *entrar en contacto, localizar, identificar, defender, pensar en voz alta, reformular, controvertir y evaluar*.

- **Entrar en contacto:** Según Alrø, H. & Skovsmose, O. (2012) “significa ponerse a tono cada uno con el otro. Significa estar presente y estar consciente de lo que está ocurriendo en la conversación y de las contribuciones de cada uno de los participantes” (p. 159). Así, es importante que este acto dialógico no se limite solo al iniciar un diálogo, sino que esté presente

durante todo el proceso de interacción, pues refleja el interés genuino de los involucrados por participar y compartir a lo largo del proceso de investigación. Entrar en contacto va más allá de estar presente, implica escuchar activamente, estar presto a recibir las ideas y perspectivas de los demás, por lo tanto, requiere una relación basada en el respeto mutuo, la responsabilidad compartida y la confianza. (Alrø, H. & Skovsmose, O. 2004, como se citó en Mancera, 2020)

- **Localizar (percibir):** Este acto dialógico requiere una actitud de curiosidad y disposición para explorar diversos caminos en una investigación. De acuerdo con Alrø, H. & Skovsmose, O. (2012) “hace referencia a hallar algo nuevo o algo de lo cual uno no era consciente” (p. 160), es decir, se trata de explorar y poner en práctica diferentes posibilidades antes de descartarlas, incluso las que se consideran inadecuadas a primera vista. Esta fase de localización puede llevarse a cabo mediante la formulación de preguntas de indagación, que invitan a considerar nuevos escenarios. Sin embargo, en un proceso de indagación abierto, existe el riesgo de pasar por alto hallazgos relevantes por desconcentrarse en ideas particulares, por eso es importante mantener un ambiente dinámico, donde se cultive la curiosidad para percibir y examinar todas las posibilidades antes de tomar decisiones (Alrø, H. & Skovsmose, O. 2012).

- **Identificar:** Este acto dialógico implica poder reconocer y hacer accesible el tema o asunto de discusión a cada uno de los participantes en la investigación. Este proceso va más allá de simplemente localizar perspectivas, ya que implica la clarificación y la cristalización de ideas matemáticas específicas (Alrø, H. & Skovsmose, O. 2012). Mientras que en el proceso de localización resultan pertinentes preguntas del tipo “qué tal si” para la exploración de perspectivas, en el proceso de identificar se hace necesario que surjan preguntas “por qué”, pues de esta manera; como lo resalta Mancera (2020) “este acto se convierte en un proceso más

explicativo que el acto de localizar, pues las ideas se constituyen de manera clara y precisa” (p. 151).

- **Defender:** Según Alrø, H. & Skovsmose 2004 (como se citó en Mancera, 2020) defender es “presentar ideas o puntos de vista no como la verdad absoluta, sino como algo que puede examinarse” (p.151). Es decir, defender implica no solo expresar y respaldar las ideas propias sino estar abierto a considerar sugerencias e incluso argumentar a favor de las ideas de los demás, así, la idea como tal no es persuadir sino examinar cuidadosamente cada perspectiva con el fin de avanzar en la investigación (Alrø, H. & Skovsmose, O. 2012).

- **Pensar en voz alta:** De acuerdo con Alrø, H. & Skovsmose, O. (2012) “significa expresar los pensamientos, las ideas y las emociones incluidos en el proceso de indagación. Pensar en voz alta es una manera de hacer público lo que solamente se puede experimentar desde adentro” (p. 165). El pensar en voz alta es esencial para mantener el carácter colaborativo y colectivo del proceso de indagación, ya que permite que los participantes compartan sus ideas y reflexiones contribuyendo al avance de la investigación. Es importante tener en cuenta que pensar en voz alta no siempre se limita a la palabra hablada, sino que puede incluir gestos, acciones, dibujos, escritos, y otros medios de comunicación que ayuden a transmitir y compartir ideas (Alrø, H. & Skovsmose, O. 2012).

- **Reformular:** Este acto dialógico implica repetir o parafrasear lo que ha sido expresado por otro participante en el diálogo, con el propósito de confirmar la comprensión mutua y contribuir a una mayor claridad de las ideas discutidas. Reformular puede realizarse con sutiles modificaciones en el tono de voz o añadiendo detalles pertinentes que ayuden a enfocar la atención en aspectos claves. De esta forma, este acto dialógico es una herramienta fundamental para promover la comprensión mutua y el intercambio de ideas en un diálogo (Alrø, H. & Skovsmose, O. 2012).

- **Controvertir (desafiar):** El acto dialógico de controvertir significa según Alrø, H. & Skovsmose, O. 2012 “cuestionar el conocimiento ya establecido. Significa cuestionar supuestos que por el momento han sido aceptados sin discusión” (p. 167). De esta manera, controvertir consiste en desafiar las ideas adoptadas mediante una exploración crítica y reflexiva, que puede llevarse a cabo mediante preguntas que plantean nuevas alternativas, como lo es las preguntas del tipo “qué tal si”. Generar controversia es algo importante en el proceso de indagación, pues permite un proceso abierto que tenga en cuenta la existencia de posibilidades que aún no han sido consideradas y que enriquecen la investigación.

- **Evaluar:** Este último acto dialógico implica la acción de analizar y juzgar un desempeño, una idea o una situación con el fin de darle un valor. Esta evaluación puede manifestarse de diversas maneras como: corrigiendo errores, proporcionando críticas constructivas, realizando una retroalimentación, brindando consejos útiles, o reconociendo el mérito de un trabajo (Alrø, H. & Skovsmose, O. 2012).

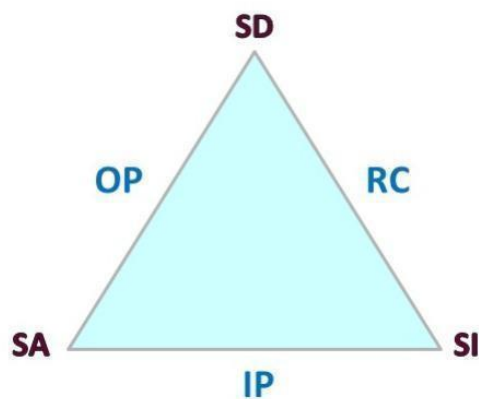
6. Diseño Metodológico

Para el desarrollo de esta práctica pedagógica se utilizó un enfoque cualitativo. Este enfoque es una forma multidisciplinar de acercarse al conocimiento de la realidad social, vale decir, permite conocer el significado y visión de los sujetos participantes con respecto a su realidad. La prioridad - del enfoque cualitativo - es la descripción, análisis e interpretación de lo interesado de manera global y lo más natural posible, con rasgos de flexibilidad en el desarrollo “siguiendo lineamientos orientadores de un determinado método, pero no reglas preestablecidas” (Arraiz, 2014, p. 22).

Teniendo en cuenta que, “en investigaciones cualitativas los datos no se recogen, los datos se construyen” (Manzano, 2016, p. 87), este proyecto se acoge al enfoque cualitativo a raíz de la incertidumbre que puede generar la implementación de escenarios de investigación, lo que a su vez permite aproximarse a los discursos que se presentan entre los participantes, sus prácticas dentro del aula y las relaciones que se producen. De igual manera, su uso posibilita un acercamiento a los estudiantes, su contexto y sus antecedentes de manera holística (Corona, 2018), abriendo así la posibilidad de entender la realidad del estudiante con base en su propia perspectiva y sus experiencias vividas en el entorno en el cual se desenvuelve, tarea primordial de la investigación cualitativa.

Por otro lado, esta práctica pedagógica se desarrolló bajo el método de la investigación crítica propuesto por Vithal (2000), Skovsmose y Borba (2004), Skovsmose (2015). Esta metodología implica investigar lo que aún no es, pero tiene posibilidades futuras de ser, es así que en este proceso de investigación tiene sentido hablar de tres situaciones: actual (SA), imaginada (SI) y dispuesta (SD), relacionadas por medio de tres procesos cognitivos: imaginación pedagógica (IP), organización práctica (OP) y razonamiento crítico (RC).

Figura 5: Modelo de la investigación crítica.



Nota. Tomado de Skovsmose y Borba (2004).

Situación actual (SA): En el contexto de la investigación crítica la SA hace referencia a una realidad concreta y existente que se analiza y problematiza desde una perspectiva socio crítica, es decir, esa realidad se convierte en objeto de estudio pues se caracteriza por presentar desafíos y problemáticas, en este caso presentes en el contexto educativo que requieren una reflexión profunda por parte de los investigadores. De esta manera, la investigación crítica no se limita a aceptar la situación tal como está, sino que busca comprenderla y promover cambios o alternativas que aborden las cuestiones sociales, culturales y políticas presentes en ella. Es por esto que la situación actual es el punto de partida de la investigación para la reflexión y la acción transformadora en el marco de la investigación crítica sobre las prácticas educativas.

Imaginación pedagógica (IP): Hace referencia al proceso creativo y reflexivo que permite concebir situaciones alternativas a la situación actual en la clase, es decir, que implica la creación de situaciones imaginadas, donde se pongan en juego propuestas de cambio frente a la situación actual. Esta capacidad es clave en la metodología de la investigación crítica, pues impulsa a los investigadores a indagar, explorar y considerar distintas perspectivas, en especial

aquellas relacionadas con la justicia social, la equidad y la democracia. En conclusión, la imaginación pedagógica se dirige hacia la construcción de un futuro deseado, pues busca vencer los límites impuestos por la realidad presente y se apoya en el conocimiento teórico y en las experiencias sociales para crear una situación Imaginada (SI), que representa una visión alternativa de la educación y la enseñanza actual.

Situación imaginada (SI): Es un escenario hipotético, producto del proceso de imaginación pedagógica, en el que se exploran y plantean posibles cambios de la situación actual. Es un espacio que da lugar a la creatividad, donde se pone en manifiesto una visión idealizada de lo que podría ser la situación actual. Cabe resaltar, que la situación imaginada es dinámica y flexible en la transformación de elementos ya existentes, además, según Vithal (2000), la SI implica que la conexión entre la teoría y la práctica no es directa, esto significa que existe una separación o desvinculación del contexto teórico y su posterior reubicación en la práctica; en otras palabras, la SI reconoce que la teoría no se aplica de manera inmediata y directa en la realidad concreta, sino que requiere ser adaptada y contextualizada en el entorno práctico.

Organización pedagógica (OP): En este proceso de la investigación crítica se diseñan y planifican las actividades prácticas que faciliten la transición entre la situación actual y la situación dispuesta, con el fin de generar una situación que se asemeje a la situación imaginada. De esta manera, la organización práctica considera la interacción entre los participantes y promueve la reflexión crítica y construcción de alternativas.

Situación dispuesta (SD): Es una alternativa práctica que se da como respuesta a la situación actual, teniendo en cuenta la situación imaginada, de esta forma establece una nueva configuración de la realidad, teniendo en cuenta las alternativas deseadas en la SI. Así, la SD, es una situación construida influenciada por la SI, que se crea a través de la participación de los miembros de la investigación. Cabe señalar, que no siempre coincide con lo imaginado, la

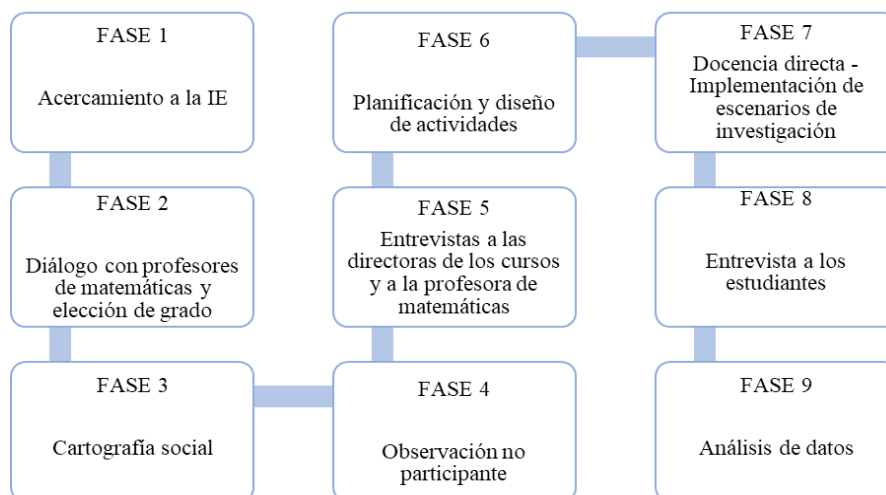
situación dispuesta está rodeada de complejidades que pueden dificultar la relación entre la SA y la SI, de esta manera, esta situación se cataloga como un espacio experimental, que permite comprender mejor la realidad de la clase y buscar nuevas alternativas.

Razonamiento crítico (RC): En este proceso se vuelve a examinar la situación imaginada a partir de la situación dispuesta una vez esta última ha sido implementada mediante la organización práctica. Este razonamiento implica un análisis detallado y reflexivo sobre la relación entre la imaginación pedagógica y la organización práctica. Su objetivo principal es obtener conclusiones sobre las ideas que dieron origen a la situación imaginada, y contrastar lo que ocurrió en la situación dispuesta, esto con el fin de comprender las alternativas imaginadas y observar nuevas posibilidades por explorar que pueden influir en la investigación. Por tanto, en este proceso se cuestiona la viabilidad entre la imaginación pedagógica y las actividades o recursos formulados a partir de la organización pedagógica.

6.1. Técnicas E Instrumentos de la Estrategia Analítica

Para alcanzar el objetivo general, fue necesaria la recolección de datos a través de una serie de fases que se presentan en el siguiente diagrama:

Figura 6: Fases de la metodología.



Nota. Elaboración propia.

Con el fin de definir el escenario educativo en el cual se iba a desarrollar la práctica pedagógica, en la fase 1 se realizó un acercamiento a la IE-AdH; en un principio se habló con el rector y coordinadora académica de la institución para poner en conocimiento las intenciones de los practicantes. Una vez aceptado el proyecto por parte del rector, se presentó una carta para formalizar y dar apertura a la intervención en el plantel educativo (Ver Anexo 2).

En la siguiente etapa, se llevó a cabo una reunión entre los docentes y los profesores de matemáticas del colegio, con el propósito de presentarles la propuesta de intervención y determinar su nivel de interés. De los asistentes, únicamente dos profesoras demostraron interés: la encargada del grado sexto y la encargada del grado séptimo. Tras evaluar las expresiones de curiosidad e interés, se optó por seleccionar el grado séptimo (7-1 y 7-3), ya que la docente a cargo mostró un mayor entusiasmo por su implementación en sus cursos.

Posteriormente, se destinó una sesión de clase en cada curso para realizar un taller de cartografía social, cada sesión tuvo una duración aproximada de 2 horas. Esta actividad se llevó a cabo con el fin de identificar, desde la perspectiva de los estudiantes, las problemáticas de su entorno. Para la recolección de esa información se usaron mapas de los sectores en los cuales viven los estudiantes, material fotográfico y producción de los estudiantes. Toda la información recolectada sirvió para caracterizar a la población, re-conocer el contexto en el cuál se encuentran, además de identificar las disposiciones-intenciones-acciones de los estudiantes (Skovsmose, 1994) aspectos determinantes para el diseño de los escenarios de investigación a implementar.

Con el objetivo de diseñar un ambiente de aprendizaje tipo 6 que se ajustara a la realidad de los estudiantes de séptimo grado de la Institución Educativa Alejandro de Humboldt, se decidió implementar una cartografía social, como herramienta que posibilitara comprender el contexto donde se encuentran los estudiantes, y de esta manera, identificar problemáticas y temas de su interés, con el propósito de involucrarlos activamente en la planeación e implementación de este espacio de investigación. Para garantizar la participación de todos los estudiantes, en ambos cursos se organizaron grupos según el barrio o la zona donde viven en la ciudad de Popayán. En estos grupos se discutieron diversas problemáticas sociales, ambientales y políticas que los estudiantes consideraban relevantes en sus comunidades, para luego investigarlas en el aula de clase.

En el curso de 7-1, cada grupo socializó sus propuestas, donde surgieron los siguientes temas: agua potable, el mal manejo de las basuras, drogas, inseguridad, contaminación del medio ambiente, robo, chismes, festividades y deportes. Luego, de discutir la importancia de cada temática, los estudiantes identificaron que el tema de las drogas era el común denominador en todos los grupos y uno de los más relevantes, por este motivo, decidieron que este fuera el tema

que guiara el ambiente de aprendizaje tipo 6. Dado que el tema de las drogas es muy extenso, y requiere tiempo para abordarlo adecuadamente, se propuso a los estudiantes que fueran un poco más específicos sobre qué aspecto de las drogas les gustaría analizar. Fue así que, mediante una negociación entre practicantes y estudiantes se acordó que la investigación se centraría en la legalización de la marihuana en Colombia.

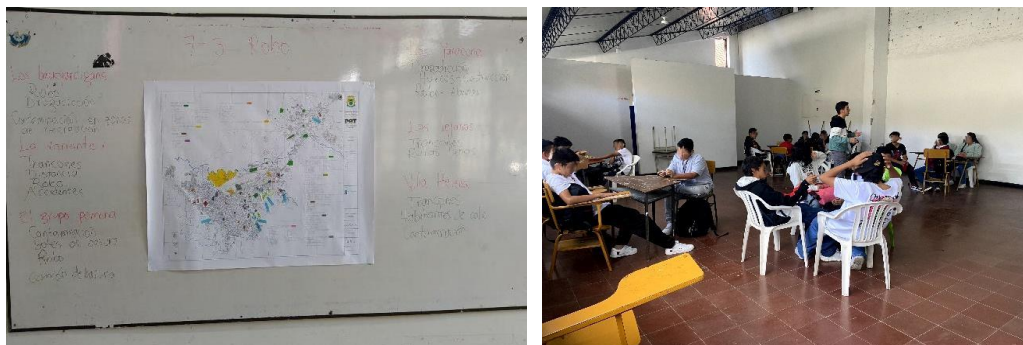
Figura 7: Taller de cartografía con los estudiantes de 7-1, ubicación en los distintos sectores de Popayán.



En el caso del curso 7-3, los estudiantes eligieron temas similares a los de 7-1. En la discusión realizada al momento de elegir un tema que fuera de interés para todos los estudiantes del curso, se decidió abordar la problemática del robo; sin embargo, algunos alumnos expresaron su preocupación por los continuos casos de robo que se presentaban para esa época en su curso. Ante tal preocupación, todos los estudiantes parecían estar de acuerdo, por lo cual, el tema a

trabajar como escenario de investigación con referencia en la vida real, fue el robo en el salón de clase del curso 7-3.

Figura 8: Taller de cartografía social con estudiantes del curso 7-3 de la I.E Alejandro de Humboldt.



En la fase 4, tuvo lugar un primer trabajo de campo en el cual se realizó una observación no participativa que pretendía dar cuenta de la organización del aula de matemáticas, las prácticas educativas que se realizaban dentro del aula de matemáticas, la participación de los estudiantes, identificar espacios de diálogo, entre otros aspectos; para la recolección de información en esta etapa, se hizo uso de diarios de campo. Para entender las dinámicas educativas y sociales de los estudiantes se recurrió a una revisión documental que incluía el PEI, el plan de área de matemáticas e informes socioeconómicos de los estudiantes realizados por el establecimiento educativo.

Además, se realizaron entrevistas semiestructuradas a la profesora titular de matemáticas y a las directoras de los respectivos cursos (Ver Anexo 3), esto con el fin de conocer de primera mano las principales problemáticas de los estudiantes a nivel académico y socio-cultural que ellas podían identificar, pues como menciona Kvale (2011), la entre-vista es una conversación en la cual ocurre un intercambio de visiones sobre un tema en común.

De igual manera, fue necesario identificar la concepción de matemáticas que tenía la profesora y, saber desde su perspectiva, cuál es el ambiente propicio para la enseñanza de las matemáticas; de esta manera, se hace un contraste con lo observado y se identifica si estas concepciones son heredadas a los estudiantes mediante el desarrollo de las clases. Es así, gracias a la entre-vista, que se puede construir conocimiento a través de una conversación entre los sujetos implicados y en la cual prima obtener la interpretación que tiene el entrevistado de los fenómenos o situaciones de interés (Kvale, 1996). Para la recolección de estos datos se hizo uso de grabaciones de audio.

La fase 6 consistió en planificar y diseñar las actividades que guiaron los diferentes ambientes de aprendizaje. Se definieron dos escenarios de investigación bajo la referencia de las matemáticas puras, el primero llamado *Cuadrado de Cuadrados* que se desarrolló de manera individual en ambos cursos, el segundo se constituyó gracias al juego *Asalto al castillo*, el cual se trabajó de manera grupal; la actividad que guió el escenario de investigación con referencia en una semirrealidad fue el *Problema de Josefo* y se diseñó para trabajar algunas sesiones de manera individual y otras en grupo. Por último, para el caso del curso 7-1 se diseñó el escenario de investigación con referencia en la vida real teniendo como referencia la problemática de la legalización de la marihuana en Colombia, tema escogido por estudiantes y practicantes en la fase 3; para este escenario, en 7-3 se trabajó con el tema del robo en el salón de clase.

En esta etapa, las actividades no tuvieron un diseño definitivo puesto que, la intención era que las clases se desarrollaran de acuerdo a la dinámica de las mismas a partir de las opiniones y participaciones que surgían de los estudiantes, de manera que no fueran actividades cerradas y establecidas únicamente por las indicaciones de los practicantes. En el siguiente capítulo se describe con mayor detalle en qué consistía cada uno de estos escenarios de investigación.

En la fase 7, se llevó a cabo un segundo trabajo de campo en el que se implementaron los AA mencionados anteriormente. Para el caso del curso 7-1, se realizaron 17 sesiones de clase: 2 sesiones para el primer AA tipo 2, 3 sesiones para el segundo AA tipo 2, 5 sesiones para el AA tipo 4 y 7 sesiones para el AA tipo 6; por otro lado, en el curso 7-3 se realizaron doce sesiones de clase distribuidas de la siguiente manera: dos sesiones para el primer AA tipo 2, tres sesiones para el segundo AA tipo 2, tres sesiones para el AA tipo 4, cuatro sesiones para el AA tipo 6.

Durante su ejecución, mediante una observación participante, se tuvieron en cuenta las características del conocer reflexivo propuestas por Mancera (2020) y los actos dialógicos de Alrø y Skovsmose (2012), como categorías de análisis de la alfabetización matemática. Para la recolección de datos se hizo uso de: diarios de campo, material audiovisual y producción de los estudiantes. Se contrastaron los resultados con los de la primera observación y se realizó un análisis de esos datos, con apoyo en la transcripción de episodios y registros audiovisuales.

En el caso del AA tipo 6, en el curso 7-1, la idea de investigar sobre los pros y contras de la legalización de la marihuana en Colombia, se convirtió en el eje central para el montaje de este escenario de investigación, cuyo fin era propiciar el desarrollo de la alfabetización matemática en los estudiantes del curso de séptimo uno, y así, promover en ellos una postura más crítica sobre este tema haciendo uso de las matemáticas. En el diseño del escenario de aprendizaje con referencia en la vida real, se identificaron tres momentos que reflejan la metodología empleada para abordar la problemática elegida. Estos momentos se desarrollaron en cuatro sesiones de clase de aproximadamente dos horas y tres sesiones de 1 hora, durante los meses de octubre y noviembre del año 2023.

El primer momento consistió en crear conciencia y contribuir a que los estudiantes se familiarizaran con la problemática, explorando los aspectos negativos y positivos relacionados con la legalización de la marihuana, con el fin de proporcionar a los estudiantes una visión

equilibrada y más completa acerca de la problemática, brindando información para futuras discusiones y evitando que sus argumentos se basarán únicamente en consideraciones morales. Dado que el tema de la marihuana genera debates y opiniones encontradas, es muy común observar que en su mayoría se rigen por la moral, por esta razón, se optó por indagar sobre la postura actual de los estudiantes frente a “la marihuana y su legalización en Colombia”, con el planteamiento de las siguientes preguntas que fueron abordadas en grupos de trabajo:

- ¿Qué has escuchado acerca de los efectos de la marihuana?
- ¿Qué se le viene a la cabeza cuando escuchan la palabra “Marihuana”?
- ¿Qué opinas sobre el uso medicinal de la marihuana?
- ¿Crees que la marihuana debería ser legal o ilegal en Colombia? ¿Por qué?

Posteriormente se presentaron dos videos, el primero titulado "La marihuana ¿es nociva o saludable?"³, el cual abordó tanto los aspectos positivos como los negativos de la marihuana, además de proporcionar una breve historia sobre cómo su consumo se convirtió en un acto ilegal. De esta forma, el objetivo principal de este video fue resaltar la importancia de analizar críticamente los efectos de la marihuana en la salud, considerando tanto sus posibles beneficios medicinales como los riesgos asociados con su uso recreativo, teniendo en cuenta aspectos científicos, médicos y sociales relacionados con esta planta.

Por otro lado, el segundo video titulado “Sí a la legalización de la marihuana, pero...”⁴, proporcionó información sobre la situación en otros países que han optado por legalizar el uso recreativo marihuana, así como los posibles beneficios que esta medida podría tener para el país, sin embargo, se destacó que no se pretende idealizar el consumo de la marihuana, ya que conlleva problemas que afectan al individuo que la consume. A pesar de ello, se planteó la legalización

³ Ver (CuriosaMente, 2020)

⁴ Ver (La Pulla, 2023)

como una alternativa, dado que la lucha contra la marihuana por parte del país no ha traído consigo los mejores resultados.

Con base en los videos y los comentarios que surgieron luego de verlos, se sacaron algunos aspectos relevantes que se mencionaban en ellos y permitían comprender un poco más acerca de la marihuana, sus efectos, y cómo la medida de legalizar su uso recreativo puede afectar al país, así surgieron los siguientes interrogantes:

- ¿Cuál es el verdadero impacto de la marihuana en comparación a otras drogas?
- ¿Cuál es el impacto económico de la lucha contra la marihuana en Colombia?
- ¿Qué beneficios económicos y laborales genera la marihuana medicinal?
- ¿Cuál es el impacto económico y las proyecciones fiscales si se piensa en la legalización de la marihuana en Colombia?
- ¿Cuál es la postura actual frente al uso de la marihuana a nivel nacional?

El segundo momento inició con la conformación de los grupos de trabajo, permitiendo así que los estudiantes investigaran sobre los interrogantes anteriormente presentados, rescatando aspectos relevantes que permitieran entender la problemática y tomar una postura como ciudadanos. La última etapa, se basó en la presentación de los reportes de sus investigaciones y se cerró con un debate, con el fin de dar respuesta a la pregunta: ¿Le conviene a Colombia que el uso recreativo de la marihuana se apruebe?

Para el caso de 7-3, tanto estudiantes como practicantes fueron ultimando detalles para el desarrollo de este escenario. En primer lugar, se hizo una discusión frente al por qué de la elección de ese tema, cuáles eran los motivos y consecuencias que traía el robo en el salón de clase, con el fin de definir los subtemas que permitirían entender mejor esta problemática. Con base en los aportes de algunos estudiantes y los practicantes, se llegó a los siguientes subtemas:

- ¿Cuál es el curso de la IE Alejandro de Humboldt en el que más roban?

- ¿A quiénes afecta más el robo?, ¿hombres o mujeres?
- ¿Es más seguro el colegio o fuera del colegio?
- ¿Cuáles son los objetos que más se roban en los cursos de la IE Alejandro de Humboldt?

Los estudiantes conformaron cuatro grupos, cada uno para un subtema. Una vez organizados, cada grupo definió internamente las actividades que les permitiría responder a su pregunta. En general, acordaron realizar encuestas a diferentes cursos de la IE Alejandro de Humboldt, en los cuáles harían una serie de preguntas a los estudiantes de dichos cursos; además, establecieron organizar los datos en tablas y gráficas.

Teniendo en cuenta que “la entrevista en investigación cualitativa es un lugar donde se construye conocimiento y mediante el cual conocemos experiencias, sentimientos y esperanzas del otro, desde su propia perspectiva y sus propias palabras” (Pardo & Poveda, 2021), se aplicaron entrevistas semiestructuradas⁵ a los estudiantes después de finalizada la intervención, con el fin de relacionar lo dicho por los estudiantes con los objetivos planteados y reflexionar acerca del impacto que pudo tener la implementación de escenarios de investigación en la alfabetización matemática. Se realizaron nueve entrevistas a los estudiantes de 7-1, 6 fueron en grupo y las restantes individuales y en el curso de 7-3 se aplicaron siete entrevistas, de las cuales cuatro fueron en grupo y las otras tres individuales.

⁵ Ver formato de entrevista en el Anexo 4.

7. PRESENTACIÓN Y DISCUSIÓN DE LOS DATOS

En este apartado se presenta y analiza la información obtenida a lo largo del trabajo de campo, teniendo en cuenta el marco teórico propuesto en este documento. Dentro de los resultados obtenidos se encuentran transcripciones de episodios que tuvieron lugar en las sesiones de clase, las cuales serán identificadas con un código {CG/#-XX}, donde “C” hace referencia a que es una transcripción del episodio de una clase, “G” el grado en el cual se presentó (1 para 7-1 y 3 para 7-3), “#” para el número del episodio y XX señala la línea dentro del episodio; por ejemplo, el código {C1/6-10} indica la línea 10 dentro del episodio 6 que ocurrió en una clase del grado 7-1. De modo similar, si la transcripción es de una entrevista, su código será {EG/#-XX}, donde “E” indica que es la transcripción de un episodio de entrevista.

7.1. DESAFIANDO EL ENFOQUE TRADICIONAL: UN ANÁLISIS DESDE LOS ACTOS DIALÓGICOS

7.1.1. *Cuadrado de Cuadrados (Primer AA Tipo 2)*

En las dos primeras sesiones de clase de cada curso, se planteó la actividad *Cuadrado de Cuadrados*. Este primer escenario de investigación, un ambiente de aprendizaje con referencia en las matemáticas puras, estuvo dirigido bajo la pregunta inicial: *¿Cuál es la menor cantidad de palitos necesarios para construir un cuadrado de cuadrados?*⁶. Esta actividad se presentó con el fin de que los estudiantes exploraran diversas maneras de responder a la pregunta planteada de acuerdo a la interpretación que podían tener de la misma, así como las diferentes condiciones que se podrían establecer para definir una solución.

En el transcurso de su desarrollo, los estudiantes manifestaron diferentes interpretaciones y una vez simplificada la actividad a unas condiciones específicas, surgieron propuestas que

⁶ Ver (Skovsmose y Milani, 2014).

permitieron dirigir la atención de los estudiantes en encontrar una fórmula para la solución. A continuación se presentan algunos episodios:

Una vez se presentó la situación que iba a orientar el primer AA, los estudiantes estaban tratando de interpretar la expresión “cuadrado de cuadrados”, para poder dar respuesta al interrogante “¿Cuál es la mínima cantidad de palitos necesaria para construir un cuadrado de cuadrados?”. En un momento de la sesión, el estudiante EJ estaba conversando con otros dos compañeros y al parecer estaba explicándoles su respuesta a esa pregunta, con ayuda de un cubo de Rubik. Decimos “al parecer”, porque no pudimos conocer cómo se originó tal conversación y cómo es que el primer estudiante llegó a relacionar el juguete con la actividad; se presenta un fragmento (Ver Clase 1/7-3 - Minuto 9:35 - 13:55) de lo que se pudo rescatar de ese momento, después de que los tres estudiantes llamaran a uno de los practicantes para comentar la idea que tenían.

Con respecto a los actos dialógicos de este episodio, se puede decir que en un primer instante, los estudiantes *entran en contacto* cuando los dos compañeros aceptan escuchar la contribución del estudiante EJ, existe un interés por su idea y continúan en un proceso colectivo de exploración. De igual manera, el acto dialógico de *entrar en contacto*, se presenta cuando los estudiantes llaman al practicante para explicar la idea que tenían, y el practicante presta atención a la explicación, está presente en una relación de responsabilidad al considerar la idea de los estudiantes y dar validez a su exploración.

Figura 9: Uso del cubo de Rubik para entender la expresión “cuadrado de cuadrados”.



Por otro lado, este episodio es significativo en el sentido que brinda un ejemplo valioso para el acto de *pensar en voz alta* cuando EJ materializa su idea en el cubo de Rubik. Para esa época en la que se estaba desarrollando la primera actividad, era común ver a muchos estudiantes del curso con un cubo de Rubik. De manera que, cuando el niño verbaliza su idea por medio del juguete, hace visible su perspectiva y además invita a los demás estudiantes del salón a una investigación colectiva, invitación que fue aceptada por muchos de sus compañeros.

Tal como el mismo EJ expresa en una entrevista, cuando se le pregunta por una experiencia memorable de las actividades: “cuando hicimos ese cuadrado de cuadrados con el cubo de Rubik, que con un simple juguete se puede hacer matemáticas, no simplemente jugar” (Ver Entrevista VS/EA/EJ, Minuto 8:27 - 9:06), se corrobora lo señalado por Alrø y Skovsmose (2002) en relación con el acto dialógico de pensar en voz alta “Los estudiantes pueden aprender a través del proceso de expresar sus ideas y entendimientos en un diálogo de investigación colectivo” (p. 107).

Episodio 1

{C1/1-1} **JJ:** *Hay dieciséis palitos.*

{C1/1-2} **Practicante:** *¿Por qué?*

{C1/1-3} **JJ:** *Porque cada cuadro tiene cuatro palitos*

{C1/1-4} **Practicante:** *Sí*

{C1/1-5} **JJ:** *Entonces para tener la menor cantidad... para hacer un cuadro con cuadrados la menor cantidad sería cuatro y pues cuatro por cuatro es dieciséis.*

{C1/1-6} **Practicante:** *Muchachos, ¿escucharon el argumento de JJ?*

{C1/1-7} **MM:** *Sí profe, yo sí lo escuché.* [Sus compañeros asienten con la cabeza mostrando su apoyo]

{C1/1-8} **Practicante:** *¿Qué opinan de eso?... ¿Alguien tiene por decir o están de acuerdo?...* [ED se acerca y me comparte su idea]

{C1/1-9} **Practicante:** *Vamos a escuchar algo que se dio cuenta la chica...*

{C1/1-10} **JA:** *ED*

{C1/1-11} **Practicante:** *ED...bueno, vamos a escuchar lo que ella tiene para decirnos.*

{C1/1-12} **ED:** *Lo que dice JJ, puede que sea cierto de que cada cuadro tenga cuatro palitos, pero el cuadrado comparte, tiene compartimientos de un palito con otro.*

{C1/1-13} **MM:** *Tiene doce, en vez de dieciséis tiene doce.*

{C1/1-14} **Practicante:** *¿Si entendieron la idea que ella expresa?*

{C1/1-15} **JJ:** *Pero podría estar mal, porque si separan los cuadros cada uno tendría tres palitos o menos.*

{C1/1-16} **Practicante:** *Si los separamos, pero y aquí, la figura de aquí [señala el dibujo que hizo Jerónimo]*

{C1/1-17} JI: *Debería tener todos cuatro* [mientras se siguen explicando las dos propuestas ED decidió seguir defendiendo su idea saliendo al tablero a representar lo que decía su compañero, mostrando que si estaba bien pero no era el mínimo de palitos para responder a la pregunta]

...

{C1/1-18} ED: *La menor cantidad son...*

{C1/1-19} Practicante: *¿La menor cantidad son cuántos?*

{C1/1-20} ED: *Seis*

{C1/1-21} Practicante: *¿Para ese?*

{C1/1-22} ED: *Porque también está lo del tamaño de los palitos*

{C1/1-23} Practicante: *Miren que por acá están tomando otro aspecto que no habíamos tenido en cuenta y es el tamaño de los palitos. Porque aquí estamos asumiendo que un palito, digamos así, mide uno, pero nos dice ED, qué pasaría si en vez de medir uno mide dos, por ejemplo, entonces miren que si miden dos entonces ¿Cuántos palitos se necesitarían?*

{C1/1-24} JI: *Son seis, son seis*

En el intento de dar una respuesta al interrogante inicial, JI en la línea {C1/1-1} *piensa en voz alta* al momento de compartir su respuesta, el practicante con el fin de *identificar* la propuesta del estudiante aboga por una explicación, vemos en las líneas {C1/1-3} y {C1/1-5} que el estudiante *defiende* su idea dando a conocer la justificación que lo llevó a decir que la mínima cantidad de palitos para construir un cuadrado de cuadrados es 16. Como se observa en la línea {C1/1-7} sus compañeros *entran en contacto* y por esto ED considera su aporte y decide

involucrarse en la conversación, en la línea {C1/1-12} *piensa en voz alta y controvierte* la idea de su compañero al señalar que hay un aspecto que no ha tenido en cuenta y que afecta la cantidad de palitos.

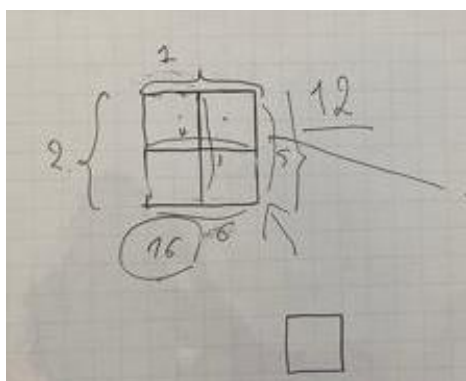
Los demás compañeros al inicio manifestaban con sus gestos estar de acuerdo con la respuesta presentada por JI, quizás porque era considerado el estudiante “pilo” en la clase de matemáticas; sin embargo, una vez ED *desafía* su explicación se observa cómo empiezan a analizar mejor la situación presentada por sus compañeros, y es aquí donde MM en la línea {C1/1-13} *entra en contacto y reformula* la perspectiva de su compañera, al mencionar “tiene doce, en vez de dieciséis tiene doce”.

A pesar de esto, JI no estaba totalmente de acuerdo con el argumento de ED, por lo cual señala el aspecto que lo hace dudar, *desafiando* la idea de su compañera al añadir: “Pero podría estar mal, porque si separan los cuadros cada uno tendría tres palitos o menos”, ante esto ED decide ilustrar en el tablero las palabras de su compañero y mostrarle que, aunque su justificación tiene sentido, dieciséis palitos no equivalen a la menor cantidad para construir un cuadrado de cuatro cuadrados, con su explicación consigue un acuerdo con su compañero. Así, se observa una interacción en la clase de matemáticas donde no solo el profesor tiene la palabra, sino que los estudiantes asumen su rol en la investigación y toman el control, generando un espacio de exploración de ideas y presentación de argumentos con el fin de encontrar maneras de dar respuestas a la pregunta en cuestión, permitiendo que surja la relación estudiante-estudiante que no se evidenciaba en anteriores clases.

Posteriormente, ED como se registró en las últimas líneas de este episodio, se detuvo a analizar que existía otro factor que podía incidir en la cantidad de palitos para construir un cuadrado de cuadrados, por lo tanto, la idea de que sean solo doce puede cambiar. En este caso, el acto dialógico de *controvertir* aparece dando un giro inesperado a la investigación, como se

evidencia en la línea {C1/1-22}, ED *cuestiona* la idea de tomar como un palito al lado de un cuadrado interno del cuadrado de cuadrados, por esto, propone escoger todo el borde del cuadrado como un palito (véase Figura 10), lo que permitió que el número de palitos necesarios para la construcción se redujera a la mitad, así se evidenció una relación entre el tamaño de los palitos escogidos y la cantidad empleada para construir un cuadrado de cuadrados. De esta forma, este nuevo camino de exploración abrió paso a nuevas posibilidades de ilustrar un cuadrado de cuadrados, contribuyendo a que otros estudiantes entraran en contacto, decidiendo participar y compartir sus ideas.

Figura 10: El tamaño de los palitos influye en la cantidad de los mismos.

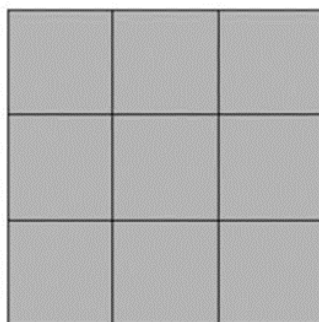


En el Anexo 5, se observan varias producciones de los estudiantes, una muestra de que ellos *localizaron* el aporte de su compañera, y no solamente lo aceptaron, sino que lo emplearon como un punto de partida para *pensar en voz alta* y proponer nuevas representaciones de cuadrados de cuadrados, donde optaron por usar varios palitos de diversos tamaños para sus construcciones. La imaginación y creatividad de los estudiantes fue ampliando la gama de opciones, lo que permitió entrar a una zona de riesgo en la investigación pues ante la diversidad de modelos, resultó complicado explorar todos los casos por cuestiones de tiempo, ante esto se

decidió intervenir y proponer a los estudiantes una convención que permitiera seguir un solo camino en la exploración.

De manera que, el nuevo asunto a explorar era: *¿Cuál es la mínima cantidad de palitos necesaria para construir un cuadrado de cuadrados (como el de la Figura 11) considerando su tamaño?*

Figura 11: Cuadrícula de tamaño 3x3.



Una vez establecidas las nuevas condiciones de la actividad, los estudiantes dibujaban en sus cuadernos cuadrados de diferentes tamaños y contaban los palitos uno por uno, hasta que el estudiante MC hizo un aporte que dio un nuevo sentido a la actividad: hallar una fórmula que permitiera conocer la mínima cantidad de palitos necesaria para construir un cuadrado de cuadrados sin importar su tamaño. De esta exploración, surgieron dos propuestas: la primera de ellas se encuentra en la extensión del episodio (Ver Clase 2/7-3 - Minuto 19:56 - 20:23), en el cual el estudiante MC *localiza* una manera más fácil de contar los palitos; cuando el practicante se acerca al estudiante, nota que el niño ha estado *intentando* y *examinando* su propuesta, y mediante preguntas de comprobación refuerza el acto de *localizar*:

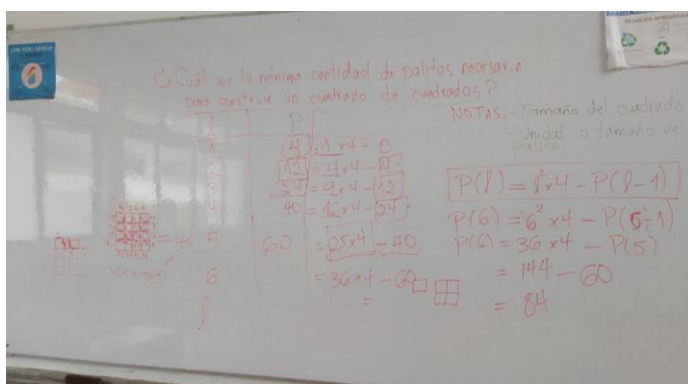
Practicante: *¿Por qué aquí puso nueve por cuatro?*

MC: *Porque son nueve cuadritos y por cuatro, treinta y seis palitos.*

Cada vez que MC examina su perspectiva, está apropiándose de la actividad y está siendo responsable de su aprendizaje. Es así, como MC es capaz de *identificar* una fórmula de recursividad que se puede concretar una vez pone en conocimiento sus ideas a los demás compañeros. Este acto de *identificar*, se intensifica cuando algunos alumnos expresan sus inquietudes, quieren conocer el *porqué* de esa respuesta a la que llega MC, esto obliga que su explicación vaya acompañada de una *justificación*, en la cual se cristalizan ideas matemáticas y se pueda encontrar un algoritmo (Alrø y Skovsmose, 2002) (Ver Clase 2/7-3 - Minuto 30:00 - 35:11).

De igual manera, es mediante esa justificación, que MC puede establecer un puente entre él y sus demás compañeros para compartir lo que hasta ahora ha aprendido, y así, clarificar su perspectiva, *defender* su postura, manifestando lo que esa posibilidad puede involucrar en el proceso de exploración.

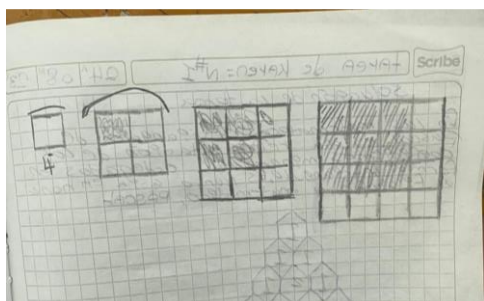
Figura 12: Fórmula de recursividad a partir de la propuesta de MC.



Por otro lado, AV motivada a encontrar otra alternativa, decidió ilustrar en su cuaderno una relación entre los cuadrados que había explorado (véase Figura 13), esta forma de *pensar en voz alta*, le permitió presentar su propuesta y que se reconociera con mayor facilidad. Ella

identificó que cada cuadrado estaba presente o contenido en el cuadrado de siguiente tamaño, por ello resaltaba la importancia de saber la cantidad necesaria para el caso anterior y luego adicionarle los palitos necesarios para aumentar el tamaño. Aunque ella no lo tenía presente, su idea fue la base para construir entre todos una fórmula recursiva que permitió dar respuesta a la pregunta inicial para cualquier tamaño de cuadrado.

Figura 13: La idea de AV para encontrar la mínima cantidad de palitos.



La idea de AV fue presentada a todo el salón con el propósito de que entre todos se identificara si era posible obtener un método que permitiera contar los palitos sin necesidad de dibujar. Como se evidencia en el episodio 2 se invitó a los estudiantes a contar los palitos de la forma como proponía su compañera, con el fin de ver si era posible encontrar un patrón que nos permitiera elaborar una fórmula general para cualquier caso. Los estudiantes aceptaron la invitación al participar y apoyar el trabajo, es decir *entraron en contacto*, gracias a esto estudiantes como BS y MM, en las líneas {C1/2-10}, {C1/2-12} y {C1/2-14} *pensaron en voz alta* al reconocer características de los números obtenidos, que permitieron ir estructurando los datos de tal manera que representaran la idea de AV.

Episodio 2

{C1/2-1} **Practicante:** *Analizamos la propuesta de AV, para ver entre todos que*

encontramos...Aquí se necesitan cuatro palitos más los de afuera, ¿cuántos son los de afuera? [Señala el primer cuadrado de lado 2]

{C1/2-2} JI: *Ocho*

{C1/2-3} Practicante: *Miremos [se cuentan los palitos] muy bien, son ocho, en este de aquí [señala al cuadrado de longitud 3], serían los anteriores más los de afuera, ¿Cuántos son?*

{C1/2-4} JJ: *Doce*

{C1/2-5} Practicante: *¿Y para el siguiente?, [discuten entre ellos]*

{C1/2-6} JS: *Son dieciséis*

{C1/2-7} Practicante: *Hagamos el último, necesitamos cuarenta más los de afuera*

{C1/2-8} JJ: *Veinte*

{C1/2-9} Practicante: *Eso, muy bien, miremos esos números [4, 8, 12, 16, 20]*

{C1/2-10} BS: *Se tiene que sumar cuatro...*

{C1/2-11} Practicante: *¿Escucharon? Él se dio cuenta que debemos ir adicionando cuatro palitos, ¿De qué otra manera podemos reescribir esos números?*

{C1/2-12} BS: *Se suman de cuatro en cuatro, son múltiplos de cuatro*

{C1/2-13} Practicante: *Sí, el primero cuatro por uno, el otro cuatro por dos, y así, ¿Ven alguna relación con los cuadrados? ¿por qué se multiplica el cuatro por esos números?*

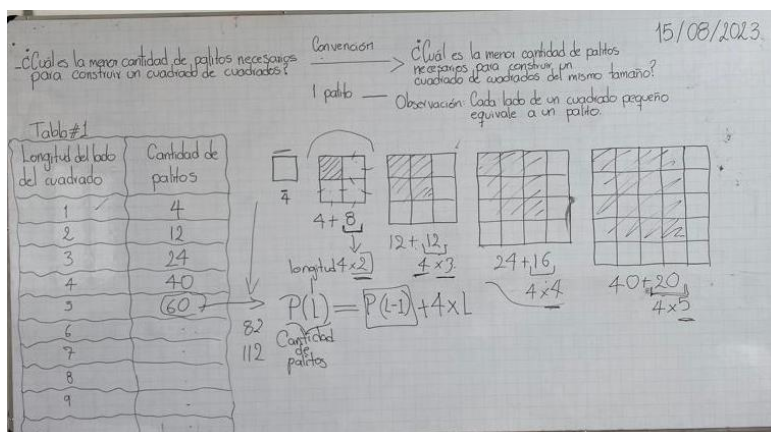
{C1/2-14} MM: *Se suma uno*

{C1/2-15} Practicante: *Bien*

{C1/2-16} BS: *Ah!, esas son las cantidades de columnas que tienen [refiriéndose a la longitud del lado del cuadrado]*

Con la participación de los estudiantes se logra *identificar* la idea inicial de AV y representarla mediante la fórmula recursiva $P(L) = P(L - 1) + 4L$, donde L es la cantidad de palitos del lado del cuadrado y $P(L)$ es la mínima cantidad de palitos para construir un cuadrado de cuadrados de lado L tal como se ilustra en la Figura 14, lo que permite expresar la relación entre la cantidad mínima de palitos y el tamaño del cuadrado de manera más concisa. En el Anexo 6 se evidencia cómo los estudiantes exploraban casos, hacían su respectivo dibujo a mano para constatar que los resultados de la fórmula fueran correctos.

Figura 14: Se explora la idea de AV con todos los estudiantes comprendiendo su funcionamiento.



7.1.2. Asalto al Castillo (Segundo AA Tipo 2)

Se implementó un segundo escenario de investigación con referencia en las matemáticas puras, en este caso se tuvo en cuenta el juego “Asalto al castillo”⁷. Con esta actividad se pretendía generar un espacio de indagación y de trabajo colaborativo, con el fin de observar qué tipo de

⁷ Ver (Junta de Andalucía, s.f.).

reflexiones podrían surgir al momento de explorar las características del juego⁸, cuya dinámica se relaciona con el triángulo de Pascal.

La clase de matemática inició con la invitación de participar en esta nueva actividad, un juego que se esperaba motivara a los estudiantes y los sacara un poco de la rutina de las clases. Una vez presentadas las reglas y entregado el material los estudiantes se dispusieron a jugar. Con el propósito de que la clase de matemáticas no solamente estuviera destinada a jugar sino a analizar la actividad, después de que cada grupo jugó 6 partidas, se invitó a que reflexionaran en las siguientes preguntas: ¿Ganar depende de la casilla? ¿De qué depende?

Episodio 3

{C1/3-1} BS: *Profe, profe no siempre es por los caminos yo vi...yo vi una forma profe, y que por ejemplo, estas partes de acá todas van a ser uno [las diagonales que se señalan de verde en la Figura 15], y de aquí empiezan uno, dos, tres hasta el cinco y aquí uno, dos, tres hasta el cinco [diagonales señaladas de color rojo] y aquí en este van, o sea va, en este va... ahí va seis [este ejemplo se señala de color azul en la Figura 15].*

{C1/3-2} Practicante: *La suma de estos dos*

{C1/3-3} BS: *Sí*

{C1/3-4} Practicante: *Vean, el compañero nos dice que él haciendo este recuadro se dio cuenta de algo, que, en ésta de aquí, en esta diagonal van a ir los números naturales, o sea, uno, dos, tres, cuatro, cinco, igualmente en esta de acá y en las del centro es la suma de estos dos, digamos aquí sería tres más, sería seis [se da un ejemplo para que entiendan la*

⁸ La idea era que los estudiantes exploraran una estrategia de juego para tener mayores probabilidades de ganar. Teniendo en cuenta la cantidad de jugadores, hay una cierta cantidad de caminos para llegar a cada casilla y eso permite calcular las probabilidades que tiene cada jugador de llegar a su respectiva casilla. En la exploración de una estrategia, se podían observar regularidades en el tablero de juego y de igual manera identificar las posiciones estratégicas en las cuales se deben ubicar las fichas para ganar.

observación del compañero]. *¿Están de acuerdo?...*

...

{C1/3-5} **Practicante:** *Son seis ¿verdad?* [estábamos discutiendo si los caminos que había encontrado Juliana en realidad eran todos]

{C1/3-6} **BS:** *Son seis, porque esa línea de ahí son múltiplos de tres*

{C1/3-7} **Practicante:** *Ellos dicen que aquí...*

{C1/3-8} **JS:** *Y usted explicó que se sumaban los dos de la mitad y pues tiene que dar*

{C1/3-9} **JA:** *Son cuatro porque...profe*

{C1/3-10} **Practicante:** *Dime*

{C1/3-11} **JA:** *Profe son cuatro porque si fueran tres sería, sería solamente los de los lados y el de aquí*

{C1/3-12} **Practicante:** *Pero es que ellos dicen que son seis*

{C1/3-13} **JA:** *¿Y seis por qué? ...porque la pueden ver como*

{C1/3-14} **BS:** [interrumpe] *Porque esta línea es múltiplo de tres, uno, tres, seis, nueve...doce.*

{C1/3-15} **JA:** *Pero mira uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis si lo cuentas así...* [contando los caminos]

{C1/3-16} **BS:** *Aquí da 5, allá también da 5...*

{C1/3-17} **JA:** *Sí, yo lo intente, porque mira que yo lo había puesto, pero ya mirándolo solamente dan cuatro, porque va, mira...uno, dos, tres...* [trata de señalar en el tablero los cuatro caminos que ella observa]

{C1/3-18} **BS:** [interrumpe] *Es que no es por los caminos*

{C1/3-19} **JA:** [retoma] *cuatro...y cinco...son los caminos*

{C1/3-20} **BS:** *No siempre es con los cinco, con esos y aparte hay más*

{C1/3-21} **Practicante:** *Es que a ver... [pretendía intervenir en la discusión]*

{C1/3-22} **JA:** *Es por los caminos, es por el camino que va así mira, uno, dos [va señalando nuevamente los caminos] para llegar, por eso dijo ella ¿Cuántos caminos hay para llegar a la casilla de aquí?*

{C1/3-23} **BS:** *Solo sería más rápido por las matemáticas que por los caminos*

{C1/3-24} **JA:** *Dos, tres*

{C1/3-25} **JH:** *Profesora, profe*

{C1/3-26} **JS:** *¿Y del otro lado?*

{C1/3-27} **JA:** *Cuatro*

{C1/3-28} **Practicante:** *Es que mira...*

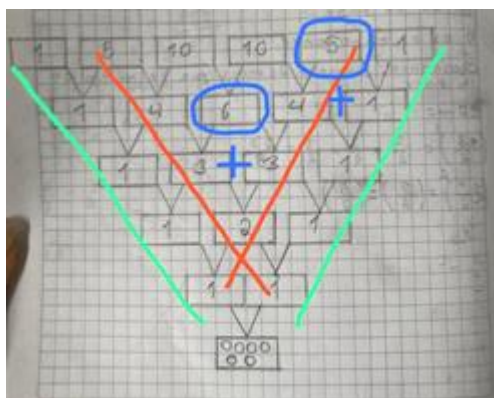
{C1/3-29} **BS:** *De acá, cinco, seis*

{C1/3-30} **JS:** *Si vez*

Al reflexionar sobre las dos preguntas propuestas, los estudiantes comenzaron a identificar la importancia de las decisiones que se toman al elegir las casillas en el juego "Asalto al castillo" y cómo estas decisiones afectan las posibilidades de ganar o no. La exploración con varios casos permitió que los estudiantes observaran nuevos patrones que podrían evitar el conteo de caminos de manera manual. En el episodio 3 se aprecia una discusión de los estudiantes por determinar el número de caminos para cada casilla, así el acto dialógico de *pensar en voz alta* surge al momento en que BS comparte varias características que ha observado del comportamiento del tablero, y de acuerdo a ellas, una forma para saber el número de caminos de cada casilla (Figura 15). Así, se descubrieron ciertas regularidades que permiten describir la

estructura del tablero juego y reducir el trabajo, pues ya no era necesario contar a mano cada camino; sin embargo, sus compañeros no atienden a su idea, ocasionando que en esta situación los actos de *entrar en contacto* y *localizar* estén ausentes.

Figura 15: Explorando la propuesta de BS.



Los estudiantes siguieron explorando qué sucedía en los casos de 4 y 5 casillas, JA decide salir al tablero y explicar cómo realizó el caso para 5 casillas a mano, pero como se mencionó el conteo manual puede ser engorroso y en algunos momentos impide visualizar fácilmente todos los caminos, lo que ocasiona que en varias oportunidades se reduzca el número real de caminos que conducen hasta dicha casilla, este fue el caso de JA, como se observa en este episodio. Por esta razón interviene el estudiante BS mencionando que son en realidad 6 caminos los que conducen a la casilla del centro, pues observa que esa diagonal está compuesta por múltiplos de 3, entonces en vez del 4 (número de caminos para la casilla del centro) que ha colocado su compañera, menciona que debe ir el 6 (el siguiente múltiplo de 3). JS había estado atento a la propuesta de BS, así que *entra en contacto* al participar de la discusión y *reformula*, al traer de vuelta en la línea {C1/3-4} el método de su compañero como una forma para *verificar* que en efecto hacen falta 2 caminos.

JA estaba confundida, en su intento por *reconocer* la idea de sus compañeros, pregunta “¿y 6 por qué?”, BS intenta explicarle al argumentar “porque esta línea es múltiplo de tres, uno, tres, seis, nueve...doce.”, sin embargo, JA no lograba entender cómo sus compañeros deducían el número de caminos si ni siquiera habían hecho manual la comprobación. Ante esta situación como se observa en la línea {C1/3-21} y {C1/3-28}, la practicante pretende intervenir, pero los estudiantes han tomado el control de la situación, por lo cual la ignoran y siguen en su discusión. JA insiste en contar los caminos, generando un conflicto en las perspectivas. Por un lado, ella seguía mostrando cada camino para que su compañero entendiera cómo ella había llegado a la respuesta de que sólo eran 4 caminos, pero para BS hacer esto no tenía sentido, pues según él las matemáticas dan insumos para facilitar el trabajo. JS seguía atento a la conversación de sus compañeros y a los caminos que JA iba encontrando, de esta manera, piensa en voz alta en la línea {C1/3-26} al sugerir que faltan contar los caminos del otro lado del tablero, logrando así mostrarle a su compañera los 6 caminos que conducen hasta esa casilla, comprobando que la idea sugerida por BS era correcta.

Esta exploración permitió que poco a poco los estudiantes fueran rescatando patrones y regularidades presentes en el tablero del juego, que, sin saberlo aún, eran características del tan conocido triángulo de Pascal, fue por esto que se decidió destinar un tiempo para que los estudiantes averiguaran sobre este objeto matemático y presentaran ante la clase los aspectos que consideraban más atractivos según sus intereses. Algunos habían averiguado sobre qué era, a qué se debía su nombre, la forma en que se construía, su relación con el binomio de Newton y otras

curiosidades⁹. En la Figura 16, se refleja el compromiso por parte de los estudiantes con la actividad, además, de su apoyo para compartir en el tablero sus consultas.

Figura 16: Los estudiantes averiguan sobre el triángulo de Pascal y presentan sus características.



Así rápidamente asociaron el juego “Asalto al castillo” con el triángulo de Pascal, los caminos de las casillas con los valores que forman este triángulo. Su funcionamiento era el que ellos habían logrado descifrar al explorar el juego en varios niveles, solo según JA se diferenciaban por su forma, pues el tablero del juego en sí “era el triángulo de pascal invertido”.

Para el final de una de las sesiones dedicadas a esta actividad, un estudiante se quedó hablando con los practicantes sobre el juego y las probabilidades que un jugador tiene para ganar. Lo dicho en ese momento se encuentra en el episodio 4, en el cual se puede evidenciar algunos actos dialógicos como *Pensar en voz alta*, *Entrar en contacto*, *Localizar*, *Controvertir*, *Defender*, *Reformular*.

⁹ Aparece simetría, al tomar una diagonal cualquiera y sumar sus valores el resultado de la suma estará en la siguiente fila en lado contrario. Se observan los números triangulares, si el primer elemento de una fila es un número primo entonces todos los demás elementos de la fila serán divisibles por él. También se relaciona con fractales, esto último llamó la atención de muchos y comenzaron a colorear.

Se quiere rescatar de este episodio, que los AA tipo 2 disponen a los estudiantes en una actitud activa y comprometida con su aprendizaje, que los convoca a desafiar el enfoque tradicional, ya que, como en este fragmento, mediante estas actividades los estudiantes tienen la oportunidad de examinar sus ideas y exponerlas. Por ejemplo, el estudiante SS confronta lo que se estaba realizando en la sesión de clase, que era encontrar la probabilidad de cada jugador para ganar dependiendo la casilla en la que estuviera ubicado; él estaba considerando la probabilidad y cómo cambiaba, a medida que los jugadores iban avanzando en las casillas tal como se observa en las líneas {C3/4-1} y {C3/4-2}, es una manera de *controvertir* aquello que se había establecido en la clase.

Episodio 4

[El estudiante SS propuso un ejemplo donde podrían ubicarse tres jugadores, los cuales los representó con una cruz, una equis y un círculo]

{C3/4-1} SS: [Ver Figura 17 - Izquierda] *Póngale que, digamos esto no estaba aquí, sino que estaba acá, el de la cruz, [refiriéndose a los porcentajes] eso significa que este sería, 50, 50 y ...y casi cero, porque no es posible que pueda llegar.*

[Continuando con otro ejemplo o situación que él mismo pone en el tablero, dice:]

{C3/4-2} SS: [Ver Figura 17 - Derecha] *Digamos que, bueno, digamos que la cruz salga acá, el círculo salga acá y que la equis salga acá, entonces, la única forma en la que la equis..., no, ni siquiera hay forma, o sea, esto sería, una vez que la equis llegue acá, sería un cero, porque no va a poder, ajá, llegar acá, [refiriéndose a la probabilidad de las otras fichas] en cambio estas dos si tienen, póngale 50.*

[El estudiante estaba tomando la probabilidad teniendo en cuenta una condición: que ya se encuentran en cierta casilla. Con el fin de ponerlo en la misma idea con la cual se estaba trabajando en la clase, se le pregunta:]

{C3/4-3} Practicante: *¿Qué pasaría si no sabemos todavía donde caen en el primer tiro?, ¿cuáles serían las probabilidades desde el punto de partida?*

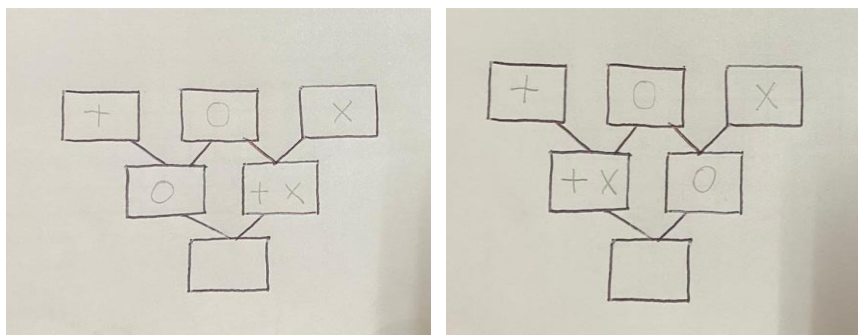
[Sin embargo, SS sigue con la idea de qué pasaría si cae en cierta casilla y luego menciona:]

{C3/4-4} SS: [El estudiante tira la moneda] *Además de que hay que tener en cuenta que la moneda no, o sea, en una parte no tiene más peso que en otra, póngale que esta es la moneda, [señalando un lado de la moneda] en esta no va a tener más peso, entonces, sería que si uno la tira, sería rezar que el aire [hay risas de los practicantes], como decirlo, o sea, es rezar que la inercia tire la moneda hacia donde uno quiere.*

[Retomando la idea de que las fichas estén en el punto de partida (para tres jugadores) sin saber qué sale en el primer tiro, SS menciona:]

{C3/4-5} SS: *Hay más posibilidades de ganar desde acá, desde el centro, porque simplemente si uno por ejemplo, le sale mal, es decir, coge hacia la izquierda, se puede retomar a la derecha, como decirlo, digamos que uno tuvo tan mala suerte que la suya estaba en el centro y cogió para acá [izquierda] hay posibilidades, más bajas, que uno llegue hasta aquí y llegue a la que uno quiere, pero ya eso depende mucho de... digamos el círculo justo caiga aquí y volvió a caer acá, ya aquí no hay escapatoria, es camino recto, y la equis tendría que sacar puro sello.*

Figura 17: Consideraciones sobre la probabilidad de cada jugador de acuerdo a las condiciones del estudiante SS.



En la línea {C3/4-4}, el niño está contemplando un aspecto que previamente había sido pasado por alto. Este elemento no estaba incluido en las reglas del juego, sin embargo, el niño lo percibió como crucial para el desarrollo del mismo: la moneda y los pesos que tiene cada cara. De esta manera, la actividad cumple con aquello que caracteriza a este tipo de ambientes, pues “es típico de las clases en las que se les brinda la oportunidad a los alumnos de construir el sentido de sus saberes, trabajando en torno a consignas que aluden únicamente a la Matemática” (Scaglia, 2015, p. 218).

Se destaca la importancia de este comentario debido a que introduce un elemento inesperado en el contexto de la investigación y se entra en una *zona de riesgo*, pues es un aporte que no había sido previsto y los practicantes no estaban preparados para ello. Aunque el episodio solo implicó a SS y los dos practicantes, podría haber supuesto un cambio drástico en el rumbo de la actividad, reflexionando sobre lo que pudo ser pero no fue.

Episodio 5

[Un grupo está abordando la última pregunta, que pide encontrar un método para saber la cantidad de caminos que llegan a cada casilla, cuando juegan 6 personas, de manera que no se cuenten uno por uno los caminos].

{C3/5-1} ES: *Profe, ¿nos podría explicar la última?*

{C3/5-2} Practicante: *¿Qué hicieron en la cuarta?*

{C3/5-3} SS: *Encontrar una forma para hallar los caminos, pero... [Interrumpe una compañera].*

{C3/5-4} LA: *Es que ellos dos tienen unas respuestas distintas.*

{C3/5-5} Practicante: *A ver, ¿cuál es la respuesta suya?*

{C3/5-6} ES: *Profe, acá dice que cuando juegan 6 personas, ¿no?, que cuántos caminos hay... él dice [SS] que para llegar a cada casilla hay infinitos caminos.*

{C3/5-7} SS: *Bueno no, simplifiquémonos [sic], finitos, es decir hay una cierta cantidad de caminos, pero sigue siendo grande.*

{C3/5-8} ES: *Ahí ya te contradigo, ¿Por qué? ¿finitos? No hay necesidad, depende del lugar en el que esté la casilla, para acá no hay más que un solo camino, vea, si coge acá ya no se puede pasar acá y entonces ya pierde, depende del lugar en el que esté ubicado. Ahí ya te contradigo lo que dijiste.*

{C3/5-9} SS: *Él coge el camino como todo esto, pero yo cojo los caminos como estas rayitas. Entonces lo que yo digo es que la fórmula mía si estaba bien, o sea, cuando juegan dos personas, 2 caminos, con 3 son 4 caminos en total, con 4 son 6 ... cuando juegan más personas va subiendo el número.*

{C3/5-10} ES: *Ahí ya también te digo que estás mal, ¿por qué? Porque dijiste que para subir a cada casilla se multiplicaba por 2, ¿no? Aquí si vas bien, pero acá si estás mal, porque da 6 mas no da 8, vea: 1, 2, ..., 6.*

{C3/5-11} SS: *Pero si juntamos todo, o sea, le damos un total, daría 12, 6 por 2, 12.*

{C3/5-12} Practicante: [Refiriéndose a los demás integrantes del grupo] *¿Ustedes qué*

opinan?

{C3/5-13} ES: [Señalando a su compañero CE] *Él opina que yo escriba*, [señala a EA] *él opina que SS está bien y ella* [su compañera LA] *opina sobre el libro.*

Desde la línea {C3/5-6} hasta la línea {C3/5-11} se puede ver que los estudiantes *analizan* las preguntas planteadas para dar una respuesta a ellas, se *cuestionan* mutuamente las posturas y *justifican* tanto su afirmación como lo que no está considerando su otro compañero. El episodio evidencia la disposición de los estudiantes, la responsabilidad que tienen con el *otro*, la actividad y su aprendizaje; incluso, en algún momento de lo acontecido, la atención que se prestaban mutuamente y el diálogo que mantenían les permitió tomar la dirección del suceso, los practicantes ya no son los protagonistas en la clase de matemáticas, por el contrario, los estudiantes están totalmente inmersos en un espacio de indagación.

A propósito del diálogo, los dos estudiantes fueron conscientes de ese momento y tal como lo expresa SS (Ver Entrevista SS, Minuto 4:34 - 5:48), había un compromiso con el *otro*, no solo por tratar que su respuesta sea la correcta, sino también por considerar lo dicho por su compañero. De igual manera, es posible afirmar que este tipo de ambientes propicia un trabajo colaborativo, que va más allá de reunir un grupo de personas para trabajar en una temática, trasciende a un proceso de indagación que posiciona al estudiante como un miembro activo y reflexivo dentro de la clase de matemáticas. Es en ese proceso de indagación y de trabajo colaborativo, que los estudiantes adquieren algunas habilidades de las cuales está al tanto SS: “Yo creo que al pensamiento rápido y el pensamiento crítico, ya que uno critica lo del otro no destructivamente sino constructivamente. Es decir, quitando algunas cosas pero poniendo otras,

así armando una montaña de ideas, ya cuando la montaña se completa se podría dar una idea más o menos de la respuesta” (Ver Entrevista SS, Minuto 12:10 - 13:29).

Ahora, exploremos algunos episodios relevantes dentro del tercer escenario de investigación, catalogado como AA tipo 4.

7.1.3. *El Problema de Josefo (AA Tipo 4)*

El tercer ambiente de aprendizaje, se trabajó con un escenario de investigación con referencia en la semirrealidad, guiado por el “Problema de Josefo”¹⁰. El enunciado de la actividad se diseñó de manera que no incluyera una pregunta explícita ni una orientación clara que indicara los pasos a seguir; esto se hizo con el propósito de observar cómo los estudiantes respondían ante desafíos que requieren un enfoque más creativo y una toma de decisiones más autónoma. De igual manera, se pretendía que los estudiantes interpretaran el enunciado y presentaran posibles estrategias para su resolución, para luego identificar el tipo de reflexiones que surgían en este nuevo AA.

Problema de Flavio Josefo

“Flavio Josefo fue un historiador judeo-romano del siglo I. Una de sus obras es *La Guerra de los Judíos*, en ella se presenta el siguiente problema:

Josefo y 40 soldados judíos estaban acorralados por los romanos en una cueva. Ante la imposibilidad de escaparse deciden suicidarse, pero, para no matarse cada uno a sí mismo, lo que hacen es matar cada uno a la persona que tienen a su derecha¹¹ y así sucesivamente hasta que solo queda uno y esa persona debe suicidarse.

¹⁰ Ver (Derivando, 2023).

¹¹ En el curso 7-1 se planteó que hacia la derecha; en 7-3 que el sentido fuera hacia la izquierda.

Si Josefo no tiene planes de morir debe ubicarse en el lugar adecuado para que le toque de último y de esta manera, sobrevivir y entregarse a los romanos con la esperanza de que lo mantengan con vida.

En un primer acercamiento por parte de los estudiantes al problema de Josefo, en la Figura 18 se aprecia la elaboración de algunos dibujos, mediante los cuales los estudiantes plasman sus primeras interpretaciones sobre la situación de los judíos, se pueden concebir como una manera de *pensar en voz alta*, pues estas ilustraciones posibilitan la expresión y comunicación de sus ideas con los demás (Skovsmose y Milani, 2014). Además, este tipo de espacios contribuyen a generar de trabajo colaborativo, ya que, al presentar sus dibujos en el tablero, los estudiantes intercambiaron pensamientos con el fin de perfeccionar entre ellos sus dibujos de tal manera que se lograran representar todos los elementos claves para entender la situación de Josefo y los 40 judíos.

Figura 18: Se proponen varias ilustraciones sobre la situación de Josefo y los 40 judíos.



En el paradigma del ejercicio, según Skovsmose (2000), un ambiente de aprendizaje con referencia en una semirrealidad (AA tipo 3), plantea situaciones que implican resolver problemas matemáticos dentro de un contexto ficticio pero completamente definido por el enunciado del ejercicio, donde se espera encontrar una única respuesta sin considerar aspectos externos o

variaciones de la situación. En contraste, la actividad *El Problema de Josefo*, un AA tipo 4 fomentó la creatividad y pensamiento crítico de los estudiantes, permitiendo que exploraran más allá de los límites establecidos por el enunciado del problema. Durante esta actividad, los estudiantes tomaron el control y propusieron diferentes alternativas, constituyéndose sujetos activos en el escenario de aprendizaje. Por ejemplo, en el siguiente episodio se observa que en un primer momento los estudiantes *pensaron en voz alta* sus ideas sobre cómo Josefo podría sobrevivir y obtener el perdón de los romanos, se observa que estas propuestas se desviaban de los lineamientos establecidos en el enunciado sobre el acuerdo de los judíos.

Episodio 6

{C1/6-1} BS: *Y no puede ser en círculos porque si lo hace en círculos a él también lo van a chuzar, debe ser en una línea.*

...

{C1/6-1} AV: *Este de aquí es Josefo porque es el único que está más atrás, el que o sea se está escondiendo para que no lo maten, los de acá son los europeos...romanos... los de aquí son los 40 judíos, entonces ellos son 40 judíos entonces pues comienzan a matarse, este mata al primero, mata a este luego se van matando entre todos. Como este está acá, se escondió, no lo pueden ver, porque es una cueva tiene oscuridad, entonces él queda de último, cuando todos se matan entonces él ya queda hasta el final y se entrega ante los romanos para que por lo menos siga vivo aunque sea un tiempo más.*

Los estudiantes exploraron el problema de Josefo teniendo en cuenta distintas cantidades de personas, este proceso les permitió analizar recurrencias comenzaron a analizar los datos

obtenidos, como sucede en el episodio 7, JI identifica que la posición del sobreviviente aumentaba de dos en dos a medida que el número de personas en el círculo crecía, al observar esto *piensa en voz alta* y le comenta su idea a la practicante, quien intenta identificarla, pues en un principio no la entendía, y le invita a examinar más casos con el fin de verificar si su afirmación era correcta. Durante este proceso, JI también observó, como se ve en la línea {C1/7-13}, que la posición del sobreviviente siempre correspondía a un número impar, este hallazgo no solo daba una característica de las posiciones de los sobrevivientes, sino que también sugería que quienes se ubican en posiciones pares estaban condenados a ser eliminados sin tener posibilidades de sobrevivir. Así, esta exploración con diferentes casos contribuyó al descubrimiento de patrones por parte de los estudiantes, permitiéndoles proponer estrategias para determinar la posición adecuada del sobreviviente.

Episodio 7

{C1/7-1} JI: *Se suman de dos*

{C1/7-2} Practicante: *Dime*

{C1/7-3} JI: *En cada caso se suma dos... porque en esta me dio siete y hay diecinueve, eh... aquí es veinte – nueve, veintiuno-once*

{C1/7-4} Practicante: [interrumpe] *¿Te da casi la mitad?*

{C1/7-5} JI: [retoma] *por cada número se va sumando dos*

{C1/7-6} Practicante: *A ver, ¿Cómo así?*

{C1/7-7} JI: *En esta hay veinte personas*

{C1/7-8} Practicante: *Veinte personas listo*

{C1/7-9} JI: *Y es el nueve*

{C1/7-10} Practicante: *El nueve es la posición*

{C1/7-11} JI: *Aquí hay veintiuno y es el once, serían dos, y aquí es el... aquí hay diecinueve y es el siete, se suman dos*

{C1/7-12} Practicante: *O sea van de dos en dos, listo, ve haciendo en los casos que te digo y mira si eso sigue cumpliendo.*

...

{C1/7-13} JI: *Otra cosa que me di cuenta es que todos son impares, los resultados*

{C1/7-14} Practicante: *Los resultados dan impares, muy bien, Y ¿Si se van sumando de dos en dos como dijiste?... ¿ya no?*

{C1/7-15} JI: *Pues a ver, es que desde el cuatro si se empezó a sumar*

{C1/7-18} Practicante: *De dos en dos*

{C1/7-19} JI: *Sí, pero no se*

{C1/7-20} Practicante: *Sigue con estos a ver qué pasa, pero son impares, me dices. Listo, ya encontraste algo, sigue.*

En el siguiente fragmento se evidencian algunos análisis de los estudiantes frente a los datos que habían obtenido hasta el momento:

Episodio 8

{C1/8-1} Practicante: *¿Qué han logrado observar de estos datos que hemos obtenido?*

{C1/8-2} JA: *Si uno mira, en casi, no estoy diciendo en todos, pero en algunos como, por ejemplo, tres, cinco y nueve, da el mismo tres y se puede observar de que, en el uno, dos, cuatro y el número ocho da el mismo uno, y que en el seis y el diez da el mismo cinco.*

{C1/8-3} Practicante: *¿En cuáles?*

{C1/8-4} JA: *En el seis y en el diez... ah, y que en el siete y en el once da el mismo siete*

{C1/8-5} Practicante: *JA dice que miremos que hay ciertos números que cumplen la misma condición...dime*

{C1/8-6} JJ: *Eh, que los números que dan uno es como la tabla del dos: dos por uno, dos por dos, dos por cuatro*

{C1/8-7} JA: *Ahhh, sí*

{C1/8-8} JJ: *Se basa en los múltiplos de dos se podría decir, porque todos esos números son pares si nos damos cuenta*

...

{C1/8-9} Practicante: *Si bien para dos, cuatro y ocho se cumple, y estos son múltiplos de dos, pero miren que el seis o el diez también son múltiplos de dos, verdad, entonces ¿qué característica tienen en especial estos números para que me de uno?, además de ser múltiplos de dos*

{C1/8-10} JJ: *Son pares*

{C1/8-11} JJ: *Si usted suma, uno más uno es dos, dos más dos es cuatro, cuatro más cuatro es ocho*

{C1/8-12} Practicante: *JJ dice que cada uno de estos números que yo he señalado con un círculo se obtienen sumando consigo el anterior*

{C1/8-13} BS: *Sí, entonces el dieciséis queda en uno*

{C1/8-14} Practicante: *Dime*

{C1/8-15} BS: *El dieciséis queda en uno*

{C1/8-16} Practicante: *El dieciséis quedaría en uno, muy bien...entonces tenemos el uno, el dos, el cuatro, el ocho y el dieciséis*

{C1/8-17} BS: *Es como en el Pascal*

{C1/8-18} Practicante: *Ajá, como en el triángulo de Pascal, recuerdan que allá los habíamos escrito de otra manera*

{C1/8-19} JS: *Elevado a la dos*

{C1/8-20} Practicante: *Exacto, con potencias*

En relación con los actos dialógicos, en el episodio 8, luego de invitar a los estudiantes a compartir los hallazgos de su exploración, se percibe el acto de *entrar en contacto* cuando los estudiantes aceptan la invitación, y empiezan a *pensar en voz alta*. La estudiante JA en la línea {C1/8-1} comparte sus observaciones acerca de los datos de la tabla, señalando cómo ciertos números o cantidades de personas coinciden en la posición del sobreviviente (véase Figura 19). JJ, atento a la participación de su compañera, *entra en contacto*, pues se involucra activamente, *piensa en voz alta* rescatando en la línea {C1/8-6} una de las impresiones de su compañera, las cantidades cuya posición del sobreviviente es 1, con el fin de destacar una característica que relaciona las cantidades de las personas con la posición del sobreviviente, generando así un camino en la investigación.

Figura 19: Identificando regularidades en el Problema de Josefo.



Tras *localizar* las ideas propuestas por los estudiantes, se *identificó* que, si bien es cierto que cuando el sobreviviente debía ubicarse en la posición 1, la cantidad de personas correspondía a un número par, no se cumplía la recíproca: no todo número par implicaba que la posición fuera la primera. Por lo tanto, se desafió a los estudiantes, como se observa en la línea {C1/8-9} a pensar cuál era esa condición que diferenciaba a estos casos. Es interesante destacar cómo JJ *localiza*, al considerar la posibilidad de examinar esta sugerencia, llevándolo reformular su idea inicial, la cual la *defiende* y la presenta de una nueva manera, más allá de ver estos valores como múltiplo de 2, señala que se construyen duplicando el número anterior. Ante este aporte, la practicante *reformula* el comentario de JJ con el fin de que todos tengan presente la idea, BS como se evidencia en la línea {C1/8-5} *entra en contacto* y se vuelve partícipe de la discusión, al darle valor a la propuesta de su compañero, y al *identificar* cómo funciona, señalando cuál sería la siguiente cantidad de personas para la cual el sobreviviente debería ubicarse en la posición 1.

Después de presentar en listas los números de la tabla que cumplen esta condición, el estudiante BS *identificó* que eran los mismos números que habían sido trabajados en clases

anteriores con el juego "Asalto al castillo". Este comentario permitió recordar y utilizar la escritura de estos números, JS al estar en contacto trae a colación que estos números se podían representar como potencias de dos. De esta forma, mediante el análisis y el cuestionamiento de las ideas compartidas, se logró descubrir que siempre que el círculo está conformado por un número de personas equivalentes a una potencia de 2, quién desea sobrevivir debe escoger la primera posición. Además, luego de explorar la idea de JI, se dedujo que entre las potencias de dos, las posiciones de los sobrevivientes se van incrementando de dos en dos.

Una vez entendidas estas conclusiones presentadas por los estudiantes, se retoma el caso de Josefo, ¿qué sucede en el caso de 41 personas?, se esperaba que los estudiantes con base en los análisis dieran respuesta al interrogante, sin embargo, los estudiantes proponen varias maneras de averiguar la posición. Tal como se evidencia en el Anexo 7, algunos encontraron la posición de Josefo de manera manual (dibujar en círculo e ir tachando los eliminados), en cambio otros emplearon lo que se había analizado en los datos de la tabla. De esta manera, se observa que la forma de dar respuesta de algunos es un poco más intuitiva o práctica, ya que se basa en sus dibujos y en la experimentación, mientras otros optan por una forma más analítica, pues se apoyan en patrones y conceptos matemáticos para dar solución al problema. Estas dos formas de proceder fueron elementos claves que contribuyeron de manera significativa en la resolución del problema, pues la experimentación permitió generar ideas y comprender el problema desde un nivel más práctico, y por su parte la forma analítica permitió proporcionar elementos sólidos y generalizaciones del caso de 41 personas. De igual forma, estos métodos permitieron confrontar los resultados, con el fin de verificarlos y comprobar el trabajo realizado.

En la última sesión que se trabajó el *Problema de Josefo*, se notó que la mayoría de los estudiantes estaban muy interesados en encontrar patrones y regularidades. Si bien se dieron varios episodios que evidencian lo anterior, se destaca uno en particular. El estudiante MC llama

a uno de los practicantes para comentarle la idea en la cual estaba trabajando (Ver VID_1); en primer lugar, era una idea bastante elaborada por parte del estudiante y que en su momento, ocasionó que los practicantes entraran nuevamente en una *zona de riesgo*, porque era algo que no se había analizado previamente y que pudo cambiar el rumbo de la investigación, de manera que los demás estudiantes se vieran involucrados, situación que no ocurrió porque como ya se mencionó, la mayoría de los alumnos estaban trabajando en otras ideas.

En segundo lugar, llama la atención que el estudiante plantea la pregunta *¿Qué pasaría si...?*, lo cual sugiere una exploración dentro de un escenario de investigación. Esta interrogante evidencia que el estudiante estaba implicado activamente en la actividad y se había apropiado del proceso de indagación. Más adelante, MC decide pasar al tablero para explicarle a sus compañeros lo que él había encontrado; el episodio 9 es una transcripción de lo que se pudo rescatar de esa explicación, en la cual MC hace partícipes a sus demás compañeros y los invita a indagar en esa posibilidad que él estaba contemplando. El diálogo que tiene lugar en dicho episodio evidencia que con la presencia de algunos actos dialógicos como *entrar en contacto*, *pensar en voz alta*, *localizar*, *identificar*, *reformular* y *controvertir* es que algunos de sus compañeros aceptaron la invitación y le dieron importancia a aquello en lo que había trabajado MC.

Episodio 9

{C3/9-1} MC: *A ver, lo que yo hice fue mirar quién sobrevivía cuando hay 21 personas, 31, 41. Vemos que la diferencia del 21 al 31 es 4, y del 31 al 41 también es 4. [Refiriéndose a la diferencia entre las posiciones ganadoras cuando hay 41 y 51 personas] Pero acá, la diferencia que me dio fue de 20, ¿cierto? Y acá también de 20.*

{C3/9-2} Practicante: *¿A qué se refiere con la diferencia?*

{C3/9-3} CZ: *A la distancia que hay de un número al otro.*

{C3/9-4} MC: *Ajá.*

...

{C3/9-5} MC: *Entonces me doy cuenta de una cosa, que entre estos 3, la diferencia es de 4 y luego, la diferencia entre estos 3 es de 20. Si digamos, aquí estuviera el 71 y 81, aquí debería haber otra diferencia, ¿no?*

{C3/9-6} EJ: *¿Qué número da 4 por 20?*

{C3/9-7} MC: *¿Cómo así?*

{C3/9-8} EJ: *¿Qué número al multiplicarlo por 4 da 20?*

{C3/9-9} MC: *5*

{C3/9-10} EJ: *5, entonces multiplique 5 por 20, ¿cuánto da?*

{C3/9-11} MC: *100*

{C3/9-12} EJ: *Entonces 100 es la diferencia*

{C3/9-13} MC: *Pero, ¿cómo puede ser una diferencia de 100? [lo mira fijamente, se ríe y le dice:] ¿Si ve?*

{C3/9-14} Practicante: *¿No puede ser una diferencia de 100?*

{C3/9-15} ES: *No. No, porque solo hay 71 personas.*

Este ambiente de aprendizaje no estuvo regido por las indicaciones del problema o de los practicantes. Como se mencionó en un inicio, estuvo abierto a posibles modificaciones con el fin de tener en cuenta otras alternativas que desviarán la investigación en otros sentidos. En relación a lo anterior, el episodio 10 resulta ser un claro ejemplo de que los estudiantes se constituyeron miembros activos en el desarrollo de esta actividad, pues como se observa en la transcripción, los

estudiantes aprovecharon la oportunidad para proponer nuevas reglas que permitieran pensar el problema de Josefo desde otras perspectivas.

Episodio 10

{C1/10-1} **Practicante:** *Entonces, ¿qué pasaría si cambiamos esa regla de juego?*

{C1/10-2} **BS:** *Si lo ponen al revés...si lo ponen al revés queda en veintiuno*

{C1/10-3} **JA:** *Traición, yo lo iba a decir [se ríe]*

{C1/10-4} **BS:** *Profe ¿y si matamos al revés? Matando pal otro lado*

{C1/10-5} **JA:** *Sí, porque venga...porque mire inicia con el veintiuno, eh cuarenta y uno mata*

{C1/10-6} **BS:** *Al cuarenta*

{C1/10-7} **JA:** *Mire que aquí cuando llegamos al...*

{C1/10-8} **BS:** *Y el "one" [1] mata al cuarenta y uno*

{C1/10-9} **Practicante:** *Uno mata al cuarenta y uno [señala en la gráfica]*

{C1/10-10} **BS:** *No profe, porque nosotros empezamos desde el cuarenta y uno*

{C1/10-11} **Practicante:** *¿Por qué no desde el primero?*

{C1/10-12} **BS:** *No, porque es al revés, porque si nosotros lo hacemos así ahí sí tenemos que empezar desde el uno*

{C1/10-13} **Practicante:** *Entonces, ustedes proponen iniciar desde el último dígito, desde el último número*

{C1/10-14} **BS:** *O sea desde el cuarenta y uno hasta el uno, y ahí quedaría en veintiuno*

...

{C1/10-15} **Practicante:** *Muchachos, ¿escucharon? Ellos proponen una nueva regla*

{C1/10-16} **JS:** *Y si iniciamos por el dos*

{C1/10-17} Practicante: *Por lo menos hay dos propuestas, BS dice que comenzar, ya no matar hacia acá [en sentido horario] sino matar hacía acá [en sentido contrario a las manecillas del reloj] y tú dices que comenzar con el dos*

{C1/10-18} JS: *Sí, pa' que maten todos los impares...si comienza por el dos mata todos los impares y ahí sí queda otro resultado*

{C1/10-19} Practicante: *Y quedan los pares*

{C1/10-20} JS: *Muy bien*

El estudiante BS propone en la línea {C1/10-2} una nueva idea para abordar el problema, idea que surge de una interacción previa con su compañera JA, donde ambos habían llegado a soluciones diferentes sobre la posición de Josefo, BS piensa que al invertir la regla entonces si sería posible que la posición donde debería ubicarse Josefo sea la propuesta por su compañera anteriormente. JA se une a la propuesta de su compañero, juntos toman el control de la situación y la defienden, pues por un momento su idea se vió amenazada, ya que la practicante no lograba comprenderla. Por otro lado, JS en la línea {C1/10-16} motivado por su exploración en el problema inicial considera interesante investigar qué pasaría si, en vez de eliminar los pares en la primera ronda se diera esto con los impares. Estas propuestas fueron localizadas por sus compañeros pues cambiaban por completo el panorama del problema de Josefo.

Un ejemplo similar, se encuentra en el episodio 11 en el cual los estudiantes CE y EA piensan en una nueva posibilidad para hallar la posición ganadora teniendo en cuenta el número de personas.

Episodio 11

{C3/11-1} CE: *Profe, profe, ¿no se podría volver a enumerar como dice él? [un compañero*

con el que está trabajando].

{C3/11-2} EA: *Es que mire, aquí matan los pares, entonces solo quedan los impares, entonces se podría volver a enumerar normalmente, ¿no? O, ¿se pueden matar así como están?*

{C3/11-3} Practicante: *Listo, listo, pues miremos qué pasa si se vuelve a numerar como usted dice.*

Su idea consistía en reenumerar a los sobrevivientes en cada ronda; si bien pareciera que solo están contando como normalmente lo estaban haciendo algunos compañeros, lo que pretendían era reducir el trabajo, pues comenzaban desde los casos más pequeños, de manera que cuando se tenía un número grande de personas, se reenumeraban las posiciones de los sobrevivientes y para ese caso ya se sabía la respuesta. En la Figura 20 se observa la exploración que los estudiantes estaban realizando frente a la idea que ellos mismos habían propuesto y que posteriormente explicaron a los demás estudiantes del salón.

Figura 20: Exploración de la idea que los estudiantes CE y EA propusieron.



De esta forma, este tipo de actividades dentro de ambientes de aprendizaje tipo 2 y 4 contribuyen a un cambio en la dinámica de la clase, que habitualmente ha estado enmarcada por una educación tradicional de las matemáticas, y que ha generado, como lo menciona la estudiante JA en su entrevista¹², que los estudiantes perciban las matemáticas como aburridas y carentes de sentido.

Además, este enfoque en las clases de matemáticas centrado en la trasmisión de conocimientos y la repetición de algoritmos ha llevado a los estudiantes a adoptar un papel pasivo, donde su participación no es algo relevante, sino que por el contrario su labor se minimiza a solo recibir instrucciones sobre su quehacer (Amaya y Espinosa, 2020). Esto limita las oportunidades de los estudiantes para participar activamente en las clases y contribuir con sus ideas, ya que sus intervenciones se reducen a responder preguntas sobre el resultado de operaciones matemáticas y los estudiantes prefieren guardar silencio que responder a estas

¹² Ver Anexo 8.

preguntas, pues no se sienten lo suficientemente motivados como para involucrarse en la clase (Anexo 9).

Por el contrario, los escenarios de investigación permitieron contrarrestar este fenómeno e impulsaron a que la dinámica de la clase experimentara ciertos cambios: este tipo de actividades abre un espacio a investigar, explorar, constituyendo a los estudiantes como agentes importantes y activos en su proceso de aprendizaje (Anexo 10). Más aún, generó un ambiente colaborativo en la clase, pues aunque algunas actividades en estos tres primeros escenarios no fueron diseñadas para trabajar en grupos, la exploración en estos problemas implicó la necesidad de cooperar en conjunto, escuchar, apoyar y cuestionar al *otro*, tal como lo afirman algunos estudiantes en la entrevista (véase el Anexo 11), ellos perciben que la ejecución y desarrollo de estas actividades ha influido en la integración del curso, volviéndolos más unidos, permitiéndoles establecer nuevas relaciones de amistad y compañerismo (pues en un inicio aunque se veían todos los días no habían tenido la oportunidad ni el espacio de comunicarse y conocerse).

Además, les permitió reconocer la necesidad de leer y reflexionar detenidamente sobre los problemas que se plantean en la clase de matemáticas, lo que les favorece en una comprensión de los mismos (Anexo 12) y de esa manera proponer alternativas de solución. Lo anterior y todo lo discutido en esta sección, nos lleva a afirmar que en estos espacios de indagación los estudiantes desarrollaron habilidades como: *cuestionar* las opiniones o métodos de los profesores, compañeros e incluso de ellos mismos con el propósito de enriquecer la exploración, *analizar* nuevos métodos y alternativas de solución que surgen en su compromiso y responsabilidad con su propio aprendizaje para luego, *justificar* esas ideas con base en argumentos matemáticos que se cristalizan a lo largo del proceso de indagación, además, esta habilidad implica involucrar al otro, con el fin de hacer público los descubrimientos y que mediante la colectividad y el intercambio de ideas se logren explorar diversos caminos y encontrar soluciones.

7.1.4. *Reflexionando Desde la Investigación Crítica*

De acuerdo al modelo de la investigación crítica propuesto por Vithal (2000), Skovsmose y Borba (2004), Skovsmose (2015), las situaciones actual, imaginada y dispuesta no deben considerarse como aspectos aislados. Por el contrario, están estrechamente relacionadas por el conjunto de acciones que se configuran dentro del proceso de investigación y que permiten explorar aquello que no es pero podría ser. La situación actual descrita en la sección *Contexto del aula*, permitió determinar las formas habituales de actuar de los estudiantes y la profesora en el salón de clases en relación con el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. A partir de ese contexto y la identificación de una problemática, fue posible plantear unos objetivos en el desafío de una acción transformadora dentro de ese contexto educativo.

De esta manera surge una situación imaginada con el fin de proponer una alternativa a esa realidad, mediante el diseño de las actividades se buscaba contribuir a ese objetivo, y una vez implementados los dos escenarios de investigación con referencia en las matemáticas puras, se resalta que la situación dispuesta no estuvo muy alejada de la situación imaginada o lo que se esperaba que sucediera, pues, como se evidenció en lo discutido en esta sección los estudiantes aceptaron la invitación a participar y ser miembros activos de las actividades, lo que favoreció en la configuración y constitución de estos AA. Esto a su vez, generó un ambiente de aula interactivo en el cual los estudiantes minimizaron la jerarquía del profesor, tomaron la palabra y control de la clase.

Sin embargo, no hubo episodios que permitieran identificar una crítica a las matemáticas; en la materialización de la situación dispuesta no surgieron reflexiones críticas ni cuestionamientos sobre las fórmulas matemáticas usadas; de acuerdo a lo establecido en la SI se pretendía que los estudiantes no tomaran por hecho lo construido en las sesiones de clase, por el contrario, se esperaba que surgieran interrogantes como: *¿por qué esa fórmula y no otra?, ¿es*

confiable esta fórmula?, ¿qué hay de su veracidad? Se considera que este tipo de reflexiones no emergieron porque hay una lógica instaurada en la sociedad, según la cual lo trabajado en el curso de matemáticas es legítimo, objetivo y por tanto una verdad absoluta (Ravn y Skovsmose, 2019). No obstante, reconocemos que el desarrollo de esta crítica a las matemáticas no se alcanza con la aplicación de una actividad prescriptiva, no se trata de un algoritmo que garantice un resultado a priori; el desarrollo de esta habilidad requiere de un proceso largo y continuo.

7.2. EXPLORANDO RESISTENCIAS EN LOS AA TIPO 6 Y EL SURGIMIENTO DE LAS CARACTERÍSTICAS DEL CONOCER REFLEXIVO

En el desarrollo de los AA tipo 6, se notó un cambio drástico en la dinámica de ambos cursos (asunto a discutir en la sección 6.2.3), lo cual complicó vislumbrar las características del conocer reflexivo, precisamente por el actuar de los estudiantes y el poco tiempo con el que se contaba para culminar esta actividad.

7.2.1. *¿Qué Pasaría si la Marihuana Fuera Legal? Examinando las Características del Conocer Reflexivo en 7-1*

En el desarrollo de este último ambiente de aprendizaje se puede identificar ciertos rasgos que reflejan características de las categorías del conocer reflexivo propuestas por Mancera (2020).

- **Pensando en el otro.**

Episodio 12

{C1/12-1} MM: *mi opinión sobre la marihuana y su legalización es que las personas más afectadas en ella son los niños y jóvenes que son los que la consumen porque va a ser... va a ser un problema para su educación, estudios y les va a afectar su salud, pues la marihuana provoca ansiedad... y las personas beneficiadas con el tema son las que lo*

venden, los narcotraficantes que lo exportan. La marihuana si se legaliza ayudaría mucho para la salud, los medicamentos, por ejemplo, el cannabis ya es una droga legalizada pero la marihuana todavía no creo

{C1/12-2} BS: *¿Creo?*

{C1/12-3} JA: *Sí está legalizada [se refiere a su uso medicinal]*

{C1/12-4} MM: *La marihuana se usaría a nivel medicinal como para curar los dolores, es como una pomada, según entiendo en lo que leí*

{C1/12-5} AE: *Y sus efectos*

{C1/12-6} JA: *Por eso, de lo que dijiste ¿Cuál es tu postura?, que se legalice o no*

{C1/12-7} MM: *En parte sí, pero a la vez no, como que afecta, pero no afecta entonces*

{C1/12-8} JA: *Y cuando dices que afecta y no afecta, o sea que la deberían de legalizar, pero ¿A la vez no?*

{C1/12-8} MM: *Afectaría a los niños y a los jóvenes que la consumen pero beneficiaría mucho a las personas que la van a consumir de buena manera, para los medicamentos...*

Episodio 13

{C1/13-1} JJ: *Para mí la legalización de la marihuana aquí en Colombia, eh, para mí sí, sí se tendría que legalizar porque como dijo Jerónimo, se está usando medicinalmente un 72%, eh pues que se consuma con sumo cuidado y que nosotros estemos conscientes de los que vamos a hacer*

{C1/13-1} Practicante: *Algo ahí por mencionar, el uso medicinal si es legal, lo que no es el uso recreativo.*

{C1/13-1} JR: *Referente a la legalización de la marihuana, pues para mí no sería no, porque le estaría quitando el trabajo a las personas que la cultivan buscando el sustento para su casa y mantener a sus hijos, pues para mí no sería por tanto legalizarla porque se les está quitando eso no, que necesitan trabajar.*

...

{C1/13-1} JI: *Pues para mí la marihuana si se debería legalizar ya que como dijo mi compañero Jaider hay personas que buscan trabajo entonces si se legaliza se podría dar un trabajo estable para las personas que no lo tienen y obviamente legalizarla y hacer unas leyes y controlar el uso recreativo como medicinal...Además también apuntaría, o sea, yo digo, que subiría el país a un nivel más, ya que se podría, o sea, exportar. Por ejemplo a un país donde ya se ha legalizado, como por aquí en el lugar geográfico donde estamos es tan bueno se podría exportar marihuana a varios países.*

El debate sobre la legalización de la marihuana es complejo y requiere examinar detenidamente sus pros y contras para determinar su impacto en el país. Como se señala en los anteriores episodios, los estudiantes expresaron sus preocupaciones sobre cómo esta decisión podría afectar a diferentes poblaciones. Por ejemplo, en el episodio 12, MM mostró una constante inquietud por el bienestar de los niños y jóvenes frente al posible acceso facilitado a la marihuana, reconoció los efectos negativos que la legalización podría tener en este grupo, al temer que aumentara su consumo y pusiera en riesgos su salud y educación, aumentando la deserción escolar y comprometiendo su futuro. A pesar de esto, también consideró los posibles beneficios medicinales de la marihuana para aquellas personas que padecen ciertas enfermedades. Aunque no expresa una postura clara y definitiva sobre la legalización, sus comentarios muestran

una consideración hacia los posibles impactos de la legalización de la marihuana en diferentes grupos de personas, lo que refleja una actitud de reflexión sobre las necesidades y circunstancias de los demás.

Otro ejemplo se evidencia en el episodio 13, donde un grupo de estudiantes expresa sus opiniones frente a la legalización de la marihuana en Colombia, demostrando una consideración hacia los demás. JJ destacó la importancia de legalización para fines medicinales, pero enfatizó en la necesidad de un consumo responsable. Por otro lado, JR expresó su preocupación por las personas que dependen del cultivo de marihuana para su sustento económico, él pensaba que al legalizarla estas personas perderían esta fuente de ingresos. Sin embargo, JI se conecta con esta preocupación y sugiere que la legalización podría proporcionar un empleo seguro a los cultivadores, ofreciendo estabilidad laboral. Estas posturas muestran una sensibilidad hacia las necesidades de los demás, pues reflejan una consideración hacia el impacto social de la legalización de la marihuana.

- **Prácticas con las matemáticas.**

Episodio 14

{C1/14-1} JS: *La legalización de la marihuana pone en riesgo el comercio local e internacional de los narcotraficantes, pueden perder hasta ciento cincuenta millones de dólares anuales, perderían más clientes*

{C1/14-2} JA: *Sí, si se llega a legalizar ya no sería como que todos van y la compran, sino que uno mismo tendría la planta en la casa y ya uno mismo comienza a hacerla.*

{C1/14-3} Practicante: *¿Y esa pérdida a cuanto equivale en pesos colombianos?*

{C1/14-4} CY: *Son muchos millones*

{C1/14-5} Practicante: *Sí, pero ¿Cuántos?, como para entender mejor... ¿Sabemos cuánto es un dólar?*

{C1/14-6} JH: *Sí, cinco mil pesos*

{C1/14-7} BS: *Sí, cinco mil y seis mil pesos*

{C1/14-8} Practicante: *¿Quién tiene internet para mirar?*

{C1/14-9} JS: *Cuatro mil ciento noventa y cinco pesos*

{C1/14-10} JN: *No, ese volvió a bajar*

{C1/14-11} Practicante: *Que les parece si lo redondeamos en cuatro mil doscientos*

{C1/14-12} BS: *Es ilógico saber cuánto pierden, así decir un número específico*

{C1/14-13} CF: *Se hacen análisis, es algo aproximado*

{C1/14-14} JA: *Yo eso lo leí, eso lo hacen de acuerdo a en cuánto está, cuánto se invierte, se hace planeación de todo lo que van a consumir, y lo que van a vender, cómo lo van a transportar, y para dónde, por eso cuesta tanto.*

{C1/14-15} Practicante: *Entonces suponiendo que el dólar está en eso, ¿cuál sería ese aproximado?*

{C1/14-16} AE: *Multiplicando*

{C1/14-17} CY: *Cuatro mil doscientos ¿por qué es qué es? [por qué se debe multiplicar]*

{C1/14-18} JI: *Unos seis billones*

{C1/14-19} Practicante: *Cómo lo hiciste JI*

{C1/14-20} JI: *Multiplicando [BS sale al tablero a verificar lo que dice su compañero]*

Episodio 15

{C1/15-1} JS: *Profe sería bueno que la legalizaran porque no estaría tan barata en Colombia para venderla a otros países, porque en Colombia la explotan mucho para venderla en otros países, porque en Colombia es más barata*

{C1/15-2} Practicante: *¿Cuánto vale aquí en Colombia?*

{C1/15-3} JS: *Entre doscientos mil aproximadamente*

{C1/15-4} AE: *Y en otros países ya está valiendo más*

{C1/15-5} JS: *Más de mil quinientos dólares que es más de los pesos colombianos*

{C1/15-6} JA: *Así como lo dijiste hace rato estaba bien*

{C1/15-7} JS: *¿Cuánto era?*

{C1/15-8} Practicante: *Lo puedes hacer aquí [señala el tablero]*

... [mientras hace la conversión]

{C1/15-9} JS: *Se multiplica dólares por cuánto está el dólar en Colombia*

{C1/15-10} MM: *Entonces en Colombia está muy barato, debería subirlo*

{C1/15-11} AE: *Para tener más economía*

Las investigaciones realizadas por parte de los estudiantes fueron escasas, sin embargo, se destacan algunos momentos en los que los estudiantes aplicaron las matemáticas para comprender la información encontrada en internet. Por ejemplo, en el episodio 14, se observa cómo se están haciendo cálculos y estimaciones para entender el impacto financiero que tendría la legalización de la marihuana en los narcotraficantes. Utilizaron el conocimiento matemático para convertir el valor del dólar a pesos colombianos y realizar estimaciones aproximadas para evaluar las posibles pérdidas monetarias.

Figura 21: Conversión de dólares a pesos colombianos.



Un procedimiento similar ocurrió en el episodio 15, donde los estudiantes realizaron una conversión de dólares a pesos colombianos para comparar el precio de la marihuana en Colombia con el de otros países. Estos ejemplos muestran cómo los estudiantes emplearon prácticas con las matemáticas para abordar una problemática real, lo que contribuyó a fortalecer su comprensión sobre el uso de las matemáticas en situaciones de la vida cotidiana.

- **Lectura crítica y matemática.**

Durante las clases de matemáticas de esta última actividad, no se observó en los estudiantes una habilidad que les permitiera entender y evaluar las diversas aplicaciones de las matemáticas en sus investigaciones. Sin embargo, se notaron algunos indicios, lo que sugiere que el desarrollo de esta habilidad es un proceso continuo que no se limita a la implementación de una única actividad bajo este enfoque.

Por ejemplo, en el episodio 15, los estudiantes discutieron sobre el precio de la marihuana en Colombia en comparación con otros países, señalando que la marihuana es más barata en nuestro país, por lo que manifestaron que su legalización representaría un aumento en los

ingresos del gobierno. Esta observación demuestra una lectura crítica de la situación, ya que los estudiantes están reflexionando sobre las implicaciones económicas de la legalización de la marihuana. Al calcular la conversión de precios de dólares a pesos colombianos, identificaron una notable diferencia entre los precios, lo que los llevó a considerar que, al ser la marihuana ilegal, los narcotraficantes que la comercializan se benefician al exportarla a países donde su valor económico se incrementa significativamente. Esto refleja cómo los estudiantes aplican las matemáticas para comprender y evaluar una situación real, al tiempo que reflexionan críticamente sobre los resultados encontrados.

- **Colectividad.**

Fragmento 1

{E1/1-1} Practicante: *O sea que ya se unieron, y ¿crees que tus compañeros de alguna manera te colaboraron en tu aprendizaje, fueron un aporte para ti?*

{E1/1-2} JA: *Sí*

{E1/1-3} Practicante: *¿Por qué?*

{E1/1-4} JA: *La primera era que cuando investigábamos todos teníamos conceptos como que, si ponemos esto estaríamos dejando a un lado lo otro, que si ponemos tal valor tendríamos que sustentarlo y así.*

{E1/2-5} Practicante: *O sea que entre ustedes se colaboraban*

{E1/2-6} JA: *Sí*

Fragmento 2

{E1/2-1} Practicante: *Ok, y, bueno estábamos hablando del trabajo con tus compañeros,*

¿Crees que te ayudó haber trabajado en grupo o habría sido mejor trabajar solo?

{E1/2-2} JS: *No, fue mejor trabajar en grupo*

{E1/2-3} Practicante: *¿Por qué?*

{E1/2-4} JS: *Porque como que nos comunicábamos más, entendíamos mejor las cosas, cada uno da su opinión y entendía, cada uno da su punto de vista entonces fue más chévere.*

Durante el trabajo en grupos en este último ambiente de aprendizaje, se pudo observar el desarrollo de esta categoría en algunos casos, como el grupo de la estudiante JA. En clase quedó evidenciado su apoyo mutuo durante el transcurso de la actividad, esto se respalda en el Fragmento 1 de la entrevista realizada a JA. Ella destaca que, durante la investigación, su grupo se distinguió por llevar a cabo discusiones y reflexiones conjuntas acerca de la información recopilada, esta interacción le permitió al grupo considerar diferentes perspectivas y valorar la importancia de cada idea o argumento propuesto.

Este aspecto se complementa en el Fragmento 2 por el estudiante JS, quien menciona que trabajar en equipo fue beneficioso gracias a la comunicación entre los miembros del grupo, lo que facilitó la comprensión de los temas abordados al permitir que cada integrante expresara su opinión y punto de vista. Esto generó un ambiente de trabajo más agradable y enriquecedor, de manera que se destaca cómo la colaboración entre compañeros contribuyó al proceso de aprendizaje de cada miembro del equipo, promoviendo la igualdad de voces y fomentando un ambiente de trabajo colectivo donde la opinión de cada uno tiene un valor significativo.

7.2.2. El Robo en el Salón de Clase, Examinando las Características del Conocer Reflexivo en 7-3.

También se notó un cambio drástico en la dinámica interna del curso 7-3. A continuación, se describen los pocos episodios encontrados en este curso, que dan cuenta de una posible presencia de las categorías del conocer reflexivo propuestas por Mancera (2020).

- Pensando en el otro.

Episodio 16

{C3/16-1} **EJ:** *Sería mejor sacar una estadística, para saber a qué personas les han robado y a quién no. Entonces comparar si hay más personas que fueron robadas o...*

{C3/16-2} **CZ:** [Interrumpe a su compañero] *En el periodo pasado o en este periodo.*

{C3/16-3} **Practicante:** *Bueno. Me gustaría escuchar más opiniones y saber por qué eligieron ese tema.*

{C3/16-4} **JJ:** *Porque aquí en el salón no nos respetamos las cosas de los demás.*

{C3/16-5} **Practicante:** *Y, ¿por qué creen que es importante que se solucione ese problema?*

{C3/16-6} **CZ:** *Para que uno pueda estar tranquilo en el colegio.*

...

{C3/16-7} **ES:** *Por la plata, profe.*

{C3/16-8} **CZ:** *Uno no puede traer un lapicero chévere porque ya se lo roban... Todos esos irrespetuosos le roban hasta a los profesores.*

{C3/16-9} **WN:** *Los papás trabajan para comprarle a una las cosas, para que otro las robe.*

...

{C3/16-10} Practicante: *Y además de la estadística propuesta por EJ, ¿cómo podríamos abordar ese tema? ¿Qué creen que podríamos hacer para conocer más del tema?*

{C3/16-11} MC: *Podríamos hacer una tabla, como que diga qué cosas se han robado, preguntar qué es lo que más se roban.*

Como se observa en la línea {C3/16-9}, la estudiante WN considera importante abordar el tema del robo en el salón de clase porque es consciente de que no son los únicos afectados por la problemática, también existen repercusiones económicas en sus acudientes; este pensar es compartido por su compañero CE al expresar que su mamá “lucha para comprar un lápiz... uno sabe el valor que eso tiene” (Ver Clase 12/7-3 - Minuto 14:52 - 15:25). Estos comentarios reflejan la preocupación y conciencia que ellos tienen frente a los esfuerzos de sus padres, considerando que son familias de escasos recursos.

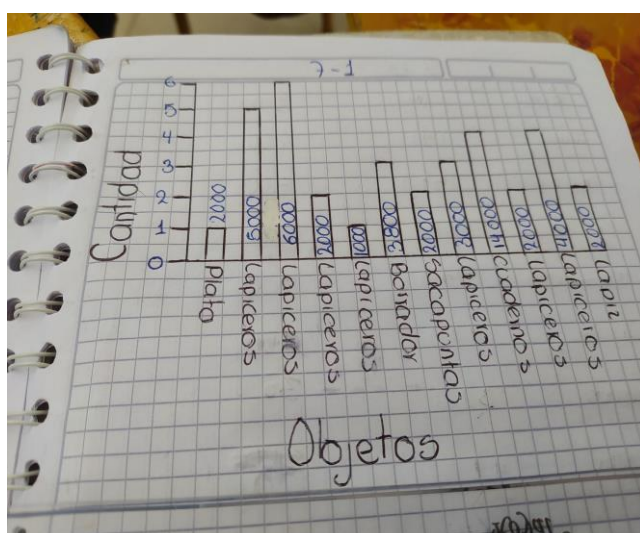
A pesar de que este sentir de los estudiantes no se fundamenta en lo matemático, es decir, no es producto de reflexiones a partir de los datos que ellos obtuvieron, sí es un motivo para vincularse en la investigación, con el fin de entender los factores que inciden en el robo en el salón de clases, punto de partida para tomar una postura reflexiva y crítica frente a esta problemática.

- **Prácticas con las matemáticas.**

De acuerdo con Mancera (2020), una característica del conocer reflexivo es la práctica con las matemáticas, en la cual a través del constructo *disposición-intención-acción*, los estudiantes puedan apreciar que las matemáticas tienen aplicaciones en la realidad, incluso en problemas de su vida diaria, como lo es el robo en el salón de clases. Esta característica se puede vislumbrar (Ver Clase 12/7-3 - Minuto 13:45 - 14:52) cuando los estudiantes hacen uso del

conocimiento matemático, al momento de representar en gráficas los datos obtenidos en las encuestas realizadas a distintos cursos (Figura 22); además, discutieron la manera de condensar esta información en las tablas y que se lograra ilustrar los útiles que más se robaban en cada curso y el gasto que eso representa para el estudiantado.

Figura 22: Cantidad de objetos más robados en 7-1 y el valor estimado, de acuerdo a los datos recolectados por un grupo de 7-3.



Otros ejemplos dan cuenta (Ver Clase 12/7-3 - Minuto 19:20 - 19:42 y Ver Clase 11/7-3 - Minuto 51:20 - 54:06) del esfuerzo de los estudiantes que están tratando de dar respuesta a los interrogantes que le corresponde a cada uno de sus grupos (¿Cuál es el curso de la IE Alejandro de Humboldt en el que más roban? ¿A quiénes afecta más el robo?, ¿hombres o mujeres?). En los audios se puede apreciar que los estudiantes, desde los conocimientos matemáticos que han asimilado en el transcurso de su vida académica, se acercan a una noción de razón que les facilita comparar los datos y dar sus primeras conclusiones gracias a esas prácticas con las matemáticas.

- **Colectividad.**

Dado que este AA se diseñó de manera que el trabajo en clase fuera por grupos, se identificaron algunos episodios en los cuales estaba presente la colectividad. Sin embargo, se destaca que el trabajo colaborativo disminuyó drásticamente en comparación con los primeros AA, incluso hubo grupos en los cuales se vio afectado el trabajo en equipo.

Por ejemplo, en otros fragmentos (Ver Clase 10/7-3 - Minuto 04:04 – 08:58 y Minuto 10:38 – 14:44) y en algunos de los utilizados en las anteriores características, se evidencia que en estos espacios de diálogo donde los estudiantes discuten sobre las herramientas para su investigación y la manera de plasmar los datos obtenidos, hay una participación activa por parte de cada integrante, en la cual sus aportes son tenidos en cuenta por los demás compañeros del grupo, tal como lo señala uno de los niños involucrados en los episodios anteriores:

***CZ:** Yo creo que es mejor trabajar en equipo porque uno escucha la opinión de los demás, y pues a veces uno está mal y los amigos le pueden rectificar lo que uno está diciendo o así. Por ejemplo, en lo último que hicimos sobre el robo, porque yo planteé una cosa y MC me explicó, la tabla que yo hice no es que estuviera mal, pero era como incompleta, no servía para dar toda la información que necesitábamos. [Ver Entrevista CZ, Minuto 7:22 - 8:37]*

Por otro lado, esta característica no fue común denominador para todos los grupos. Dado que el AA tuvo lugar en los últimos días del periodo lectivo, muchos estudiantes no mostraron la misma disposición y aceptación con la que iniciaron, lo que provocó que en algunos grupos el trabajo en equipo y, por ende, la colectividad no se viera alcanzada. Durante el desarrollo de las sesiones de clase, se destacó un grupo en el cual no hubo cooperación entre los integrantes, no hubo una responsabilidad por atender a las participaciones de los demás, ni por contribuir como

miembros activos. En una de las entrevistas realizadas a dicho grupo de trabajo, se les pregunta por cómo consideraban que el trabajo en equipo aportaba en su aprendizaje:

VS: *En nada, ¿cuál compañerismo?*

EJ: *Para empezar, a VS no le gusta hacer equipo.*

VS: *No es que no me guste hacer equipo, me gusta hacer equipo con las personas que sí trabajan.*

La diferencia que existe entre algunos grupos con respecto a la intensidad con la que se alcanzó la colectividad y las diferencias observadas en el trabajo que hizo cada grupo en su investigación, permite constatar que esta característica del conocer reflexivo enriquece e impulsa la investigación, al tener en cuenta la interacción social para la construcción de conocimiento (Blasco, 2014, como se citó en Mancera, 2020).

- **Lectura crítica y matemáticas.**

En el transcurso de este AA, ninguno de los estudiantes realizó reflexiones ni una lectura crítica sobre la información recopilada y los métodos propuestos para ilustrar dicha información en gráficos estadísticos. Los únicos momentos en los cuales los estudiantes cuestionan o examinan su trabajo, es cuando el practicante los desafía a replantear lo que han establecido, es decir, cualquier tipo de reflexión que pudiera surgir en esos espacios, se debía a una conducción forzada por parte del practicante, debido precisamente al desinterés que manifestaron la mayoría de alumnos en esta actividad y al hecho de no estar acostumbrados a este tipo de espacios en la clase de matemáticas, en los cuales, más allá de una aptitud matemática se contribuye al desarrollo de una habilidad crítica.

A continuación, se describen otras características o situaciones que se evidenciaron en la ejecución de este AA y que se constituyen como aportes que brinda la implementación de escenarios de investigación a la formación de ciudadanos críticos.

7.2.3. Resistencias en los AA Tipo 6

Como se ha estado mencionando, la invitación que se hizo a los estudiantes de involucrarse en los AA tipo 6 no tuvo una aceptación tan favorable como en el caso de los primeros escenarios de investigación que se configuraron y constituyeron. Por el contrario, se presentaron varias situaciones adversas que influyeron notablemente en la evolución del mismo y que empañaron las reflexiones que pudieran surgir en este espacio, así como los conocimientos que se podrían alcanzar.

En primer lugar, en ambos cursos se evidenció que los estudiantes oponen resistencia a trabajar en la clase de matemáticas con situaciones de la vida real, de su contexto. Tal como se había contemplado la situación imaginada en este último AA, se esperaba que los estudiantes mostraran mayor compromiso y motivación en comparación con los primeros escenarios de investigación. Se menciona lo anterior teniendo en cuenta que de acuerdo a como se planteó en la metodología, en la fase 3 tuvieron lugar sesiones de cartografía social con el fin de identificar problemáticas presentes y relevantes en el contexto de los estudiantes.

En el caso del curso de 7-1, al momento de identificar las problemáticas en la actividad de cartografía social, los estudiantes observaron que el tema de las drogas es una problemática presente en los sectores donde ellos viven. De esta manera, decidieron elegir este tema, y mediante un diálogo con los practicantes se decidió que la situación para el último AA fuera la legalización de la marihuana en Colombia. Una problemática que tuvo en cuenta los intereses de los estudiantes, tal como ellos mismos lo reconocen. Por ejemplo, la estudiante JA, en la

entrevista menciona haber votado por este tema, pues el consumo de la marihuana es una problemática presente en su barrio, y además considera fundamental profundizar sus conocimientos al respecto. En general, los estudiantes de este curso mostraron un consenso en la elección de esta problemática, resaltando su relevancia y la importancia de estar informados sobre estos temas (Ver Anexo 13).

De manera similar sucedió en el curso 7-3. Como se observa en la Figura 8 que está en la metodología en la descripción de la fase 3, se puede ver que en cuatro de los seis grupos que se organizaron en esa sesión, eligieron el robo como una problemática que les resultaba de interés investigar. Aún más, la temática se acotó al robo en el curso 7-3, cuando una de las estudiantes expresó su interés en ese tema por ser algo que en esa época se presentaba a menudo; la delimitación de la problemática fue bien recibida por los demás compañeros, como expresan muchos de ellos en posteriores entrevistas (Anexo 14), de manera que para la configuración de este AA se tuvieron en cuenta las intenciones e intereses de los estudiantes.

Con base en lo anterior, fue posible considerar esa SI, en la cual los estudiantes estarían involucrados en la investigación, por ser algo novedoso en la dinámica de la clase y que al mismo tiempo estaba guiado por sus intereses. Sin embargo, algunos factores que no habían sido contemplados en la planeación de este AA impidieron que la SD se asemejara a la SI, a pesar de considerar a los estudiantes en la construcción de la metodología.

Antes de iniciar con la investigación frente al tema de la legalización de la marihuana en Colombia, se tuvo un primer acercamiento con los estudiantes, con el objetivo de conocer sus opiniones iniciales frente a este tema. En las producciones realizadas por los estudiantes, (Ver Anexo 15) se observa una postura inicial negativa frente a la legalización de la marihuana en Colombia, pues los estudiantes señalan que la marihuana es una droga que representa una amenaza para la salud y el bienestar de las personas. Esta perspectiva puede estar influenciada

por valores morales y experiencia previas, por lo tanto, ven con escepticismo la idea de legalizarla para su uso recreativo. Sin embargo, reconocen un aspecto positivo, el uso de los componentes de la marihuana en la medicina, valoran la posibilidad de que estos principios activos puedan ser utilizados en tratamientos médicos para mejorar la calidad de vida de pacientes que padecen ciertas enfermedades.

Dentro de la SI los estudiantes permanecerían comprometidos en esta última actividad, utilizando sus investigaciones, reflexiones y discusiones para desarrollar argumentos más sólidos que les permitiera defender su postura frente a decidir si le beneficia al país la legalización de la marihuana. La idea era que las matemáticas se convirtieran en esa herramienta que les ayudaría a acceder a información relacionada con el tema, comprenderla y así tomar decisiones frente a esta situación (Amaya y Espinosa, 2020).

Al observar las últimas producciones de los estudiantes sobre este tema (véase Anexo 16), se nota un ligero cambio en sus posturas, ya que los estudiantes comienzan a reevaluar si realmente sería beneficioso para el país mantener ilegal el uso recreativo de la marihuana. Es decir, han reconocido que la legalización de esta droga podría aportar beneficios económicos al país que favorecen intereses públicos como la educación y la salud. Además, reconocen la importancia de que se realice una regulación en la comercialización de la marihuana, con el propósito de que no genere un impacto negativo en la niñez y juventud del país. Sin embargo, en los planteamientos y reflexiones de los estudiantes no se logró resaltar como se esperaba el papel de las matemáticas, lo que sugiere examinar qué aspectos dificultaron este objetivo.

Esta situación dispuesta estuvo influenciada por varias circunstancias, en primer lugar, se tenía pensado hacer uso de la sala de informática de la IE Alejandro de Humboldt para que los estudiantes pudieran investigar en la clase sobre los subtemas que habían elegido y luego exponer sus hallazgos o dudas. No obstante, nos encontramos con la limitación de que solo teníamos

acceso a este espacio los días martes durante una hora, lo cual resultó ser insuficiente para que los estudiantes pudieran avanzar adecuadamente. Además, el primer día en la sala de cómputo no fue productivo, ya que no todos los equipos tenían conexión a internet y aquellos que sí, presentaban una conexión muy lenta, lo que dificultó aún más el trabajo. Ante esa situación, se decidió proponer a los estudiantes que realizaran consultas sobre el tema en sus hogares, y luego se reunieran en clase con el objetivo de compartir sus hallazgos y discutir la información recopilada.

Estas expectativas no se cumplieron con el éxito esperado, fue bastante notoria la falta de compromiso por parte de los estudiantes por cumplir con su rol en la investigación, en el Anexo 17, se evidencia el actuar de los estudiantes, llegaban a clases sin presentar avances, lo que dificultó significativamente la realización de este escenario de investigación. A pesar de que los estudiantes eran conscientes de la importancia de abordar este tipo de temáticas, no lograron involucrarse como en ocasiones anteriores. Uno de los factores que incidió en su comportamiento, es el hecho de que los estudiantes no están familiarizados con este tipo de trabajos, especialmente en una clase de matemáticas. Además, como lo menciona la directora de curso, leer y analizar poco les gusta (Ver Entrevista directora 7-1, Minuto 7:07 - 7:15), afirmación que es respaldada por el comentario de MF en una de las sesiones de clase: *Muy interesante pero cansón* (Ver Anexo 17). Indicando que la mayoría de los estudiantes no estaban dispuestos a asumir la responsabilidad y entrega que conlleva una investigación, pues el hecho de buscar información, leer y analizarla, es un trabajo que los saca de su zona de confort.

Además, esta actitud estuvo acompañada de una constante resistencia por aceptar que una clase de matemáticas se realizara de esta manera.

Fragmento 3

{E1/3-1} Practicante: *Y creen que debería trabajarse eso en temas de matemáticas o cuál*

sería el papel de las matemáticas en un tema de esos

{E1/3-2} KM: *No [se ríe]*

{E1/3-3} Practicante: *¿No? [se ríe]*

{E1/3-4} EE: *Sí, sí sería bueno*

{E1/3-5} ED: *No me sonó al final, pero...*

{E1/3-6} Practicante: *¿Por qué no le cuadró?*

{E1/3-7} ED: *Porque o sea nunca, normalmente nunca habíamos trabajado la marihuana en clase de matemáticas*

{E1/3-8} KM: *Uno está acostumbrado como a relacionarlo con otras, pero no con matemáticas*

{E1/3-9} Practicante: *¿Con otra qué?*

{E1/3-10} ED: *Con otras áreas*

Como se refleja en el fragmento anterior de la entrevista a un grupo de estudiantes, consideran inusual tratar este tema sobre la legalización de la marihuana en una clase de matemáticas, lo ven más apropiado para otras materias. Esto se debe a que, durante mucho tiempo sus clases de matemáticas se han organizado bajo un enfoque tradicional, donde las matemáticas se reducen a un conjunto de conceptos y reglas establecidas, desconectadas de la realidad (Amaya y Espinosa, 2020). Además, han interiorizado la idea de que las clases de matemáticas consisten únicamente en explicar un tema y proponer ejercicios (Ver Anexo 18). Por esto, se observaron varios momentos en las sesiones de clase o en las entrevistas donde los estudiantes expresaban su inconformidad con lo que estaba sucediendo en el aula de matemáticas.

Los fragmentos en el Anexo 19 son claros ejemplos, que reflejan la preocupación de los estudiantes sobre cuándo se retomarían las clases de matemáticas, pues algunos estudiantes estaban de acuerdo en que las exposiciones y discusiones sobre la marihuana estaban invadiendo el espacio de matemáticas. En pocas palabras, para ellos las clases habían perdido su foco principal, estaban perdiendo la esencia, tal como lo señala DM, “unas clases eran matemáticas y otras marihuana”:

Fragmento 4

{E1/4-2} DM: *Es que, es que con ustedes casi no vimos matemáticas sino marihuana [se ríen sus compañeras], en serio!*

{E1/4-3} AV: *Pero si vimos en la clase marihuana, pero si fue chévere*

{E1/4-4} MN: *Sí*

{E1/4-5} DM: *Es que unas clases con ustedes fueron matemáticas y otras marihuanas entonces [se ríen], entonces más o menos*

Otra situación que evidencia la resistencia de los estudiantes hacia este tipo de ambientes de aprendizaje, se encuentra en el siguiente fragmento (Ver Entrevista VS/EA/EJ - Minuto 1:56 - 6:03) de una entrevista, en la que se expresa la inconformidad con respecto al *desafío* del practicante en cada uno de sus avances; para ellos, no hay cabida para la reflexión de lo que se podría hacer y entender con la información que han obtenido. La invitación a detenerse en un análisis de las causas y consecuencias de la problemática abordada, carece de sentido en la clase de matemáticas. Los alumnos están acostumbrados al modelo educativo tradicional, donde el profesor deja una lista de indicaciones y ejercicios para entregar, solo importa su solución

(Skovsmose, 2000); someter a un análisis crítico el proceso realizado para alcanzar la solución de esos ejercicios y el mismo enunciado, se ignora por completo.

Adicionalmente, y en concordancia con lo mencionado por Sánchez y Torres (2009), se evidencia la creencia arraigada con la que cargan los estudiantes, en la cual se les considera meros receptores de conocimiento, como si fueran tablas rasas esperando ser grabadas con la sabiduría de otros. Esta creencia los envuelve en una capa de desempoderamiento, donde se les dice, de manera implícita o explícita, que sus voces son superfluas en las discusiones de temas sociales, económicos, culturales y políticos que dan forma a su propia realidad. En el anterior fragmento, se aprecia que los niños que participaron de la entrevista no se conciben como ciudadanos críticos, reflexivos y esto además genera una competencia egoísta en la cual se ve al *otro* como rival, impide ayudarlo y comprender su “sufrimiento”; dicha creencia y sus consecuencias impiden que los estudiantes se involucren en la comprensión y transformación de su realidad.

Este pensamiento arraigado sobre las matemáticas y su enseñanza, no solamente se funda en el aula de matemáticas, sino que también es una postura que viene desde la casa. Los padres de familia también tienen una concepción sobre esta asignatura y su metodología, que ha sido transmitida a sus hijos. Esta situación fue identificada mediante los comentarios de una estudiante, quien en una clase manifestó que aunque sus familiares reconocían la importancia de abordar este tipo de problemáticas presentes en el contexto de los estudiantes, también expresaban su descontento, pues no consideraban adecuado manejar estos temas en una clase de matemáticas, ya que relacionan las matemáticas únicamente con números, sin comprender su papel como herramienta que permite entender el mundo que nos rodea, resolver problemas y tomar decisiones (Anexo 20).

Esta postura impidió que los estudiantes relacionaran las matemáticas con las actividades establecidas en los escenarios de investigación tipo 6, ignorando que estas tareas requerían el uso de herramientas matemáticas, como, por ejemplo, representar datos en gráficas estadísticas o realizar conversiones de cantidades numéricas, entre otras. En otras palabras, pese a que se implementaron actividades de enseñanza de matemáticas, aplicadas en situaciones de la vida real con el fin de potenciar los conocimientos tecnológico y reflexivo, los estudiantes desconocen que están haciendo matemáticas; por mucho que los estudiantes estén inmersos en unas prácticas con las matemáticas, no son conscientes de ello, y son reacios a actividades (matemáticas) en este tipo de escenarios, porque de sus experiencias educativas han adquirido imaginarios que los ha llevado a pensar que no hay matemáticas al trabajar con situaciones de su contexto.

Otro aspecto que dificultó la implementación de este AA fue el hecho de que se realizara a final del año escolar, pues durante este periodo los estudiantes enfrentan una presión por aprobar todas las materias, esto conllevó a una reducción en la participación y compromiso en la última actividad, tal como lo manifiesta uno de los estudiantes que más se involucró en los primeros AA:

Fragmento 5

{E1/5-1} Practicante: *Y no sé, ¡no!, yo noté como que, en las primeras actividades, en la de los cuadrados, en la de Pascal, y en la de Josefo incluso como que tú participabas más. En esta última, no sé, te sentí un poco más alejado. ¿Pasó algo?, ¿o no te interesaba? ¿Qué pasó?*

{E1/5-2} BS: *Pues la verdad es que... no, o sea, a veces yo por ejemplo en la mañana, yo tenía muchos problemas con mis compañeros entonces yo me sentía mal*

{E1/5-3} Practicante: *¿Tus compañeros del equipo o de todo el curso?*

{E1/5-4} BS: *Del equipo y también del curso, pero no todos, obvio, y pues a veces también que si yo llegaba, que si yo trasnochaba porque tenía que hacer tareas entonces... pues yo a veces llegaba cansado y llegaba un poco dormidito... y como los primeros días pues no era casi que a final de año entonces pues...*

{E1/5-5} Practicante: *¿A los primeros días qué?*

{E1/5-6} BS: *Como apenas estábamos empezando y casi no era final de año entonces pues fue un poco más tranquilo, más relajado*

{E1/5-7} Practicante: *Ah ¿o seas tú dices que tal vez te alejaste un poco fue porque estamos a final de año y tienen mucho trabajo y mucha cosa?*

{E1/5-8} BS: *Sii.*

Esta época del año vino a ser determinante en la reacción de los estudiantes frente al desarrollo de este AA, puesto que en este periodo los estudiantes suelen estar abrumados por la carga académica que generan los exámenes y trabajos finales; deberes que deben completar antes del cierre del año. En sí, esta carga genera un agotamiento que dificulta la disposición de los estudiantes por involucrarse activamente en actividades que no les retribuye una calificación determinante para aprobar una materia, como el AA tipo 6. Ante el cúmulo de trabajos los estudiantes deciden priorizar sus responsabilidades, por ejemplo, en una de las sesiones de clase donde se pretendía que los estudiantes presentarían sus avances en la investigación, se observó que la mayoría no estaban listos, este fue el caso de AV, que se presenta a continuación:

Episodio 17

{C1/17-1} Practicante: *¿Ustedes estudiaron?, ¿se prepararon?*

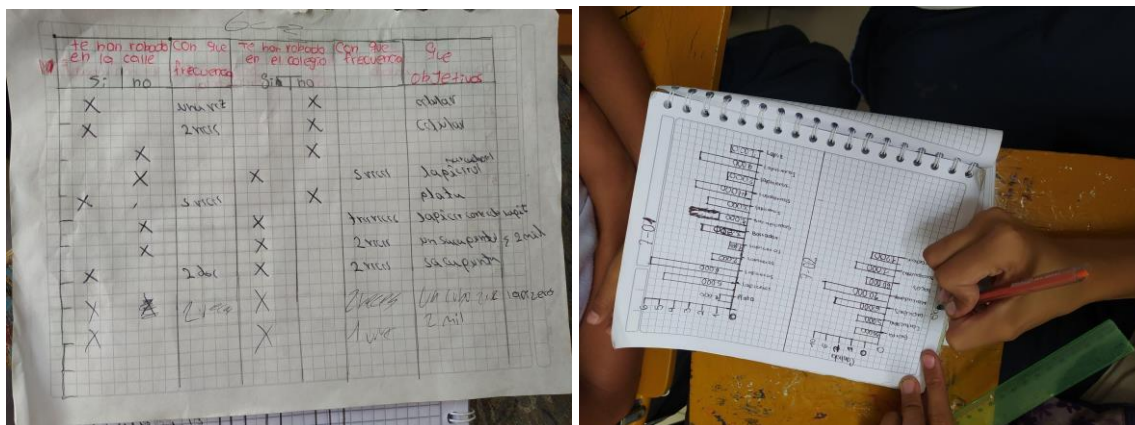
{C1/17-2} AV: *Sí pero no, no tanto...estaba estudiando para la evaluación de biología*

{C1/17-3} MN: *y de los nervios se le olvida todo*

Además, durante la entrevista a un grupo de estudiantes (Anexo 21), se evidenció que la preocupación por su situación académica, generó en ellos una falta de concentración y desmotivación que les impidió expresarse con libertad durante ese momento. Esto refleja cómo la incertidumbre y el temor sobre aprobar el año lectivo, suele afectar los estados de ánimo de los estudiantes, provocando una disminución en la motivación e interés por participar en actividades adicionales.

De igual manera, lo discutido en la sección 7.1, permite contrastar el nivel de compromiso, interés y disposición de los estudiantes entre los AA tipo 2 y 4 con los AA tipo 6. La mayoría de producciones realizadas por los alumnos en los primeros escenarios de investigación, reflejan que están completamente involucrados con la situación, contrario a las producciones que se obtuvieron en la mayoría de grupos en este último escenario.

Figura 23: Gráficas y tablas realizadas por algunos grupos para la recolección e ilustración de información en el AA tipo 6.



La Figura 23 presenta algunas de las tablas y gráficas que realizaban los estudiantes en los diferentes grupos; se puede observar que en general no se esfuerzan por presentar trabajos pulidos. Lo anterior es un indicador de que los estudiantes no aceptaron la invitación a explorar dentro de este escenario de investigación, su atención estaba dirigida en pasar las otras materias (para el caso de aquellos estudiantes que estaban perdiendo) o en que se acabara la clase de matemáticas (para el caso de aquellos que ya sabían que aprobaron todas las asignaturas).

A pesar de que en la mayoría de sesiones dedicadas al AA tipo 6 (robo en el salón de clases del curso 7-3) los estudiantes realizaban algunos comentarios, se identificó que la mayoría de dichos comentarios no eran acotaciones que evidenciaran una reflexión o un compromiso activo por parte de ellos; en la mayoría de grupos los estudiantes daban cualquier opinión con el fin de cumplir con lo que los practicantes les preguntaban, y así no tener que hacer más actividades dentro del “proceso de investigación”.

Figura 24: Disposición de los estudiantes del curso 7-3 en el último escenario de investigación.



Llama la atención, que muchos de los estudiantes que en los AA anteriores estaban entusiasmados y con buena disposición, posteriormente estaban completamente desinteresados de la actividad. Incluso, como se observa en la Figura 24, muchos alumnos tienen el bolso puesto, como si ya quisieran irse, situación que no ocurría en los escenarios anteriores. Dicho de otro modo, el constructo *disposición-intención-acción* que en un principio se había establecido, se desarticuló por las dinámicas que tienen lugar en la institución educativa al finalizar el año lectivo, lo cual nos lleva a pensar que el éxito de un escenario de investigación se ve afectado por la organización temporal que tiene dentro del período lectivo.

Por supuesto, tal afirmación no ignora el hecho de que la ubicación de los escenarios de investigación en el tiempo riñe con la evaluación. Es importante reflexionar en este tipo de actividades, cómo la evaluación, entendida como una calificación, puede afectar dicho proceso, asunto que se trata a continuación.

7.3. SOBRE LA EVALUACIÓN

En el sistema educativo tradicional, la evaluación se ha convertido en un fin, en una meta que eclipsa cualquier otro propósito del aprendizaje. Desde una edad temprana, los estudiantes son introducidos en esta dinámica donde el objetivo principal parece ser obtener una calificación, más que comprender, reflexionar o aplicar lo aprendido. Esta mentalidad de calificación como medida de éxito no solo permea las prácticas en las aulas, sino que se arraiga en el subconsciente de los estudiantes, moldeando su percepción del aprendizaje y condicionando sus expectativas (Anaya et al., 2015).

Dentro de este modelo educativo, se les enseña a los estudiantes que el éxito académico se define por la nota que obtienen en un examen o una tarea. Esta lógica de evaluación como calificación crea una atmósfera de competencia y ansiedad, donde el énfasis está en superar a los

demás, en lugar de centrarse en el proceso de aprendizaje en sí mismo (Cabra, 2012). Por ejemplo, como se registró en el diario de campo de la observación no participante que tuvo lugar en la Fase 4, en la clase de matemáticas es común escuchar comentarios referentes a la nota y al puntaje que obtuvieron ambos cursos en la prueba Evaluar Para Avanzar (EPA), como se evidencia en el siguiente fragmento que tuvo lugar en una sesión de clase de matemáticas dirigida por la profesora titular:

Profesora Titular: *Ya tengo los resultados de la prueba EPA. La próxima clase vamos a ver quién se concentró más, quién le dedicó más tiempo y quién se preocupó verdaderamente por presentar la prueba.*

Aún más, pareciera que el paso por todos los niveles de la educación colombiana y todo lo relacionado con el proceso educativo tiene como único objetivo lograr buenas calificaciones en las pruebas estandarizadas:

Profesora Titular: *Al que le vaya bien en ICFES, va derecho a la universidad; pero, al que le vaya mal, ha estado perdiendo el tiempo todos estos años.*

Como resultado, los estudiantes internalizan la idea de que su valía se mide por su rendimiento académico, y esta presión por obtener buenas notas se convierte en una constante en sus vidas escolares. Esta mentalidad de calificación como objetivo principal del aprendizaje se convierte con el tiempo en una norma aceptada, una realidad a la que los estudiantes se adaptan y, en muchos casos, llegan a esperar. Tal como se evidencia en las respuestas de algunos estudiantes

cuando se les preguntó por situaciones que se les hayan dificultado o que no les hayan gustado en las clases¹³:

VS: *Que usted cada vez que llegaba, nos ponía a hacer otra cosa además de la que estábamos haciendo, nos agregaba más cosas.*

Practicante: *¿Por qué no les gustaba?*

VS: *Porque ya teníamos hecho eso. Usted llegaba y: “hagan esto, hagan lo otro”, nos agregaba más y más.*

Practicante: *¿Cómo qué cosas?*

VS: *Pues es que nos metía otras ideas que no teníamos en la cabeza, entonces nos decía hagan yo no sé qué, analicen yo no sé qué y así.*

Practicante: *Pero era por propuesta de ustedes.*

VS: *Pero si no lo hacíamos, nos ponía bajo.*

Practicante: *Pero yo nunca los amenacé con la nota.*

VS: *Pero es lógico que lo va a hacer.*

Practicante: *Y entonces, ¿lo hacían por la nota?*

[Todos]: *Si, obvio.*

En lugar de fomentar un ambiente de aprendizaje enriquecedor y estimulante, el modelo tradicional de evaluación como calificación perpetúa una mentalidad de pasividad y conformidad entre los estudiantes. Asunto que encontramos problemático para el intento de configurar escenarios de investigación, dificultando la formación de ciudadanos críticos, pues de acuerdo a Anaya et al. (2015) los estudiantes se convierten en receptores pasivos de conocimiento, más

¹³ Fragmentos similares que respaldan esta idea se encuentran en el Anexo 22.

preocupados por memorizar información para las evaluaciones que por comprender y aplicar lo que están aprendiendo. Esta lógica de evaluación estandarizada y centrada en la calificación limita su capacidad de exploración y descubrimiento, así como limita desarrollar habilidades críticas, creativas y analíticas, relegando a los estudiantes a un papel de meros cumplidores de requisitos formales.

Este paradigma de enseñanza/aprendizaje, centrado solamente en las notas, tiende a generar preocupaciones tanto en estudiantes como en padres de familia por la aprobación del año lectivo, quienes reducen la educación a un medio para obtener una calificación y no como un proceso importante en la formación de ciudadanos. Esta mentalidad se vio reflejada en un comentario de la profesora titular, donde expresa su preocupación frente a esta situación, reconociendo que solo a final de año, los padres de familia, en su desesperación porque sus hijos aprueben cada materia, solicitan la ayuda de los profesores (Ver Anexo 23). Desde la percepción de la docente, la actitud de los padres de familia evidencia una mentalidad enfocada en resultados inmediatos y superficiales, pues consideran que la asignación de un trabajo y su calificación son los elementos necesarios para evaluar los logros de sus hijos en el transcurso de su aprendizaje.

Por último, es necesario repensar y transformar el enfoque de la evaluación en las instituciones educativas, en particular en matemáticas. Se debe desafiar la idea de que la calificación es el único indicador de éxito académico y redefinir el propósito de la evaluación (que incluya a toda la comunidad educativa) como un proceso integral, donde se privilegie el reconocimiento al avance que logra el estudiante por sí mismo, que le permita comprometerse con su proceso de aprendizaje y reconozca la importancia de las matemáticas para leer y escribir el mundo (Gutstein, 2006). Solo entonces se puede librar de la prisión de la nota y propiciar un ambiente centrado en el estudiante, donde un aprendizaje significativo para el crecimiento personal sea el foco de atención.

Una vez discutidos estos aspectos que fueron relevantes en el desarrollo de los ambientes de aprendizaje tipo 2, 4 y 6, nos dispondremos a observar qué sucedió con el desarrollo de la alfabetización matemática en los estudiantes del grado séptimo de la IE Alejandro de Humboldt.

7.4. ¿QUÉ PASÓ CON EL DESARROLLO DE LA ALFABETIZACIÓN MATEMÁTICA?

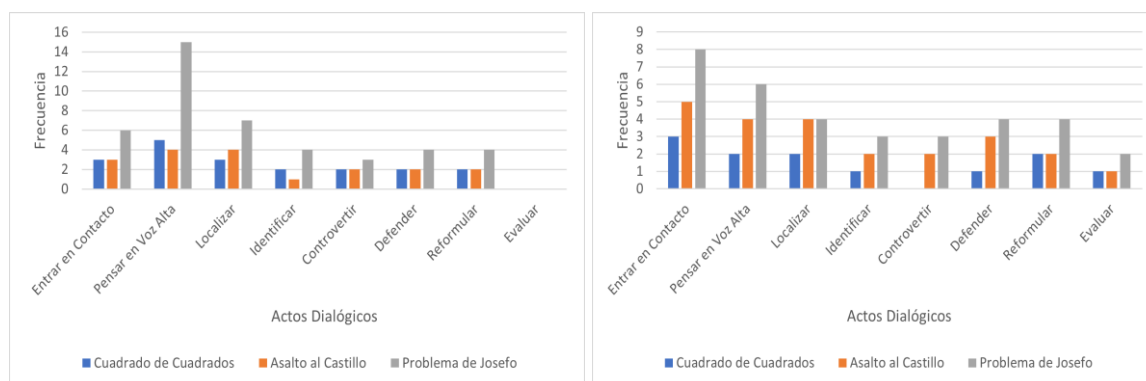
Después de discutir la relación entre los actos dialógicos, las características del conocer reflexivo y los diferentes ambientes de aprendizaje que se configuraron, nos disponemos a revisar la repercusión sobre la alfabetización matemática.

En primer lugar, lo discutido en la sección 7.1 permitió identificar que la implementación de los AA tipo 2 y 4 propiciaron un cambio en la dinámica interna de las clases de matemáticas; este cambio generó una mayor interacción entre estudiantes y practicantes. De este modo, en las clases de matemáticas la voz no la tenía solo el docente, sino que los estudiantes también tomaron el control. Dentro de estos espacios se reconocieron distintos actos dialógicos en el transcurso de las clases, indicio de que emergió un diálogo, el cual facilitó y enriqueció el trabajo en las diferentes actividades, lo que a su vez potenció el desarrollo de dos de los conocimientos de la alfabetización matemática, a saber, los conocimientos matemático y tecnológico.

Las intervenciones de los estudiantes y su motivación por proporcionar soluciones a los problemas planteados, dejó en evidencia la manifestación del conocimiento matemático en la resolución de estos problemas. Los estudiantes usaban conceptos matemáticos como: número par, número impar, múltiplo y el uso de operaciones matemáticas básicas, con el fin de identificar regularidades; además, era usual ver a los estudiantes hacer cuentas y emplear técnicas tales como realizar apoyos visuales, hacer diagramas, identificar patrones, entre otros, que les permitieran proponer distintas posibilidades para abordar el problema en cuestión.

Si bien es cierto que en cada uno de los escenarios de investigación se dividió la competencia matemática, fue principalmente en los AA tipo 2 y 4 en los cuales los estudiantes tomaron la iniciativa para reproducir pensamientos matemáticos y justificaciones, además de tener la libertad de explorar diferentes alternativas matemáticas para la resolución de los problemas planteados (Skovsmose, 1997). La figura 25 es un esquema que presenta la frecuencia con la que se observó cada uno de los actos dialógicos en los diferentes AA tipo 2 y 4, y es el punto de partida para entender el impacto que estos primeros escenarios de investigación tuvieron sobre la alfabetización matemática.

Figura 25: Frecuencia de los actos dialógicos en los AA tipo 2 y 4, en los cursos 7-1 (izquierda) y 7-3 (derecha).



Nota. Elaboración propia.

Como se puede observar en la figura 25, los actos dialógicos de *pensar en voz alta*, *entrar en contacto* y *localizar* fueron los más evidenciados (en ambos cursos) en los AA mencionados. Esto va en relación con el hecho de que el conocer matemático haya sido el más desarrollado en los escenarios de investigación constituidos en esta práctica pedagógica, pues la capacidad de entrar en contacto, establecer una interacción con otros y el intercambio de ideas, es lo que permitió visibilizar pensamientos matemáticos y el dominio de algoritmos, ya que como

menciona Penteado y Skovsmose (2022), el diálogo al ser visto como un proceso de investigación, propicia la manifestación de habilidades matemáticas. De igual manera, el acto de localizar permite atender y aceptar las diferentes perspectivas que pueden surgir alrededor de cuestiones matemáticas, fortaleciendo la construcción de soluciones para abordar cada desafío; asunto que relacionamos con un cierto grado de desarrollo del conocer tecnológico.

Los siguientes tres actos dialógicos que más se evidenciaron en ambos cursos fueron: *defender, reformular e identificar*. Junto con *localizar*, estos actos se relacionan con el conocer tecnológico, el cual se vio evidenciado en algunos episodios, por ejemplo, cuando los estudiantes exploraban diferentes alternativas como en el caso del escenario de investigación *Cuadrado de Cuadrados*; el hecho de explorar diversos tamaños del cuadrado, implicaba reformular las ideas sobre cuál debía ser la mínima cantidad de palitos para construir un cuadrado de cuadrados, lo que a su vez, convocaba a los estudiantes a defender su postura. Este proceso de justificar contribuyó a una cristalización de las ideas matemáticas que desencadenó en pensar modelos o fórmulas que describieran la mínima cantidad de palitos para un cuadrado de cualquier tamaño, como es el caso del modelo representado por la estudiante AV en la figura 13 y el episodio 2.

En este mismo sentido, *El Problema de Josefo* se caracterizó por ser el escenario de investigación más aceptado por los estudiantes, toda vez que la participación e interacción fueron más notorias; además, como se observa en la gráfica, en esta actividad fue posible identificar la presencia de un mayor número de actos dialógicos, en comparación con los anteriores AA. Esta actividad invitó a los estudiantes a indagar en diferentes direcciones con el propósito de reconocer patrones, lo que les facilitó esbozar ideas para construir modelos que permitieran encontrar la posición adecuada donde debería ubicarse Josefo para ser el sobreviviente, teniendo

en cuenta la cantidad de personas. Algunos ejemplos de esta capacidad de aplicar y proponer modelos se evidencian en los episodios 8 y 9.

En otras palabras, aquellos episodios en los cuales se evidenciaron los actos dialógicos de *localizar, reformular, defender e identificar*, también dieron indicios de una capacidad de aplicar las matemáticas y esbozar modelos para alcanzar una solución a la situación planteada, lo que se traduce en un desarrollo del conocer tecnológico.

Por otro lado, como se puede ver en la figura 25, se notó una escasa presencia de los actos dialógicos de *controvertir y evaluar*. Dicha ausencia explica que no emergiera el conocer reflexivo en estos primeros ambientes de aprendizaje, ya que, si los estudiantes no cuestionan el conocimiento ya establecido y no cuestionan los supuestos aceptados (sin discusión) por los practicantes y demás compañeros (Alrø y Skovsmose, 2012), entonces no se crean momentos para que emerjan reflexiones críticas sobre las matemáticas mismas y mucho menos, reflexiones críticas sociopolíticas basadas en las matemáticas. En esa misma línea, la falta de una retroalimentación que acompañara los desarrollos de cada actividad impidió que los estudiantes colocaran en tela de juicio sus hallazgos y construcciones. De esta manera, obviar este tipo de espacios reprimió el desarrollo de una competencia crítica en los estudiantes, que los invitara a formular interrogantes como: ¿por qué ese algoritmo y no otro?, ¿es confiable este algoritmo?, ¿qué hay de los resultados y su validez?

La ausencia de estos actos dialógicos estuvo condicionada, en primer lugar porque el trabajo en el salón de clase de matemáticas se centró en encontrar una solución a cada problema planteado: una vez los estudiantes lograban construir una respuesta, esta se presentaba ante todo el salón, mas no propiciamos un momento para evaluar estos logros. Esto llevó a que los estudiantes no reflexionaran sobre su quehacer y por tanto asumieran que lo dicho en la clase era

correcto. Además, teniendo en cuenta sus antecedentes, resulta difícil que los estudiantes actúen de forma crítica frente a las matemáticas, pues la enseñanza tradicional ha sembrado la idea en ellos de que las matemáticas no deben ser cuestionadas, sino asumidas como verdades absolutas. Por esta razón, resulta importante en este tipo de AA propiciar espacios en los cuales se invite a los estudiantes a abordar desde una perspectiva crítica lo que se hace en la clase de matemáticas, con el fin de constituirlos como sujetos críticos capaces de reflexionar y cuestionar asuntos matemáticos.

Ahora bien, en cuanto a los AA tipo 6, la competencia matemática se pudo apreciar en algunas ocasiones, por ejemplo, cuando los estudiantes realizaban cálculos para efectuar conversiones en los datos, o en los momentos en que discutían la manera de representar la información recopilada en gráficas estadísticas, con el propósito de ilustrar visualmente sus hallazgos, situaciones ya descritas en las secciones 7.2.1 y 7.2.2. De esta manera, los estudiantes hicieron uso de sus habilidades matemáticas para entender y plasmar información con el propósito de abordar las problemáticas que dirigían la investigación en este escenario de investigación.

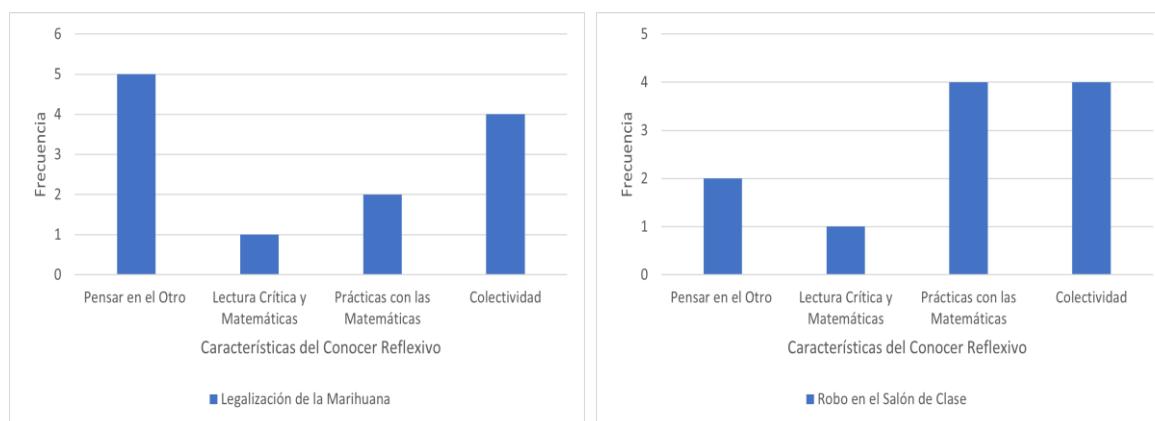
Por otro lado, se identifica una relación débil entre la implementación de estos escenarios de investigación con referencia a situaciones de la vida real y el desarrollo del conocer tecnológico, pues las diferentes resistencias y dificultades presentadas a lo largo de su ejecución impidieron que los estudiantes aplicaran y diseñaran modelos con la misma libertad y motivación que en los AA tipo 2 y 4. Sin embargo, se reconocen algunos momentos en los cuales se vislumbraron unos rasgos de este conocer en el curso 7-3, cuando los estudiantes aplicaron matemáticas para cuantificar la cantidad de objetos que más se robaban en cada uno de los salones encuestados, cuantificar el gasto correspondiente que significaba para los estudiantes esos

objetos robados, así como determinar mediante un proceso matemático cuál era el salón en el que más robaban o si el robo era una cuestión de género. Es importante mencionar que en el curso 7-1 no se obtuvieron evidencias de un desarrollo de esta competencia.

Por último, en ninguno de los AA que se trabajaron se evidenció de manera rigurosa el conocer reflexivo, pues tal como se discutió en las secciones anteriores, los diferentes factores analizados no permitieron que se alcanzaran reflexiones sobre las matemáticas y a través de las matemáticas, pues la potenciación del conocer reflexivo se conecta con la habilidad para comprender cómo las matemáticas funcionan, se aplican y cuáles son sus consecuencias (Skovsmose, 2011). Sin embargo, en los AA tipo 6 se pudieron identificar algunos rasgos de las características del conocer reflexivo propuestas por Mancera (2020), que dan cuenta de que la implementación de este tipo de ambientes de aprendizaje permite potenciar en los estudiantes este conocer.

La figura 26 presenta la frecuencia con la que se percibieron las características del conocer reflexivo en el desarrollo de los AA tipo 6, con base en lo presentado en las secciones 7 .2.1 y 7 .2.2. De las gráficas se puede inferir que en el escenario de investigación “Legalización de la Marihuana”, las características del conocer reflexivo con mayor manifestación fueron *Pensar en el otro* y *Colectividad*, mientras que para el escenario de investigación “Robo en el Salón de Clase” fueron *Prácticas con las matemáticas* y *Colectividad*. Además, es notorio que en ambos escenarios escasamente se presenció la característica de *Lectura crítica y matemática*, puesto que no emergieron en los estudiantes reflexiones críticas (por medio de las matemáticas) de índole sociopolítica, así como tampoco una crítica a las matemáticas en sí mismas.

Figura 26: Frecuencia de las características del conocer reflexivo en los cursos 7-1 (izquierda) y 7-3 (derecha).



Nota. Elaboración propia.

Por lo anterior, la relación entre las características del conocer reflexivo y estos últimos AA indica que esta competencia no se vio plenamente alcanzada. Reconocemos que, además de la influencia de las resistencias ya discutidas, se omitieron algunas cuestiones que pudimos plantearnos junto con los estudiantes y que podrían guiarnos hacia un desarrollo del conocer reflexivo, por supuesto, sin ninguna garantía de que formular tales preguntas cumpliría con esa meta, como si de una receta se tratase¹⁴. Tales preguntas claves pudieron ser apropiadas para intentar ilustrar a los estudiantes que las matemáticas tienen un poder formativo sobre la sociedad, de manera que sean un punto de partida para una crítica a las matemáticas y a situaciones de injusticia social e inequidad por medio de las matemáticas.

Estas discusiones sobre lo que ocurrió en relación con la implementación de estos AA tipo 6 y el desarrollo del conocer reflexivo nos permiten inferir que el desarrollo de este conocer

¹⁴ En su libro *Educação matemática crítica: A questão da democracia* (2001), Ole Skovsmose plantea que estudiantes y profesores podrían realizar seis tipos de preguntas clave sobre sus trabajos en el aula de matemáticas, con el fin de intentar un acercamiento al conocer reflexivo. El orden en el cual Skovsmose planteó las preguntas, obedece a un orden lógico, no significa que haya una jerarquía en la formulación de las preguntas: (1) ¿Usamos el algoritmo de manera correcta? (2) ¿Usamos el algoritmo correcto? (3) ¿Podemos confiar en los resultados de este algoritmo? (4) ¿Podríamos haber prescindido de cálculos formales? (5) ¿Cómo el uso efectivo de un algoritmo (apropiado o no) afecta un contexto específico? (6) ¿Podríamos haber desempeñado una evaluación de otro modo?

en los estudiantes requiere de un proceso continuo y planificado que haga parte del recorrido escolar, no basta con realizar una actividad puntual que desafíe las dinámicas establecidas en la clase de matemáticas.

En cuanto a la alfabetización matemática definida de acuerdo a Jablonka (2003) y a la luz de la investigación crítica, la situación imaginada pretendía que los estudiantes evaluaran las prácticas matemáticas que tenían lugar en sus respectivos cursos, además de manifestar reflexiones sobre situaciones críticas partiendo de un conocimiento matemático, de manera que se viera reflejado el desarrollo de una alfabetización matemática centrada en la ciudadanía y una alfabetización matemática para el cambio social.

En términos de la SD, los estudiantes manifestaron algunos rasgos de la alfabetización matemática centrada en la ciudadanía, cuando expresaban ser conscientes de las diferentes maneras de aprender matemáticas que estas actividades les brindaba; reconocieron que este tipo de escenarios transforman esas prácticas matemáticas al generar espacios para interactuar y compartir, constituyéndolos no únicamente como sujetos cognitivos, sino también como sujetos sociales.

A pesar de que no se alcanzó un pleno desarrollo de la alfabetización matemática, como se mencionó anteriormente, sí se percibió un cambio en la dinámica de la clase, pues con los escenarios de investigación se gestó un ambiente que fomenta la construcción de conocimiento de manera colectiva, elemento clave que contribuye a la formación de ciudadanos críticos al proporcionar habilidades para vivir en sociedad. Del mismo modo, esta actividad contribuyó a la formación de sujetos capaces de participar en discusiones, resolver conflictos y llegar a acuerdos teniendo en cuenta las ideas propias y del otro.

Además, como este tipo de actividades no se centran en competir ni en encontrar una verdad absoluta, los estudiantes se sienten libres de compartir sus opiniones sin temor de estar equivocados o no coincidir con la respuesta del profesor, por lo tanto, se contribuye a la superación de la timidez que muchos estudiantes han adoptado debido al enfoque tradicional. Este enfoque se presta para clasificar a los estudiantes entre buenos y malos, razón por la cual muchos prefieren estar en silencio en toda la clase por temor a estar mal. Por lo tanto, consideramos que estos escenarios promueven la formación de sujetos activos que se involucran en situaciones de la vida real sin temor a expresar sus opiniones. Así, la implementación de los escenarios de investigación constituidos en esta práctica pedagógica, significó un punto de partida para el desarrollo de la alfabetización matemática centrada en la ciudadanía y que apunta a un cambio social.

En términos generales, la implementación de los cuatro AA marcó un inicio en el desarrollo de la alfabetización matemática, pues potenció en gran manera el desarrollo de los conocimientos matemático y tecnológico; aunque el conocer reflexivo no emergió como se esperaba, debido a circunstancias que no fueron tenidas en cuenta en la planeación de las actividades, sí se manifestaron algunas características del conocer reflexivo en términos de Mancera (2020), lo cual permite afirmar que en particular los AA tipo 6, además de estar orientados por actividades que desafían el enfoque tradicional, representaron unos primeros pasos hacia la formación de ciudadanos inmersos en unas prácticas con las matemáticas dentro de una colectividad que los convoca a pensar en el otro, y que deja las puertas abiertas para continuar en la formación de sujetos capaces de “leer” críticamente el mundo a partir de recursos matemáticos.

Finalmente, estas discusiones nos invitan a pensar que es necesario transitar entre los distintos AA propuestos por Skovsmose (2000) durante el transcurso del año escolar, con el fin

de propiciar espacios que permitan la interacción en el aula de matemáticas, y así aportar en la formación de sujetos capaces de posicionarse críticamente frente a situaciones de inequidad e injusticia social.

8. CONCLUSIONES Y CONSIDERACIONES

La transición del paradigma del ejercicio hacia los escenarios de investigación, desde la educación matemática crítica implicó una revisión fundamental en nuestra perspectiva y práctica pedagógica en matemáticas, con el fin de entender el impacto que los escenarios de investigación pueden tener en el desarrollo de la alfabetización matemática. Mientras que el paradigma tradicional se enfoca en la repetición de procedimientos y la memorización de fórmulas para resolver problemas específicos y reproducir conocimientos establecidos, los escenarios de investigación desafían esta mentalidad adaptada.

Desde el enfoque de la EMC, se promueve transitar por los diferentes AA y en particular por los escenarios de investigación, donde los estudiantes no sólo resuelven problemas, sino que también se cuestionan la naturaleza misma de los problemas y sus implicaciones. Esta nueva perspectiva invita a los estudiantes a explorar las matemáticas en contextos auténticos y a reflexionar sobre las repercusiones sociales, políticas, económicas y culturales de sus hallazgos. En lugar de ser meros receptores de información, los estudiantes se convierten en participantes activos en la construcción de su conocimiento, lo que fomenta un aprendizaje más profundo y significativo.

De esta manera, es gracias a esta experiencia, las reflexiones y discusiones presentadas anteriormente, que podemos concluir, en primer lugar, que los escenarios de investigación implementados generaron espacios en los cuales los estudiantes tomaron el control de las actividades y presentaron alternativas para el desarrollo de las mismas, lo que condujo a explorar en distintas direcciones los problemas planteados, de acuerdo a sus intenciones e intereses. Además, con la actividad de cartografía social, se tuvo un acercamiento a los intereses de los estudiantes, con el fin de involucrarlos en el diseño del último AA, permitiendo que las

situaciones de la vida real que orientaran este escenario fueran propias del contexto de los estudiantes. De esta manera, con respecto al primer objetivo específico, podemos afirmar que debido a nuestra estrategia pedagógica, los estudiantes ciertamente se constituyeron como miembros activos durante la planeación y desarrollo de los distintos escenarios de investigación, que fueron guiados en gran medida por las propuestas e intenciones de los estudiantes.

Por otra parte, con respecto al segundo objetivo específico, efectivamente se pudieron caracterizar algunas formas en las cuales los escenarios de investigación influyeron en este desarrollo de la alfabetización matemática. En la medida que los participantes de los escenarios de investigación nos vimos inmersos en un diálogo, fue clave que en el proceso de indagación, los practicantes propiciáramos espacios en los cuales los estudiantes *entraran en contacto* y *pensaran en voz alta*, de manera que pudieran manifestar sus habilidades matemáticas en la exploración de las diversas actividades que tuvieron lugar dentro de los AA tipo 2 y 4. Es así como vemos una relación entre la presencia de estos actos dialógicos¹⁵ y el conocer matemático en los estudiantes de los cursos 7-1 y 7-3.

Además, la aceptación de los estudiantes a explorar dentro de estos escenarios, los llevó a indagar dentro de esa lluvia de ideas que surgió al entrar en contacto y pensar en voz alta; esto favoreció que los estudiantes pudieran *localizar, identificar, defender* y *reformular* sus ideas y las de los demás compañeros, lo que permitió que aplicaran su conocimiento matemático para esbozar fórmulas y modelos como respuesta a los problemas planteados, es decir, emergió el conocer tecnológico en los estudiantes. De igual modo, para que esto ocurriera, fue necesario que

¹⁵ Esto no quiere decir que los actos dialógicos de *entrar en contacto* y *pensar en voz alta*, sean los únicos relacionados con el desarrollo del conocer matemático. Nuestro pensar es que son estos actos los promotores para que emerja dicho conocer en un espacio de indagación, sin desconocer que la competencia matemática se ve enriquecida en la presencia de los demás actos dialógicos.

por algunos instantes los practicantes influyeran en el rumbo que tomaba la indagación, mediante preguntas que desafiaran a los estudiantes.

Por otro lado, en los escenarios de investigación *Cuadrado de Cuadrados*, *Asalto al Castillo* y *El Problema de Josefo* se reconoce la ausencia de un espacio para la reflexión; los practicantes no propiciamos un diálogo entre todos los participantes de las actividades con el fin de reflexionar sobre la forma en la que se estaba abordando cada escenario y las ideas matemáticas que se iban cristalizando. Lo anterior, es una de las razones por las cuales los actos dialógicos de *controvertir* y *evaluar* (que como ya lo mencionamos en la sección 7.4, los encontramos relacionados con el desarrollo del conocer reflexivo) no se presenciaron con la misma frecuencia que los demás actos.

Esto conduce a un interrogante: ¿Qué hubiera pasado si se realizara una retroalimentación y evaluación de las actividades realizadas dentro de estos AA, así como de los resultados obtenidos en las diferentes sesiones? Las posibilidades son muchas, pero esto permite imaginar que al realizar este paso se pudo promover una crítica a las matemáticas, de forma que hubiera surgido el conocer reflexivo en los estudiantes.

Adicionalmente, los diferentes episodios presentados en este documento nos permitieron identificar, en relación con los actos dialógicos propuestos por Alrø y Skovsmose (2012), algunas habilidades que desarrollaron los estudiantes; el diálogo favorecido por la implementación de los escenarios de investigación *Cuadrado de Cuadrados*, *Asalto al Castillo* y *El Problema de Josefo*, contribuyó al desarrollo de un ambiente colaborativo, pues aunque en su mayoría las actividades fueron diseñadas para trabajar de manera individual, fue la cooperación con el *otro* la que enriqueció los espacios de exploración. Esta interacción permitió que los estudiantes analizaran

los problemas con el fin de involucrarse en las distintas discusiones, haciendo uso de habilidades matemáticas para defender, justificar y cuestionar sus perspectivas y las de sus compañeros.

Estas relaciones que surgieron en el aula de matemáticas preparan a los estudiantes para vivir en sociedad, pues les permite reconocer la importancia de trabajar en equipo en favor de un bien común; además, los invita a considerar la relevancia de su participación en situaciones diarias de su contexto. De esta forma, se observa cómo estos escenarios de investigación desafían el enfoque tradicional, donde el papel de los estudiantes queda relegado al de simples receptores de conocimientos y su participación se minimiza a obedecer las instrucciones del profesor. Por el contrario, los escenarios de investigación convocan a los estudiantes a pensarse y posicionarse como sujetos activos en el aula de matemáticas y responsables en la construcción de su aprendizaje.

Con respecto a los AA tipo 6, se presencié un desarrollo de los conocimientos matemático y tecnológico cuando los estudiantes ponían en práctica sus conocimientos y habilidades matemáticas con el fin de proponer maneras para abordar situaciones de la vida real. Sin embargo, el conocer tecnológico no se divisó plenamente, salvo en unos pocos episodios que se observaron en el curso 7-3, situación motivada por la falta de compromiso de los estudiantes.

En cuanto al conocer reflexivo, se identificaron algunas de las características propuestas por Mancera (2020), aunque no se vislumbraron con la misma frecuencia. Por ejemplo, en el transcurso de las clases en el curso 7-1, tuvieron mayor peso *colectividad* y la capacidad de *pensar en el otro*, mientras que en el curso 7-3 se presentaron con mayor constancia las características *prácticas con las matemáticas* y *colectividad*. Por otro lado, un aspecto en común de ambos cursos, es que no se evidenciaron episodios en los cuáles fuera notoria la *lectura crítica*

y *matemáticas*, esto debido a que los estudiantes no se posicionaron de forma crítica y reflexiva frente a esta investigación que involucraba problemáticas de su interés.

Lo anterior nos permite identificar una relación entre la implementación de estos AA y el desarrollo de la alfabetización matemática en los estudiantes del grado séptimo. No obstante, reconocemos que la aplicación puntual de un escenario de investigación con referencia en la vida real no garantiza el desarrollo de esta competencia, y que es necesario un proceso continuo y progresivo que haga parte del recorrido escolar.

Esta práctica pedagógica implicó la necesidad de saber cómo identificar el desarrollo de la alfabetización matemática; por eso, en un principio se consideraron las características del conocer reflexivo establecidas por Mancera (2020) como punto de partida para una apropiación teórica de la alfabetización matemática. Sin embargo, al estar pensadas dentro de un contexto de modelación matemática no fue posible visualizar estas características en relación a los AA tipo 2 y 4. Si bien reconocemos que dependiendo de la situación problema que guía el escenario de investigación con referencia en una semirrealidad, se pueden extender en cierta manera las definiciones propuestas por Mancera, identificar estas características del conocer reflexivo en un AA tipo 2 resulta más complejo, pues su énfasis en la matemática impide considerar una perspectiva sociocrítica ante situaciones de la vida real.

Sin embargo, con los datos obtenidos en esta práctica pedagógica, nos planteamos el desafío de pensar una extensión de estas características para escenarios de investigación con referencia en las matemáticas puras. A continuación, se esboza un primer acercamiento de cómo se podrían imaginar estas características:

- **Colectividad:** Teniendo en cuenta que el centro de atención en este tipo de AA es un objeto matemático, consideramos que no hay manera de considerar al *otro*, pues la característica del escenario no lo permite, por tanto, no se podría extender la característica de *pensando en el otro* para este tipo de ambientes de aprendizaje. Sin embargo, se puede hablar de una colectividad, en cuanto trabajar dentro de este AA implica colaborar mutuamente, propiciar un intercambio de ideas y resultados, de manera que esa colaboración permita la aprehensión y desarrollo de nuevas técnicas y métodos matemáticos.
- **Prácticas con las matemáticas:** El trabajo colectivo permite que se verbalicen pensamientos y con ello, sean puestas en consideración las ideas matemáticas que cada estudiante tiene. De este modo, unas prácticas con las matemáticas implican considerar en el proceso de indagación cada una de esas perspectivas propuestas que enriquecen la investigación, pues invitan a explorar un problema en distintas direcciones. Es gracias a esta exploración que emergen habilidades matemáticas y, con su aplicación, es posible que los estudiantes puedan construir un significado de sus conocimientos matemáticos, generando una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos que se enseñan en el currículo.
- **Lectura crítica a las matemáticas:** Consideramos que en el contexto de los AA tipo 2 existe la necesidad de promover una mirada reflexiva en los estudiantes; además de dominar los conceptos y procedimientos matemáticos, también es necesario aprender a cuestionar el ámbito de acción de dichos conceptos. En lugar de aceptar el conocimiento impartido en el aula como una verdad absoluta, se desea que los estudiantes desarrollen una actitud crítica hacia las matemáticas mismas.

Hasta el momento se han descrito algunos hallazgos que responden al cumplimiento de los objetivos específicos que se plantearon en este documento y, que a su vez, aportan en la consecución del objetivo general. Ahora bien, las diferentes experiencias en el transcurso de esta práctica pedagógica permitieron identificar algunos aportes más que brinda la implementación de escenarios de investigación en el proceso de desarrollar la alfabetización matemática. Al respecto, es importante aclarar que los ambientes de aprendizaje no existen en un vacío institucional, por el contrario, tienen lugar dentro de condiciones institucionales que configuran el desarrollo de los mismos.

Primeramente, al trabajar dentro de una dinámica de clase caracterizada por AA tipo 1 y 3, los estudiantes tienden a aceptar con mayor facilidad la invitación a explorar AA tipo 2 y 4. El trabajo de campo nos permitió identificar que abandonar una dinámica escolar exclusivamente centrada en AA tipo 1 y 3 para pasar a una en la cual se establecen AA tipo 6 no es un proceso automático, razón por la cual los estudiantes no aceptaron la invitación a la exploración de las temáticas escogidas, a pesar de ser ellos mismos quienes eligieron las problemáticas.

Dentro de la SI no se pensaron algunos factores que influyeron en el desarrollo de este último escenario, que sin duda alguna se hicieron notar a la luz de la SD. Por ejemplo, que la dificultad presentada en la exploración de los temas *Legalización de la marihuana en Colombia* y *El robo en el salón de clase* se produjo en parte por la resistencia de los estudiantes y profesoras a actividades que no son tradicionalmente consideradas como matemáticas; ahondar sobre situaciones de la vida real en la clase de matemáticas carece de sentido, a la vez que los números, algoritmos y expresiones algebraicas no son el foco de atención.

Este pensamiento está fuertemente arraigado en los estudiantes de ambos cursos y es reproducido por una dinámica de clase centrada únicamente en el paradigma del ejercicio. A pesar de los esfuerzos de propender por una educación contextualizada y significativa, los estudiantes, padres de familia y profesoras eran reacios a este tipo de actividades, porque la idea que tienen de la educación de las matemáticas se reduce a que esta sea apenas procedimental y memorística, y no pueden aceptar que sea de otro modo, como si se tratara de un “síndrome de abstinencia”. Por esta razón, la transición de hablar sobre la justicia social en la clase de matemáticas implica romper los imaginarios de la comunidad educativa, afirmación que nos convoca a pensar, ¿Cuáles son las formas de vencer esa resistencia?, ¿acaso la aceptación de una educación contextualizada y significativa depende del grado escolar? ¿hay que empezar desde grados inferiores?

Además, el hecho de implementar este AA tipo 6 a finales del último periodo del año escolar, exhibió una fuerte relación entre el montaje de escenarios de investigación, la época del año lectivo, pues las presiones institucionales influyen en el compromiso y aceptación de los estudiantes para involucrarse activamente en este proceso de indagación. Lo que nos permite inferir que la época final del año es impropia para este tipo de actividades, este periodo presenta mayores complicaciones que interfieren con el fin de alfabetizar matemáticamente, pues los estudiantes se enfocan en cumplir las obligaciones académicas, ya que la preocupación que orienta sus intereses es la promoción de grado escolar.

Lo anterior también revela otra relación no muy visible: la manera como se concibe la evaluación en el montaje de los escenarios de investigación. Ciertamente, como se puntualizó en la discusión de los datos, un factor muy relacionado con la época del año y que también impactó en la aceptación de los estudiantes en los AA tipo 6, fue que desde la perspectiva de los alumnos,

el papel de la evaluación se reduce a una calificación, se pudo evidenciar que los estudiantes están condicionados hacia la nota, un número que necesitan para “pasar el año”. La dinámica que tienen interiorizada como natural, es que el aprendizaje es simplemente un medio para alcanzar una calificación y pierden de vista la idea de asistir a un establecimiento educativo para adquirir conocimiento y desarrollar habilidades sociales, lo que debilita el impacto de la educación en su formación como un ciudadano íntegro, crítico y reflexivo.

Con la identificación de estos dos aspectos, su influencia en el montaje de los escenarios de investigación y el desarrollo de la alfabetización matemática en los estudiantes del grado séptimo de la IE Alejandro de Humboldt, aparece una triada: tiempo - evaluación - escenario, ya que el tiempo y la evaluación terminan combinándose para alterar el escenario. Es por lo anterior que nos surgen los siguientes interrogantes: ¿Hay una relación entre los tiempos institucionales y las posibilidades de implementar escenarios?, ¿hay fechas en las cuales se puede alfabetizar de manera crítica y fechas en las cuales no?, ¿será acaso que lo que está en juego no es la época del año sino la posibilidad de evaluar?, y por último, ¿cómo la evaluación misma puede contribuir al proceso de alfabetización matemática y a ser ciudadanos críticos?

Al reconocer que los ambientes de aprendizaje ocurren en un tiempo y un espacio institucional, es posible replantear y considerar otras variables en el diseño y ejecución de los distintos AA. Por esta razón, se hace la invitación a explorar las inquietudes anteriormente planteadas, con el propósito de obtener una mejor panorámica del complejo entramado que hay alrededor del desarrollo de la alfabetización matemática. Además, se enfatiza que el proceso educativo no es responsabilidad única del estudiante, sino de toda una red de prácticas y agentes, porque como se observó, el pensar de su núcleo familiar, profesores y la dinámica de su contexto

inmediato tienen un peso en la visión que adoptan los estudiantes frente a la naturaleza y el papel de las matemáticas en la sociedad.

Del mismo modo, al igual que se describió la relación percibida entre la evaluación y el impacto sobre la alfabetización matemática, resulta relevante ahondar en otras tensiones que surgen entre las diferentes presiones institucionales y la configuración de escenarios de investigación. Por ejemplo, la influencia de un currículo prescriptivo y la preparación de los estudiantes para la presentación de pruebas externas que evalúan el rendimiento de los estudiantes y la calidad de las instituciones educativas en Colombia.

Por último, el proceso llevado a cabo a lo largo de esta práctica pedagógica, nos aportó en la construcción de una perspectiva más sólida de la alfabetización matemática, los ambientes de aprendizaje y en general, de la Educación Matemática Crítica. Además, esta nueva perspectiva permite pensarnos como promotores de una visión más inclusiva y diversa del conocimiento matemático desde un enfoque más reflexivo, colaborativo y crítico, que ayude a la formación de una ciudadanía crítica sobre aspectos sociales, culturales y políticos.

9. REFERENCIAS

- Abreu, G. (2000). *Relationships between Macro and Micro Socio-Cultural context: Implications for the Study of interactions in the Mathematics Classroom*. *Educations Studies in Mathematics*, 41, Pág. 29. En Gorgorió, N. (2006). El aula de matemáticas intercultural: distancia cultural, normas y negociación. En *Matemáticas e interculturalidad*. Biblioteca de uno.
- Alrø, H. & Skovsmose, O. (2002). *Dialogue and learning in mathematics education*. *Intention, Reflection, Critique*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, v. 29.
- Alrø, H. & Skovsmose, O. (2012). *Aprendizaje Dialógico en la Investigación Colaborativa*. En Valero, P. & Skovsmose, O. (Comps.), *Educación Matemática Crítica: Una visión sociopolítica del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas* (149-171). Bogotá: Universidad de los Andes-Centro de Investigación y Formación en Educación.
- Alvis, J., Aldana, E. & Solar, H. (2019). Ambientes de aprendizaje: un articulador para el desarrollo de competencias matemáticas. *Revista Espacios*, 40(21), 8-20.
- Amaya, Y. & Espinosa, M. (2020). *Azúcar, dulce y enemigo. Un ambiente de aprendizaje para el desarrollo de la competencia democrática en clase de matemáticas con estudiantes de grado noveno*. [Tesis de Maestría, Universidad Pedagógica Nacional]. Repositorio institucional Universidad Pedagógica Nacional.
<http://hdl.handle.net/20.500.12209/12582>.
- Anaya, D., Negrete, L. & Rojas, Y. (2015). La evaluación en perspectiva crítica : análisis de un contexto de formación. Recuperado de: <http://hdl.handle.net/10554/18708>.
- Arias, C. & Tamayo, J. (2020). *Obstáculos en la búsqueda del conocer reflexivo en el grupo EMA a través de un ambiente de modelación matemática desde la perspectiva socio crítica*. [Tesis de Maestría de Investigación. Editorial Universidad Distrital Francisco José

de Caldas]. Repositorio institucional Universidad Distrital – RIUD.

<https://repository.udistrital.edu.co/handle/11349/22924>

Arraiz, G. (2014). *Teoría fundamentada en los datos: un ejemplo de investigación cualitativa aplicada a una experiencia educativa virtualizada en el área de matemática*. Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 41, 19-29. Recuperado de <http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/462/984>

Cabra, F. (2012). La evaluación como instancia de aprendizajes éticos y políticos. (Barragán et. al) *Práctica pedagógica. Perspectivas teóricas*. (pp. 231-256) Bogotá: Ecoe ediciones

Corona, J. (2018). *Investigación cualitativa: fundamentos epistemológicos, teóricos y metodológicos*. [Qualitative research: epistemological, theoretical and methodological foundations] Vivat Academia. Revista de Comunicación, n° 144, 69-76. doi: <http://doi.org/10.15178/va.2018.144.69-76>. Recuperado de <http://www.vivatacademia.net/index.php/vivat/article/view/1087>

Correa, S. & Hoyos, W. (2019). *Aulas No Prototípicas: Un ambiente generador de Escenarios de Investigación para facilitar la comprensión del orden en los números Enteros*. [Tesis de pregrado, Universidad del Cauca]. Repositorio Universidad del Cauca. <http://repositorio.unicauca.edu.co:8080/xmlui/handle/123456789/4204>

CuriosaMente. (31 de mayo de 2020). La marihuana ¿es nociva o saludable. [Archivo de Video]. YouTube. <https://youtu.be/eQyLl8L0n3k>

Derivando. (11 de enero de 2023). El problema de Josefo: ¡EL CÍRCULO DE LA MUERTE! | MIS PROBLEMAS FAVORITOS [Archivo de Video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=AqHxDJ8IGX0&list=PLjeSLPlwL2PCodYOP2OXMl64LPb1baKzO&ab_channel=Derivando

- Fresneda, E. & Sarmiento, S. (2018). *El desarrollo de la competencia democrática en la clase de matemáticas*. [Tesis de Maestría, Universidad Distrital Francisco José de Caldas].
Repositorio institucional Universidad Distrital – RIUD.
<https://repository.udistrital.edu.co/handle/11349/14298>
- Fresneda-Patiño, E. (2021). Cambiando de roles en la clase de matemáticas: posibilidades desde la Educación Matemática Crítica. *Góndola, enseñanza y aprendizaje de las ciencias*, 16(2), 399-414. DOI: <https://doi.org/10.14483/23464712.15025>
- Gorgorió, N., Prat, M. y Santesteban, M. (2006). “El aula de matemáticas multicultural: distancia cultural, normas y negociación”. En J. M. Goñi (Ed.), *Matemáticas e interculturalidad* (pp. 7-24). Barcelona: Graó.
- Gutstein, E. (2006). *Reading and Writing the World with Mathematics. Towards a Pedagogy for Social Justice*. Routledge-Taylor & Francis Group. New York: United States.
- Institución Educativa Alejandro de Humboldt. (2022). Proyecto educativo institucional (PEI). Popayán.
- Institución Educativa Alejandro de Humboldt. (2023). Plan de área matemáticas (IE-Adh, 2023). Popayán.
- Jablonka, E. (2003). Mathematical Literacy. In: BISHOP et al. (Eds.). *Second International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, p. 75–102.
- Junta de Andalucía. (s.f.). JUEGOS MATEMÁTICOS [Archivo PDF].
https://www.juntadeandalucia.es/averroes/centros-tic/14002996/helvia/sitio/upload/JUEGOS_MATEMATICOS.pdf
- Kvale, S. (1996). *InterViews. An Introduction to Qualitative Research Interviewing*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Kvale, S. (2011). *Las entrevistas en investigación cualitativa*. Ediciones Morata. Madrid: España.

La Pulla. (19 de julio de 2023). Sí a legalizar la marihuana en Colombia, PERO... | La Pulla.

[Archivo de Video]. YouTube. <https://youtu.be/JyU5yfYYTpA>

León, F. (2014). Sobre el pensamiento reflexivo, también llamado pensamiento crítico.

Propósitos y Representaciones, 2(1), 161-214. doi:

<http://dx.doi.org/10.20511/pyr2014.v2n1.56>

Mancera, G. (2020). *Conocer reflexivo en contextos de modelación matemática desde una perspectiva socio crítica*. [Tesis doctoral, Universidad Federal de Minas Gerais].

Repositório Institucional da UFMG. <http://hdl.handle.net/1843/34715>

Manzano, D. (2016). *RELACIONES ENTRE PRÁCTICAS MATEMÁTICAS DE AULA Y PRÁCTICAS SOCIALES: UN ESTUDIO DESDE LA INVESTIGACIÓN ACCIÓN PARTICIPATIVA CON ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN MEDIA*. [Tesis de Maestría, Universidad del Cauca]. Repositorio Universidad del Cauca.

<http://repositorio.unicauca.edu.co:8080/handle/123456789/1006>

Páez, D., Sierra, S. & Rubio, M. (2018). Reflexiones y transformaciones pedagógicas sobre ambientes de aprendizaje para el fortalecimiento del pensamiento numérico. [Tesis de maestría]. Universidad de la Sabana. Bogotá

Pardo, L. & Poveda, C. (2021). *DESARROLLO DEL CONOCER REFLEXIVO A PARTIR DE UN AMBIENTE DE MODELACIÓN MATEMÁTICA, DESDE LA PERSPECTIVA SOCIOCRÍTICA Y EN LA ENSEÑANZA REMOTA DE EMERGENCIA*. [Tesis de Maestría, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. RIUD.

<http://hdl.handle.net/11349/28314>

- Penteado, M. & Skovsmose, O. (Eds.) (2022). Landscapes of investigation: Contributions to critical mathematics education. Open Book Publishers. Studies on Mathematics Education and Society Vol. 1 <https://doi.org/10.11647/obp.0316>
- Ravn, O. & Skovsmose, O. (2019). Connecting humans to equations: A reinterpretation of the philosophy of mathematics. Cham: Springer
- Sabogal, D. (2014). *HACIA UNA PEDAGOGÍA DE LAS HISTORIAS DE VIDA. LA EXPERIENCIA DE LOS ESTUDIANTES EN SITUACIÓN DE DESPLAZAMIENTO FORZADO DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA LICEO ALEJANDRO DE HUMBOLDT EN POPAYÁN*. [Tesis de Maestría, Universidad del Cauca]. Repositorio Universidad del Cauca. <http://repositorio.unicauca.edu.co:8080/xmlui/handle/123456789/959>
- Sánchez, B. & Torres, J. (2009). Educación Matemática Crítica: Un abordaje desde la perspectiva sociopolítica a los ambientes de aprendizaje. 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa . *Grupo EdUtopía*, 1-11.
- Scaglia, S. (2015). Educación matemática crítica. En Pochulu, M. & Rodríguez, M. (comps.), *Educación matemática: aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (pp. 201-226). Universidad Nacional de General Sarmiento. <http://repositorio.ungs.edu.ar:8080/xmlui/handle/UNGS/780>
- Skovsmose, O. (1994). *Towards a philosophy of critical mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic.
- Skovsmose, O. (1997). *Competencia democrática y conocimiento reflexivo en matemáticas*. Revista EMA, 2(3), pp. 191-216.
- Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*. Traducción: Valero. Primera ed. Bogotá: Una empresa docente.

- Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista Ema, Investigación E Innovación En Educación Matemática*, 6(1), 1–25.
- Skovsmose, O. (2001). *Educação matemática crítica: a questão da democracia*. Papirus editora.
- Skovsmose, O. (2011). *An invitation to critical mathematics education*. Springer Science & Business Media.
- Skovsmose, O. (2015). Pesquisando o que não é, mas poderia ser. En C. Lopes y U. D´Ambrosio. (Eds.). *Vertentes da Subversão na Produção Científica em Educação Matemática*. (pp. 63-90). Campinas SP: Mercado das Letras.
- Skovsmose, O. (2023). *Critical mathematics education*. Springer Nature.
- Skovsmose, O. & Borba, M. (2004). Research Methodology and Critical Mathematics Education. En P. Valero y R. Zevenbergen. (Eds.). *Researching the Socio-Political Dimensions of Mathematics Education* (pp. 207-226). United States: Springer.
- Skovsmose, O. & Milani, R. (2014). Inquiry Gestures. In B. Shriraman (Ed.), *Critique as Uncertainty* (pp. 45-58). Information Age Publishing.
<http://www.infoagepub.com/products/Critique-as-Uncertainty>
- Valero, P., Andrade-Molina, M. & Montecino, A. (2015). Lo político en la educación matemática: de la educación matemática crítica a la política cultural de la educación matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 18(3), 287-300.
- Vithal, R. (2000). Re-searching Mathematics Education from a Critical Perspective. Paper presented at the Biennial International Conference on Mathematics Education and Society. Montechoro, Portugal.

10. ANEXOS

Anexo 1

Universidad del Cauca Programa de Licenciatura en Matemáticas

Caracterización de los estudiantes de los cursos 7-1 y 7-3 de la I.E. Alejandro de Humboldt

Somos estudiantes de la Universidad del Cauca, nos encontramos en proceso de trabajo de grado para obtener el título de Licenciado en Matemáticas y deseamos su colaboración en esta encuesta, que tiene como finalidad caracterizar a los estudiantes de los cursos 7-1 y 7-3; la información proporcionada será de uso confidencial.

1. ¿Qué edad tiene?
2. La casa dónde vive es:
Arriendo ____ Propia ____
3. ¿En qué estrato está clasificado?
4. ¿Pertenece a algún grupo étnico o comunidad campesina?
No ____ Si ____
¿Cuál? Campesino ____ Raizal ____
Comunidad gitana ____ Indígena ____
Afrocolombiano ____ Otro _____
5. ¿Quiénes viven con usted?
6. ¿En qué Barrio o vereda vive?
7. ¿De 1 a 5 qué tan peligroso considera que es su barrio o vereda? Siendo 1 menos peligroso y 5 más peligroso.
8. ¿Cuánto tiempo gasta para ir de su casa al colegio?
Menos de 10 minutos ____
Entre 10 y 30 minutos ____
Más de 30 minutos ____
9. Medio de transporte que usa para ir al colegio
Bicicleta ____ Colectivo privado ____ Bus ____
Camina ____ Carro particular ____ Otro _____
10. ¿Trabaja?
Si ____ No ____
11. En caso de que trabaje, ¿en qué horario lo hace? Indicando si trabajo fines de semana o entre semana.

12. ¿En qué trabaja su papá y su mamá (o acudientes)?

13. ¿Dispone de material bibliográfico en su casa para realizar tareas?

No ___ Si ___

14. ¿Cuenta con dispositivos tecnológicos?

Si ___ Tablet ___ Teléfono inteligente ___ Computador ___ Otro _____

No ___

15. ¿Tiene acceso a internet en su casa?

Si ___ No ___

Anexo 2

Popayán 16 de marzo de 2023

Señor rector,

JHON SANDOVAL RINCÓN

I.E. Alejandro de Humboldt

Asunto: Presentación de estudiantes de Práctica Pedagógica II

Cordial saludo

Los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Cauca ANA CRISTINA AGREDO FRANCO con código 106219011443 y JUAN CAMILO CHAVES MUÑETÓN con código 106219011414, en desarrollo del conjunto de actividades propias de la asignatura Práctica Pedagógica II han expresado de manera formal su intención de intervenir en el plantel educativo que se encuentra a su cargo, con el fin de realizar allí una práctica pedagógica, que promueva una formación matemática pertinente bajo su atención educativa.

Por tanto de manera muy respetuosa, solicito su colaboración y apertura de las puertas de su institución para avanzar en la configuración de un proyecto de intervención pedagógica en el espacio educativo que usted coordina, con el fin de cualificar los procesos pedagógicos y de formación educativa de los estudiantes.

Sin otro particular,

Aldo Iván Parra Sánchez
Director de Práctica Pedagógica II
Universidad del Cauca
aldo@unicauca.edu.co

Anexo 3

Entrevista directora de grado

1. ¿Qué problemáticas identifica en el curso a nivel académico, disciplinar, socioeconómico, emocional?
2. ¿Cuál es la perspectiva de los intereses que tiene del curso o cómo describiría al curso?
3. ¿Cuál es su perspectiva sobre los intereses que tienen los estudiantes acerca del futuro?
4. ¿Cómo se da la comunicación entre los estudiantes? ¿Qué tipos de liderazgos han emergido?
5. De las estrategias que ha utilizado para fomentar la comunicación efectiva y buenas relaciones entre estudiantes, profesores y padres de familia, ¿cuáles han sido satisfactorias? ¿Cuáles no?
6. ¿Cuáles son las fortalezas más destacadas y debilidades en los estudiantes de este curso? (comunicación, trabajo en equipo, reflexionar, diálogo, participación)
7. En todo salón de clase se presentan algunos conflictos de diferente índole. ¿Qué tipo de conflictos resuelve el profesor? ¿Qué tipo de conflictos resuelven los estudiantes por sí mismos? ¿De qué manera se da esa resolución de conflictos?
8. Teniendo en cuenta que muchos estudiantes son ajenos a las clases, ¿cuáles cambios considera necesarios para mejorar el ambiente y la dinámica de la clase?
9. ¿Cuáles asignaturas son el fuerte de los estudiantes y cuáles son las asignaturas en las cuales no les va tan bien? Justifique.
10. ¿Cuáles cree usted que son los temas de interés de los estudiantes, que les gustaría discutir o abordar en las clases?
11. Usted como directora de curso, ¿Cuáles actividades y estrategias implementa para promover la participación en clase de los estudiantes?

Entrevista profesora de matemáticas

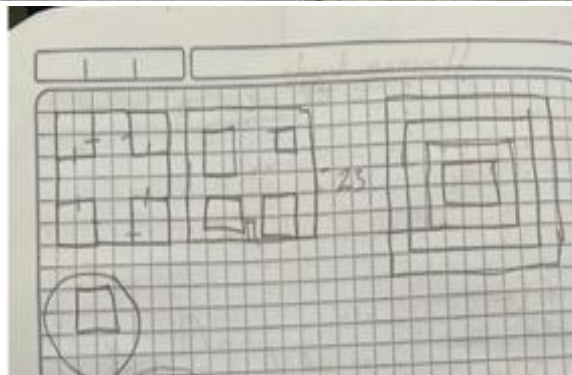
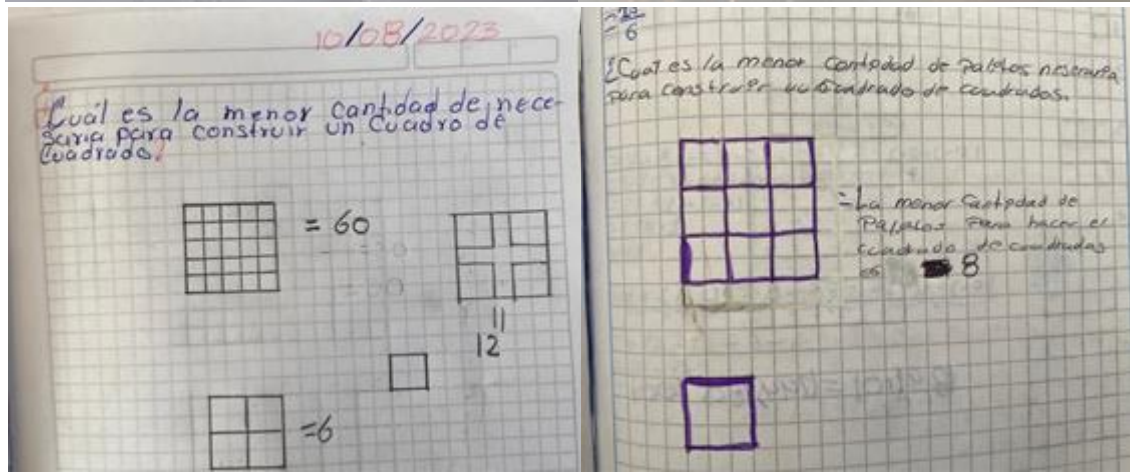
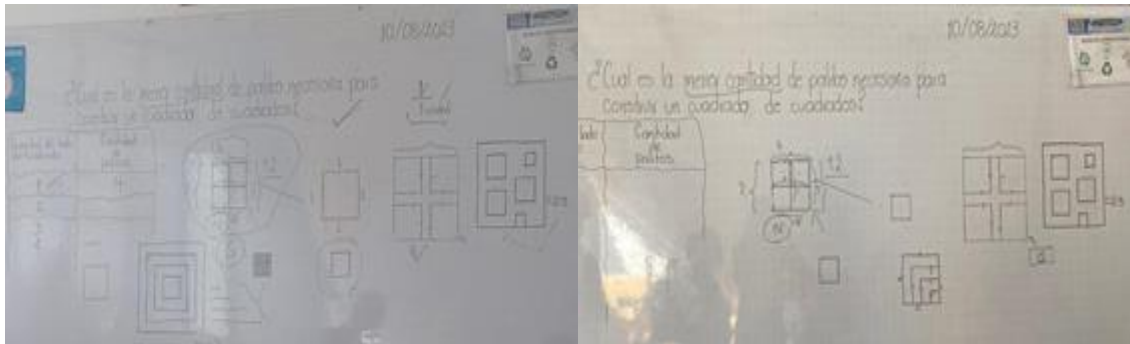
12. ¿Para usted cuál es el fin o el propósito de enseñar matemáticas a los estudiantes?
13. Teniendo en cuenta que muchas veces los estudiantes no muestran interés por las clases de matemáticas, ¿Cuáles son los factores que influyen en esto? ¿Cómo fomenta la motivación y el interés de los estudiantes frente a la clase de matemáticas?
14. ¿Cómo cree que los estudiantes aprenden matemáticas?
15. ¿Qué necesitan los estudiantes para aprender bien las matemáticas? ¿Cómo podrían aprender mejor matemáticas? Para aprender matemáticas ¿Qué estrategias les recomendaría a sus estudiantes?
16. ¿Qué características debería tener un buen estudiante en matemáticas?
17. ¿Con qué frecuencia consigue relacionar los temas de la clase con situaciones extraescolares? ¿Por qué cree que eso ocurre?
18. ¿Usted cree que ahora hay más trabajo colectivo en la clase de matemáticas que cuando usted era estudiante?

19. En su experiencia como estudiante y luego como docente, ¿Ha notado un cambio en el diálogo que se da dentro de las clases de matemáticas? ¿Cómo ha impactado ese cambio en el aprendizaje de las matemáticas y en el ambiente del aula? ¿En qué momentos de su clase se dan esos espacios de diálogo?
20. Además de la estadística, ¿qué temas ha usado para generar reflexiones críticas en los estudiantes? ¿Cuáles se prestan más para cumplir ese objetivo?
21. ¿Con qué frecuencia encuentra usted ejemplos de la vida cotidiana para generar reflexiones críticas en los estudiantes?
22. ¿Cuáles iniciativas que usted haya implementado, han sido efectivas para promover el diálogo (entre estudiantes y profesora) y cuáles menos efectivas? ¿Por qué cree que no funcionaron?
23. ¿Utiliza estrategias o actividades para promover la participación activa de todos los estudiantes? ¿Cuáles?
24. ¿Cuáles cree que son las principales limitaciones, dificultades, obstáculos que impiden la participación activa de los estudiantes?
25. ¿Cuáles son los tipos de reflexiones que frecuentemente han emergido en sus clases?
26. Cuando emergen, ¿cómo identifica tales reflexiones críticas en los estudiantes? ¿Cómo caracterizar esas reflexiones? (son colectivas, individuales, con base en datos matemáticos...)

Anexo 4

1. ¿Describa la forma en que percibía la clase de matemáticas antes de trabajar las distintas actividades? ¿Hubo algún cambio con la participación en los escenarios de investigación? ¿Puedes mencionar algún cambio en tu actitud hacia las matemáticas después de esta experiencia?
2. En la cartografía, entre ustedes propusieron ciertos temas de interés para abordarlos en la clase de matemáticas. ¿Por cuál votó y por qué? ¿Cree que escogimos bien? ¿El tema escogido era mejor que los otros?
3. Después de lo que se ha trabajado, ¿Se arrepiente de que se haya escogido ese tema? ¿Cuál le parece que hubiera sido más llamativo y por qué?
4. Mencione desafíos o dificultades que representó para usted, tener clases de matemáticas con nosotros. (¿Qué desafíos representó para usted trabajar con estas actividades?)
5. Dentro de las clases vistas con nosotros, mencione un momento específico, una clase, un tema, actividad en el que tuvo una visión diferente de las matemáticas, en el que percibió las matemáticas de una manera diferente.
6. ¿De tu participación en los escenarios de investigación tienes una experiencia o momento memorable?
7. ¿Cómo creen que ha cambiado la dinámica del curso, de las actividades de clase, del quehacer?
8. ¿Qué aprendiste a través de esta experiencia? ¿Puedes compartir algunos conocimientos o habilidades que crees haber adquirido o mejorado con estas actividades?
9. ¿Has compartido tus experiencias o lo que has aprendido con amigos o familiares? ¿Cómo han reaccionado ante lo que compartiste? ¿Por qué crees que han reaccionado así?
10. ¿Antes de esta experiencia habían escuchado sobre el tema de la legalización de la marihuana y cómo esta afecta al país? ¿Consideras que fue importante haber dedicado varias semanas en su investigación? Este tema se desarrolló en la clase de matemáticas, ¿Cuál crees que es el papel de las matemáticas en esta problemática?
11. ¿Cómo crees que la colaboración con tus compañeros en la resolución de las actividades planteadas influyó en tu aprendizaje?
12. Noté que en las primeras actividades se evidenciaba un mayor interés, participabas. Pero en este último escenario te sentí ausente, ¿Qué aspectos influyeron en este cambio?

Anexo 5



Anexo 6

longitud $4 \times 2 = 4 \times 2$
 $P(L) = (P(L-1)) + 4 \times L = 4 \times 4$
 Cantidad de Puntos

$P(12) = P(11) + 4 \times 12$
 $= (P(10) + 4 \times 11) + 4 \times 12$
 $= (P(9) + 4 \times 10) + 4 \times 11 + 4 \times 12$
 $= (P(8) + 4 \times 9) + 4 \times 10 + 4 \times 11 + 4 \times 12$



7) $84 + 28 = 112$
 8) $112 + 32 = 144$ ✓
 9) $144 + 36 = 180$ ✓
 $P(15)$
 $P(20)$
 $P(23)$
 10) $180 + 40 = 220$
 11) $220 + 44 = 264$
 12) $264 + 48 = 312$
 13) $312 + 52 = 364$
 14) $364 + 56 = 420$
 15) $420 + 60 = 480$
 16) $480 + 64 = 544$
 17) $544 + 68 = 612$
 18) $612 + 72 = 684$
 19) $684 + 76 = 760$
 20) $760 + 80 = 840$
 21) $840 + 84 = 924$
 22) $924 + 88 = 1012$

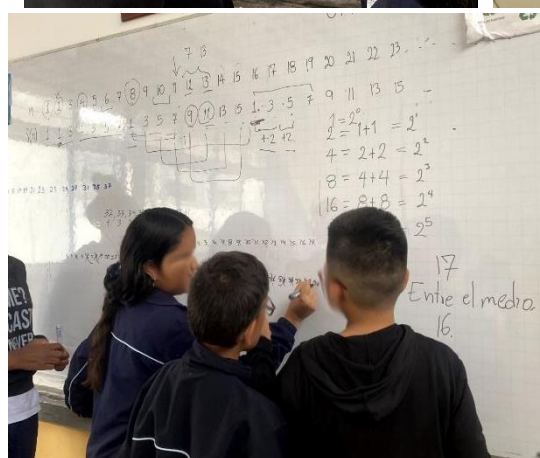
Longitud de lado del cuadrado	Cantidad de Puntos
1	4
2	8
3	16
4	28
5	44
6	64
7	88

1) 2)
 3) 4)
 5) 6)

Longitud de lado del cuadrado	Cantidad de Puntos
1	4
2	8
3	16
4	28
5	40
6	56
7	72
8	88
9	104
10	120
11	136
12	152

$P(12) = P(11) + 4 \times 12 = 112 + 48 = 160$
 $P(13) = P(12) + 4 \times 13 = 160 + 52 = 212$
 $P(14) = P(13) + 4 \times 14 = 212 + 56 = 268$
 $P(15) = P(14) + 4 \times 15 = 268 + 60 = 328$
 $P(16) = P(15) + 4 \times 16 = 328 + 64 = 392$
 $P(17) = P(16) + 4 \times 17 = 392 + 68 = 460$
 $P(18) = P(17) + 4 \times 18 = 460 + 72 = 532$
 $P(19) = P(18) + 4 \times 19 = 532 + 76 = 608$
 $P(20) = P(19) + 4 \times 20 = 608 + 80 = 688$
 $P(21) = P(20) + 4 \times 21 = 688 + 84 = 772$
 $P(22) = P(21) + 4 \times 22 = 772 + 88 = 860$
 $P(23) = P(22) + 4 \times 23 = 860 + 92 = 952$
 $P(24) = P(23) + 4 \times 24 = 952 + 96 = 1048$
 $P(25) = P(24) + 4 \times 25 = 1048 + 100 = 1148$
 $P(26) = P(25) + 4 \times 26 = 1148 + 104 = 1252$
 $P(27) = P(26) + 4 \times 27 = 1252 + 108 = 1360$
 $P(28) = P(27) + 4 \times 28 = 1360 + 112 = 1472$
 $P(29) = P(28) + 4 \times 29 = 1472 + 116 = 1588$
 $P(30) = P(29) + 4 \times 30 = 1588 + 120 = 1708$
 $P(31) = P(30) + 4 \times 31 = 1708 + 124 = 1832$
 $P(32) = P(31) + 4 \times 32 = 1832 + 128 = 1960$
 $P(33) = P(32) + 4 \times 33 = 1960 + 132 = 2092$
 $P(34) = P(33) + 4 \times 34 = 2092 + 136 = 2228$
 $P(35) = P(34) + 4 \times 35 = 2228 + 140 = 2368$
 $P(36) = P(35) + 4 \times 36 = 2368 + 144 = 2512$
 $P(37) = P(36) + 4 \times 37 = 2512 + 148 = 2660$
 $P(38) = P(37) + 4 \times 38 = 2660 + 152 = 2812$
 $P(39) = P(38) + 4 \times 39 = 2812 + 156 = 2968$
 $P(40) = P(39) + 4 \times 40 = 2968 + 160 = 3128$

Anexo 7



Anexo 8

Practicante: *Y ¿o sea que tu antes cómo veías la matemática, aburrida o qué?*

JA: *No le encontraba sentido, o sea la matemática yo no más para solucionar algún problema yo me demoraba mucho, no le encontraba sentido, pero después de que comenzamos a trabajar con lo del triángulo de pascal y comenzar a trabajar estas actividades ya las matemáticas ya las entiendo mucho mejor.*

Anexo 9

Practicante: *Ok, ¿Y tú antes participabas arto en clase de matemáticas o sientes que ahora participas más?*

JS: *No, ahora participo más, antes como que...en lo...cuando Karina explicaba, la profesora o Francini en el tablero pues ella pedía que le respondiéramos, pero por decir yo de pronto sabia la respuesta, pero no alzaba la mano ni decía, me quedaba siempre callado, en cambio ahora si soy más participativo*

Practicante: *¿Y por qué te quedabas callado?*

JS: *No sé... como que... no, no me inspiraba mucho*

Practicante: *No te daba interés*

JS: *No, muy poquito como para hablar entonces no*

Anexo 10

Practicante: *¿Cuándo dices que cambiamos la rutina de la clase, antes era qué?*

JS: *Eran como que siempre sentados y escuchando a la profesora y haciendo ejercicios, talleres y exámenes, talleres pues Karina no ha hecho, pero Francini sí, entonces con Karina era solo exámenes y ejercicios, en cambio, cuando ustedes llegaron ya empezamos como que a investigar, metíamos otros temas, ya como salimos a exponer, todo eso fue mejor, fue más chévere, todos participábamos en clase y nos ayudamos entre todos.*

Practicante: *Sobreviviera...umm, ok, y ¿Representó para ti un desafío o algo nuevo haber trabajado con ese tipo de actividades o no?*

JA: *Sí, que...eh... a lo que voy respondiendo preguntas la mente comienza a...producir energía y me ha tenido activa en otras actividades a parte de las actividades que hemos hecho.*

Practicante: *¿O sea lo que hicimos te ayudó a mantenerte activa?*

JA: *Sí, porque es que yo mantenía así toda, no querer trabajar, o sea trabajaba los trabajos que nos dejan y hacerlos, pero no lo trabajaba así bien, como lo hacía antes de iniciar el año, que era que yo lo hacía bien y todo eso, pero de ahí con estas actividades me ayudó a mejorar un poco más.*

Practicante: *Entonces más activa, comenzaste a trabajar más en la clase*

Anexo 11

Practicante: *Con respecto a esas actividades ¿cómo crees que ha cambiado la dinámica del curso?*

JA: *Pues mucho mejor porque antes todo se trataba como... todos nos dividíamos en grupo y todos éramos un grupo pa' allá un grupo pa' acá*

Practicante: [Interrumpe] *¿Con la profe Francini?*

JA: *Sí, grupos diferentes, y nos pedían colaboración y no lo hacíamos, o lo hacíamos de mala gana, nos tratábamos mal pero ahora eh ya todos nos unimos es como si solamente como el grupo 7- 1 se unió todo y ya si necesitamos algo se lo pedimos al otro, si no lo tiene así sucesivamente.*

Practicante: *O sea que estas actividades les ayudaron para que se unieran como grupo*

JA: *Sí*

Practicante: *Bueno, y la última ¿cómo creen que ha cambiado la dinámica del curso en general, ya en estas clases de la profesora Cristina?*

EE: *Pues como que han dejado tanto como así como la piquiña*

AG: *Han dejado de ser tan cansones o sea los niños como que han...*

EE: *Todos los niños*

ED: *Como que se han tranquilizado*

Practicante: *¿Sí?*

ED: *Si eso creo*

EE: *Sí y hablamos más con otros compañeros, por ejemplo, con ellas no hablábamos y ahora sí*

Practicante: *O sea les ha permitido como interactuar más con otros compañeros*

EE: *Ajá, con compañeros que o sea a pesar de que estábamos todo el año no nos hablábamos*

ED: *Yo con ellos no hablaba*

Practicante: *Entonces todas esas actividades les permitió que se comunicarán más con otros*

EE: *Sí*

Anexo 12

Practicante: *¿Y ustedes?... ¿tú me decías que para ti si había cambiado la dinámica de la clase? ¿qué te parecieron las clases?*

JJ: *Más divertidas*

Practicante: *Más divertidas*

JJ: *Cambiamos el tema un poco con lo de Josefo y el triángulo de pascal, porque ahí era un poco más dinámico, nosotros teníamos que jugar, ahí eso fue lo más relevante también con lo de las carteleras, con la marihuana y todo eso*

...

JJ: *Pues a como tener más en cuenta el texto para entender y comprender el problema, tomarse el tiempo para leer*

Practicante: *Tomarse el tiempo para leer ¿en lo de Josefo o en lo de ahora último?*

JJ: *En lo de Josefo*

Practicante: *En lo de Josefo*

JJ: *Tenemos que reflexionar más para los problemas*

Practicante: *Reflexionar más*

JJ: *Tomarlos con más tiempo, con más calma*

Anexo 13

Practicantes: *Entonces, de esos temas que se propusieron, pues supuestamente eran los que les interesaban a ustedes, ¿tú por cuál votaste? ¿y por qué?*

JA: *Yo por...eh.. eh, lo de marihuana porque...*

Practicante: *¿tu votaste por ese?, por el de la marihuana*

JA: *Si, porque se genera mucho en el barrio donde yo vivo entonces me gustaba saber un poco más de eso, aunque yo ya había investigado antes sobre eso, entonces por eso me atrajo un poco más.*

Practicante: *O sea ustedes escogieron unas problemáticas, salieron al tablero y explicaron, unos decían lo del robo, lo de la basura, lo de la marihuana, ¿Tú por cuál escogiste?*

JS: *La marihuana*

Practicante: *Tú escogiste la marihuana y ¿Por qué?*

JS: *Porque, pues no se quería saber un poquito más sobre el tema y conocer y que hiciéramos cualquier actividad para aprender más entre nosotros.*

Practicante: *ok, ¿Y crees que escogieron bien el tema?*

JS: *sí*

Practicante: *¿Sí?*

JS: *Sí yo creo que sí, sí porque aprendieron bastante*

Practicante: *El tema entonces fue como el mejor o ¿crees que tal vez había sido bueno haber tratado otro?*

JS: *No, yo creo que, ese fue el mejor*

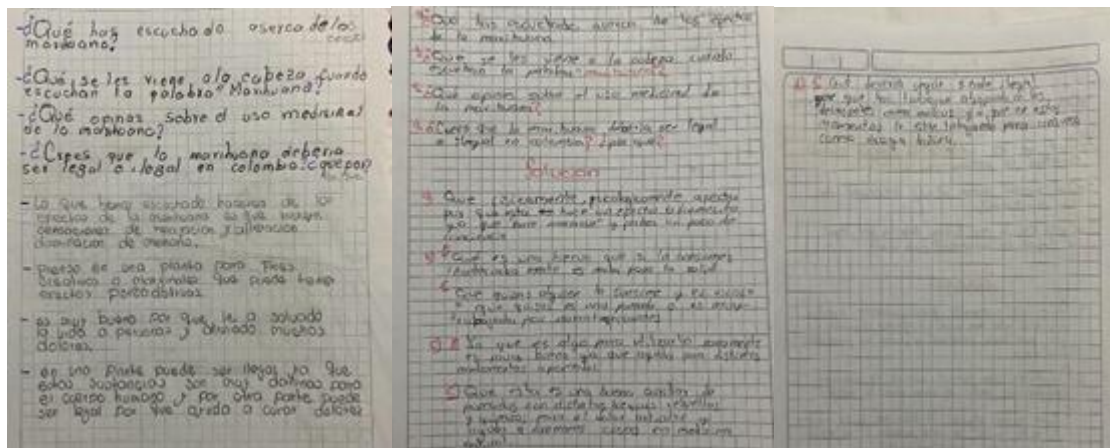
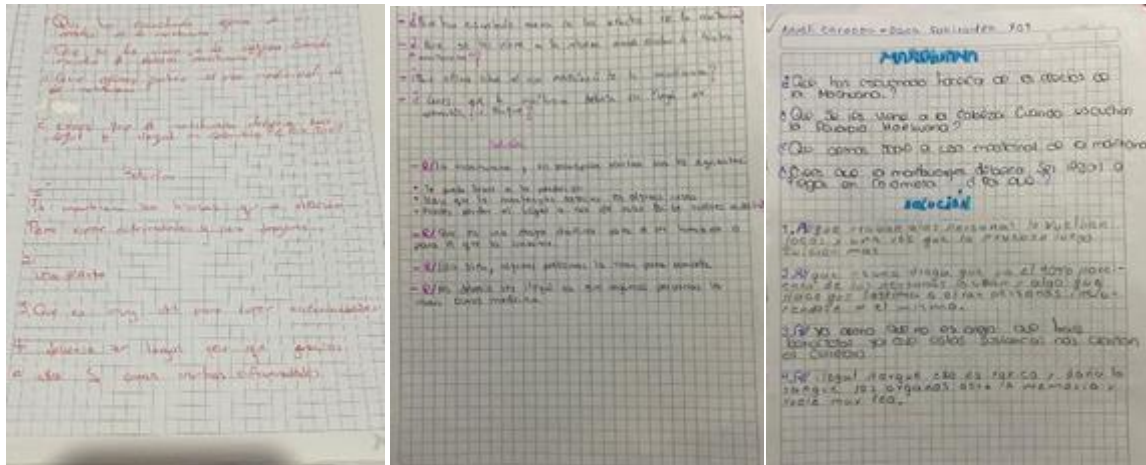
Practicante: *¿Si? ¿Por qué?*

JS: *Si porque ese trato sobre...como era en la clase de matemáticas, trataba como de inversiones, de todo lo que salía, toda la plata que entraría y para todo eso se necesita la matemática.*

Anexo 14

- [Ver Entrevista ES - Minuto 4:15 - 5:12](#)
- [Ver Entrevista MC - Minuto 8:25 - 9:38](#)

Anexo 15



Anexo 16

Reflexión.

Mi reflexión es que la cantidad de plata que gasta el gobierno es si se legaliza una planta grande y si no es los que la exportan también podrían pasar por una crisis económica y bajar las cuentas de sus bolsillos por lo tanto yo me quedo con que si la legalizan porque esa planta nos beneficia a muchas personas. X pero le permite establecer regulaciones sobre la producción y distribución y venta de la marihuana esto cambió el mercado negro y los ingresos fiscales se pueden utilizar a programas para nuestra educación y proyectos sociales.

En mi opinión la marihuana si debe ser legalizada porque lo que se consigue es la creación de puestos de trabajo en la industria de la marihuana también lo que se consigue de los impuestos se puede usar para bienes públicos como salud, educación, charlas de prevención

Solo deberían poner normas para controlar el consumo y prohibir que los jóvenes y los niños la consuman

Reflexión

Lo que pensamos sobre lo visto en clase es

es importante para considerar los beneficios medicos que puede proporcionar a las personas que padecen enfermedades o condiciones específicas

Esto sirve para analizar y escuchar las experiencias de aquellos que se han beneficiado de su uso para tomar decisiones justas.

también implica considerar los riesgos y efectos secundarios. Es importante mantener y encontrar un equilibrio entre la legalización y la regulación adecuada para garantizar su uso responsable y beneficioso para la salud.

Saray: aprendimos que la marihuana puede ser buena y mala

buena porque: ayuda a ganar mas dinero en investo en el país y ayuda para la medicina

mala porque: es adictiva y es un mal para los jóvenes de hoy en día

estoy de acuerdo con la legalización de la marihuana

Amy: aprendí que en una parte es buena, porque puede sanar enfermedades. la marihuana sirve de pomada para sanar dolores del cuerpo, ayuda en la economía del país como ha pasado en otros países.

la mala porque: puede ser adicción en el cuerpo de las personas aunque los niños de ahora la consumen constantemente y afecta su educación.

Anexo 17

Practicante: *Bueno, a ver, BS tú el otro día me habías mandado un audio que no habías investigado, ¿investigaste al fin?*

BS: *Profe, mire, yo le digo algo*

SD: [interrumpe] *No hice nada [se rió]*

BS: *Yo lo tenía*

Practicante: *¿ah?*

BS: *Yo lo tenía*

MF: *Profe, se lo comió el perro*

SD: *Se lo comió el perro*

BS: *No, no profe no se lo comió el perro yo lo dejé en la casa*

...

Practicante: *Aquí dice el kilo de marihuana está entre 15000 euros y eso cuanto es en pesos colombianos...BS por favor [BS andaba distraído en otras cosas, mientras con sus compañeras leíamos la información que habían consultado]*

MF: *Muy interesante pero cansón*

JN: *No profe se me olvido la hoja*

Practicante: *Cómo que se le olvido la hoja, no se acuerda con quien le tocó de ellos*

JN: *No, en serio*

JH: *No profe, acuértese que nosotros le hicimos los dos*

Practicante: *Sí, o sea ustedes estaban en el computador los dos, a ustedes les tocó un tema ¿qué tema les tocó?*

JH: *ummm*

....

Practicante: *¿Hicieron la tarea?*

JN: *Sí, pero no la trajimos*

Practicante: *Bueno, el tema de ustedes tenía que ver con la marihuana medicinal, ¿cómo les ha ido con eso? ¿Qué han averiguado? Yo les escribí, pero ustedes no me mandaron foto*

AG: *Profe yo le dije, yo le mandé el número, pero no respondió [no pudo comunicarse con sus compañeras en vacaciones]*

Practicante: *¿Me dejan ver que han investigado?*

ED: *Yo no he investigado nada [con sus gestos se observa un completo desinterés]*

AG: *¿Trajiste el este?*

ED: *No, no traje*

Anexo 18

Practicante: *Y la clase de matemáticas, ¿cómo crees que es una clase de matemáticas?*

JS: *Una clase de matemáticas umm... ¿cómo así profe? una clase de matemáticas como las que... lo que enseñan en el salón*

Practicante: *Sí, o sea tú crees que la clase de matemáticas deben ser puros ejercicios*

JS: *No, debe ser como que una explicación sobre el tema que estamos viendo, por decir, poner una ejercicio para saber si cada quien entendió, y ponerle un ejercicio diferente a cada uno.*

Anexo 19

KM: *Profe ¿tenemos que salir?*

Practicante: *No, van ellos y vamos a escucharlos*

KM: *Profe, profe*

...

Practicante: *¿Listos? [se dirige a los estudiantes que iban a compartir sus respuestas]*

KM: *Profe, ¿cuándo nos vamos para matemáticas?, diga*

Practicante: *Ok, dentro de las clases que viste conmigo, no sé, ¿de pronto tienes un momento, una clase, un tema, en el que miraste las matemáticas de una forma diferente o no hubo ningún momento?*

BS: *Umm un poco sobre lo de la posición de la marihuana que tuvimos mi compañera y yo porque pues no sé cómo que siempre se estaban como pasándola mucho sobre la legalización de la marihuana y entonces dejaba como a un lado lo de la matemática, pero al final cuando ya hicimos todo eso que usted nos comentó que tenía que ver con algo de la matemática, eh... nosotros intentamos hacer tablas y cosas así.*

Anexo 20

JA: *Mi mamá y mi hermano dijeron por qué eso, si...*

CF: [interrumpe] *Mi mamá me ayudó*

JA: [retoma] *Si eso no, o sea está bien no, que investiguemos no, pero... que lo den en matemáticas suena raro que lo dieran en biología ya*

Practicante: *O sea como les digo la idea de esto, es que nosotros miremos que las matemáticas no es solamente lo que nos pintan los profesores, solamente nos ponen hacer ejercicios, solo son números y operaciones, entonces nosotros llegamos a pensar que las matemáticas están alejadas de las situaciones de la vida real, de lo que nos pasa a diario. Entonces la idea era abordar una problemática, una situación y ustedes vieran que las matemáticas están vinculadas y nos permiten entender, reflexionar.*

Practicante: *Ajá, y lo que tú me decías que ellos pensaban que o sea que no le veían como sentido a que esa actividad se realizará en una clase de matemáticas.*

JA: *Ah sí, es que mi hermano preguntó, que no le encontraba sentido a que la legalización de la marihuana tuviera que ver con una clase de matemáticas donde solamente se tienen que ver números. Entonces yo le explique a él que en un clase de matemáticas se ven diferentes problemas, es como él en el trabajo, él dice que no se necesitan números pero si se necesitan números, para cualquier cosa se necesitan números y le expliqué con unos libros que tenemos en la casa y él dijo que ya le encontraba un poquito de sentido.*

Practicante: *O sea que él pensaba que las matemáticas eran solamente números.*

Anexo 21

Practicante: *¿No? ¿nada por decir?, están muy tímidos hoy*

JH: *Estamos a punto de perder el año*

Practicante: *Están tristes por eso, porque van a perder el año*

LH: *Sí*

Anexo 22

CE: *Profe, esa parte de allá no vale, solo la que está acá.*

Practicante: *Bueno, pero está bien el ejercicio.*

EA: *¿Nos ganamos un cinco?*

Practicante: *Pero la idea no es [que lo hagan] por la nota.*

EA: [Con expresión de descontento] *Mmmm.*

CE: [Con un tono de desánimo]. *Pero vea todo lo que hicimos*

CM: *¿Podemos ganar matemáticas con sus notas?*

Practicante: *Nosotros los calificamos, claro, nosotros tenemos notas de ustedes.*

CM: *O sea, si uno va perdiendo, con lo que uno trabaje con ustedes nos puede ayudar para subir la nota.*

JA: *Digamos, perdimos la materia y con sus notas la podemos pasar.*

Practicante: [A manera de chiste:] *O la pueden perder, también... No, mentira muchachos, pues nosotros si sacamos notas, pero la idea es simplemente que ustedes... [Los estudiantes interrumpen con otros comentarios].*

Anexo 23

Profesora titular: *Y recuerden, perdón Ana, recuerden que esto da una nota en mi materia, ayer una mamita de uno de ustedes me escribió a las 8 de la noche a decirme: profe, con qué trabajo pasa mi hijo, para mí como docente fue una ofensa grandísima, porque como es posible que vengan aquí con todo respeto a calentar la silla y me pregunten ¿con qué trabajo pasa mi hijo una materia?, esto no es tan fácil, si con trabajos pasarán para eso les envié un trabajo y ya...talleres y exámenes vacíos, sin el más mínimo esfuerzo... Les dan la oportunidad de una exposición que suma la nota, porque por lo visto, con todo respeto niños, aprender no les interesa, les interesa es una nota para pasar y pasar y no sé qué pensarán hacer cuando se gradúen... si les hago más evaluaciones...uh aquí me quedo con todos los cursos. Porque se han acostumbrado lastimosamente, no se si es por parte del colegio, en que con un trabajo..., en el año no hacen absolutamente nada y a lo último “profe un trabajo para pasar la materia”*