Enseñanza del Cálculo de Áreas de Regiones Sombreadas y Volúmenes de Sólidos Inscritos: Una Propuesta Didáctica

José Stiven Trujillo Urbano

Cristian Eduardo Yugue Cotacio

Universidad del Cauca

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación

Licenciatura en Matemáticas

Popayán

2024

Enseñanza del Cálculo de Áreas de Regiones Sombreadas y Volúmenes de Sólidos Inscritos: Una Propuesta Didáctica

Trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Matemáticas

José Stiven Trujillo Urbano

Cristian Eduardo Yugue Cotacio

Directora

Dra. Gabriela Inés Arbeláez Rojas

Universidad del Cauca

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación

Licenciatura en Matemáticas

Popayán

2024

Nota de aceptación

____

____

____

____

Directora y Coordinadora del programa: ___________________________________

Dra. Gabriela Inés Arbeláez Rojas

Jurado: ___________________________________

Dra. Martha Lucia Bobadilla

Lugar y fecha de sustentación: Popayán, 17 de mayo de 2024

A nuestros padres, hermanos y amigos que han estado durante todo este proceso, su inquebrantable apoyo, amor y comprensión han sido el faro que nos ha guiado en este viaje académico.

Agradecimientos

Agradecemos a Dios por brindarnos la vida, la sabiduría y la fortaleza, que nos permitieron llevar a cabo la elaboración de este trabajo y enfrentar las adversidades que encontramos durante nuestra formación profesional.

Expresamos nuestro sincero agradecimiento a todas las personas que contribuyeron al desarrollo y finalización del proyecto. En primer lugar, queremos a agradecer a nuestra a directora de práctica, Gabriela Inés Arbeláez Rojas, por su orientación y constante ayuda durante este proceso. También agradecemos a los profesores que nos impartieron clases a lo largo de estos años, pues con sus conocimientos y experiencia nos mostraron una manera diferente de enseñar las matemáticas.

No podemos dejar a un lado el respaldo incondicional de nuestras familias, quienes además de siempre estar ahí para brindarnos su apoyo en los momentos difíciles, fueron nuestra mayor motivación para sacar la carrera adelante. Además, agradecemos a nuestros compañeros, los cuales a través de tardes de estudio, salidas y demás, nos enseñaron el valor de la amistad.

Finalmente, queremos expresar nuestro agradecimiento a la Universidad del Cauca por brindarnos una educación de calidad que nos ha permitido formarnos como Licenciados capaces de afrontar los desafíos educativos. También extendemos nuestro agradecimiento a la Institución Educativa Metropolitano por abrirnos las puertas y proporcionarnos la oportunidad de llevar a cabo nuestra práctica profesional.

Tabla de Contenido

Tabla de Figuras

1 INTRODUCCIÓN

La geometría es una rama de las matemáticas que estudia las propiedades espaciales de las figuras como las relaciones entre ellas; lo cual permite comprender la forma, el tamaño, la posición y las características de estas. En este campo, el cálculo de áreas de regiones sombreadas es un método mediante el cual es posible determinar el área de figuras parcialmente sombreadas que tienen formas no convencionales, estas son generadas a partir de combinar figuras geométricas básicas como cuadriláteros, círculos y triángulos. Por su parte, el cálculo de volúmenes inscritos es una manera que permite encontrar el volumen de una figura sólida contenida completa o parcialmente en otra figura más grande; por ejemplo, una esfera dentro de un cubo o un cono dentro de un cilindro. Ahora bien, estos procedimientos requieren de la adecuada comprensión de las propiedades geométricas de las figuras y por ende del uso correcto de las fórmulas para calcular su área o volumen.

Respecto a la enseñanza de la geometría, se observa que en muchas Instituciones Educativas se abordan de manera limitada estas temáticas. Dicha deficiencia en el currículo condiciona el conocimiento geométrico y la capacidad de razonamiento para aplicar estos principios en diversas situaciones. Al mismo tiempo, las pocas lecciones que se dan son impartidas de manera tradicional, las cuales se caracterizan por la poca participación de los alumnos y no logran despertar el interés ni fomentar el pensamiento reflexivo en ellos; debido a que, como se exhibe en (Gamboa Araya & Ballestero Alfaro, 2010):

> Las actividades que se presentan a los estudiantes se enfatizan en la aplicación de fórmulas y aspectos memorísticos, lo que trae como consecuencia que procesos de visualización, argumentación y justificación no tengan un papel preponderante en la enseñanza de la disciplina (pág. 125).

En este trabajo se presenta una propuesta didáctica basada en el modelo de Van Hiele, para fomentar el desarrollo de habilidades de resolución de problemas que involucren el cálculo de áreas de regiones sombreadas y de volumen de sólidos inscritos, utilizando herramientas como la matemática recreativa y la estrategia de resolución de problemas de Pólya. Bajo esta metodología se pueden utilizar recursos didácticos como el geoplano y el tangram, los cuales facilitan la comprensión y apropiación de nuevos conceptos.

Esta propuesta tiene una serie de etapas que buscan el progreso escalonado de los estudiantes en los primeros niveles de Van Hiele. La primera, denominada Etapa Inicial que corresponde a la Fase 1 (Información) del modelo, consiste en la introducción de las temáticas y una prueba para identificar conocimientos previos. En segunda instancia, se llevará a cabo una Fase Preparatoria que está en afinidad con la Fase 2 (Orientación dirigida), que se enfoca en el desarrollo de las actividades y uso de los recursos didácticos. Otra etapa es la Mesa Redonda, la cual hace referencia a la Fase 3 (Explicitación), esta se incluye al terminar cada una de las actividades como un espacio de intercambio de resultados e ideas entre los alumnos permitiéndoles enriquecer sus conocimientos. El propósito de estas tres etapas es preparar a los estudiantes para la Fase 4 (Orientación libre), concerniente a los talleres de áreas de regiones sombreadas y volúmenes de sólidos inscritos.

Seguido a esto, se hace un análisis del progreso y desempeño estudiantil en la Intervención Pedagógica por medio de las actividades, talleres planteados y la prueba final, en donde los resultados obtenidos en esta serán comparados con los de la prueba inicial y así, mediante un estudio detallado determinar si los alumnos lograron avanzar de un nivel de Van Hiele a otro.

Ahora bien, en relación con la estructura del documento, en el segundo capítulo presentamos la justificación del proyecto y la importancia de la metodología que se va a utilizar. En el tercero, se muestran los objetivos que van arraigados al tema central que concierne a áreas de regiones sombreadas y volúmenes de sólidos inscritos. En el cuarto, se exponen algunos antecedentes donde se rescata el uso de los recursos didácticos que serán llevados a cabo en este trabajo. Luego, en el quinto capítulo, se exhibe el marco teórico, explicando detalladamente el modelo de Van Hiele y posteriormente, en el sexto capítulo, se presenta la metodología que se llevará a cabo para la enseñanza de las temáticas.

Finalmente, en los capítulos séptimo y octavo, abordamos la intervención en el aula, que incluye la fase preparatoria y la implementación de los talleres del tema central. Después, en el noveno, se expone un análisis detallado en el que se comparan los resultados obtenidos entre la prueba inicial y final. Y por último, en el capítulo décimo, se dan algunas apreciaciones generales de lo que fue la práctica pedagógica.

2 JUSTIFICACIÓN

La escasa importancia que ha tenido la enseñanza de la geometría en las instituciones educativas se debe a que los docentes generalmente priorizan temáticas que involucran el pensamiento numérico y variacional, dejando a un lado el pensamiento espacial y métrico que es relevante en la formación matemática del alumno; es por esto que, esta práctica tiene como propósito aportar en la enseñanza de estos temas a los estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Metropolitano, ubicada en la ciudad de Popayán.

Como se indicó, este proyecto pretende abordar la enseñanza del cálculo de áreas de regiones sombreadas y volúmenes de sólidos inscritos; debido a que, es una de las habilidades matemáticas que se espera que los estudiantes adquieran en su educación secundaria y bachillerato. Esta destreza se considera importante tanto para su formación académica, como para la resolución de problemas de aplicación que usualmente se presentan en las pruebas Saber 11 y representan un reto para muchos. Sin embargo, es común que los estudiantes de instituciones públicas carezcan de acceso a cursos preuniversitarios que profundicen en estas áreas específicas. Por lo tanto, una de las metas de nuestra práctica pedagógica es cubrir esta necesidad y proporcionar herramientas para enfrentar este tipo de problemas.

La enseñanza de estos temas, a menudo se percibe tediosa, lo que disminuye la motivación por aprender. Es aquí donde las matemáticas recreativas juegan un papel importante; ya que, los recursos didácticos que esta tiene hacen que el proceso de aprendizaje sea agradable para los estudiantes mientras se enfrentan a desafíos matemáticos; así mismo, la estrategia de resolución de problemas de Pólya brinda pautas que les permiten entender cómo abordar y resolver una problemática; obteniendo un avance y no un bloqueo en sus ideas.

En cuanto al Modelo de Van Hiele, se hará uso de sus fases de aprendizaje; debido a que, estas son cruciales para la enseñanza de nociones geométricas, ayudando a que los estudiantes avancen en un proceso estructurado y secuencial para que logren desarrollar su comprensión y capacidad de visualizar figuras planas y tridimensionales.

3 OBJETIVOS

3.1 Objetivo General

Fomentar el desarrollo de habilidades de resolución de problemas que involucren el cálculo de áreas de regiones sombreadas y de volumen de sólidos inscritos.

3.2 Objetivos Específicos

Implementar una metodología fundamentada en la matemática recreativa y la utilización de recursos didácticos para enseñar conceptos geométricos de manera efectiva.

Aplicar la estrategia de resolución de problemas de acuerdo con los planteamientos de Pólya, con el fin de abordar de manera eficiente problemas matemáticos relacionados con el cálculo de áreas y volúmenes.

Utilizar las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele para facilitar el progreso de los estudiantes en los niveles de razonamiento geométrico.

4 ANTECEDENTES

A continuación, se presentan algunos aportes de diferentes investigaciones acerca de la enseñanza de la geometría y de igual manera algunas estrategias que servirán de guía para el buen desarrollo de esta intervención pedagógica:

Estrategia para la enseñanza de los conceptos de área y de volumen, utilizando como mediadores de aprendizaje el origami y las tecnologías digitales.

El trabajo investigativo de (Hernández Escobar, 2016) se centra en el aprendizaje de formas geométricas, específicamente en el reconocimiento de conceptos de área y volumen, utilizando el modelo pedagógico de Ausubel en el cual, como se exhibe en (Torres, 2016): “aprender significa que lo nuevos aprendizajes se conectan con los anteriores; no porque sean lo mismo, sino porque tienen que ver con estos de un modo que se crea un nuevo significado”.

> La investigación se realizó en la Institución Educativa Rural Carlos González en Belmira, Colombia, con estudiantes de noveno grado. Se utilizó una estrategia de enseñanza que involucró una unidad didáctica basada en el uso de materiales concretos como origami y tecnologías digitales como GeoGebra y Sweet Home 3D. La investigación se llevó a cabo mediante un enfoque de estudio de casos y un método de investigación cualitativa. Los estudiantes que participaron fueron evaluados a través de una prueba de entrada antes de la implementación de la unidad didáctica; de igual manera se les aplicaron encuestas y finalmente se les realizó una prueba de salida (Hernández Escobar, 2016, pág. 14).

Para esta práctica pedagógica es relevante este antecedente; ya que, la propuesta didáctica que se llevará a cabo incluye material manipulativo que permitirá a los estudiantes comprender de manera más clara conceptos como el de área y volumen. Así mismo, se harán dos pruebas que evidenciarán si los alumnos han avanzado de un nivel de razonamiento geométrico a otro.

Una propuesta para el análisis de los procesos de visualización y las aprehensiones en la construcción de áreas de regiones sombreadas.

> Este informe se basa en la teoría semiótica cognitiva desarrollada por Duval, con el objetivo de identificar las formas de aprehensión visual utilizadas por los estudiantes al enfrentarse a una secuencia didáctica que involucra tareas de coordinación de diferentes registros semióticos en el trabajo con áreas de regiones sombreadas y relaciones

> geométricas en figuras bidimensionales. Se busca fortalecer el razonamiento geométrico a través de la deconstrucción dimensional de las formas y el desarrollo de aprehensiones perceptuales y operatorias en situaciones didácticas relacionadas con el área de regiones sombreadas, utilizando la coordinación entre los registros figural y de la lengua natural (Castillo Ramírez, 2020, pág. 2).

Esta investigación se realizó con base en la metodología de Ingeniería didáctica y un enfoque cualitativo descriptivo, el cual se utilizó para describir y analizar los procedimientos, dificultades y avances en el pensamiento geométrico de los estudiantes. Para esto, se diseñó una secuencia didáctica que se aplicó a estudiantes de grado 9-2 en la Institución Educativa San José.

Es así como, para este proyecto se tomarán en consideración aspectos como el de fortalecer el razonamiento geométrico y la visualización espacial en los estudiantes a través del cálculo de áreas de regiones sombreadas; más aún, se pretende impulsar estas habilidades mediante el cálculo de volúmenes de sólidos inscritos.

Matemática Recreativa, una Estrategia para Fortalecer el Pensamiento Numérico y Espacial.

> La investigación que realizó (Franco Guacaneme & Fonseca, 2021) trata de cómo mejorar las habilidades matemáticas de los estudiantes para su aplicación en situaciones de la vida cotidiana y la resolución de problemas. La investigación se llevó a cabo con un enfoque sociocrítico y cualitativo, centrado en la auto reflexión; además, se implementó la matemática recreativa como un recurso para fortalecer el pensamiento numérico y espacial en los estudiantes de grado 5° del Centro Educativo Arenas Monas San Pedro de Urabá, Antioquia (pág. 12).

Esta propuesta pedagógica incluyó seis sesiones de trabajo basadas en la matemática recreativa y el juego dirigido; logrando un impacto positivo en el aprendizaje y conocimiento de los estudiantes, dicho impacto se identificó a través de una encuesta de diagnóstico y análisis de resultados.

Hay que mencionar que este antecedente al tener resultados positivos con la implementación de la matemática recreativa sirve como respaldo para esta intervención pedagógica; puesto que, en la propuesta didáctica que se llevará a cabo, se busca que los estudiantes con la ayuda de recursos didácticos comprendan de mejor manera conceptos geométricos, que para muchos de ellos carecen de significado.

Integración del método de Pólya para la resolución de problemas de Geometría en estudiantes del Nivel Secundario.

> En esta investigación se presenta un estudio sobre la influencia de la aplicación de la estrategia de resolución de problemas de Pólya en el rendimiento académico de estudiantes de cuarto grado del nivel secundario, específicamente en el tema de ángulos. En el estudio se utilizó un enfoque metodológico de tipo cuasiexperimental y de alcance correlacional, con un diseño de pre y post prueba. Los resultados de este estudio muestran que mediante la aplicación de esta estrategia se desarrollaron habilidades geométricas que mejoraron significativamente el aprendizaje de las propiedades de los ángulos, así como sus sistemas de medidas, corroborado por un crecimiento en la media de 62.36 en la preprueba, a 83.68 en la post prueba, con los cuales se pudo evidenciar una diferencia significativa. Además, la estrategia de resolución de problemas fue muy bien valorada por los estudiantes observándose que las clases se ven más motivadoras e influenciadas positivamente (del Rosario & Rojas Bello, 2020, pág. 915).

Como se puede ver, la estrategia de resolución de problemas de Pólya es efectiva al momento de enseñar un tema particular en geometría, en el caso del antecedente, fue utilizada para la enseñanza de ángulos. Sin embargo, para esta práctica pedagógica se implementará durante todo su desarrollo, la cual contiene una amplia gama de temas de geometría que generalmente no son abordados en las Instituciones Educativas.

5 MARCO TEÓRICO

Los problemas para el educador en la enseñanza de las matemáticas son bien conocidos, aun así, escasean las alternativas o posibles soluciones para hacer frente a este reto en el aula, independientemente del tema particular en matemáticas que se esté tratando de enseñar. Ahora bien, como se ha mencionado una de las ramas importantes de la matemática es la geometría, en donde se estudian las propiedades de los objetos y figuras en el espacio, lo que permite un acercamiento y comprensión del mundo que nos rodea. Además, como disciplina de estudio logra potenciar el pensamiento lógico; que hace de las personas sujetos reflexivos y creativos.

En los intentos que se realizan por dar a conocer esta bella ciencia, surgen numerosas dificultades en la apropiación de conceptos en los estudiantes, dichas dificultades han existido desde tiempo atrás. Por esta razón, hace un par de décadas un matrimonio holandés ideó una estrategia o modelo para la enseñanza de la geometría. Estrategia que se deriva de la preocupación por las necesidades que presentan miles de estudiantes alrededor del mundo, y que busca solventar dichos inconvenientes en el aula.

El modelo al que se hace mención y en el cual está fundamentada esta práctica pedagógica, se conoce como Modelo de Van Hiele o Modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele, en honor a sus creadores Pierre Marie Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof. Este esquema fue diseñado en sus tesis doctorales hacia el año 1957, donde en principio se planteó la existencia de tres niveles de razonamiento geométrico; sin embargo, por inquietudes de algunos críticos, el modelo se extendió a cinco niveles de razonamiento geométrico, en los cuales puede estar ubicado un estudiante. Por otro lado, esta teoría da una posible solución a las dificultades que se presentan cuando se quiere enseñar geometría; ya que, es una alternativa que puede ser moldeada según el contexto en donde se esté trabajando y las capacidades de los estudiantes. Esta consiste, en lo que los autores denominan Fases de aprendizaje: “en las que se propone una organización de la enseñanza que ayudará a los estudiantes a construir las estructuras mentales que les permitan lograr un nivel superior de razonamiento” (Gutiérrez, y otros, 1994).

Como ya se mencionó, los niveles de Van-Hiele son cinco, no obstante, en la mayoría de las Instituciones Educativas se podrán encontrar estudiantes como máximo en un nivel 3; ya que, los niveles 4 y 5 obedecen a situaciones propias de quienes se especializan en las matemáticas. No obstante, es factible aspirar a llevar a los estudiantes, al menos, hasta el nivel 4, lo cual dependerá en gran medida de las actividades implementadas en el aula y la naturaleza de los problemas planteados. Estos problemas deben ir más allá de simples cálculos o de memorizar algoritmos, pues se requiere de un alto nivel de exigencia para potenciar las capacidades de los estudiantes.

5.1 Niveles de Van Hiele.

5.1.1 Nivel 1 (Percepción)

Lo que caracteriza a los estudiantes en este nivel, es la poca claridad que tienen de las propiedades de los objetos geométricos; por tal razón, las descripciones que hacen son visuales y se asemejan a elementos familiares que ya conocen, por ejemplo, si se les presenta un rectángulo, responderán que se parece a la pantalla de un televisor, dejando a un lado las propiedades del objeto geométrico. Además, en este nivel no logran generalizar las características de un tipo de figura; es decir, todos los objetos geométricos que se les presenten serán asumidos de manera independiente; en otras palabras, no logran construir relaciones entre estos elementos; en particular, si a un estudiante se le muestra un cuadrado y un rectángulo, este no logra clasificarlos como cuadriláteros.

5.1.2 Nivel 2 (Caracterización)

En el nivel anterior, los estudiantes aprendieron a reconocer formas y figuras geométricas, pero en este nivel, empiezan a identificar algunas de las propiedades de los objetos geométricos. Esto significa que cuando tienen que definir una figura, utilizan las características y propiedades que conocen de ella. Por ejemplo, podrían definir un cuadrado como un cuadrilátero con cuatro lados iguales; no obstante, su definición no incluye todas las propiedades que definen esa figura; en este caso, olvidan que un cuadrado también tiene cuatro ángulos rectos.

Otra característica de este nivel es que los estudiantes aún no tienen la capacidad de deducir una propiedad a partir de otra, es decir, no pueden encontrar relaciones entre las propiedades de las figuras geométricas; por ejemplo, les cuesta entender que un triángulo equilátero es un polígono regular. Debido a esto, tienen dificultades para comprender la finalidad de justificar resultados mediante una demostración, porque no entienden bien las definiciones ni las implicaciones matemáticas.

5.1.3 Nivel 3 (Conceptualización)

Uno de los atributos importantes en este nivel, es que los estudiantes comienzan a desarrollar habilidades de razonamiento; ya que, pueden determinar cómo ciertas propiedades o características se deducen de otras, lo que les permite sacar conclusiones de premisas dadas; sin embargo, no tienen una comprensión clara de lo que en realidad significa la deducción; además, tampoco entienden en totalidad el papel de los axiomas en este proceso. Por ejemplo: "un estudiante podría decir que, en un paralelogramo, si los lados opuestos son iguales, implica que los lados opuestos son paralelos y lados opuestos paralelos implican lados opuestos iguales" (EcuRed, 2012).

Los estudiantes tienen la capacidad de comprender una demostración formal con la guía del docente; puesto que, entienden el uso de cuantificadores y además pueden definir matemáticamente un objeto geométrico; pero en algunos casos, "presentan dificultad en distinguir una implicación $(p \rightarrow q)$ de su recíproca $(q \rightarrow p)$" (Gutiérrez, y otros, 1994), lo que genera inconvenientes al momento de elaborar demostraciones por sí mismos; para ilustrar esto, un alumno podría confundir el hecho de que como un cuadrado tiene cuatro ángulos rectos, entonces si una figura tiene cuatro ángulos rectos implica ser un cuadrado, lo cual no es cierto.

5.1.4 Nivel 4 (Formalidad)

En este nivel el estudiante es capaz de asimilar y realizar razonamientos lógicos formales; además, como se exhibe en (Gutiérrez, y otros, 1994): "empieza a ver las demostraciones matemáticas como un único camino para comprobar la veracidad de una proposición y de igual manera hace intentos para verificar conjeturas deductivamente". Este nivel es propio de alguien que está sumergido en el estudio de las matemáticas; ya que, se requiere de una serie de conceptos para probar ciertas proposiciones y propiedades que posea un objeto, en este caso geométrico; por ejemplo, un estudiante podría demostrar en geometría euclidiana, que la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo suma 180 grados.

El estudiante no solo logra construir demostraciones; si no que además tiene las aptitudes tanto para compararlas como para entender que existen diversas maneras de probar un mismo resultado; debido a que, comprenden con claridad las diferencias entre términos como definiciones, axiomas, teoremas, etc.

5.1.5 Nivel 5 (Rigor)

Este nivel generalmente lo adquieren estudiantes que hayan tenido una formación matemática rigurosa; puesto que, es el nivel más alto de Van Hiele y las aptitudes que se requieren no son fáciles de desarrollar. Como se exhibe en (Gutiérrez, y otros, 1994): "los estudiantes son capaces de prescindir de cualquier soporte concreto para mejorar su habilidad matemática"; en otras palabras, pueden cambiar de un sistema axiomático a otro según el campo en el que estén trabajando. Por ejemplo, los estudiantes conocen la existencia de distintas geometrías, y los axiomas que sustentan cada una de ellas; de esta manera, son capaces de desenvolverse en una de ellas sin ser afectado por las proposiciones de la otra.

5.2 Fases de aprendizaje en el Modelo de Van Hiele.

Conocidos los niveles de Van Hiele, cabe resaltar que existe una continuidad entre ellos; es decir, no son completamente independientes, pues para el paso de un nivel a otro se necesita haber superado con éxito el nivel anterior. Para tal fin, es indispensable que el estudiante desarrolle su habilidad de razonamiento; sin embargo, esto es algo que no se puede enseñar; debido a que, se adquiere a través de la experiencia. No obstante, el docente puede dar algunas pautas para ayudar al alumno a desarrollar esta habilidad. Para esto, los Van Hiele sugieren al docente las fases de aprendizaje, que consisten en una serie de pasos que los maestros pueden utilizar como esquema para orientar sus clases, pues no es deber seguir textualmente estas instrucciones; ya que, se pueden hacer los cambios pertinentes según la situación y la temática que se esté abordando. A continuación, se describen los aspectos más importantes de dichas fases.

5.2.1 Fase 1 (Información)

En esta primera fase se informa a los estudiantes las temáticas que se van a desarrollar; para ello, el docente hace una introducción de los conceptos y problemas que se llevarán a cabo en el desarrollo de las clases, los materiales a utilizar y la metodología que será empleada. Así mismo, esta fase permite al docente comprender el nivel de razonamiento y los conocimientos previos de sus estudiantes; con el objetivo de que se acomode a ellos y logre orientarlos a nuevas temáticas.

5.2.2 Fase 2 (Orientación dirigida)

Después de haber conocido las temáticas a desarrollar; es deber del docente proponer en el aula actividades y problemas relacionados con el tema que se esté abordando y que sean adecuados al nivel de Van Hiele en que se encuentren los estudiantes; con el fin de que exploren, descubran y se apropien de conceptos relacionados con los contenidos; logrando así, un acercamiento al siguiente nivel. Algo que añadir, es que el docente tiene la tarea de ayudarlos a comprender dichos problemas; teniendo en cuenta que la información que suministre no sea un camino directo a la solución, de manera que los estudiantes fortalezcan su nivel de razonamiento.

5.2.3 Fase 3 (Explicitación)

Esta fase consiste en un intercambio de ideas por parte de los estudiantes; ya que, después de haber terminado las actividades y solucionado los problemas, estos deberán exponer con claridad sus argumentos para justificar su resultado; lo que permite hacer una comparación de distintos métodos que se pueden abordar al resolver un problema. Como se exhibe en (Gutiérrez, y otros, 1994): “es interesante que surjan puntos de vista divergentes, ya que el intento de cada estudiante por defender su opinión hará que analice con cuidado sus ideas o la de sus compañeros”; con el propósito de que construya un argumento sólido. Sin duda, esto permitirá al maestro ver si la estrategia usada hasta el momento ha funcionado o si por el contrario deberá cambiarla; de igual manera, esta fase tiene el objetivo de que los estudiantes realicen una transición del lenguaje coloquial al técnico; lo que ayudará a tener una comunicación estándar en el aula.

5.2.4 Fase 4 (Orientación Libre)

En esta fase, el docente propone nuevas actividades para desarrollar en el aula, estas tendrán un nivel de dificultad más alto e irán relacionadas con problemas de razonamiento que conduzcan a los estudiantes a combinar y aplicar conceptos que han adquirido en niveles anteriores; con el propósito de que los perfeccionen y utilicen cuando los requieran. Ahora bien, estos problemas al tener un grado mayor de complejidad, el estudiante deberá recurrir algunas veces al docente; sin embargo, este último deberá de asistir al alumno en las inquietudes que tenga, pero sin proporcionar una solución inmediata que impida el desarrollo del pensamiento crítico y su capacidad de razonamiento.

5.2.5 Fase 5 (Integración)

Después de examinar las etapas previas, se evidencia que los alumnos han desarrollado habilidades y adquirido nuevos conocimientos; aun así, esto no es suficiente para lograr un dominio total de los conceptos; puesto que, para ello el docente debe vincular estos conceptos con otras áreas del conocimiento a las que el estudiante se ha enfrentado con anterioridad. Por último, como se menciona en (Gutiérrez, y otros, 1994): “el trabajo realizado en esta fase y las actividades planteadas no tienen como objetivo construir conocimientos nuevos, sino que deben ayudar a organizar los que ya se han aprendido”.

6 METODOLOGÍA

La geometría es una rama de las matemáticas que los estudiantes generalmente consideran tediosa y compleja ya que maneja conceptos abstractos, lo que desencadena reacciones de rechazo o negatividad. Es así como, las matemáticas recreativas y la estrategia de resolución de problemas de Pólya, pueden ser una opción considerable para enseñarla de una manera más atractiva.

6.1 Matemática Recreativa.

Como se exhibe en (Vega, s.f.), para Martin Gardner: "la matemática recreativa es una rama de las matemáticas que se dedica a explorar aspectos divertidos, sorprendentes e intrigantes de esta disciplina"; esto se debe a que incorpora acertijos, juegos, ilusiones ópticas y otros problemas matemáticos que son interesantes y entretenidos; los cuales permiten desarrollar el pensamiento lógico y las habilidades matemáticas.

En este proyecto, la matemática recreativa se centra en la utilización de recursos didácticos que no solo facilitan la comprensión de los conceptos geométricos, sino que también hacen que el aprendizaje sea más interactivo para los estudiantes. Recursos como el geoplano rectangular, el geoplano circular, el tangram, el parqués matemático y las figuras planas y tridimensionales que serán elaboradas con cartulina, se consideran parte de la matemática recreativa porque fomentan la experimentación y la resolución de problemas de manera creativa, lo que ayuda a consolidar los conocimientos de una manera más significativa.

6.2 Estrategia de Resolución de Problemas de Pólya

Según lo mencionado en (May, 2015), para George Pólya la resolución de problemas: "es una actividad cognitiva que involucra la identificación y comprensión de un problema, la elaboración y ejecución de un plan para resolverlo, y la revisión de la solución obtenida para verificar si es correcta y hacer ajustes si es necesario". En (Pólya, 1965) se propone un método de cuatro pasos para resolver un problema, estos son:

6.2.1 Comprensión del problema

En este primer paso, los estudiantes deben entender el enunciado del problema, identificar los datos relevantes y formular preguntas adicionales para aclarar lo que se pide.

6.2.2 Concepción de un plan

Después de haber comprendido el problema, la tarea de los estudiantes es idear diferentes estrategias para resolverlo; deben elegir la más adecuada y diseñar un plan detallado para llevarla a cabo.

6.2.3 Ejecución del plan

Aquí es donde los estudiantes ponen en práctica las estrategias que han elaborado, estas permitirán llegar a la solución del problema y así mismo, los estudiantes verifican constantemente cada paso hacia la solución y realizan ajustes si es necesario.

6.2.4 Visión retrospectiva

Finalmente, los estudiantes deben revisar la solución obtenida para comprobar si es correcta; de igual manera, buscan posibles errores o fallas en el proceso y reflexionan sobre cómo se puede mejorar en la resolución del problema.

6.3 Propuesta didáctica

La metodología que se llevará a cabo en esta práctica pedagógica busca relacionar las matemáticas recreativas con la estrategia de resolución de problemas de Pólya, con el propósito de enseñar de manera entretenida y dinámica conceptos básicos de geometría; que serán fundamentales para introducir a los estudiantes en el cálculo de áreas de regiones sombreadas y volúmenes de sólidos inscritos. Este enfoque estará enmarcado en las cuatro primeras fases del modelo de Van Hiele, que sirven como base para la metodología propuesta. Estas fases han sido esenciales para diseñar un esquema que incluye una Etapa inicial, una fase preparatoria, una mesa redonda y el taller específico sobre áreas de regiones sombreadas y volúmenes de sólidos inscritos.

Al aula se llevarán un conjunto de actividades y problemas que permitirán a los estudiantes explorar y comprender nociones fundamentales de geometría de una manera más práctica, con esto se pretende impulsar las habilidades de resolución de problemas y de pensamiento crítico que serán de utilidad tanto en aspectos académicos como cotidianos.

6.3.1 Etapa inicial (Fase 1)

Para empezar, se realizará una prueba inicial compuesta por una serie de preguntas que involucran conceptos como: rectas, ángulos, polígonos, triángulos rectángulos, perímetros, áreas, identificación de prismas y un ejercicio de áreas sombreadas. Esta prueba permitirá conocer no solo el nivel de razonamiento geométrico, sino también los conocimientos previos que tienen los estudiantes en esta área; con el fin de adaptar las actividades que se van a presentar y así lograr una correcta transición de estos conocimientos a los nuevos contenidos que serán abordados. Además, conocerán el propósito de esta práctica y las actividades que serán trabajadas en el aula.

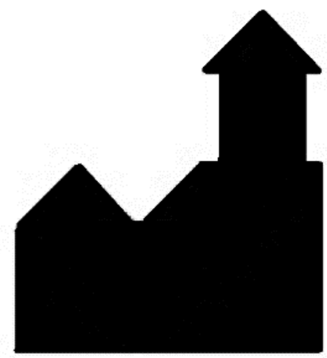
6.3.2 Fase preparatoria (Fase 2)

En esta etapa, los estudiantes llevarán a cabo las actividades propuestas; para comenzar, se explicarán los conceptos que serán tratados en la respectiva actividad; con el fin de que el estudiante tenga una base teórica, que será relevante para resolver los ejercicios planteados en cada taller, los cuales han sido diseñados para impulsar habilidades de razonamiento y de resolución de problemas, que lleven al estudiante a pensar de manera crítica para llegar a la solución. Estos ejercicios no son los típicos que se encuentran en una lección tradicional de geometría, que se resuelven mediante algoritmos y patrones repetitivos. Por esta razón, si un estudiante presenta inconvenientes, se le brindarán algunas pautas que serán de ayuda para organizar sus ideas y así pueda superar este obstáculo. Por otra parte, estos ejercicios además de impulsar habilidades matemáticas fomentan el trabajo en equipo y la sana competencia, lo que contribuye a la formación de personas éticas que tanto necesita esta sociedad.

A continuación, se presentan algunos ejemplos de los ejercicios que se encuentran en las guías:

- Con ayuda del geoplano construya dos segmentos y una semirrecta que sean paralelos entre sí, de tal forma que la distancia del uno al otro duplique la suma de la medida de los segmentos.
- Sean A y B dos ángulos adyacentes entre sí; y sean C y D dos ángulos adyacentes entre sí. Elabore en el geoplano estos cuatro ángulos, de tal forma que A sea opuesto por el vértice con C, y B sea opuesto por el vértice con D.
- Con la ayuda de tus compañeros construye la siguiente figura con el Tangram:

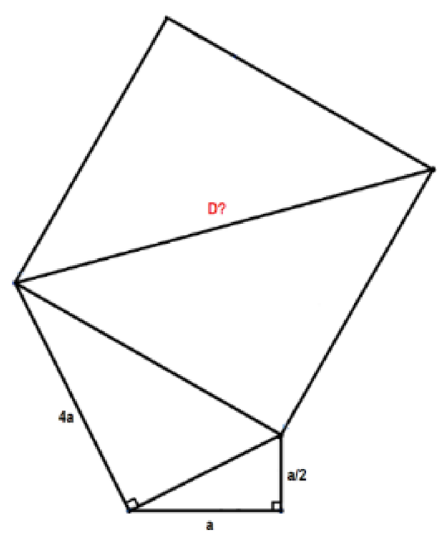
Figura 1 *Forma para construir con el Tangram*



Nota. Elaboración propia

- Con ayuda del teorema de Pitágoras calcula la diagonal "D" del cuadrado:

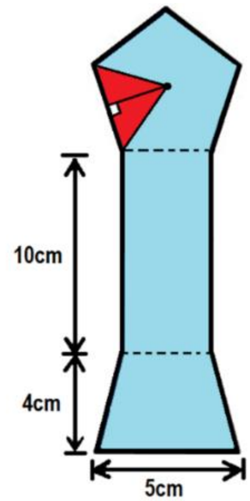
Figura 2 *Problema de aplicación del Teorema de Pitágoras*



Nota. Elaboración propia

- Observe y analice la siguiente figura, calcule su área; sabiendo que la longitud de la base del triángulo inscrito en el pentágono es $3cm$ y la longitud de la apotema del pentágono es $2cm$.

Figura 3 *Problema de aplicación de áreas*



Nota. Adaptado de (Lety, 2020)

6.3.3 Mesa redonda (Fase 3)

Después de culminar la actividad planteada, se hará una mesa redonda en donde se discutirán las respuestas obtenidas, con el fin de fomentar el intercambio de ideas y perspectivas, lo que enriquece la experiencia educativa de todos los participantes. De igual manera, permite a los estudiantes analizar y reflexionar sobre los resultados presentados, lo cual les ayuda a desarrollar habilidades analíticas y críticas. Además, al momento de que el estudiante comparta sus ideas, este deberá elaborar una justificación para validar sus argumentos; lo que potencia sus habilidades de comunicación y aumenta la confianza en sus conocimientos.

Cabe resaltar que esta estrategia proporciona a los estudiantes una idea diferente de las matemáticas; debido a que pueden explorar diferentes enfoques y soluciones a los problemas planteados; es decir, que un problema matemático no tiene una única vía de resolución, lo que les brinda una comprensión más amplia y profunda del tema en cuestión. Es así como, esta dinámica tipo seminario al promover la participación en los estudiantes, da paso a la construcción del conocimiento; pero también, inculca valores como la tolerancia y la empatía al escuchar a las demás personas y entender que hay diferentes puntos de vista.

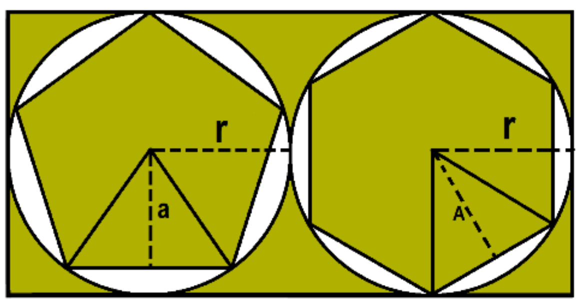
6.3.4 Áreas de regiones sombreadas y volúmenes de sólidos inscritos (Fase 4)

El eje principal en este proyecto es la enseñanza del cálculo de áreas de regiones sombreadas y volúmenes de sólidos inscritos; ya que es un tema de suma importancia en las matemáticas. Estos conceptos permiten a los estudiantes aplicar los principios fundamentales de la geometría y además aumentan sus habilidades de razonamiento lógico y pensamiento espacial. Por un lado, el cálculo de áreas sombreadas brinda a los alumnos herramientas necesarias para resolver problemas de su diario vivir; por ejemplo, medir áreas de terrenos o superficies irregulares que no puedan relacionar directamente con una figura geométrica elemental, como un cuadrado, un triángulo o un círculo. Por su parte, el cálculo de volúmenes inscritos es importante en terrenos como el de la arquitectura y la ingeniería civil; debido a que, permite calcular el espacio ocupado por estructuras tridimensionales y fabricar construcciones con mayor precisión. Como se puede ver, la enseñanza de estos contenidos fomenta la creatividad y la visualización mental de objetos geométricos; puesto que, los induce a imaginar y representar gráficamente este tipo figuras.

A continuación, se muestran algunos de los problemas que serán planteados:

- Determine el área coloreada teniendo en cuenta que $r = 4u$, además, la longitud del lado del hexágono es $4u$ y la longitud del lado del pentágono es $6u$.

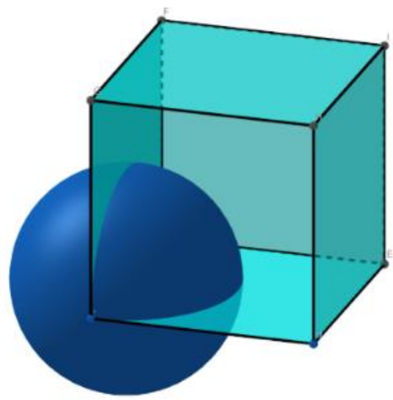
Figura 4 *Problema de áreas de regiones sombreadas*



Nota. Elaboración propia

- Observe la siguiente figura, determine el volumen resultante del cubo (azul claro) cuando la esfera se introduce como se muestra en la Figura 5. Tenga en cuenta que el radio de la esfera es $r = L/2$ siendo L el lado del cubo cuya longitud es 8 cm.

Figura 5 *Problema de volúmenes inscritos*



Nota. Elaboración propia

6.4 Análisis del Progreso y Desempeño Estudiantil en la Intervención Pedagógica

Para finalizar, se hará un análisis de los resultados obtenidos en cada una de las sesiones que fueron desarrolladas; estos datos serán recopilados en el diario de campo a lo largo de la intervención; ya que, como se plantea en (Mejia, 2012): “esta herramienta permite hacer el ejercicio de observar y realizar los primeros análisis a partir de la información recolectada”.

Ahora bien, por medio de las actividades y talleres planteados en la propuesta didáctica, se espera que los estudiantes hayan adquirido nuevos conocimientos y aptitudes; sin embargo, para corroborar esto último, se llevará a cabo una prueba final en la que haremos un estudio cualitativo de los razonamientos que los estudiantes hayan utilizado para resolver los problemas; con el objetivo de compararlos con los razonamientos empleados en la prueba inicial y así observar si los alumnos lograron avanzar de un nivel de razonamiento geométrico a otro. Adicionalmente, la mesa redonda será otra herramienta que nos permitirá hacer análisis; debido a que, según lo argumentado por los estudiantes al momento de justificar sus resultados, se conocerá si se están apropiando de los conceptos correctamente.

Se espera contribuir de manera significativa en la formación académica de los estudiantes; de tal forma que puedan darle uso en su trabajo, estudio o donde sea que se encuentren. Así mismo, se pretende que, al terminar con esta práctica pedagógica, los estudiantes no solo fortalezcan su conocimiento matemático, sino también que adquieran valores importantes para su desarrollo personal y social.

7 PROYECTO DE AULA Y FASE PREPARATORIA

En el transcurso de esta práctica pedagógica se han realizado una serie de sesiones que forman parte de la fase preparatoria, en las cuales se abordaron conceptos fundamentales de geometría, como los tipos de rectas, ángulos, figuras planas, teorema de Pitágoras, perímetro y área de figuras planas, así como el volumen de figuras tridimensionales. A lo largo de este análisis, se explorarán las actividades realizadas en el aula mostrando algunos de los problemas trabajados; además, se destacan aspectos positivos y menos favorables encontrados en la enseñanza de estos temas.

7.1 Trabajando con rectas

En esta sesión se buscó aclarar conceptos como el de rectas, semirrectas, segmentos, entre otros. Para esto, se generó una discusión con las ideas empíricas que tenían los estudiantes sobre estos temas. Por ejemplo, uno de ellos mencionó que *"Una semirrecta es la mitad de una recta"*. A primera vista, esta afirmación podría parecer descabellada, pero al considerar el razonamiento detrás de ella, encontramos que la idea del estudiante no es tan ilógica; debido a que, el prefijo "semi" significa mitad o medio; lo que refleja una conexión entre el lenguaje cotidiano y la matemática, pues se observa que los estudiantes están tratando de relacionar lo que ya conocen con los nuevos conceptos que se les presentan. Aunque en este caso, la interpretación de "semirrecta" cómo "mitad de una recta" no sea matemáticamente precisa, refleja un intento genuino de comprender términos técnicos.

Luego de la discusión, se proporcionó a los estudiantes una guía (Ver Anexo 2) que constaba de una serie de problemas que debían ser resueltos por grupos en el geoplano rectangular[1], recurso didáctico utilizado en la sesión. Este último permitió representar objetos abstractos mediante material manipulativo, en este caso, los cauchos representaban líneas sin curvatura, los chinches a los puntos y las flechas dibujadas en el tablero del geoplano hacían referencia a que continuaba indefinidamente en esa dirección lo que se quería representar, sean rectas o semirrectas.

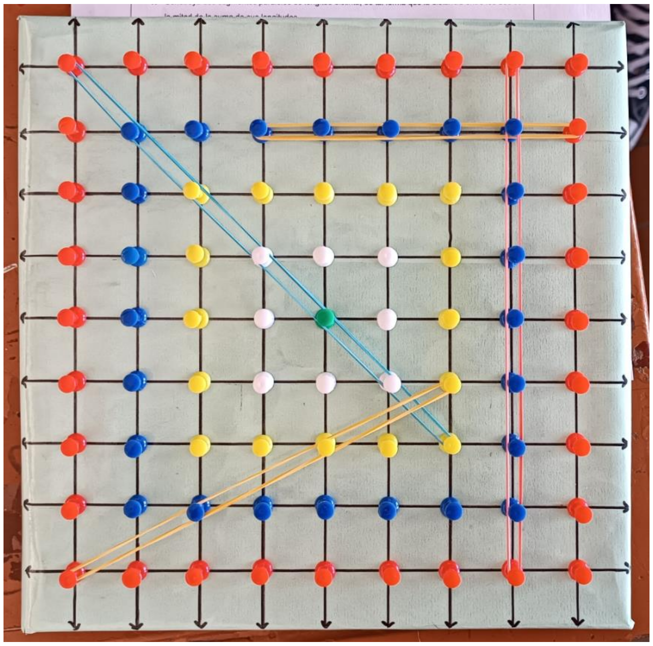
[1] Un geoplano es un instrumento manipulativo matemático, consiste en un tablero cuadrado (aunque puede ser también de cualquier forma), generalmente de madera u otro material resistente. El geoplano es un recurso didáctico para la introducción de gran parte de las figuras geométricas. El carácter manipulativo de este permite a los estudiantes una mayor comprensión de toda una serie de términos abstractos, que muchas veces o no entienden o les generan ideas erróneas en torno a ellos. Aprendiendo Matemáticas https://aprendiendomatematicas.com/el-geoplano/

Veamos el problema planteado en el punto 4 de la guía:

- Construya en el geoplano dos semirrectas secantes, pero no perpendiculares.

Una de las construcciones realizadas por uno de los grupos fue la siguiente:

Figura 6 *Respuesta al punto 4 en el geoplano rectangular*



Nota. Fuente propia, 2023

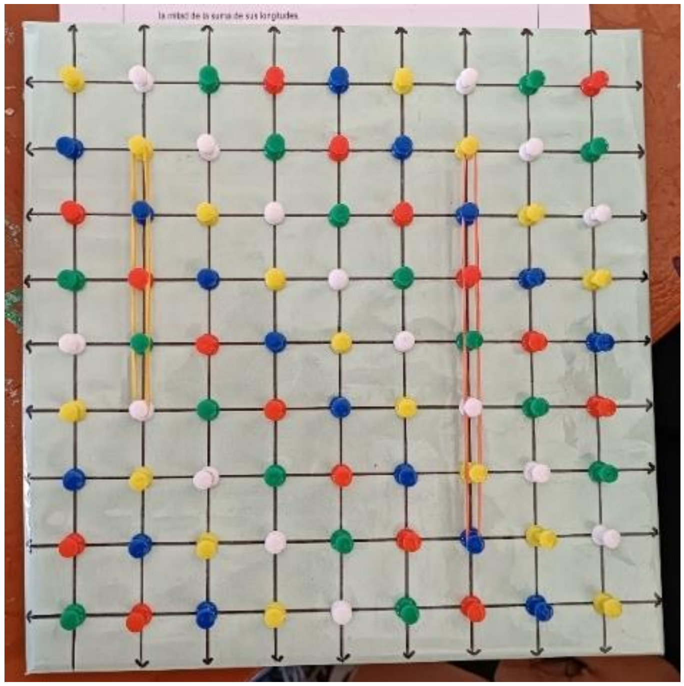
El Geoplano por su tamaño y diseño no permitía realizar esta construcción, ya que al momento de construir semirrectas debían utilizar las flechas dibujadas en el tablero del geoplano. Haciendo esto, siempre obtenían semirrectas perpendiculares, por esta razón los estudiantes optaron por elaborar dos segmentos que cumplieran las condiciones del problema; es decir, que fueran secantes, pero no perpendiculares. Dichos segmentos se pueden observar en la Figura 6 representados por los cauchos amarillo y azul.

Miremos ahora el ítem 6 de la guía:

- Construya en el geoplano dos segmentos paralelos de longitud distinta, de tal forma que la distancia entre los dos sea la mitad de la suma de sus longitudes.

A continuación, se presenta la construcción realizada por uno de los grupos:

Figura *7 Respuesta al punto 6 en el geoplano rectangular*



Nota. Fuente propia, 2023

Para entender claramente el enunciado del problema, se requiere de una buena comprensión de lectura, habilidad que los estudiantes tenían poco desarrollada; debido a que, están acostumbrados a resolver ejercicios de manera mecánica que son facilitados por el uso de algoritmos, los cuales evitan que los estudiantes reflexionen antes de resolver un problema. Por esta razón, se les dieron algunas pautas, entre ellas, leer detenidamente el problema; seguidamente, identificar que datos tenían y que se les pedía, esto con el fin de que pudieran elaborar una estrategia para dar solución al ejercicio.

Como se puede ver en la Figura 7, para este problema los estudiantes utilizaron como unidad de medida la distancia de un chinche a otro, siendo esta vertical u horizontal según la posición del geoplano. Ahora bien, las medidas que dieron para los segmentos amarillo y rojo fueron 4 y 6 unidades respectivamente, ya que la suma de esas longitudes es 10 unidades, y así su mitad corresponde a 5 unidades, siendo esta última la distancia entre los segmentos como se puede evidenciar. Además, es claro que los segmentos construidos son paralelos, ya que están construidos sobre las rectas paralelas dibujadas en el tablero del geoplano.

7.2 Explorando Ángulos

En esta actividad se abordó el tema de ángulos, donde al inicio de la sesión se preguntó a los estudiantes que ideas tenían sobre lo que es un ángulo y que tipos de ángulos conocían. En su mayoría, tenían presente el ángulo recto y el ángulo llano. El primero, lo recordaron por el contenido que estaban abordando en el curso de trigonometría, correspondiente a triángulos rectángulos; mientras que el segundo, lo tenían presente por su mismo nombre, pues para ellos hacía referencia a un terreno plano. Sin embargo, en cuanto a la definición, los estudiantes dieron una idea intuitiva señalando que es la amplitud entre dos líneas que se cruzan, lo cual es entendible; debido a que esta percepción es una aproximación visual a lo que realmente es un ángulo en matemáticas, pues el ángulo al ser un concepto abstracto es difícil de definir para el estudiante.

Así, para fortalecer la comprensión de los estudiantes sobre este concepto y ampliar la noción que tenían inicialmente, se les proporcionó una hoja descriptiva que detallaba los tipos de ángulos según sus medidas y posiciones; más aún, se enfatizó en que el concepto de ángulo va más allá de ser solo una "amplitud"; ya que se compone de partes como vértices y lados, los cuales nos acercan a una definición matemática más precisa.

Luego, se les entregó una guía (Ver Anexo 3) que tenía seis problemas que los alumnos debían resolver en parejas utilizando el geoplano circular[2].

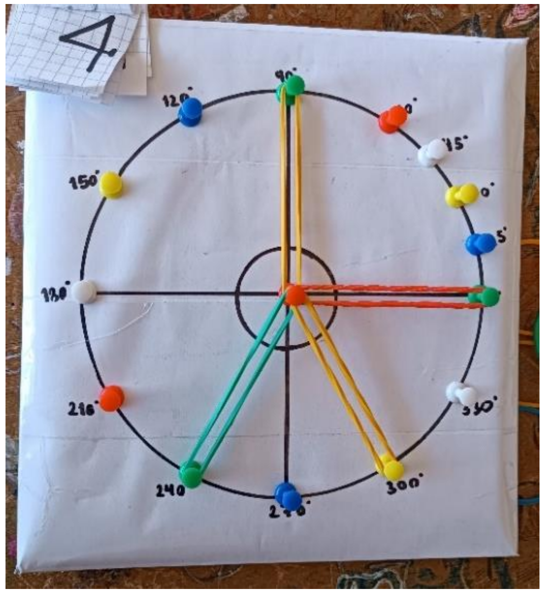
En el punto 4 de la guía se planteó lo siguiente:

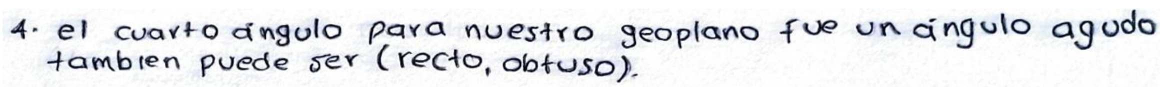
- Se ha formado un ángulo completo con cuatro ángulos de los cuales hay: un ángulo recto, un ángulo obtuso y un ángulo agudo ¿Cómo debería ser el cuarto ángulo? Justifique su respuesta utilizando el geoplano.

Una de las parejas de trabajo dio la siguiente respuesta:

[2] El geoplano circular es una herramienta educativa para la enseñanza de la geometría y las matemáticas es un geoplano circular. Consiste en un disco circular con una fila de clavos o puntas uniformemente espaciados alrededor del borde. Los puntos se usan para hacer formas geométricas y para explorar conceptos matemáticos como ángulos, simetría y fracciones. https://aprendiendomatematicas.com/el-geoplano/

Figura 8 *Respuesta al punto 4 en el geoplano circular y su justificación*




4· el cuarto angulo para nuestro geoplano fue un ángulo agudo
tambien puede ser (recto, obtuso).

Nota. Fuente propia, 2023

En la solución se puede evidenciar que, conceptos como el de ángulo recto, agudo y obtuso, estaban siendo apropiados, ya que su representación en el geoplano corresponde a las medidas que identifican dichos ángulos; además, su justificación es válida, porque explicitan que el problema tiene diferentes soluciones, las cuales dependen de las medidas que se den al ángulo obtuso y al agudo. Esto también se vio reflejado en las respuestas que dieron otros grupos al mismo enunciado, por ejemplo: *"Para nosotros un ángulo obtuso, pero hay muchas más posibilidades"* y también *"El cuarto ángulo podría ser de 60 grados o 90 grados"*.

Según estos resultados, los estudiantes se dieron cuenta de que algunos problemas matemáticos pueden tener más de una solución, conforme al punto de vista y los conocimientos previos que tenga quien lo esté abordando. Debido a que, dependiendo del problema que se proponga, algunos utilizarán fórmulas, otros diagramas, y muchos simplemente seguirán su intuición. Todo esto les enseña a los estudiantes a tener un pensamiento más flexible y no cerrar sus ideas a una única respuesta cuando se trata de matemáticas.

Figura 9 *Estudiantes trabajando con el geoplano circular*

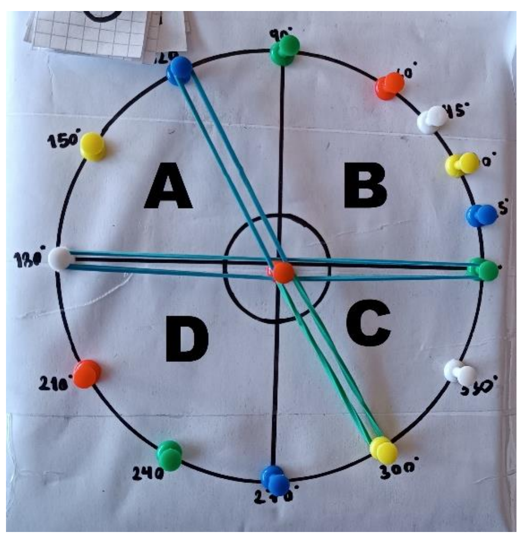
Nota. Fuente propia, 2023

Ahora bien, veamos el punto 6 de la guía, en el que se planteó lo siguiente:

- Sean A y B dos ángulos adyacentes entre sí; y sean C y D dos ángulos adyacentes entre sí. Elabore en el geoplano estos cuatro ángulos de tal forma que A sea opuesto por el vértice con C, y B sea opuesto por el vértice con D.

Una de las respuestas que dieron los estudiantes fue la siguiente:

Figura 10 *Respuesta al punto 6 en el geoplano circular*



Nota. Fuente propia, 2023

Como se muestra en la Figura 10 los estudiantes lograron construir ángulos adyacentes y opuestos por el vértice; sin embargo, para este problema tuvieron dificultad con la notación de los ángulos, pues en el enunciado estaban representados con letras mayúsculas. Por este motivo, se les explicó que estas letras representaban una medida arbitraria de un ángulo; es decir, podrían escoger cualquier medida siempre y cuando cumpliera las condiciones del ejercicio.

Esta problemática es muy común en los estudiantes de secundaria, debido a que están acostumbrados a resolver ejercicios con valores particulares, donde únicamente deben aplicar cálculos aritméticos. Es así como, problemas como el planteado, permite un acercamiento a lo que se conoce en matemáticas como generalización, que es fundamental, entre otras cosas, para unificar conceptos y métodos matemáticos, en lugar de tener que abordar cada problema de manera individual.

Por otra parte, al final de la actividad se propuso a los estudiantes que realizaran una construcción libre en el geoplano, con el fin de estimular el pensamiento creativo y mostrar otra utilidad del recurso didáctico. A continuación, se presentan los diseños elaborados:

Figura 11 *Construcciones libres en el geoplano circular*

Nota. Fuente propia, 2023

7.3 Jugando con el tangram

En esta actividad se desarrolló el tema de figuras planas, donde se utilizó como recurso didáctico el tangram chino[3]. Para empezar la sesión se formuló la pregunta ¿Qué es un polígono? A lo que uno de los estudiantes respondió *"es una figura de cinco lados"*, lo cual evidenció la confusión entre la definición de polígono y pentágono, que es muy común por la similitud de las palabras. Lo curioso fue que los demás alumnos apoyaron esta idea, situación que nos llevó a explicar que un pentágono es un tipo de polígono, y que el término polígono es más general.

[3] El tangram chino es un juego matemático compuesto por siete figuras planas que forman un cuadrado. Entre ellas están: cinco triángulos rectángulos, un cuadrado y un romboide. Además, ha revolucionado la enseñanza de la geometría; puesto que, permite el reconocimiento y clasificación de figuras geométricas, desarrolla la habilidad lógico-matemática; y más aún, facilita el cálculo de áreas y perímetros de figuras planas.

Luego, mediante un intercambio de ideas se realizó una aproximación a nociones como la de polígono regular e irregular, polígono cóncavo, convexo, entre otros.

Después, se les entregó una guía (Ver Anexo 4) que contenía una serie de puntos donde debían construir figuras con el tangram, utilizando todas sus piezas. Algunas de las construcciones elaboradas por los grupos de trabajo se muestran a continuación:

Triángulo Isósceles

Para esta construcción, los estudiantes se percataron que la figura a elaborar era semejante a cinco fichas del tangram que corresponden a triángulos isósceles de diferente tamaño como se observa en el Paso 1. Sin embargo, la complejidad del problema radica en que se deben utilizar todas las piezas del tangram, fue así como, después de un debate entre los grupos de trabajo, se dieron cuenta que primero debían armar el cuadrado con las siete fichas Paso 1, seguidamente dividir este último por una de sus diagonales formando dos triángulos rectángulos y a su vez isósceles como se ve en el Paso 2; que posteriormente debían unir por medio de sus catetos como se muestra en el Paso 3 para dar solución al ejercicio.

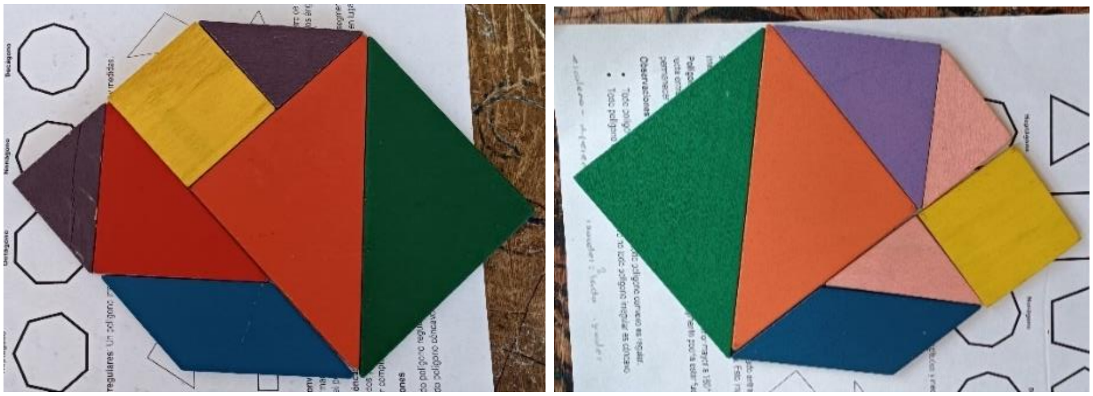
Figura 12 *Triángulo isósceles con el tangram*

Nota. Elaboración propia, 2023

Hexágono

La elaboración de esta figura fue de una de las construcciones con mayor grado de dificultad, pues en la guía no se dio un modelo a seguir; por esta razón, los estudiantes trataban de construir un hexágono regular, el cual no se puede formar con las siete piezas del tangram; sin embargo, luego de varios intentos se percataron de que para que el hexágono fuera construible debía ser irregular. Cabe resaltar que para este problema los estudiantes encontraron dos maneras de hacerlo como se muestra a continuación:

Figura 13 *Dos formas de construir el hexágono irregular con el tangram*



Nota. Elaboración propia, 2023

Figura 14 *Estudiantes trabajando con el tangram*

Nota. Fuente propia, 2023

Moldes de Figuras

En el ítem 2 de la guía se propuso un conjunto de polígonos irregulares cóncavos que representaban animales, personas u objetos. Al igual que las anteriores construcciones, dichas figuras debían elaborarse con el tangram. Los estudiantes para determinar las piezas que componían la imágen hicieron trazos sobre estas (ver Figura 15), pues al estar totalmente de color negro dificultaba la identificación de las fichas. Lo anterior muestra en los alumnos la capacidad de utilizar estrategias visuales para descomponer y comprender de manera efectiva problemas geométricos.

Figura 15 Forma de gato para construir con el tangram

Nota. Fuente propia, 2023

Seguidamente, los estudiantes ubican las fichas del tangram tal como en el trazo realizado (ver Figura 16). De esta manera facilitaron el proceso de construcción de las figuras de este ítem.

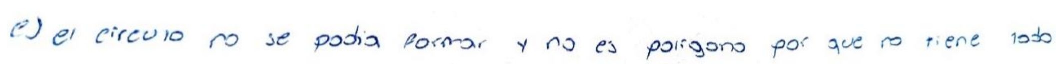
Figura 16 *Forma de gato con el tangram*

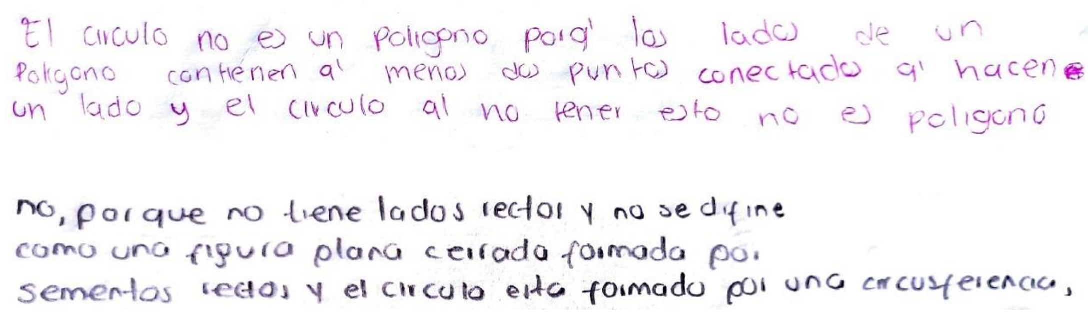
Nota. Fuente propia, 2023

¿El círculo es un polígono?

Para finalizar esta actividad se planteó a los estudiantes la pregunta: ¿El círculo es un polígono? esto con el propósito de conocer su forma de justificar y que tan sólidas eran sus argumentaciones. Algunas de las respuestas fueron:

Figura 17 *Respuestas a la pregunta: ¿el círculo es un polígono?*





El circulo no es un poligono porq' los lados de un poligono contienen a' menos dos puntos conectados q' hacen un lado y el circulo al no tener esto no es poligono

no, porque no tiene lados rectos y no se define como una figura plana cerrada formada por sementos rectos y el circulo esta formado por una circunferencia,

Nota. Fuente propia, 2023

Estas respuestas muestran cómo los estudiantes a partir de la noción que tienen de polígono determinan las características que le hacen falta a un círculo para que entre en esta categoría. Algunos en su respuesta señalan la ausencia de lados; otros se enfocan en la conexión de puntos y la necesidad de lados rectos para construir un polígono; mientras que unos pocos muestran un nivel más avanzado en su justificación, destacando que el círculo para ser polígono debería ser una figura cerrada formada por segmentos rectos; además reconocen una distinción fundamental entre estos, indicando que el círculo está formado por una circunferencia.

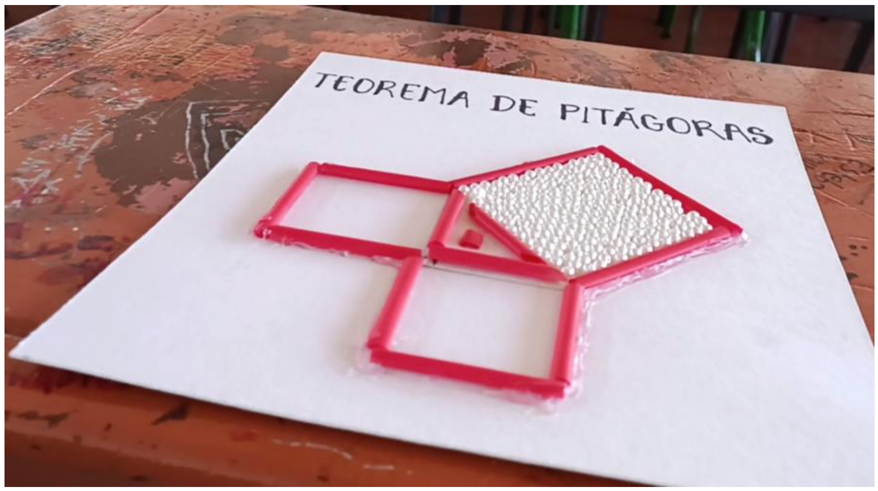
Lo expuesto anteriormente refleja el intento de los estudiantes para aproximarse a la definición de algunos conceptos geométricos, evidenciando su competencia para adaptar sus percepciones iniciales a justificaciones "formales". Además, estas respuestas permiten enriquecer el debate y el aprendizaje en el aula, debido a que, los estudiantes conocen diferentes puntos de vista y complementan su comprensión de los conceptos, en este caso, la de polígono y círculo.

7.4 Conociendo el Teorema de Pitágoras

En esta sesión se abordó el Teorema de Pitágoras, donde inicialmente se les preguntó a los estudiantes si lo conocían. Ellos contestaron que lo habían trabajado en grado noveno y que actualmente estaba siendo utilizado en su clase de trigonometría, por lo que se sabían su fórmula; sin embargo, desconocían el trasfondo de esta; debido a que, generalmente los profesores les enseñan los conceptos de manera mecánica, dejando a un lado aspectos como su historia y construcción que permiten comprender la evolución, aplicaciones y fundamentos.

Fue así como, para que los estudiantes entendieran el porqué de la ecuación que representa el teorema de Pitágoras, se llevó una maqueta hecha en cartón paja, pitillos y canicas (ver Figura 18), donde para apreciar la relación que existe entre el área del cuadrado formado por la hipotenusa del triángulo y las áreas de los cuadrados formados por los catetos del mismo, se utilizaron las canicas como representantes del área total del cuadrado grande, que posteriormente se ubicaron en los cuadrados formados por los catetos, ocupando la totalidad de sus áreas. Esta descripción corresponde a una de las comprobaciones empíricas más usadas para este teorema, ya que, es una manera intuitiva de entenderlo.

Figura 18 *Maqueta para la demostración del teorema de Pitágoras*



Nota. Fuente propia, 2023

Aventura Pirata

El recurso didáctico que se utilizó en esta sesión fue el juego denominado aventura pirata (ver Figura 19), el cual es un tipo de parqués matemático que consta en este caso de un conjunto de desafíos que se deben superar con ayuda del teorema de Pitágoras; para esta actividad, los estudiantes se organizaron en parejas, a las cuales se les entregó un tablero (parqués) para que compitieran uno a otro. Además, cuando las fichas avanzaban en el tablero, los problemas que se debían resolver aumentaban de nivel; es decir, requerían un grado mayor de reflexión antes de ser abordados, ya que su solución no era inmediata.

Figura 19 *Tablero del juego Aventura Pirata*

Nota. Adaptado de (Vecteezy,2023)

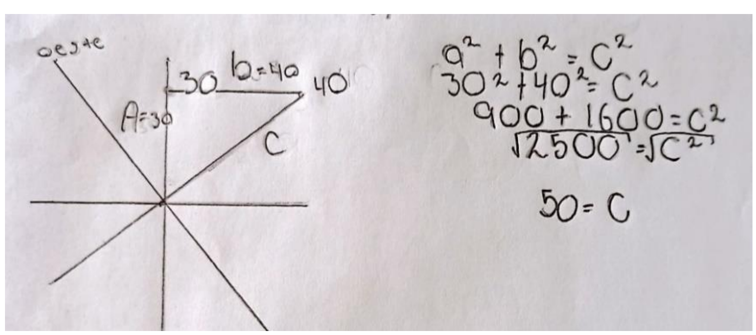
El tablero tiene 53 casillas, algunas de estas con problemas que se debían superar para avanzar en el juego. A continuación, se muestran algunos de los problemas enumerados según la casilla correspondiente.

En el problema 17 se planteó lo siguiente:

- En un campo de fútbol, una pelota se encuentra en el centro del campo. Desde este punto, el Jugador 1 avanza sin la pelota 30 metros hacia el norte y luego 40 metros hacia el este, ahí se encuentra con el Jugador 2. ¿Cuál es la distancia más corta en metros que debe recorrer el Jugador 2 para llegar a la pelota?

Seguidamente se muestra una de las soluciones dadas por una estudiante:

Figura 20 *Respuesta al problema de la casilla 17*



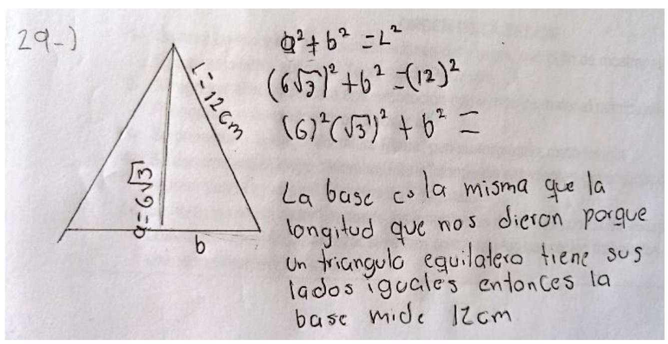
Nota. Fuente propia, 2023

Es evidente que, en la resolución de este problema, la estudiante hizo un diagrama análogo al de un plano cartesiano, lo que le permitió situarse con respecto a las coordenadas proporcionadas en el ejercicio. Posteriormente, ubicó los datos pertinentes de acuerdo con su esquema, con el propósito de identificar los catetos y la hipotenusa en el triángulo rectángulo formado a partir de los datos, y así determinar el valor desconocido, es decir, la distancia más corta que debía recorrer el Jugador 2 para alcanzar la pelota. Sin embargo, resulta notorio que la estudiante no empleó las unidades de medida, lo cual muestra un descuido en la manipulación de los datos del problema.

Veamos ahora el problema 29 en el que se enunció lo siguiente:

- Un triángulo equilátero tiene uno de sus lados de longitud 12 cm y su altura de longitud $6\sqrt{3}\,cm$ ¿Cuánto mide su base?

Figura 21 *Respuesta al problema de la casilla 29*



Nota. Fuente propia, 2023

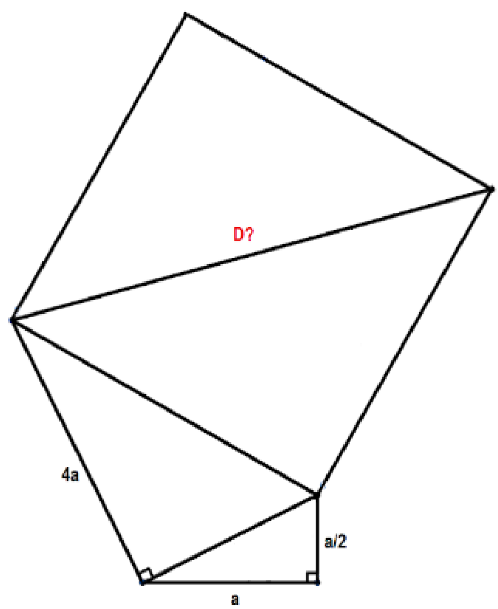
Este problema tiene un aspecto destacado, ya que en su enunciado se encuentra una palabra clave que daba la solución inmediata; no obstante, los estudiantes no tuvieron en cuenta las pautas que les proporcionamos con relación a la estrategia de resolución de problemas de Pólya, omitiendo el hecho de comprender en primera instancia el enunciado correctamente. Este descuido resultó en que los estudiantes comenzaran a aplicar el teorema de Pitágoras, lo cual era innecesario para resolver el problema. Ahora bien, cuando los estudiantes volvieron a revisar el planteamiento del ejercicio, se dieron cuenta de que la solución dependía de una correcta interpretación, al identificar la palabra “equilátero”. Esto demostró la importancia de leer y analizar el enunciado con atención, ya que una sola palabra puede cambiar por completo el enfoque requerido para abordar un problema matemático.

Figura 22 *Estudiantes resolviendo los desafíos del juego Aventura Pirata*

Nota. Fuente propia, 2023

El desafío de la casilla 33 que los estudiantes debían superar fue el siguiente:

- Determine la diagonal *D* del cuadrado.

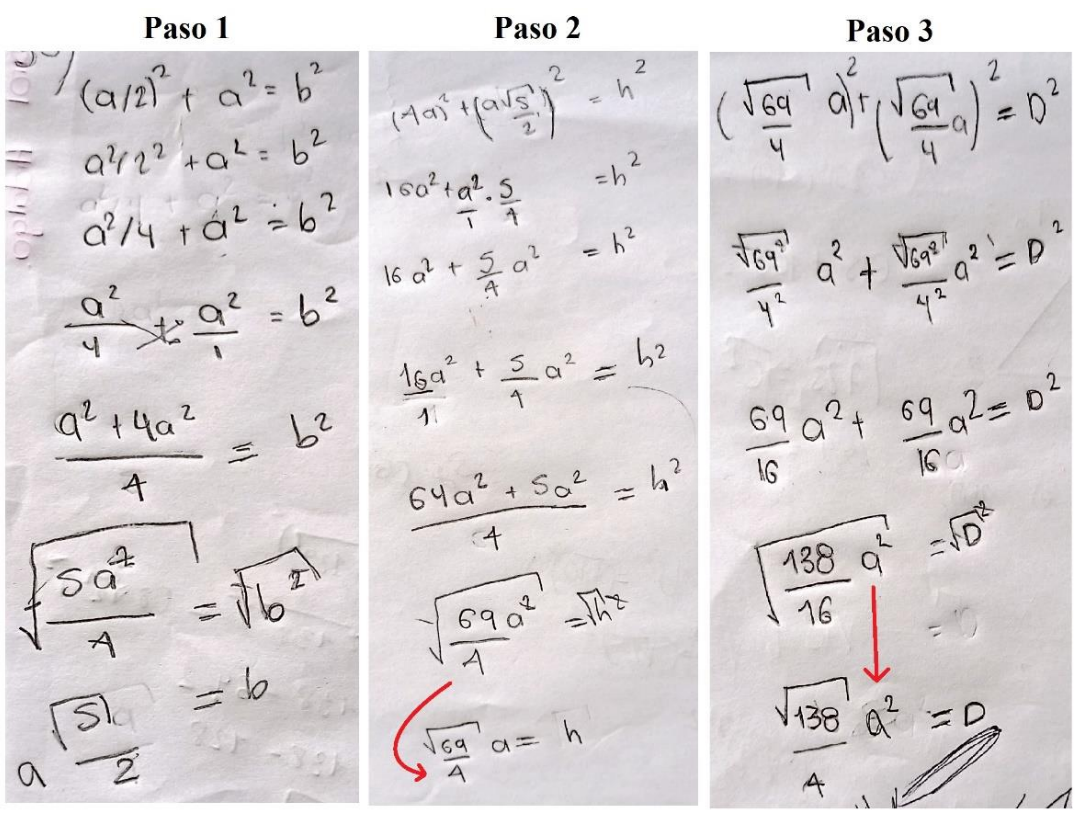


Recopilación de la ***Figura 2***

Este problema tiene una característica que lo diferencia con otros desafíos que los estudiantes debían afrontar. En este caso, las medidas de los lados de las figuras no eran particulares, sino que estaban determinadas por la variable “a”; lo cual, requería de un nivel más elevado de análisis por parte de los alumnos para encontrar una solución adecuada. Además, al igual que algunos de los problemas presentados en actividades previas, con este se buscaba enseñar a los estudiantes a manipular expresiones de manera general en el contexto de las matemáticas. De esta manera, la intención no fue solo reforzar su comprensión de conceptos específicos, sino también desarrollar su capacidad para abordar problemas matemáticos en un sentido más amplio.

En cuanto a la solución propuesta por una estudiante, hay que mencionar varios aspectos importantes. En primer lugar, se dio cuenta de que para calcular la longitud de la diagonal “D” del cuadrado, debía determinar primero las longitudes de sus lados, para posteriormente aplicar el teorema de Pitágoras. Luego, se percató que uno de los lados correspondía a la hipotenusa de un triángulo rectángulo con un cateto de longitud “4a”. Este proceso, a su vez, requería la previa determinación de un cateto adicional en ese mismo triángulo, lo que resultaba en una serie de pasos interdependientes. Ya en la práctica, la estudiante dividió su procedimiento en tres pasos, enfocándose en encontrar uno a uno los valores necesarios para avanzar en la resolución del problema, como se muestra en la Figura 23.

Figura 23 *Respuesta al problema de la casilla 33*



Nota. Elaboración propia, 2023

En el desarrollo de este procedimiento, se observa un buen manejo de propiedades matemáticas por parte de la estudiante, por ejemplo, en la suma y resta de fracciones, en las propiedades de potenciación y radicación, y de igual manera en el correcto uso de la fórmula del teorema de Pitágoras. Sin embargo, es importante señalar que se presentaron dos descuidos durante los cálculos. El primero ocurrió en el paso 2, donde no calculó la raíz cuadrada de cuatro. El segundo se produjo en el paso 3, donde olvidó simplificar el exponente de la variable “a”. Estos detalles afectaron la precisión del resultado final en la solución del problema; no obstante, el razonamiento y el proceso utilizado fueron correctos y efectivos para superar el desafío propuesto.

Figura 24 *Cristian dando pautas a las estudiantes*

Nota. Fuente propia, 2023

7.5 Descubriendo áreas y perímetros de figuras planas

Esta actividad se dividió en dos sesiones, la primera consistió en la elaboración de figuras geométricas con material manipulativo. Para esto, se les proporcionó a los estudiantes tijeras y cartulinas de colores con las cuales debían construir figuras como polígonos, círculos entre otros. Esto con el fin de que, a partir de los modelos realizados, los alumnos dedujeran algunas de las fórmulas para calcular el área de estas figuras, basándose en las ecuaciones que determinan el área de figuras como el rectángulo y el triángulo.

Figura 25 *Estudiantes construyendo las figuras planas con cartulina*

Nota. Fuente propia, 2023

Es de mencionar que, para explicar el origen de la fórmula que determina el área de un círculo, se mostró un antiguo método de aproximación, que consiste en dividir el círculo en porciones iguales para luego organizarlas de tal manera que formen un "rectángulo", como se muestra a continuación:

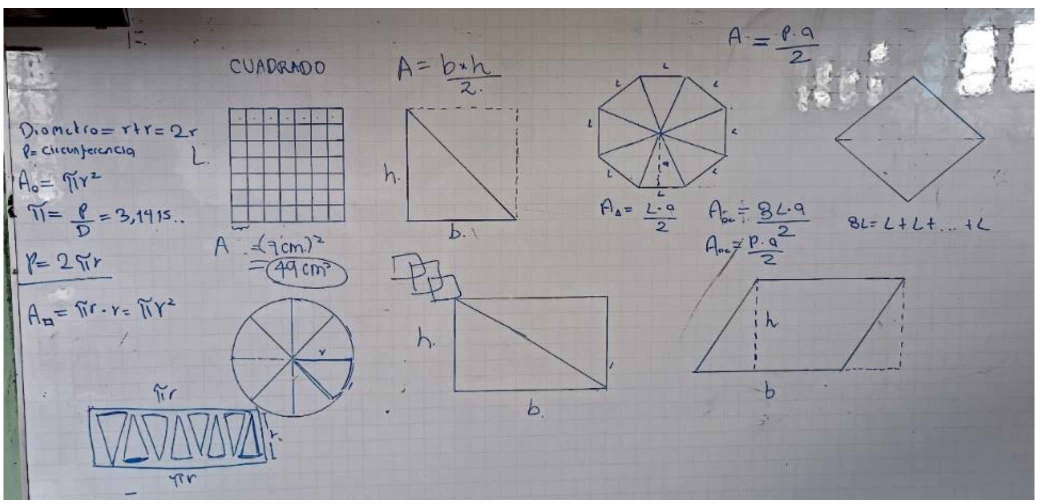
Figura 26 *Rectángulo construido a partir de las porciones del círculo*

Nota. Fuente propia, 2023

A partir de este esquema, los estudiantes comprendieron de una manera intuitiva como se llega a la fórmula para calcular el área del círculo; ya que, la altura de dicho "rectángulo" corresponde al radio del círculo inicial, y la longitud de los otros dos lados suman el perímetro del círculo que corresponde a $2\pi r$, donde r es su radio. También se les explicó que entre más pequeñas fueran las porciones del círculo, sería más notable esta relación. Además, se les dio a conocer el origen del número pi (π), aclarando que es la razón entre el perímetro del círculo (circunferencia) y su diámetro.

Como se mencionó, el propósito era que los estudiantes dedujeran unas fórmulas de otras, por lo que basándonos en sus ideas se buscó generalizar estos conceptos. Por ejemplo, identificaron que un polígono regular con más de cuatro lados puede descomponerse en triángulos con bases de igual longitud; fue así como, se les explicó que sumando las áreas de estos triángulos se determina la fórmula que permite calcular el área de cualquier polígono regular. En el caso del romboide, los estudiantes notaron que al trazar la altura se generaba un triángulo rectángulo, el cual podían trasladar para completar un rectángulo. Este proceso refleja la tendencia de los estudiantes a descomponer figuras desconocidas con el fin de reconstruir las más "elementales". De la misma manera se analizaron las demás figuras como el rombo y el trapecio. La siguiente imagen presenta algunos de los esquemas elaborados para la explicación:

Figura 27 *Explicación del origen de las fórmulas para calcular el área de figuras planas*



Nota. Fuente propia, 2023

En la segunda sesión, se llevó a cabo un taller que constaba de seis problemas que los estudiantes debían resolver usando las fórmulas vistas en la sesión anterior; estas últimas se encontraban en la guía (Ver Anexo 6), ya que el propósito no era que las memorizaran sino que aprendieran a utilizarlas. En los problemas se debía determinar el área o perímetro de algunas figuras, las cuales estaban compuestas por triángulos, círculos, rectángulos, entre otros; esto con el fin de que elaboraran una estrategia para determinar que fórmulas emplear y asi encontrar la solución del ejercicio.

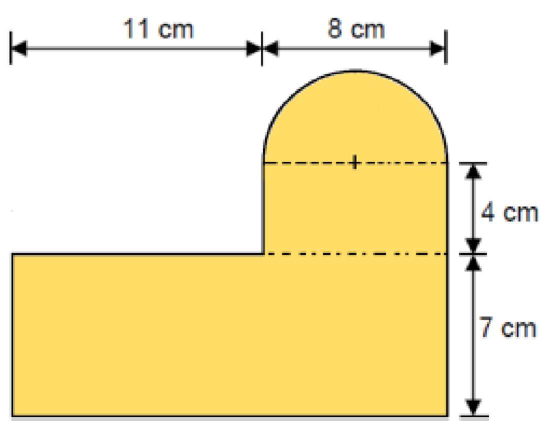
Figura 28 *Estudiantes resolviendo el taller de áreas y perímetros de figuras planas*

Nota. Fuente propia, 2023

Veamos algunos de los problemas del taller y las respuestas dadas por los estudiantes.

- En el punto 2 de la guía se enunció: observe la siguiente figura y determine el valor de su área.

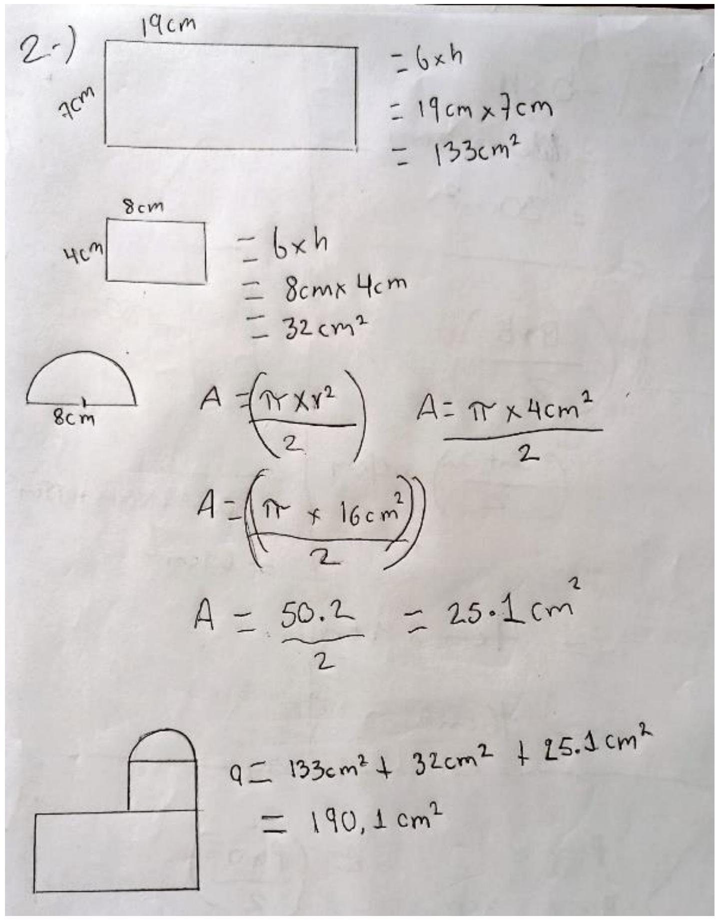
Figura 29 *Problema 2 de áreas y perímetros*



Nota. Elaboración propia, 2023

Un grupo de estudiantes dio la siguiente respuesta:

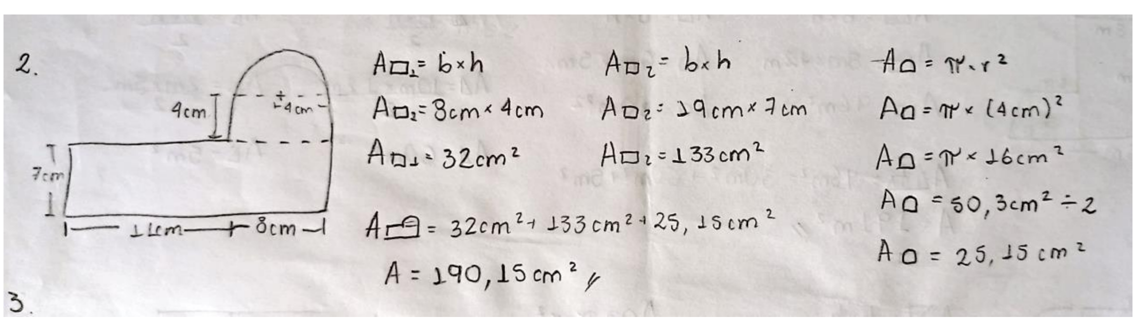
Figura 30 *Solución problema 2. Estudiantes que desarmaron la figura*



Nota. Fuente propia, 2023

Al mismo punto, otro grupo de trabajo presentó la respuesta a continuación:

Figura 31 *Solución problema 2. Estudiantes que utilizaron subíndices para etiquetar las figuras*

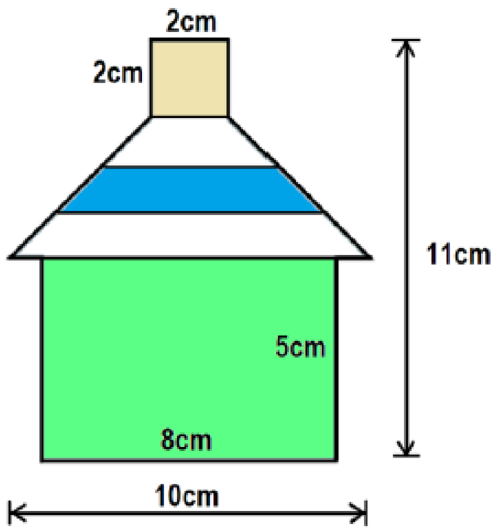


Nota. Fuente propia, 2023

Veamos ahora, el item 4 de la guía donde se propuso lo siguiente:

- Observe la siguiente figura, determine la longitud del perímetro y calcule su área

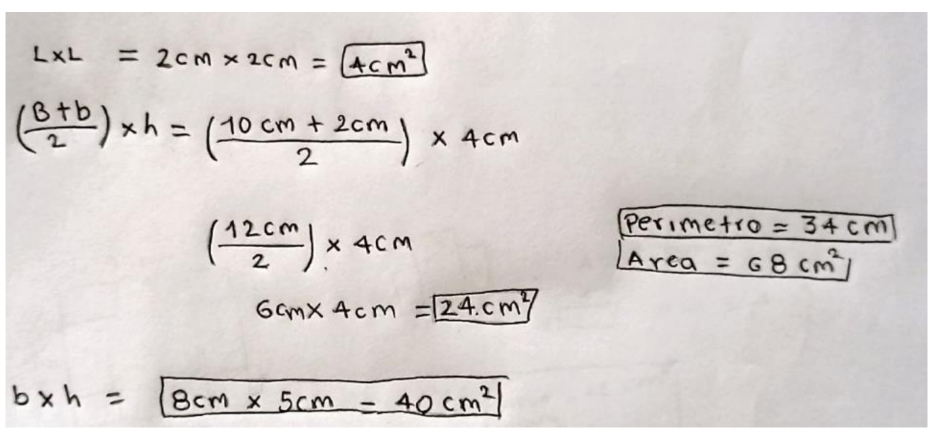
Figura 32 *Problema 4 de áreas y perímetros*



Nota. Elaboración propia, 2023

Un grupo de estudiantes planteó la siguiente solución:

Figura 33 *Solución problema 4. Estudiantes que no etiquetaron las figuras*



Nota. Fuente propia, 2023

Como se puede observar, los estudiantes mostraron habilidades en cuanto al cálculo de áreas y perímetro de figuras compuestas; solo necesitaron unas indicaciones que les permitieron superar algunos bloqueos como por ejemplo, que símbolos debían utilizar para representar el área de una sección de la figura. Fue así como, se presentaron tres enfoques en la forma en que los estudiantes organizaban la información para resolver los ejercicios. Algunos optaron por desarmar las figuras y abordar cada componente por separado (ver Figura 30), argumentando que les resultaba más fácil visualizar las partes de la figura al ser analizadas de manera individual. Otros utilizaron subíndices para etiquetar y sintetizar la información (ver Figura 31), lo cual muestra que estaban familiarizados con cierta notación matemática. Mientras que algunos no utilizaron ninguna convención para diferenciar las figuras (ver Figura 33), pues buscaban simplificar el proceso y centrarse en los cálculos matemáticos utilizando únicamente los datos del ejercicio. Estas diversas maneras de ejecución dejan ver la capacidad de los estudiantes para elaborar estrategias creativas que pueden aplicar al enfrentarse a problemas matemáticos de este tipo.

7.6 De dos a tres dimensiones

Después de abordar el tema de áreas en figuras planas, llevamos a los estudiantes a conocer las figuras tridimensionales, centrando la exploración en una de sus características principales: el volumen. Introdujimos este concepto a través de la construcción práctica de estas figuras utilizando cartulinas de colores, pegamento y tijeras. Proporcionamos moldes a escala para facilitar el proceso; sin embargo, los estudiantes debían determinar las medidas necesarias para trazar las figuras en la cartulina, utilizando toda la superficie disponible. Además, al ser esta una alternativa a los métodos tradicionales de enseñanza despertó el interés de los estudiantes, pues manifestaron que era la primera vez que les enseñaban conceptos matemáticos de esta forma.

Figura 34 *Estudiantes construyendo las figuras tridimensionales con cartulina*

Nota. Fuente propia, 2023

Mientras los estudiantes construían las figuras tridimensionales, realizamos una mesa redonda, en donde explicamos sin entrar en detalles, la idea de dimensión. Por ejemplo, mencionamos que las figuras a las cuales solo se puede medir y calcular su ancho y largo están en dos dimensiones; es decir, son figuras planas. Luego mostramos cómo, mediante dobleces, se puede transformar una figura bidimensional en una nueva figura a la que ahora le podemos determinar una tercera medida, la altura. También, destacamos que este cambio afecta directamente a las unidades de medida utilizadas en el procedimiento, pasando de unidades cuadradas que representan áreas a unidades cúbicas que indican volumen.

Figura 35 *Sólidos geométricos elaborados con cartulina*

Nota. Fuente propia, 2023

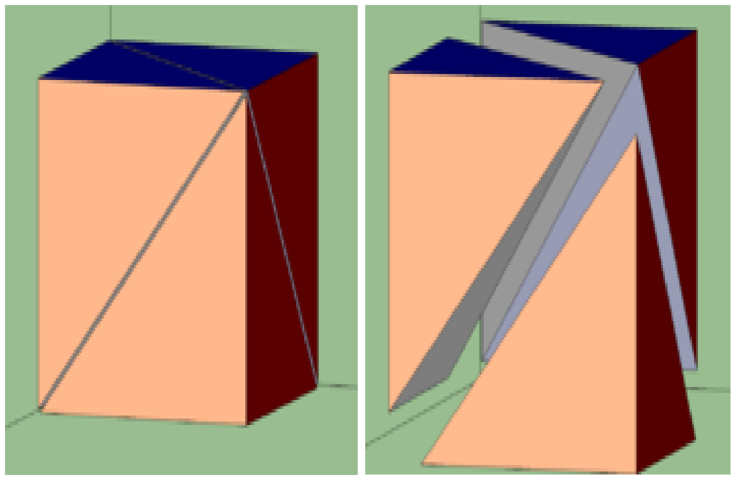
Enseñar el concepto de volumen a través de la construcción de figuras, resultó ser una herramienta valiosa que ofreció una serie de beneficios significativos, pues los estudiantes al manipular los moldes y participar en el proceso de ensamblaje, lograron establecer algunas conexiones con las características espaciales de estos sólidos, como por ejemplo la relación entre la altura y la cantidad de espacio; pues, manifestaron que entre mayor altura tenga la figura más espacio va a ocupar.

Explicación del origen de las fórmulas

Les mostramos a los estudiantes una idea del origen de algunas de las fórmulas que permiten encontrar el volumen de las figuras, entre ellas la de una esfera y de una pirámide, esta explicación se llevó a cabo de la siguiente manera:

Presentamos la Figura 36, en la que se puede observar como un prisma rectangular se divide en tres pirámides que comparten su base. Es por esta razón que, la fórmula para determinar el volumen de una pirámide es $V = \frac{1}{3} * B * h$, donde B es el área de su base y h la magnitud de su altura.

***Figura 36** Prisma rectangular dividido en tres pirámides*

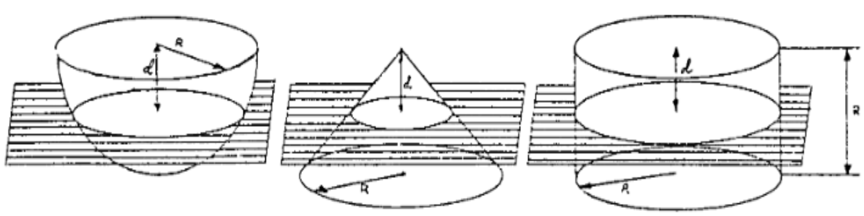


Nota. Tomado de (Wikipedia, Pirámide (Geometria), 2023)

Demostración de Arquímedes para la fórmula del volumen de una esfera

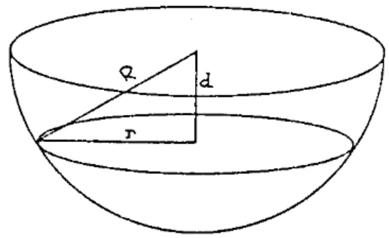
La siguiente información fue tomada de (Morales Medina, 2006):

Arquímedes imaginó una semiesfera y junto a ella un cilindro circular recto y un cono recto, ambos de base igual a un círculo máximo de la semiesfera. Como se muestra en las siguientes figuras:

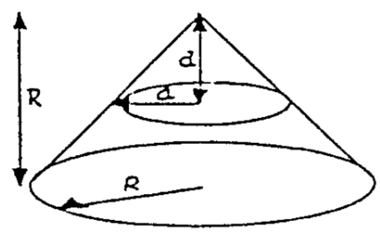


Arquímedes cortó las tres figuras con un plano paralelo a la base del cilindro y a la del cono, y se preguntó cómo serían las secciones determinadas por este plano en el cilindro, en la semiesfera y en el cono.

En el cilindro estaba claro, pues era un círculo de radio R. En la esfera también era un círculo; sin embargo, este dependía de la distancia d. Ahora, con la siguiente figura y utilizando el teorema de Pitágoras, Arquímedes pudo determinar que $r^2 + d^2 = R^2$.



Además se dio cuenta que en el cono, la sección también era un círculo, y así el radio era más fácil determinarlo a partir de la observación de la siguiente figura:

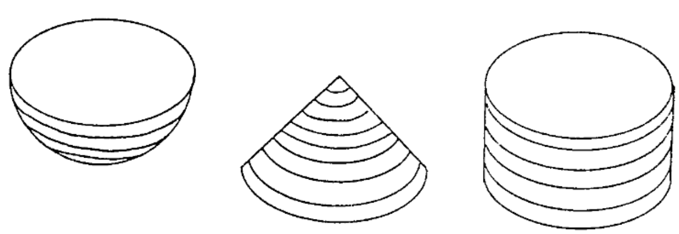


Como el cono tenía radio R y altura R, entonces el cono inscrito conservaría estas proporciones y por tal razón, tendría altura d y radio d. Así, Arquímedes obtuvo el siguiente resultado:

$$Sección\ cilindro\ = \pi R^2 = \pi(r^2 + d^2) = \pi r^2 + \pi d^2$$

$$Sección\ cilindro = \ Sección\ semiesfera\ +\ Sección\ cono$$

Las secciones son como rebanadas de las tres figuras obtenidas cortando paralelamente a la base del cilindro. Resulta que, colocando las tres figuras como las hemos puesto y cortándolas en rebanadas finas se tiene lo siguiente:



La rebanada del cilindro a una altura d, corresponde a la suma de las rebanadas de la semiesfera y el cono a la misma altura d; es decir, que si para cada altura d se tiene esta relación, es claro que:

$$Volumen\ cilindro\ =\ Volumen\ semiesfera\ +\ Volumen\ cono$$

Pero, como Arquímedes muy bien sabía que:

$Volumen\ cilindro = \pi \cdot R^3$ y $Volumen\ cono = \frac{1}{3}\pi \cdot R^3$.

De ahí se tiene que: $V(Semiesfera) = V(cilindro) - V(cono)$

$V(semiesfera) = \pi \cdot R^3 - \frac{1}{3}\pi \cdot R^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot R^3$ y finalmente:

$$V(Esfera) = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$$

Esta demostración impactó a los estudiantes, pues estaban admirados y la vez desconcertados por la creativa idea de Arquímedes, esto se vio reflejado en la expresión de uno de ellos, quien dijo: *"Uy, ¿Cuál es esa mi papá? Jaja".* Ante esto, todo el grupo estalló en risas por la forma en que se manifestó el estudiante. Sin embargo, en el trasfondo, lo que se evidencia es un asombro al conocer una demostración matemática de este tipo y ver el ingenio que se debe tener para inferir tal resultado; por ejemplo, otro de los alumnos expresó *"Solo a Arquímedes pudo habérsele ocurrido una cosa de estas".* Esta prueba, además de ampliar su comprensión de los conceptos matemáticos, motivó a los estudiantes a indagar sobre la historia de las matemáticas; debido a que, conocer el desarrollo de ideas a lo largo del tiempo, les proporciona una perspectiva más amplia en esta área.

Taller de volúmenes

Los estudiantes resolvieron una serie de ejercicios que requerían la aplicación de la fórmula de volumen correspondiente a cada figura geométrica. El propósito era que no sólo comprendieran la fórmula en sí, sino que lograran identificar y ubicar correctamente los datos dentro de la misma. Lo anterior buscaba evaluar su capacidad para aplicar las fórmulas e introducirlos al manejo de las nuevas unidades de medida asociadas al volumen. Todo esto era esencial, ya que se quería preparar a los estudiantes de manera efectiva con miras al próximo taller, centrado en volúmenes inscritos.

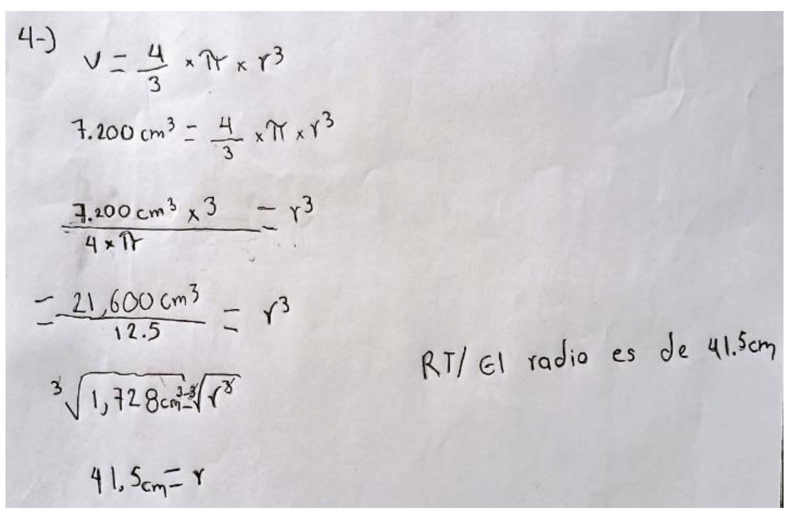
A continuación, se presentan algunos de los ejercicios propuestos en la guía (Ver Anexo 7) y sus respectivas respuestas:

El enunciado del punto 4 de la guía decía lo siguiente:

- Un balón de baloncesto tiene un volumen de $\mathbf{7.200}\ \boldsymbol{cm}^3$. ¿Cuál es su radio?

Nota. Tomado de (Golty, 2023)

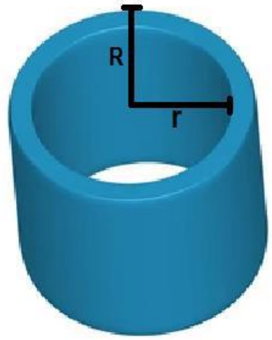
Figura 37 *Respuesta al punto 4 por un grupo de trabajo*



Nota. Fuente propia, 2023

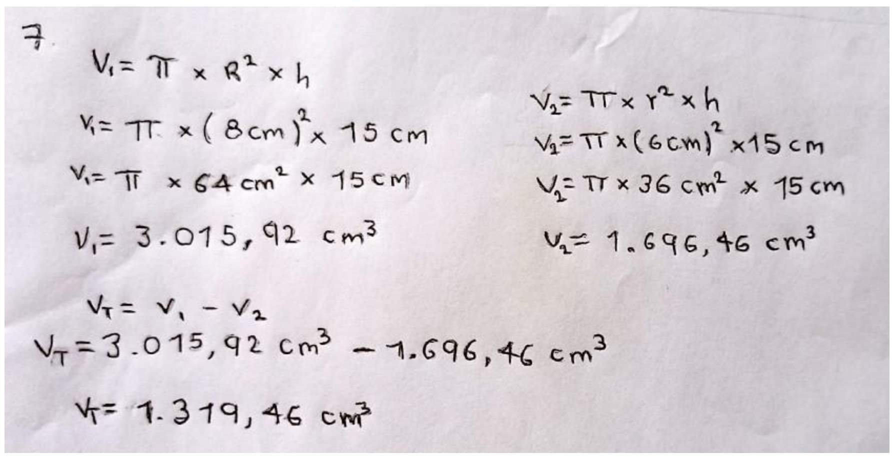
Veamos ahora el enunciado del ítem 7 de la guía:

- En la figura se muestra un cilindro hueco que tiene una altura de $\mathbf{15}\ \boldsymbol{cm}$, un radio exterior de la base $\boldsymbol{R}$=$\mathbf{8}\ \boldsymbol{cm}$ y un radio interior de la base $\boldsymbol{r}$=$\mathbf{6}\ \boldsymbol{cm}$. ¿Cuál es el volumen del cilindro hueco?



Nota. *Elaboración propia, 2023*

Figura 38 *Respuesta al punto 7 por un grupo de trabajo*



Nota. *Fuente propia*

El punto 4 de la guía, tenía como finalidad consolidar las habilidades de los estudiantes en el despeje de variables en una ecuación específica. Por esta razón, se les proporcionó el volumen de un balón de baloncesto como dato inicial, y la tarea asignada consistió en calcular el radio que cumpliría con las condiciones establecidas en el problema. Como se evidencia en la Figura 37 los estudiantes no tuvieron dificultad al momento de realizar este procedimiento. Por otro lado, en relación con el punto 7, su singularidad radicó en la tarea de calcular el volumen que ocupaba el borde de un cilindro hueco. Esta figura, desconocida para algunos estudiantes, planteó un reto adicional debido a la peculiaridad de que el interior del cilindro no contribuye al volumen total, dado que presenta un agujero que lo atraviesa de extremo a extremo. Por ende, la resolución de este ejercicio implicó la necesidad de restar este volumen interior para obtener el volumen específico del borde del cilindro, destacando así la importancia de comprender las particularidades de las formas geométricas involucradas.

8 FASE FINAL: ÁREAS DE REGIONES SOMBREADAS Y VOLÚMENES DE SÓLIDOS INSCRITOS

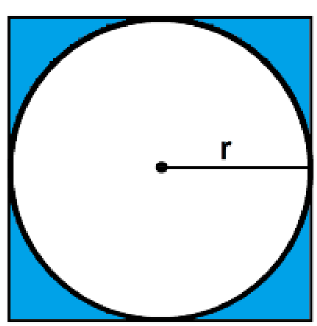
En este punto, se dio por terminada la fase preparatoria, y con esto, se esperaba que los estudiantes tuvieran las capacidades para abordar problemas más complejos, lo que nos llevó a la introducción del taller dedicado al cálculo de áreas de regiones sombreadas (Ver Anexo 8) y posteriormente el de volúmenes de sólidos inscritos (Ver Anexo 9). El primer taller, se desarrolló en dos sesiones, no solo por ser uno de los pilares de la práctica pedagógica, sino porque los estudiantes debían tomarse el tiempo necesario para abordar detalladamente los problemas. Por su parte, el segundo, fue abordado en una sola sesión; ya que, la cantidad de problemas propuestos en este era inferior. Los problemas, tanto del primer como del segundo taller, requerían la aplicación de los contenidos trabajados durante la fase preparatoria y, al mismo tiempo, estimulaban el razonamiento matemático y el pensamiento espacial al enfrentar a los estudiantes al cálculo de volúmenes inscritos y áreas de regiones formadas por figuras no convencionales.

8.1 Calculando áreas de regiones sombreadas

Este primer taller constaba de catorce problemas con un aumento progresivo de dificultad, en los cuales se observaron distintos niveles de comprensión y ejecución por parte de los estudiantes. A continuación, se presentan algunos de los problemas que fueron propuestos y las soluciones que dieron los equipos de trabajo:

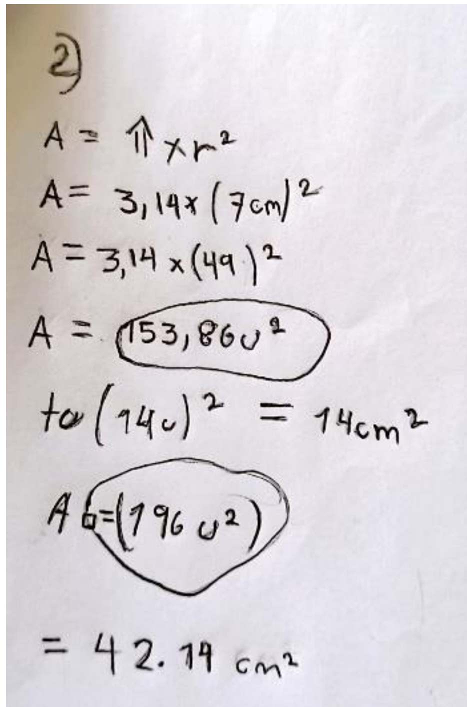
En el punto 2 del taller se planteó lo siguiente:

- Observe y analice la siguiente figura, determine el área de la región de color azul sabiendo que $r = 7u$.



Nota. Elaboración propia, 2023

Figura 39 *Respuesta al problema 2 de áreas sombreadas*



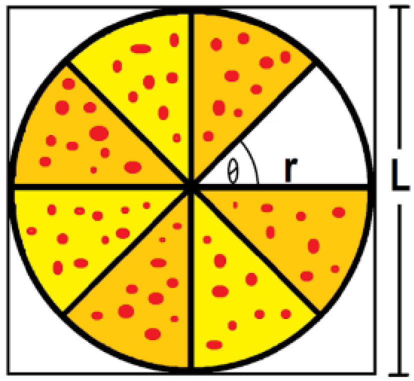
Nota. Fuente propia, 2023

El punto 2, siendo uno de los primeros problemas, no presentaba mayor dificultad. Los alumnos reconocieron correctamente que para determinar el área de color azul debían calcular el área del cuadrado y restarle el área del círculo inscrito. Sin embargo, en la Figura 39 se evidencia como los estudiantes al tener interiorizado el sistema métrico decimal utilizaron "cm" como unidad de medida, ignorando que en el contexto del problema las unidades estaban representadas por la letra "u", que denota una unidad de medida general.

Otro aspecto para destacar fue la aproximación del número Pi (π) a solo dos decimales. Esto lo hacen comúnmente los estudiantes para facilitar la notación; aunque es un acto aparentemente irrelevante, hace que el resultado que presentan tenga un grado de imprecisión. Así, para que obtuvieran soluciones más exactas, se les dio la opción de dejar expresado el símbolo π, recordándoles que al ser un número irracional tiene infinitos decimales no periódicos.

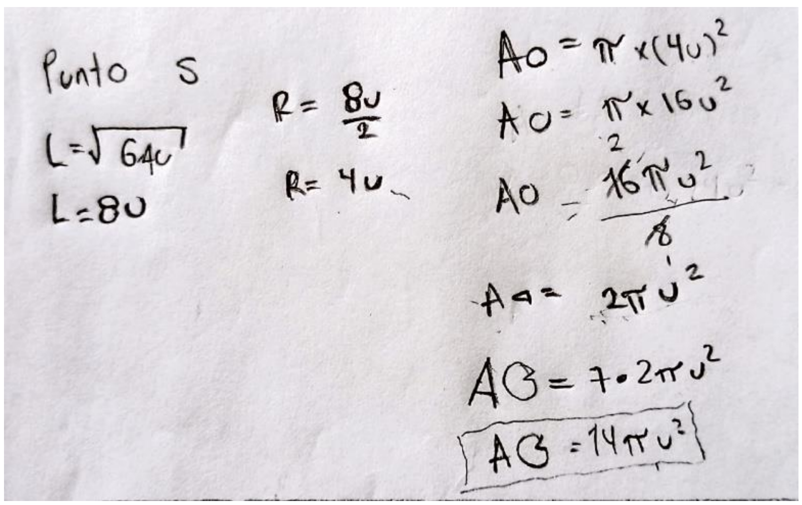
Veamos ahora el problema 5 del taller en el que se propuso lo siguiente:

- Un repartidor entregó una pizza a un grupo de estudiantes, uno de ellos se comió un octavo de la pizza, ¿Cuál es el área de la pizza sobrante? Teniendo en cuenta que $L = \sqrt{64}u$.



Nota. Elaboración propia, 2023

Figura 40 *Respuesta al problema 5 de áreas sombreadas*



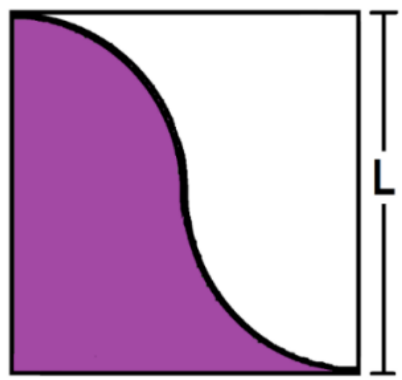
Nota. Fuente propia, 2023

El enunciado de este problema familiarizó a los estudiantes con una actividad que tal vez la mayoría habían realizado, como lo es, comer pizza y repartirla en porciones iguales. Esto facilitó la creación de una estrategia para resolver el problema. Como las pizzas están completamente inscritas en sus cajas, entonces el diámetro de su circunferencia corresponde al lado de la caja; lo cual relacionaron directamente con la gráfica presentada en la guía, y así lograron determinar que el radio del círculo formado por la pizza era la mitad del lado del cuadrado.

Hubo aspectos a destacar, por ejemplo, al principio los estudiantes empezaron a trabajar con el valor $L = \sqrt{64}u$, sin darse cuenta de que 64 tiene raíz exacta, lo que simplificaría los pasos en el procedimiento. Fue así como, les sugerimos que analizaran detenidamente los datos numéricos del problema, para no complicar el camino a la solución. Otro aspecto se puede ver en la Figura 40, donde los estudiantes dejaron expresado el símbolo π, lo que evidencia la atención prestada en la sugerencia dada en el punto 2 del taller. Ahora bien, con respecto al procedimiento general del problema, los alumnos determinaron el área total de la pizza, que posteriormente dividieron en ocho partes para encontrar el valor del área de cada trozo; luego de esto, multiplicaron esta área por siete, que finalmente correspondía al área total de las rebanadas que se pedían.

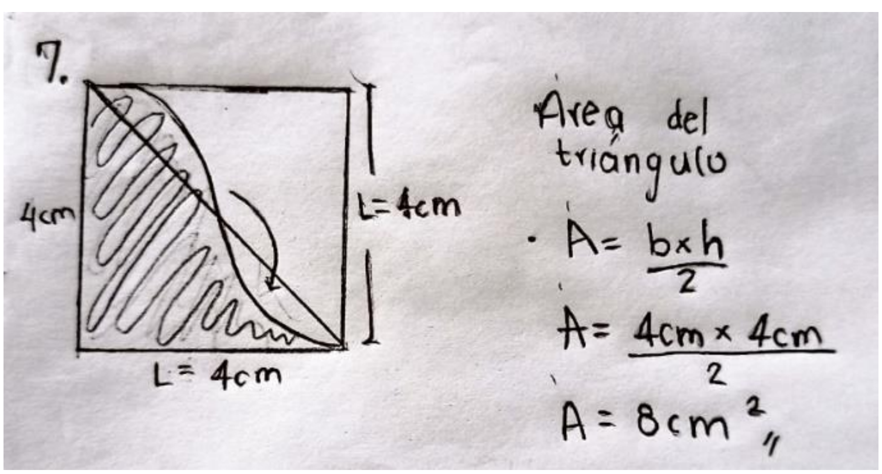
Analicemos ahora el ítem 7 del taller, en el que se planteó lo siguiente:

- La longitud del lado del cuadrado es $L = 4\ cm$. Determine el área de la figura de color morado.



Nota. Elaboración propia, 2023

Figura 41 *Respuesta al problema 7 de áreas sombreadas*



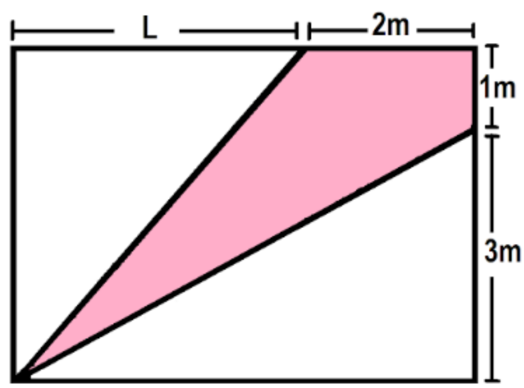
Nota. Elaboración propia, 2023

El área que se debía hallar en este problema se veía más complicada visualmente, pues los estudiantes no le encontraban ninguna relación con una figura conocida, por lo que entraron en un estado de bloqueo. Fue así como, les dimos la sugerencia de que hicieran trazos sobre el gráfico para ver qué podían encontrar. Primero, hicieron líneas que pasaban por los puntos medios del cuadrado, pero esto no les daba una idea clara para la resolución del problema. Después de unos minutos, se percataron de que trazando una diagonal del cuadrado, se generaban dos sectores similares, los cuales se correspondían directamente. Los estudiantes procedieron a trasladar y rotar uno de estos, como se observa en la Figura 41. Con este paso, se dieron cuenta de que el área que debían hallar era la de un triángulo rectángulo isósceles, con base y altura $L = 4cm$.

Los estudiantes se dieron cuenta de que una estrategia aparentemente simple, como hacer trazos sobre el gráfico, cambia por completo la perspectiva del problema, mostrándoles un camino claro para iniciar el procedimiento. Esto último demostró que con una buena estrategia, la resolución de un problema matemático aparentemente complejo puede ser más accesible.

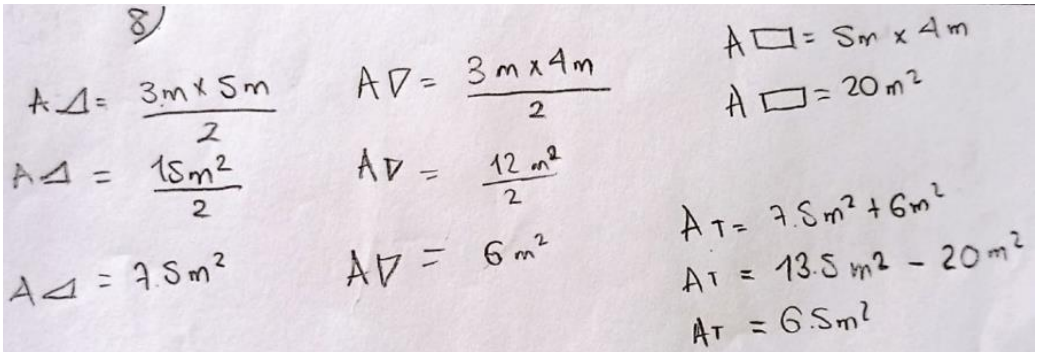
En el punto 8 del taller se enunció lo siguiente:

- Observe la siguiente figura, determine el área de la figura rosada, sabiendo que L es un número tal que es la raíz cúbica de veintisiete y la raíz cuarta de ochenta y uno.



Nota. Elaboración propia, 2023

Figura 42 *Respuesta al problema 8 de áreas sombreadas*



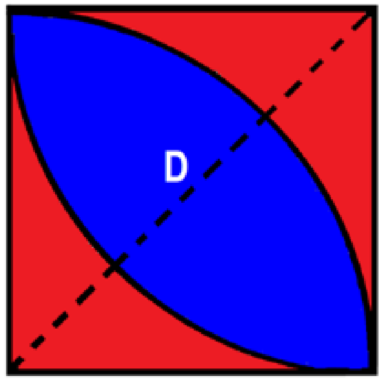
Nota. Fuente propia, 2023

Este problema presentaba un nivel más avanzado, ya que requería que los estudiantes calcularan diversas áreas y establecieran relaciones entre ellas para determinar la superficie de color rosado. Una característica del enunciado era la forma en que se proporcionaba uno de los datos; en este caso, la información no se expresaba mediante símbolos matemáticos, sino en lenguaje natural, pues la expresión "L es un número tal que es la raíz cúbica de veintisiete y la raíz cuarta de ochenta y uno" buscaba que los alumnos verificaran si el número que encontraban cumplía las dos condiciones o por el contrario había más de un valor para L.

En cuanto al procedimiento seguido por los estudiantes, se destacó el uso de subíndices representados como figuras, asignados según la posición que deseaban describir. Esta estrategia les permitió tener un orden para abordar la resolución del problema. No obstante, en el último paso, se detectó un error en la resta de las áreas. El equipo restó el área del rectángulo al área de los triángulos, lo que resultaba en un valor negativo. A pesar de reconocer este hecho, los integrantes del equipo sabían que, al tratarse de áreas, el valor no podía ser negativo. Por lo tanto, no le dieron importancia al signo inicial y simplemente lo modificaron. Este equívoco reveló una falta de precisión en la relación entre las áreas, ya que no es adecuado restar un área mayor de una menor. Esta discrepancia fue explicada a los demás grupos de trabajo como parte del proceso de retroalimentación.

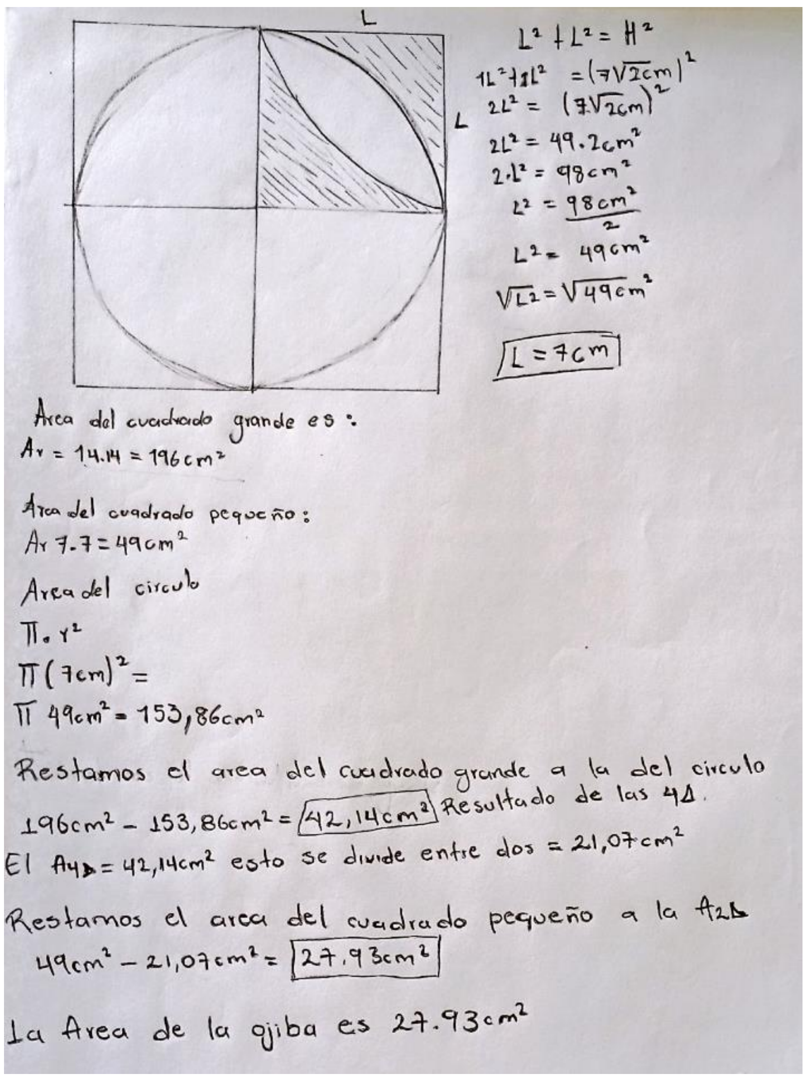
Detallemos ahora el punto 12 del taller:

- Observe la siguiente figura y calcule el área de color azul sabiendo que la longitud de la diagonal del cuadrado es $D = 7\sqrt{2}cm$.



Nota. Elaboración propia, 2023

Figura 43 *Respuesta al problema 12 de áreas sombreadas*



Nota. Fuente propia, 2023

Este es uno de los problemas más complejos del taller, exigía que los estudiantes aplicaran una variedad de contenidos previamente trabajados. La dificultad radicaba en la presentación de una figura inusual: la ojiva, un elemento con el cual los estudiantes no estaban familiarizados. Ante esta situación, varios equipos de trabajo pidieron nuestra ayuda para desarrollar un plan de acción que les permitiera abordar el problema de manera efectiva. La sugerencia que dimos fue que construyeran una segunda figura a partir de la proporcionada, que les permitiría tener una visión más global del problema. Con esto, algunos estudiantes empezaron a hacer gráficos que no tenían sentido, por lo cual, dimos la pista de que la figura que debían construir en base a la inicial era un círculo inscrito en un cuadrado grande. Con esta idea y al darse cuenta de que en el gráfico se muestra la cuarta parte de una circunferencia, un equipo presentó el esquema de la Figura 43, el cual compartieron con los demás grupos para orientarlos en la resolución del problema.

Este equipo se destacó al describir los pasos conforme avanzaban, manifestando que les facilitaba recordar las acciones que realizaban y de igual manera, les proporcionaba claridad en el procedimiento. Además, en su solución, se evidencia el uso de la calculadora, lo que les ayudó con el cálculo de las operaciones como producto y suma, especialmente aquellas que involucraban valores decimales.

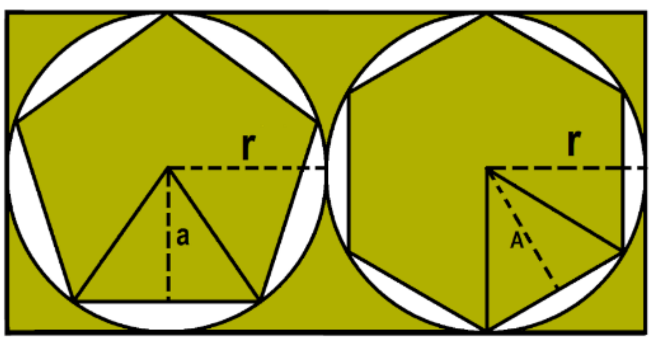
En cuanto a los pasos específicos, los estudiantes, siguiendo la sugerencia dada, comenzaron construyendo un círculo de radio igual a la longitud del lado del cuadrado inicial. Posteriormente, crearon un segundo cuadrado con un área cuatro veces mayor que el cuadrado inicial y en el que el círculo estaba inscrito. Esta construcción les permitió determinar el área de las cuatro esquinas restantes entre el área del cuadrado grande y el círculo inscrito. Luego, dividieron esta área por dos, que correspondía a la superficie de los sectores rojos del gráfico inicial. Finalmente, tras hallar el área del cuadrado pequeño, restaron el área de los sectores rojos para obtener el área de la ojiva.

Figura 44 *Stiven dando pautas a los estudiantes*

Nota. Fuente propia, 2023

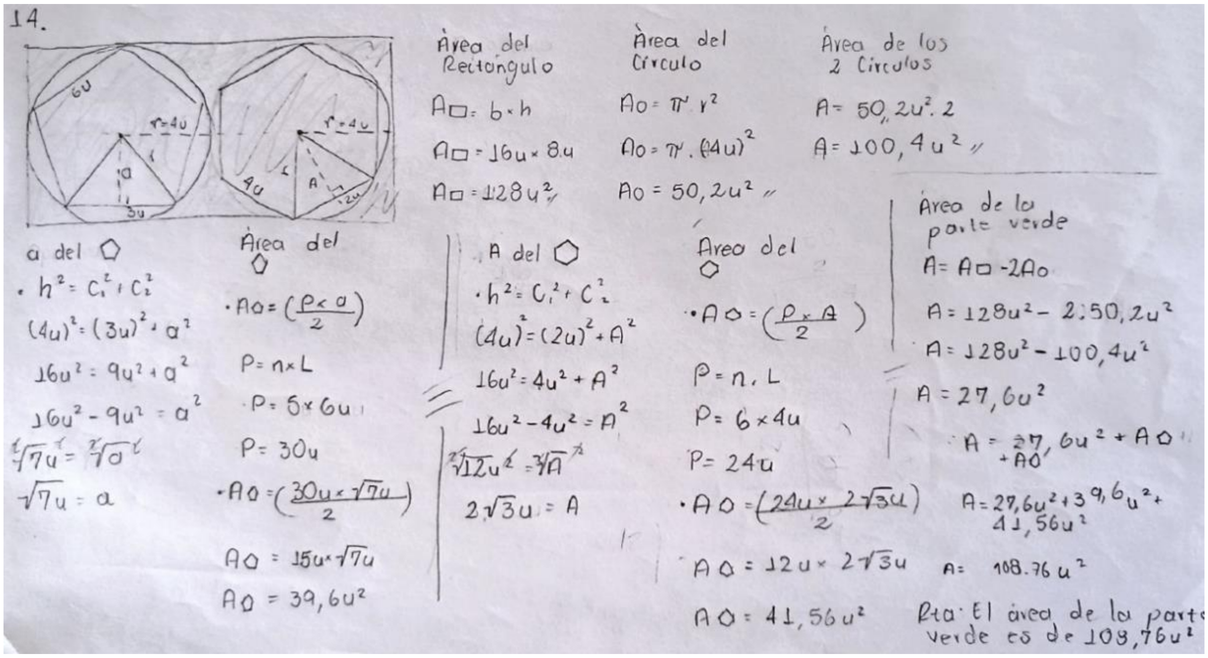
El punto 14 del taller y con el cual se finalizó, fue el siguiente problema:

- Determine el área coloreada teniendo en cuenta que $r = 4u$, además, la longitud del lado del hexágono es $4u$ y la longitud del lado del pentágono es $6u$.



Nota. Elaboración propia, 2023

Figura 45 *Respuesta al problema 14 de áreas sombreadas*



Nota. Fuente propia, 2023

Este problema, al ser el último del taller, se compone de varias figuras, un rectángulo, dos círculos, un pentágono y un hexágono, lo cual hace que tenga un grado considerable de dificultad para estudiantes que no hayan pasado por la fase preparatoria ni enfrentado problemas de esta índole. El diseño de una estrategia para abordarlo podría resultar desafiante para quienes carecen de tal preparación; sin embargo, los estudiantes que hacían parte de esta práctica habían desarrollado la aptitud necesaria para enfrentar este tipo de problemáticas.

La estrategia adoptada por varios equipos consistía en calcular el área del rectángulo, restarle el área de los dos círculos y, a este resultado, sumarle las áreas de los dos polígonos regulares. Este enfoque fue respaldado por nuestra parte como el correcto, y lo aprobamos para que procedieran con la formalización de su razonamiento. Aunque la idea de resolver el problema a primera vista pudiera parecer simple, la ejecución requería descubrir datos que no se encontraban explícitos en el enunciado, como la longitud de los lados del rectángulo y las apotemas de los polígonos. En la Figura 45, se puede observar cómo los estudiantes establecieron relaciones entre el radio del círculo y los lados de los triángulos internos de los polígonos. Además, mediante el correcto uso del Teorema de Pitágoras, lograron determinar la longitud de las apotemas. También establecieron una relación entre los lados del rectángulo y el radio de los círculos y con estos datos, tenían la información suficiente para determinar el área de cada una de las figuras que componían el problema.

Es importante destacar que al igual que este equipo, los demás estudiantes tuvieron un adecuado manejo de unidades, identificación correcta de partes de un polígono, aplicación precisa de fórmulas, buen despeje de variables, entre otros aspectos; lo que refleja un avance en su bagaje matemático y una receptividad positiva a las sugerencias proporcionadas a lo largo del taller y a la experiencia adquirida en la resolución de los problemas anteriores.

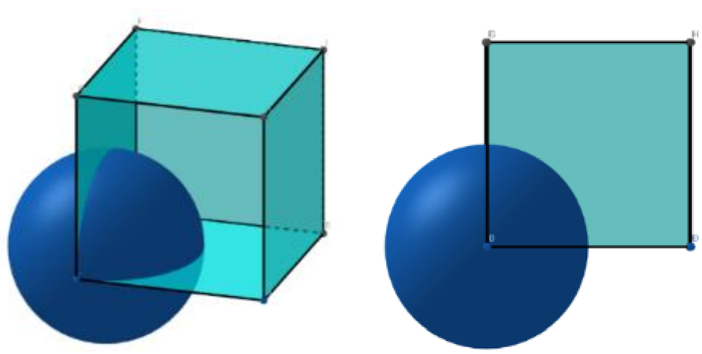
8.2 Encontrando el volumen de sólidos inscritos

Este segundo taller constaba de seis problemas, en los cuales, los estudiantes se enfrentaron a la tarea de calcular el volumen de sólidos resultantes de la combinación de formas elementales. Estos sólidos carecían de una fórmula directa para calcular su volumen, lo que llevó a los alumnos a desarrollar estrategias para abordar este desafío. Muchos optaron por aplicar un enfoque análogo al utilizado en el taller anterior sobre áreas de regiones sombreadas, donde sumaban o restaban figuras conocidas según correspondiera para determinar la superficie de la región no convencional.

Veamos algunos de los problemas que fueron abordados y las soluciones presentadas por los equipos de trabajo:

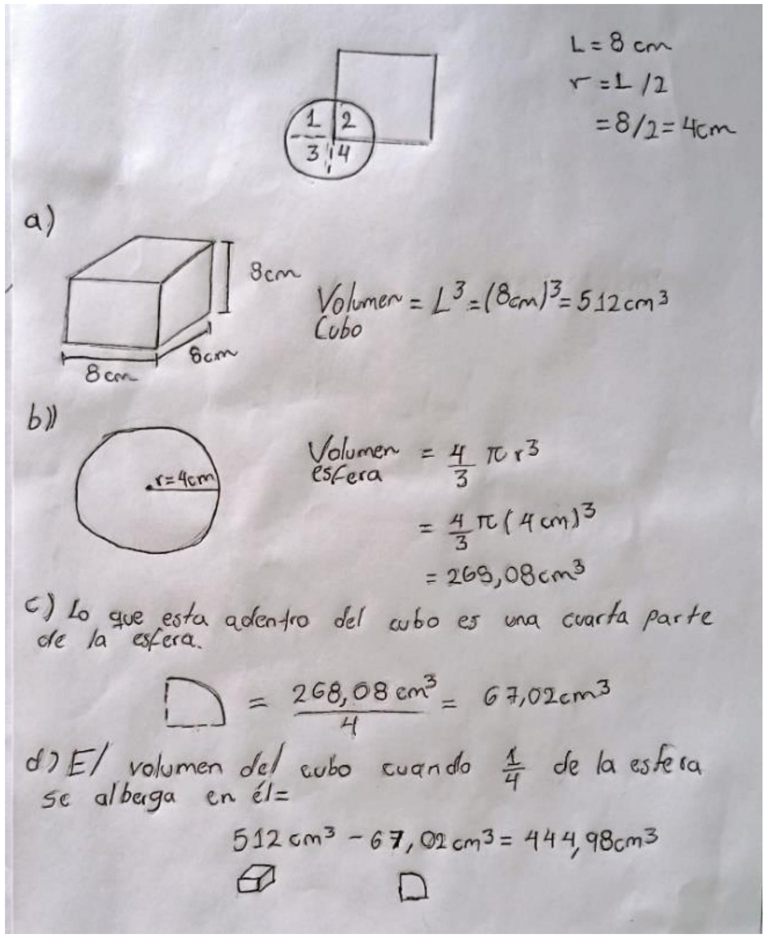
En el punto 1 del taller se planteó lo siguiente:

- Determine el volumen restante del cubo (azul claro) cuando la esfera se introduce como se muestra en la siguiente figura. Tenga en cuenta que el radio de la esfera es $r = \frac{L}{2}$ siendo L el lado del cubo cuya longitud es $L = 8\ cm$



Nota. Elaboración propia, 2023

Figura 46 *Respuesta al problema 1 de volúmenes inscritos*

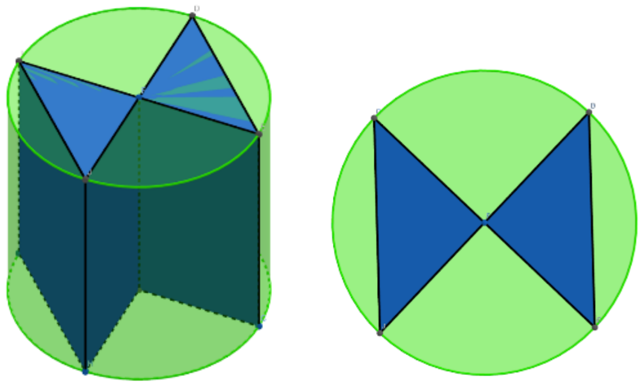


Nota. Fuente propia, 2023

La analogía que emplearon los estudiantes entre el taller de áreas sombreadas y la resolución de problemas relacionados con volúmenes inscritos resultó efectiva. En este caso, idearon una estrategia en la que inicialmente debían calcular los volúmenes del cubo y de la esfera, luego dividir por cuatro el volumen de esta última y, posteriormente, restar este resultado al volumen del cubo para obtener la solución deseada. Este método indirecto evidencia la creatividad de los estudiantes al elaborar un procedimiento que les permitió abordar el cálculo del volumen de un sólido para el cual no existe una fórmula directa.

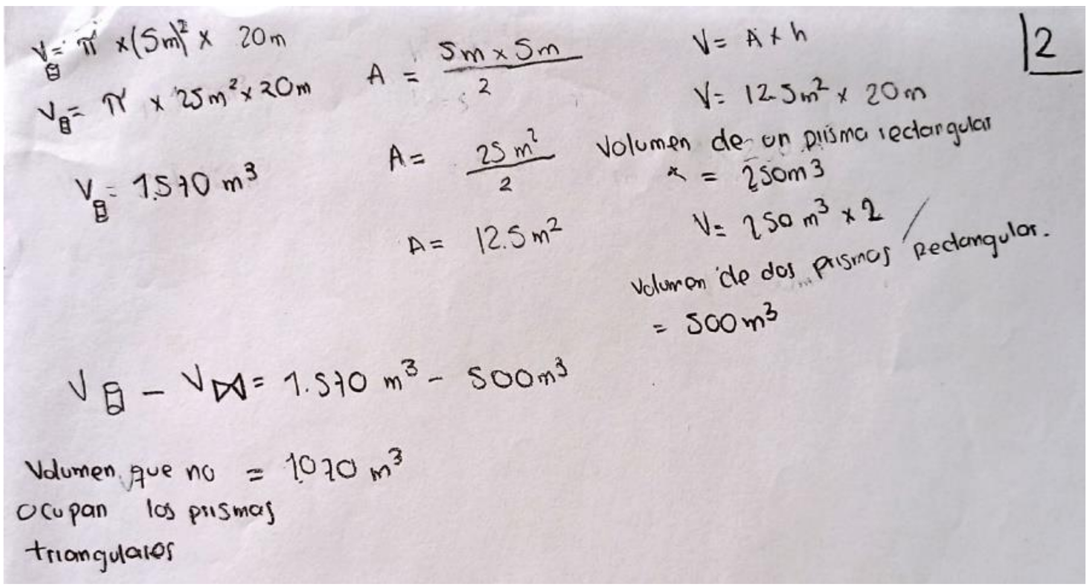
Observemos ahora el problema 2 del taller:

- Observe la siguiente figura, determine el volumen que NO ocupan los prismas triangulares azules dentro del cilindro. Para esto tenga en cuenta que el radio de la base del cilindro es $r = 5m$ y la altura del cilindro es $h = 20m$



Nota. Elaboración propia, 2023

Figura 47 *Respuesta al problema 2 de volúmenes inscritos*



Nota. Fuente propia, 2023

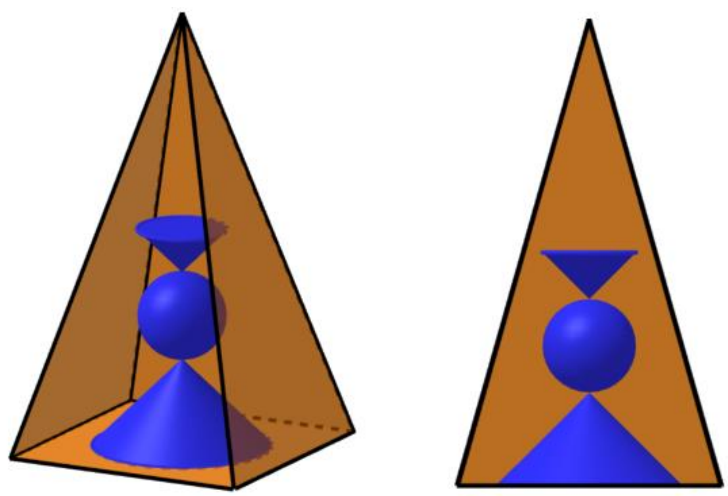
La capacidad resolutiva de los estudiantes se puso de manifiesto nuevamente al afrontar este problema, que guarda similitudes con el punto anterior; pues, para determinar el volumen del sector verde, siguieron un procedimiento parecido estructuralmente. En primer lugar, calcularon el volumen del cilindro; luego, hallaron el volumen de los prismas triangulares; para este ultimo paso encontraron el volumen de uno de ellos y luego lo multiplicaron por dos, pues en el gráfico se observa la igualdad de los mismos. Finalmente, los estudiantes restaron el resultado obtenido para los prismas triangulares al volumen del cilindro. Esto muestra como los alumnos han desarrollado habilidades que les permiten combinar y aplicar los resultados parciales de manera coherente para obtener la solución del problema.

Detallemos ahora el item 4 del taller:

- Observe y analice las siguientes figuras. Determine el volumen de la figura azul teniendo en cuenta lo siguiente:

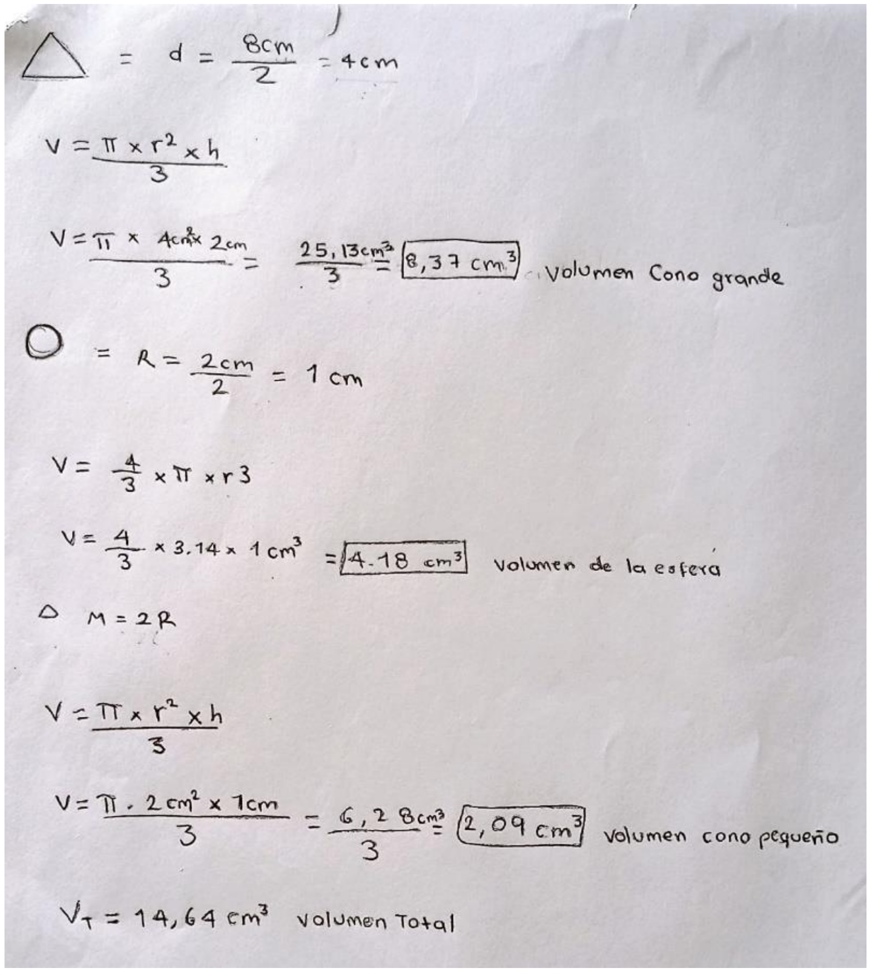
  Datos de las figuras:

  - ***Pirámide cuadrangular:*** La diagonal de su base tiene una longitud $\boldsymbol{D = 8\ cm}$ y la longitud de su altura es $\boldsymbol{h = 10\ cm}$
  - ***Cono grande:*** Su base tiene un diámetro de longitud $\boldsymbol{d = \frac{D}{2}}$ y su altura $\boldsymbol{A = 2\ cm}$
  - ***Esfera:*** Tiene un radio de longitud $\boldsymbol{R = \frac{A}{2}}$
  - ***Cono pequeño:*** Su base tiene un diámetro de longitud $\boldsymbol{M = 2R}$ y su altura $\boldsymbol{b = 1\ cm}$



Nota. Elaboración propia, 2023

Figura 48 *Respuesta al problema 4 de volúmenes inscritos*



$\triangle = d = \frac{8cm}{2} = 4cm$

$V = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3}$

$V = \frac{\pi \times 4cm^2 \times 2cm}{3} = \frac{25,13cm^3}{3} = \boxed{8,37\ cm^3}$ Volumen Cono grande

$\bigcirc = R = \frac{2cm}{2} = 1\ cm$

$V = \frac{4}{3} \times \pi \times r3$

$V = \frac{4}{3} \times 3.14 \times 1\ cm^3 = \boxed{4.18\ cm^3}$ volumen de la esfera

$\triangle\ M = 2R$

$V = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3}$

$V = \frac{\pi \cdot 2cm^2 \times 1cm}{3} = \frac{6,28cm^3}{3} = \boxed{2,09\ cm^3}$ volumen cono pequeño

$V_T = 14,64\ cm^3$ volumen Total

Nota. Fuente Propia, 2023

Este problema presenta una distinción respecto a los anteriores, ya que no se debe restar un volumen de otro para darle solución. En cambio, requiere la suma del volumen de tres sólidos específicos: el cono grande, el cono pequeño y la esfera, que en conjunto conforman el volumen del sólido representado por la figura azul. La ejecución de este procedimiento involucra una secuencia de pasos interdependientes, donde cada uno está vinculado al siguiente. Esta interconexión se debe a que los datos necesarios para calcular los volúmenes mantienen relaciones proporcionales entre sí. Todo lo anterior, fue identificado por los estudiantes, esto se vio reflejado en sus respuestas ver Figura 48, demostrando un sólido dominio de fórmulas, sustitución de variables, un análisis detenido de los enunciados y una precisa notación al darle títulos a los resultados parciales. Estas aptitudes les permitieron mantener un orden claro en la resolución del problema y alcanzar el resultado correcto.

8.3 Sobre las Sesiones y los Talleres

Durante el desarrollo de la primera sesión se presentaron una serie de aspectos destacables, tanto buenos como menos favorables. Comencemos por abordar los aspectos menos positivos de la sesión; en primer lugar, se observaron errores relacionados con las unidades de medida, en los cuales algunos estudiantes parecían confundirse al expresar sus respuestas en las unidades adecuadas; por ejemplo, utilizaban unidades de longitud para expresar áreas. Además, hubo casos en los que se utilizaron incorrectamente las fórmulas para calcular valores; por ejemplo, al momento de determinar el área de un círculo olvidaban elevar la magnitud del radio al cuadrado, elevando solamente las unidades.

Por otro lado, en la sesión también hubo numerosos puntos positivos que vale la pena mencionar. En primer lugar, muchos estudiantes demostraron un buen dominio de conceptos previos, como el teorema de Pitágoras y el cálculo de áreas de polígonos, conocimientos que junto con la estrategia de modelación a través del dibujo, les permitieron abordar los problemas de áreas de regiones sombreadas con mayor seguridad. Un punto adicional fue el uso de la metodología de resolución de problemas de Pólya; puesto que, algunos se tomaron el tiempo para leer detenidamente los problemas, comprender lo que se les pedía y crear esquemas borradores; lo que les ayudó a identificar las fórmulas. Además, buscaron nuestra orientación para verificar sus resultados y reflexionar sobre las respuestas obtenidas, mostrando una actitud positiva hacia el aprendizaje y la mejora continua.

Por otra parte, en el transcurso de la segunda sesión, se pudo observar un notable avance en comparación con la primera; esto gracias a que al iniciar la clase se dieron una serie de pautas con el fin de corregir las dificultades previamente identificadas, lo cual se hizo evidente en las respuestas proporcionadas a los problemas 12, 13 y 14 abordados durante la sesión, donde los estudiantes demostraron un progreso significativo en la elaboración de procesos de cálculo mejor estructurados. Las estrategias utilizadas en el taller de áreas de regiones sombreadas sirvieron como herramienta para abordar el taller de los volúmenes inscritos; como ya se mencionó, los estudiantes hicieron analogías en cuanto a los procedimientos que se debían seguir. La habilidad para visualizar y descomponer figuras complejas, así como la modelación a través del dibujo y la experiencia previa con la aplicación de fórmulas matemáticas contribuyó significativamente en esta etapa.

9 ANÁLISIS DE PROGRESO: PRUEBA INICIAL VS. PRUEBA FINAL

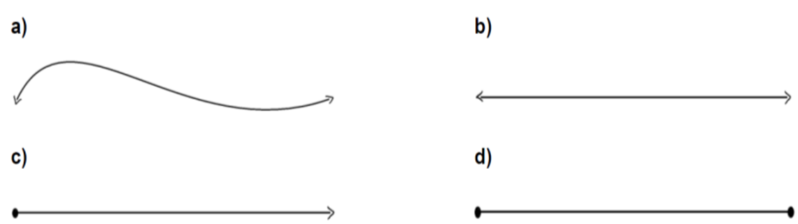
Como se ha mencionado en este documento se diseñó una prueba inicial (Ver Anexo 1), la cual se aplicó en la primera sesión con el propósito de identificar los conocimientos previos y los razonamientos aplicados por los estudiantes a problemas que involucran conceptos geométricos. Posteriormente, con el fin de observar el impacto de la práctica pedagógica y evaluar el desempeño de los estudiantes, se llevó a cabo una prueba final (Ver Anexo 10). Esta última consistió en una serie de problemas que abordaron los temas tratados a lo largo de la intervención. Los resultados obtenidos de esta prueba final muestran los avances logrados por los estudiantes, permitiéndonos además identificar si experimentaron mejoras según el modelo de Van Hiele.

9.1 Prueba Inicial (PI)

El sábado 29 de julio de 2023, durante la sesión correspondiente, se llevó a cabo la prueba inicial a quince estudiantes. Esta evaluación constaba de nueve preguntas, cuyo análisis detallado se realizará a continuación.

Pregunta 1

En esta pregunta se les pidió identificar cuál de las siguientes figuras es una recta.



Nota. Elaboración propia, 2023

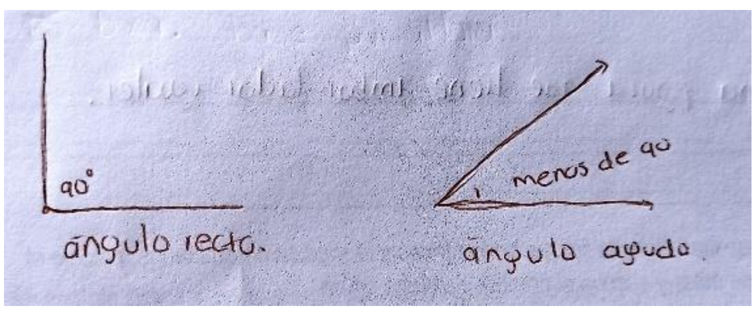
Las respuestas de los estudiantes se dividieron en tres grupos. Cinco alumnos seleccionaron correctamente la opción (b), seis estudiantes optaron por la opción (d), mientras que cuatro marcaron la opción (c), señalando una confusión entre la representación gráfica de una recta, un segmento y una semirrecta. Algo para destacar fue que ninguno de los alumnos seleccionó la opción (a), lo que evidencia una asociación del término “recta” con una línea sin curvatura.

En el proceso de indagar el trasfondo de las respuestas seleccionadas, se solicitó a los estudiantes que justificaran verbalmente su elección. Se observaron expresiones similares entre ellos, incluso entre aquellos que respondieron correctamente. Como ejemplo, citamos la respuesta de un estudiante que seleccionó la opción correcta: "*Marqué la (b) porque es una línea recta*". Otro estudiante, el cual eligió la opción (d) enunció: "*Es un segmento y un segmento es recto*". Se evidenció que los estudiantes no tuvieron en cuenta la simbología de las flechas o puntos que distinguen entre un segmento, una semirrecta y una recta. En consonancia con lo expuesto por (Gutiérrez, y otros, 1994), "los estudiantes perciben las figuras geométricas en su totalidad, de manera global; pues se limitan a describir el aspecto físico de las figuras y compararlas entre sí", lo cual corresponde a una de las características del Nivel 1 de Van Hiele.

Pregunta 2

En este punto se les pidió a los estudiantes dibujar ángulos diferentes y, según su medida escribir a que tipo de ángulo corresponde.

Figura 49 *Respuesta al punto 2 de la PI*



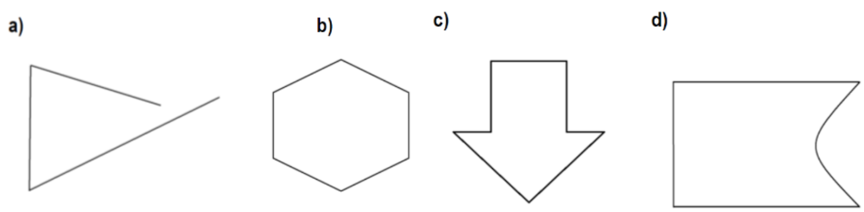
Nota. Fuente Propia, 2023

Se identificó que todos los estudiantes tenían conocimiento del ángulo recto, ya que este fue dibujado en todas las hojas de respuestas. Como se mencionó previamente, esta familiaridad se atribuía al curso de trigonometría en el que los estudiantes trabajaban con triángulos rectángulos. Además, se pudo apreciar que algunos estudiantes conocían otros tipos de ángulos, como los agudos y los llanos. Sin embargo, resultó llamativo que solo cuatro estudiantes únicamente recordaron el ángulo recto y que ningún estudiante representó el ángulo obtuso, el completo, el cóncavo o el convexo. Este hallazgo resaltó que, los alumnos están familiarizados con algunos tipos de ángulos pero no los conocen en totalidad.

En sus representaciones se pudo observar que los estudiantes dibujaron correctamente los ángulos que conocían, esto sugiere que tuvieron en cuenta los elementos básicos para construir un ángulo: dos lados, un vértice y la indicación de la amplitud a representar. Esta manera de responder refleja que los alumnos son conscientes de que las figuras geométricas están formadas por partes y de que están dotadas de propiedades matemáticas como señala (Gutiérrez, y otros, 1994); este reconocimiento de las características esenciales de los ángulos indica un acercamiento al Nivel 2 de Van Hiele.

Pregunta 3

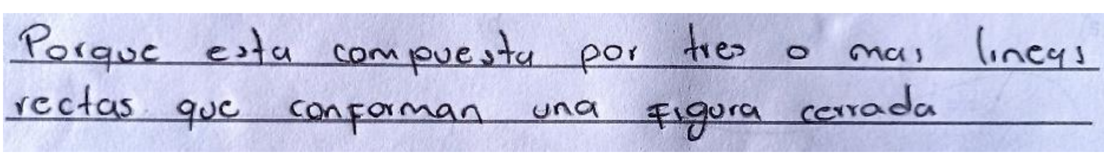
En esta pregunta se les pidió identificar cuál de las siguientes figuras son polígonos y justificar su respuesta.



Nota. Elaboración propia, 2023

Las respuestas acertadas a este ítem son las opciones (b) y (c), ya que corresponden a un polígono regular e irregular respectivamente; sin embargo, de los quince estudiantes solo ocho marcaron la opción (b), y en sus justificaciones se presentaron argumentos como el siguiente:

Figura 50 *Justificación al punto 3 de la PI*



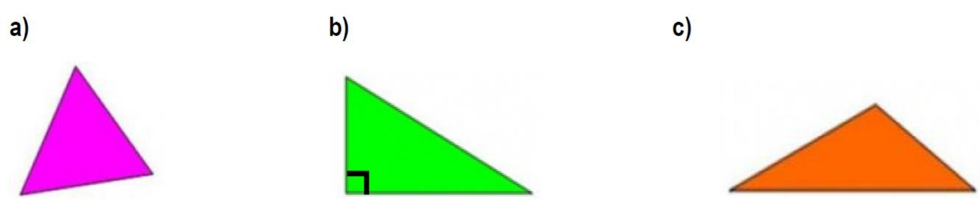
Nota. Fuente propia, 2023

Esto muestra, que conocen algunas propiedades de los polígonos, específicamente, la comprensión de que están compuestos por líneas rectas y que deben tener al menos tres lados para formar la figura. Según lo estipulado por (Gutiérrez, y otros, 1994) una de las características del Nivel 2 de Van Hiele, es que cuando se les pide a los estudiantes que definan una figura, generalmente recitan una lista de propiedades para identificarla, estas propiedades pueden sobrar o faltar para dar una definición concisa, como se observa en el argumento del estudiante.

Por otra parte, de los siete alumnos restantes, cuatro optaron por la opción (a), sugiriendo que, según su perspectiva, un polígono puede ser una figura no cerrada. Los otros tres eligieron la opción (d), al argumentar que, desde su punto de vista, un polígono se define como una figura con cinco lados, entienden un segmento curvo como la unión de dos segmentos de recta, como menciona (Gutiérrez, y otros, 1994): “no analizan una figura en términos de sus componentes ni usan un lenguaje apropiado” lo cual es un indicador del Nivel 1 de Van Hiele. Con estos resultados se puede decir que ocho de quince estudiantes identifican un polígono regular, los otros siete no identifican polígonos y en general ningún estudiante identifica polígonos irregulares, pues no fue marcada la opción (c).

Pregunta 4

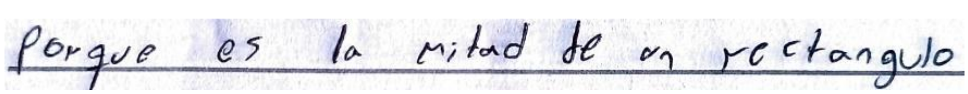
En este ítem se les pidió identificar cuál de los siguientes triángulos es un triángulo rectángulo:



Nota. Elaboración propia, 2023

Esta pregunta se destacó por la notable precisión en las respuestas, ya que de los quince estudiantes, trece identificaron correctamente un triángulo rectángulo. Además, la justificación de uno de ellos generó curiosidad, ya que como docentes no habíamos contemplado una descripción tan particular para este tipo de triángulo. A continuación, se presenta el argumento del estudiante:

Figura 51 *Justificación al punto 4 de la PI*



Nota. Fuente propia, 2023

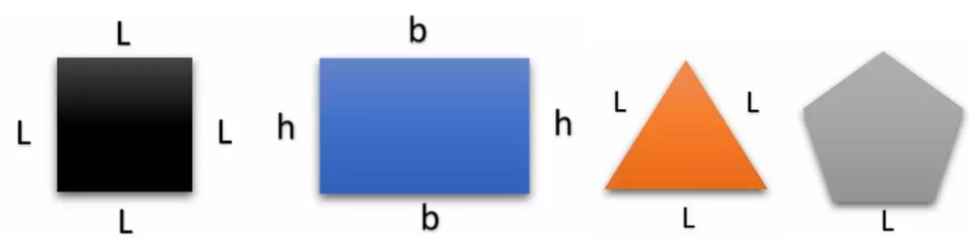
Una de las características del nivel 2 de Van Hiele, según lo expuesto por (Gutiérrez, y otros, 1994), es que los estudiantes “comparan figuras mediante el uso explícito de propiedades de sus componentes”. Esta característica se refleja claramente en la argumentación del estudiante, ya que presenta una lógica sólida al señalar que al dividir cualquier rectángulo mediante una de sus diagonales, se forman dos triángulos rectángulos. No obstante, se debe tener en cuenta que si se elige dividir el rectángulo a través de los puntos medios de cualquiera de sus lados, el resultado ya no será el mismo.

Por otra parte, dos estudiantes seleccionaron la opción (a); uno de ellos no proporcionó justificación, mientras que el otro argumentó de la siguiente manera: "*porque es una figura que tiene ambos lados iguales*". Es importante señalar que el estudiante emplea la palabra "ambos", haciendo alusión a "dos", lo que indica una referencia a un triángulo isósceles; sin embargo, es de aclarar que un triángulo isósceles no necesariamente es un triángulo rectángulo.

Este razonamiento del estudiante se relaciona con la descripción de (Gutiérrez, y otros, 1994) sobre un atributo del nivel 2 de Van Hiele, donde se menciona que: "los estudiantes pueden tener dificultades para relacionar propiedades entre sí", lo que les impide realizar clasificaciones lógicas de figuras basándose en sus elementos o propiedades. En este contexto, el estudiante que justifica la elección de la opción (a) demuestra una asociación entre la igualdad de lados y la noción de triangulo rectángulo, lo que evidencia una limitación para conectar propiedades y hacer clasificaciones lógicas.

Pregunta 5

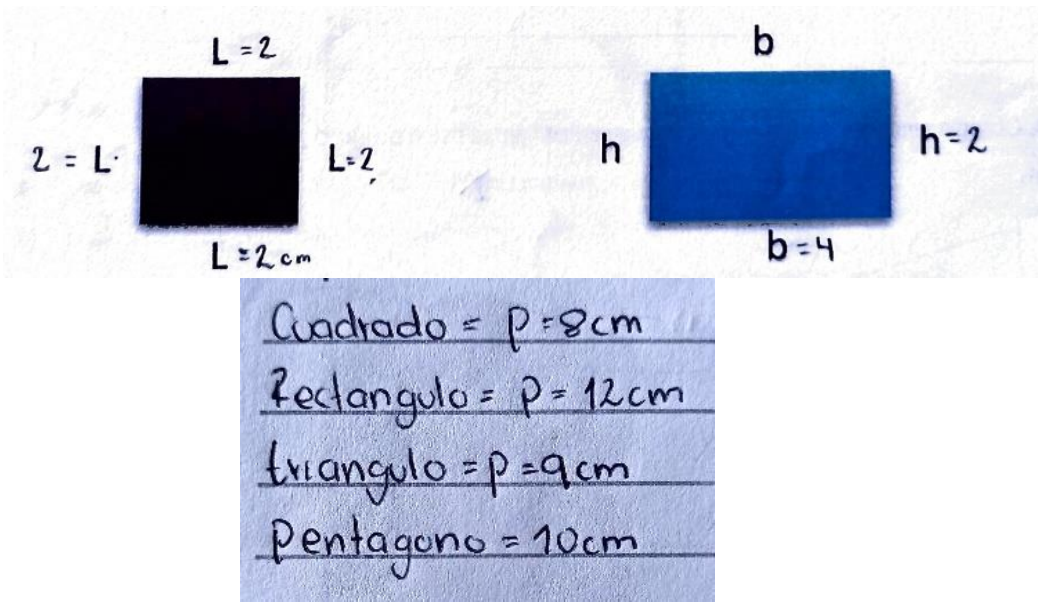
En esta pregunta se les pidió a los estudiantes que calcularan el perímetro de las siguientes figuras y que escribieran su respectivo nombre.



Nota. Elaboración propia, 2023

Todos los estudiantes escribieron correctamente el nombre de las figuras que se les presentaron. Sin embargo, al enfrentarse a la tarea de realizar cálculos para determinar el perímetro, surgieron dificultades. Únicamente nueve estudiantes comprendieron que el perímetro de una figura se obtiene al sumar las medidas de sus lados, para ello con ayuda de la regla midieron los lados de las figuras y emplearon el sistema métrico decimal para llegar a una solución (Ver Figura 52), esto refleja un indicador de acercamiento al Nivel 2 de Van Hiele; ya que, como se exhibe en (Gutiérrez, y otros, 1994): "tratan la geometría como si fuera una ciencia experimental".

Figura 52 *Respuesta al punto 5 de la PI*



Nota. Fuente propia, 2023

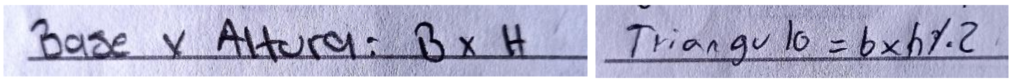
Por otra parte, tres estudiantes escribieron únicamente los nombres de las figuras, sin proporcionar el cálculo del perímetro. Además, los tres alumnos restantes evidenciaron una confusión entre los conceptos de perímetro y área, ya que en sus respuestas incluyeron fórmulas para determinar el área de algunas figuras, sin un propósito ni sentido claro. Lo cual muestra que "no reconocen explícitamente las propiedades matemáticas de las figuras" (Gutiérrez, y otros, 1994), esto los ubica en el Nivel 1 de Van Hiele.

Pregunta 6

En esta pregunta se les pidió escribir las fórmulas que recordaran para calcular áreas de figuras geométricas.

Los resultados muestran que los quince estudiantes recuerdan las fórmulas para calcular el área del rectángulo y del triángulo. Esto podría atribuirse a la aplicabilidad de estas formas geométricas en la vida diaria de los estudiantes. Ejemplos de estas se encuentran en objetos como libros, pantallas, señales de tránsito y estructuras arquitectónicas. Además, estas figuras son las que más usan en sus cursos de matemáticas y física lo que hace que se recuerden de manera sencilla. A continuación se presentan algunas respuestas de los estudiantes:

Figura 53 *Respuesta al punto 6 de la PI*

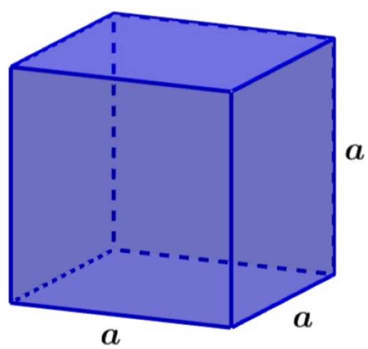


Nota. Fuente propia, 2023

Es importante destacar que las respuestas dadas por los estudiantes no proporcionan de manera clara un indicador del nivel de Van Hiele en el que se puedan posicionar; esto se debe a que, aunque puedan haber memorizado fórmulas, no implica que haya un razonamiento detrás de ese conocimiento.

Pregunta 7

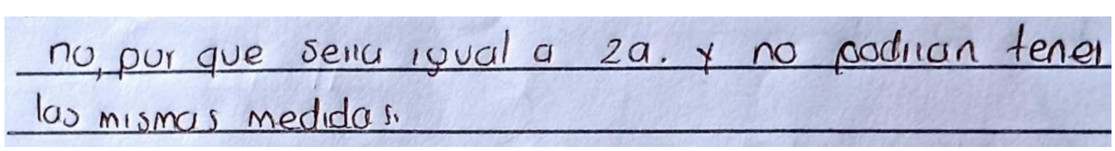
Se le puede determinar el volumen a la siguiente figura, ¿Qué se requiere para ello?



Nota. Recuperado de (Guzmán, 2023)

En este punto, once de los estudiantes acertaron en su respuesta. No obstante, es relevante señalar que dos optaron por no responder y los dos restantes presentaron el siguiente argumento:

Figura 54 *Respuesta al punto 7 de la PI*

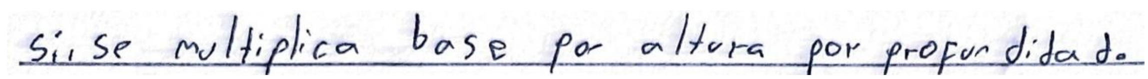


Nota. Fuente propia, 2023

Entendemos que la dificultad se encuentra en la visualización espacial de la figura, ya que para estos estudiantes las aristas del cubo no tienen igual longitud. Como menciona (Gutiérrez, y otros, 1994): “identifican partes de una figura, pero no analizan en términos de sus componentes; debido a que, perciben las figuras de manera global sin entrar en detalles”. Siendo esto último una de las características del Nivel 1. Además, es posible que los alumnos ni siquiera hayan identificado que se trata de un cubo, puesto que la representación gráfica se encuentra en dos dimensiones, lo que podría haber afectado el reconocimiento de la simetría y las proporciones de la figura tridimensional.

Ahora bien, es necesario resaltar los argumentos presentados por los estudiantes que acertaron. Entre sus respuestas, se encuentra una justificación que comparte similitudes con las de los demás:

Figura 55 *Respuesta al punto 7 de la PI*

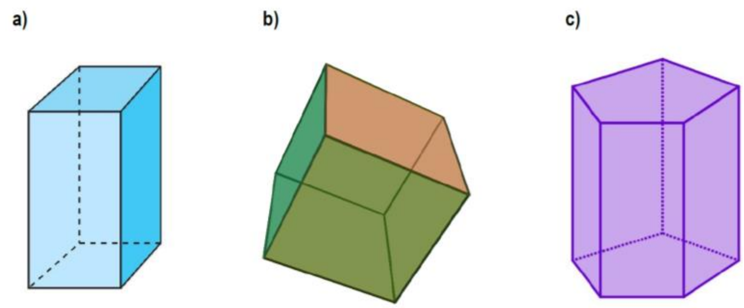


Nota. Fuente propia, 2023

Como se puede observar, este tipo de argumentos demuestran que los estudiantes conocen al menos el volumen del cubo, ya que comprenden que para determinarlo se necesitan tres medidas. En este caso, el estudiante utilizó la palabra “base” para referirse al ancho de la figura y “profundidad” para su largo; sin embargo, es importante señalar que, al tratarse de un cubo, las longitudes de estas medidas son iguales. Con lo anterior, se puede decir que los estudiantes muestran un acercamiento al Nivel 2 de Van Hiele, pues según (Gutiérrez, y otros, 1994), en este nivel: “reconocen las propiedades matemáticas mediante la observación de las figuras y sus elementos”.

Pregunta 8

En esta pregunta, se les pidió escoger cuales de las siguientes figuras son un prisma rectangular.



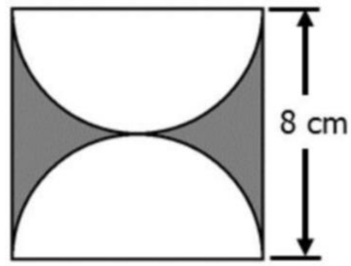
Nota. Recuperado de (Ruiz, 2017)

Las opciones de respuesta para este ítem presentan una particularidad, porque tanto la opción (a) como la opción (b) son correctas, ya que como es bien sabido, todo cuadrado es un rectángulo, implicando que todo cubo es un prisma rectangular; sin embargo, no funciona recíprocamente. A pesar de esta conexión lógica, solo una minoría de estudiantes seleccionaron una de estas dos opciones, pero no ambas al mismo tiempo; característica que los ubica en el Nivel 2, pues citando a (Gutiérrez, y otros, 1994): "aún no son capaces de deducir unas propiedades de otras, porque perciben cada una de forma aislada y sin relación con las demás".

Por su parte, la opción (c) fue elegida por la mayoría de los estudiantes, un total de once. Este hecho sugiere que no están familiarizados con los nombres de figuras tridimensionales. Además, se podría inferir que están asociando el término "prisma" con un sólido que tiene bases compuestas por cinco o más lados. Esta situación los coloca directamente en el Nivel 1 de Van Hiele; puesto que, como argumenta (Gutiérrez, y otros, 1994): "los alumnos aquí usan propiedades imprecisas de las figuras geométricas para identificarlas".

Pregunta 9

En este punto, se presentaron a los estudiantes cuatro afirmaciones para calcular el área de la figura sombreada. Los estudiantes debían seleccionar la afirmación correcta, que en este caso consistía en calcular el área del cuadrado y luego restarle el área de un círculo de radio $4\ cm$.



Nota. Recuperado de (Slideshare, 2016)

Aquí, solo tres estudiantes marcaron la afirmación adecuada. Era de esperarse que la mayoría desconociera cómo enfrentar este tipo de problemas, ya que comúnmente no se abordan en el aula. El propósito de este punto, además de evaluar si los estudiantes habían trabajado con esta clase de ejercicios, era que conocieran el tipo de desafíos a los que se enfrentarían más adelante y en los cuales podrían adquirir habilidades específicas, esto con base en las estrategias y conocimientos que se presentarían a lo largo de la práctica pedagógica.

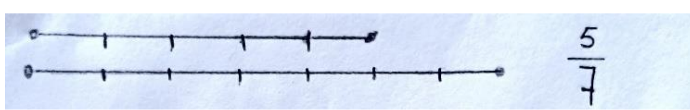
9.2 Prueba Final (PF)

El sábado 07 de octubre de 2023 se realizó la prueba final con catorce de los quince estudiantes que presentaron la prueba inicial. Esta prueba, contenía diez preguntas las cuales serán analizadas a continuación.

Pregunta 1

Dibuje dos segmentos, de tal forma que uno de ellos sea $\frac{5}{7}$ de la medida del otro.

Figura 56 *Respuesta al punto 1 de la PF*



Nota. Fuente propia, 2023

En la resolución de este problema, los estudiantes mostraron iniciativa al seleccionar una unidad de medida que consideraron adecuada para resolverlo, aunque no queda claro si esta es de 1 cm u otra longitud, es de resaltar su capacidad para tomar decisiones autónomas en el proceso de resolución de problemas matemáticos. En el gráfico presentado, se destaca una buena representación de segmentos, definidos como trazos limitados por dos puntos. Además, los estudiantes demuestran una sólida comprensión del concepto de fracción al dividir los segmentos en la unidad de medida seleccionada, de tal forma que cumpliera las condiciones del enunciado.

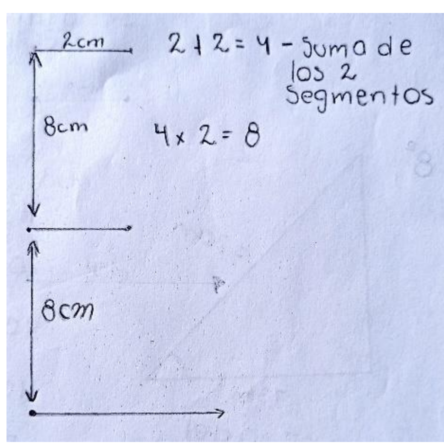
Un aspecto relevante del gráfico realizado por los estudiantes; es que, dibujaron los segmentos de manera que el punto de inicio de uno coincida con el del otro; este enfoque les permitió verificar visualmente la magnitud de los segmentos, contribuyendo a una representación más clara de la proporción entre ellos. Es así como, los estudiantes empiezan a identificar relaciones entre las figuras, la cual, según (Gutiérrez, y otros, 1994) es una característica del nivel 3, en este caso, hacen comparaciones entre las medidas de los segmentos, dejando de ver los objetos geométricos de manera individual como sucede en el nivel 1 de Van Hiele.

Los estudiantes recordaron una actividad previa en la que trabajaron con el geoplano rectangular, en esta hicieron representaciones de segmentos de diferentes medidas en el tablero del geoplano y encontraron razones entre las longitudes de ellos, todo esto les permitió pasar esas representaciones al papel en esta prueba final. Este proceso muestra como los alumnos utilizan las representaciones físicas de las figuras para comprender y verificar sus deducciones en la resolución de problemas geométricos, conforme a la observación de (Gutiérrez, y otros, 1994) en el nivel 3 de Van Hiele.

Pregunta 2

Dibuje dos segmentos y una semirrecta que sean paralelos entre sí, de tal forma que la distancia entre los tres objetos geométricos duplique la suma de la medida de los segmentos.

Figura 57 *Respuesta al punto 2 de la PF*



Nota. Fuente propia, 2023

En la representación gráfica, se exhibe la capacidad de los estudiantes para diferenciar entre los segmentos y la semirrecta. Para los primeros, optan por trazar una línea que conecta dos puntos, mientras que para la semirrecta utilizan un trazo desde un punto hacia una flecha. Esta distinción evidencia un entendimiento claro de las características específicas de cada objeto geométrico. Asimismo, demuestran comprensión de la noción de paralelismo, ya que la Figura 57 muestra que los objetos mantienen una distancia constante entre ellos. Adicionalmente, los estudiantes utilizaron como unidad de medida los centímetros y asignaron longitudes específicas a los segmentos, lo que les facilitó la resolución del problema.

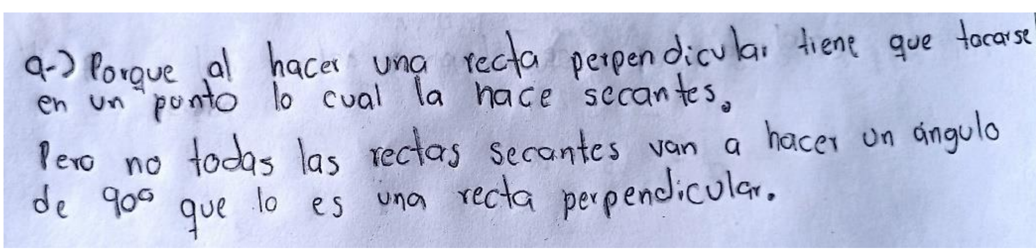
Este último tiene un enunciado particular, ya que su resolución implica una lectura invertida, siendo categorizado como un problema de retroceso; sin embargo, los estudiantes no tuvieron mayor dificultad, dado que en el procedimiento se evidencia su capacidad de razonamiento matemático, aspecto distintivo del nivel 3 de Van Hiele, según señalan (Gutiérrez, y otros, 1994). Estas habilidades fueron cultivadas a lo largo de la práctica, donde los estudiantes se enfrentaron a cuestionamientos que exigían un enfoque similar.

Pregunta 3

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera? Justifique su respuesta.

a) Todas las rectas perpendiculares son secantes.
b) Todas las rectas secantes son perpendiculares.

Figura 58 *Respuesta al punto 3 de la PF*


a-) Porque al hacer una recta perpendicular tiene que tocarse
en un punto lo cual la hace secantes.
Pero no todas las rectas secantes van a hacer un angulo
de 90° que lo es una recta perpendicular.

Nota. Fuente propia, 2023

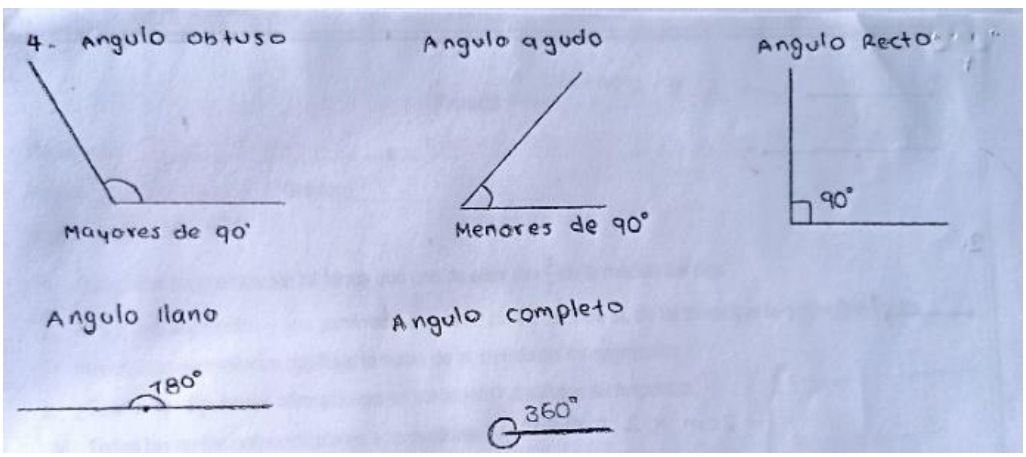
Con esta pregunta, se pretendía evaluar la capacidad de los estudiantes para justificar sus respuestas y observar el progreso en este aspecto. La mayoría de ellos seleccionó la afirmación a) como verdadera, y en sus razonamientos, se pudo observar la claridad en las definiciones de ser secante y perpendicular, ya que para respaldar su justificación, hicieron referencias explícitas a dichas definiciones, lo que para (Gutiérrez, y otros, 1994) es un claro indicador del nivel 3 de Van Hiele.

Además, en sus argumentaciones existe una comprensión implícita de los cuantificadores; ya que, en sus palabras utilizan expresiones como “pero no todas” y “al hacer una”, lo que demuestra un entendimiento más claro de los conceptos; es decir, empiezan a desarrollar habilidades para manejar sutilezas lógicas en la resolución de problemas geométricos. Lo anterior, es otra característica del nivel 3, pues según (Gutiérrez, y otros, 1994): “comienzan a comprender el significado de “al menos un”, “todo”, etc”.

Pregunta 4

Dibuje un ángulo obtuso, un agudo, un recto, un llano y un ángulo completo.

Figura 59 *Respuesta al punto 4 de la PF*



Nota. Fuente propia, 2023

Esta pregunta tiene similitud con una realizada en la prueba inicial, donde se solicitaba a los estudiantes que dibujaran los tipos de ángulos que conocían, obteniendo respuestas limitadas en información. No obstante, en relación con estos nuevos resultados, se evidencia que los estudiantes han ampliado su repertorio, siendo capaces de reconocer la mayoría de los ángulos según su medida, lo que para (Gutiérrez, y otros, 1994) en el nivel 3 de Van Hiele se entiende como: “la capacidad de identificar conjuntos diferentes de propiedades que caracterizan a una clase de figuras”, en este caso, ángulos.

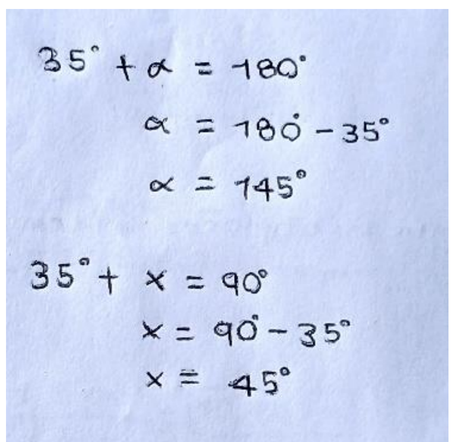
En contraste con el nivel 2 de Van Hiele, donde a los estudiantes se les dificultaba admitir la inclusión de clases entre diversas familias de figuras, según lo señalado por (Gutiérrez, y otros, 1994), ahora, en este nuevo nivel, reconocen distintos tipos de ángulos, lo que refleja un progreso en sus conocimientos. Además, en lo que respecta a la representación de los ángulos, en la Figura 59 se aprecia cómo los construyen cuidadosamente utilizando cada uno de sus componentes, como lados, vértices y el trazo que indica su amplitud. Un detalle destacado es el uso del sistema sexagesimal, el cual, es el más empleado por los estudiantes en sus cursos de matemáticas.

Pregunta 5

Responde:

a) ¿Cuál es la medida del ángulo suplementario a 35°?
b) ¿Cuál es la medida del ángulo complementario a 35°?

Figura 60 *Respuesta al punto 5 de la PF*



Nota. Fuente propia, 2023

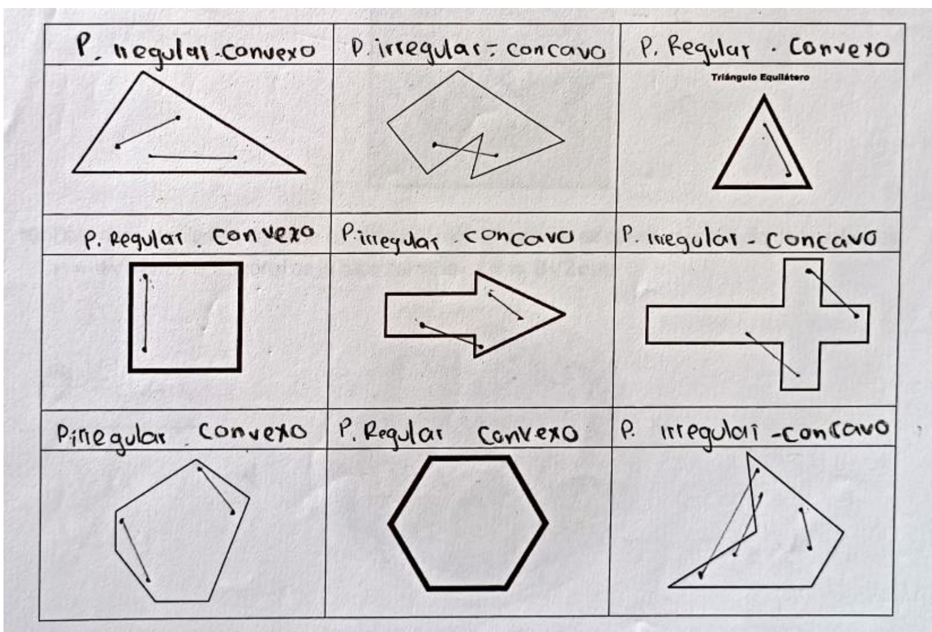
En la resolución de esta pregunta se evidencia la habilidad de los estudiantes para plantear ecuaciones adecuadamente; pues, en lugar de optar por el método de ensayo y error, demostraron un manejo efectivo de variables, dejando ver así un buen entendimiento de las definiciones de ángulos suplementarios y complementarios. Un aspecto para destacar fue la elección de emplear tanto simbología griega como la variable “x”, lo que indica un uso correcto de la notación matemática y una habilidad para adaptarse al uso de distintos símbolos para representar variables. Además, en la Figura 60 se observa una destreza en la manipulación algebraica al despejar incógnitas correctamente, lo que subraya un avance en la capacidad de los estudiantes para resolver problemas de manera eficiente.

Este tipo de planteamiento, donde los estudiantes pueden dar definiciones matemáticamente correctas y aplicarlas de manera efectiva, es característico del nivel 3 de Van Hiele; pues en este nivel, en concordancia con la observación de (Gutiérrez, y otros, 1994): “los alumnos tienen la capacidad de comprender y manipular conceptos matemáticos de manera más abstracta”, lo cual se refleja claramente en la resolución de estas ecuaciones.

Pregunta 6

Escriba en la parte superior de la figura si es un polígono regular o irregular; además, si la figura es cóncava o convexa.

Figura 61 *Respuesta al punto 6 de la PF*



Nota. Fuente propia, 2023

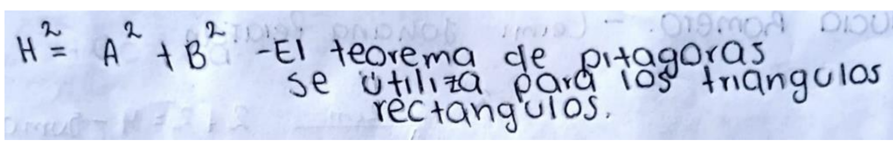
En todas las respuestas de los estudiantes, se observan trazos realizados para identificar si las figuras pertenecían a la categoría de polígonos cóncavos o convexos; pues como es sabido, un polígono se considera cóncavo si tiene al menos un ángulo interior midiendo más de 180 grados; no obstante, los estudiantes adoptaron una estrategia para abordar esta clasificación; la cual consistió en trazar segmentos y observar si alguno de ellos no quedaba completamente contenido dentro de la figura; en tal caso, la catalogaban como un polígono cóncavo. En contraste, si todos los segmentos permanecían totalmente dentro de la figura, la clasificaban como un polígono convexo. Este enfoque según (Gutiérrez, y otros, 1994) es una característica del nivel 3 de Van Hiele; pues en este, los alumnos pueden clasificar lógicamente diferentes familias de figuras a partir de propiedades suyas ya conocidas.

Con el propósito de determinar si las figuras presentadas eran polígonos regulares o irregulares, los estudiantes optaron por utilizar la regla y el transportador para medir los lados y ángulos internos de cada polígono, con el fin de verificar si eran iguales o no. Esta manera de proceder revela el esfuerzo de los estudiantes por respaldar sus percepciones mediante la experimentación. De acuerdo con la perspectiva de (Gutiérrez, y otros, 1994), este planteamiento se alinea con el nivel 3, donde el razonamiento se apoya mediante la manipulación y las demostraciones informales para consolidar la comprensión de conceptos geométricos.

Pregunta 7

Escribe el teorema de Pitágoras, y responde ¿A qué tipo de triángulos es posible aplicarlo?

Figura 62 *Respuesta al punto 7 de la PF*



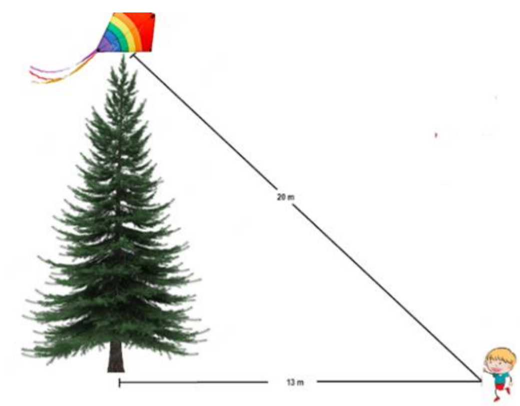
Nota. Fuente propia, 2023

Ninguno de los estudiantes tuvo dificultad en abordar esta pregunta; puesto que, a través de la práctica pedagógica se llevaron a cabo problemas en los cuales se debía aplicar el teorema de Pitágoras. En las respuestas, se destacó la correcta formulación de la ecuación del teorema de Pitágoras y la especificación de su aplicabilidad exclusiva en triángulos rectángulos o en figuras que pueden descomponerse en estos. Este desempeño muestra la capacidad de los estudiantes para proporcionar definiciones matemáticamente correctas y utilizarlas para una clase de figuras, característica del nivel 3 de Van Hiele según (Gutiérrez, y otros, 1994).

Otra característica del nivel 3 es que los alumnos son capaces de aceptar formas equivalentes de una definición (Gutiérrez, y otros, 1994), esto se manifiesta en la diversidad de símbolos utilizados para expresar la ecuación del teorema. Algunos optaron por representar los lados del triángulo utilizando símbolos que corresponden a cateto adyacente, cateto opuesto e hipotenusa, mientras que otros eligen una notación diferente utilizando las primeras tres letras del abecedario; en otras palabras, aplican diversas representaciones simbólicas de un mismo concepto matemático.

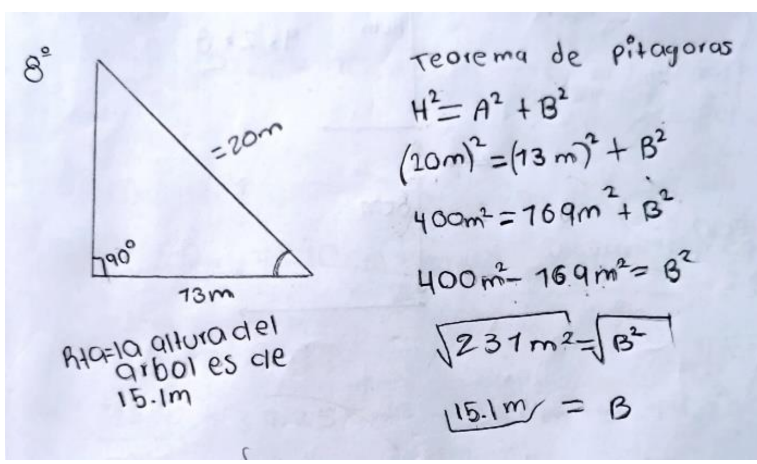
Pregunta 8

A un niño se le ha quedado atrapada una cometa en un árbol, la longitud de la cuerda de la cometa es de 20 metros, y el niño está situado a una distancia de 13 metros de la base del árbol como se muestra en la figura. ¿Cuál es la altura del árbol?



Nota. Elaboración propia, 2023

Figura 63 *Respuesta al punto 8 de la PF*



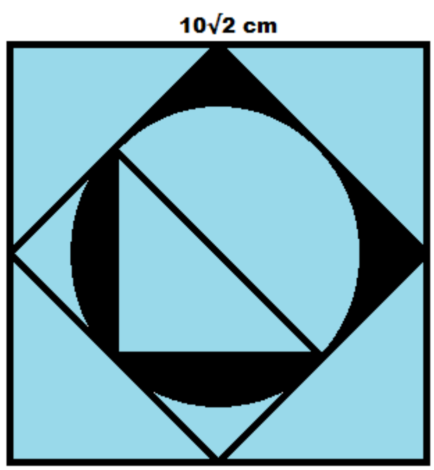
Nota. Elaboración propia, 2023

Esta pregunta complementa la anterior, en la que los estudiantes debían aplicar el teorema de Pitágoras a un problema específico que podría surgir en la vida cotidiana. En sus respuestas, se evidenció una aplicación hábil del teorema, junto con un uso efectivo de propiedades de potenciación y radicación. Además, demostraron un manejo preciso de unidades y presentaron un planteamiento gráfico que representaba la situación del problema, facilitando así su resolución. Algo también por mencionar, es que los estudiantes respondieron la pregunta que estaba en el enunciado dando una solución completa al problema. Este conjunto de habilidades exhibe un avance en la manera en que los estudiantes abordan problemas matemáticos, aplicando de manera efectiva los conocimientos adquiridos.

Pregunta 9

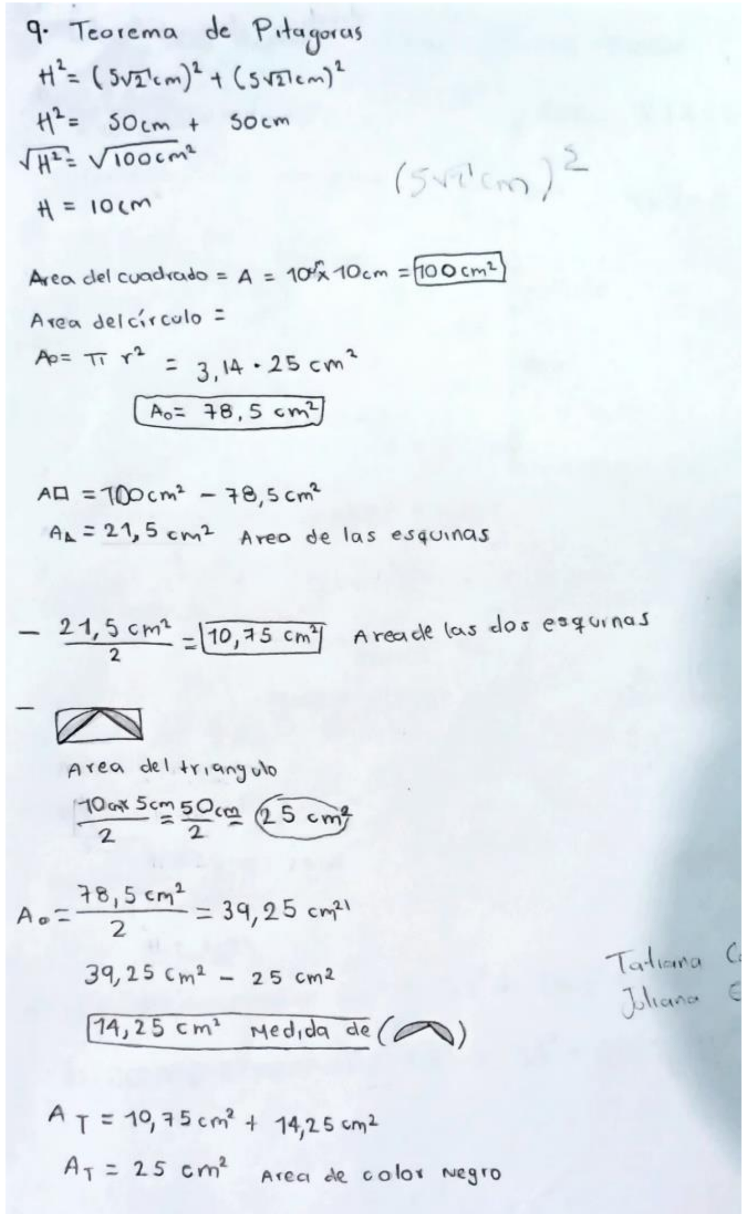
Determine el área de color negro teniendo cuenta lo siguiente:

- La longitud del lado del cuadrado grande es de $\boldsymbol{10\sqrt{2}cm}$.
- Los vertices del cuadrado pequeño caen sobre los puntos medios de los lados del cuadrado grande.



Nota. Elaboración propia, 2023

Figura 64 *Respuesta al punto 9 de la PF*



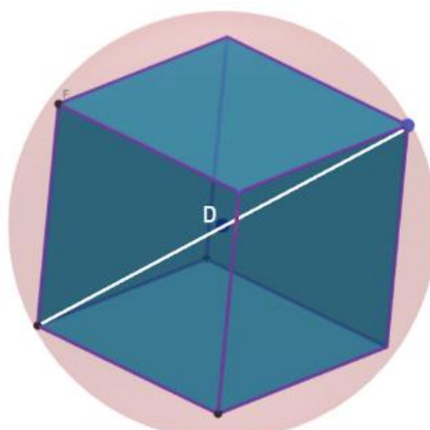
Nota. Fuente propia, 2023

Este ítem se posiciona como uno de los puntos más complejos de la prueba, ya que su resolución involucra la aplicación de la mayoría de los conceptos trabajados durante la práctica pedagógica. Sin embargo, a diferencia de la prueba inicial, los estudiantes, para ese momento, ya habían desarrollado las habilidades necesarias para abordar problemas de esta índole. En la Figura 64, se aprecia una estructura matemática sólida en el procedimiento, acompañada de un buen manejo de propiedades matemáticas en términos generales.

Los estudiantes abordaron la tarea de encontrar el área sombreada de la figura presentada mediante la obtención de las medidas necesarias de las figuras inscritas en el cuadrado grande, utilizando las longitudes de los lados de dicho cuadrado como punto de partida. Posteriormente, realizaron operaciones de suma y resta de áreas conocidas para determinar la superficie sombreada. Un ejemplo concreto de esta estrategia es que al área del semicírculo le restaron el área del triángulo contenido en él, y así obtuvieron el área de las medias lunas. Este enfoque deja ver la capacidad de los estudiantes para llevar a cabo razonamientos deductivos informales, empleando de manera implícita reglas lógicas, como la regla de la cadena (si $p \rightarrow q$ y $q \rightarrow r$, entonces $p \rightarrow r$). Según la perspectiva de (Gutiérrez, y otros, 1994), esta habilidad se considera un indicador del nivel 3 de Van Hiele.

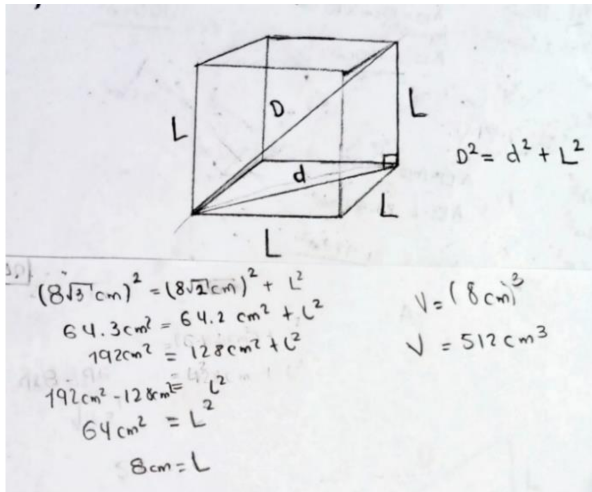
Pregunta 10

Determine el volumen del cubo inscrito en la esfera, teniendo en cuenta que el radio de la esfera es $\boldsymbol{r = 4\sqrt{3}cm}$ y la diagonal de la base del cubo es $\boldsymbol{d = 8\sqrt{2}cm.}$



Nota. Recuperado de (Arranz, s.f.)

Figura 65 *Respuesta al punto 10 de la PF*



Nota. Fuente propia, 2023

En este último punto de la prueba, los estudiantes debían determinar el volumen de un sólido inscrito, en este caso, un cubo. En sus respuestas, demostraron dominio de las fórmulas para calcular el volumen de figuras tridimensionales y así mismo, un uso preciso de las respectivas unidades. Algo para mencionar, es que además del gráfico proporcionado en la prueba, los estudiantes elaboraron su propio diseño, brindándoles una perspectiva más completa del problema, como se aprecia en la Figura 65.

Los estudiantes identificaron una relación entre el radio de la esfera y la diagonal “D” del cubo, al percatarse de que esta última equivalía al doble del radio. Este hallazgo evidencia la capacidad de los estudiantes para deducir propiedades a partir de otras, marcando un avance significativo respecto al nivel 2 de Van Hiele, donde según (Gutiérrez, y otros, 1994): “las propiedades se perciben de manera aislada”.

En cuanto a los detalles del procedimiento, se observa que los alumnos aplicaron el teorema de Pitágoras, aunque algunos expresaron inicialmente dudas sobre su aplicabilidad debido a la representación bidimensional del gráfico, lo que les dificultaba la percepción de los sólidos. Sin embargo, al crear su propio esquema, notaron la formación de un triángulo rectángulo dentro del cubo que inicialmente no habían considerado; lo que les permitió obtener un dato crucial para la resolución del problema: la longitud de los lados del cubo. Este planteamiento refleja cómo los estudiantes comenzaron a comprender los pasos sucesivos de un razonamiento lógico informal, lo que para (Gutiérrez, y otros, 1994) es característico del nivel 3.

9.3 Sobre la PI y la PF

Durante la prueba inicial, se lograron ver características de los estudiantes en el ámbito matemático; algunas de estas abarcaban la dificultad para identificar representaciones de objetos geométricos, un conocimiento limitado de tipos de ángulos, la poca familiaridad con diversos tipos de polígonos y confusiones en la clasificación de triángulos por parte de algunos estudiantes. Además, se observaron definiciones incompletas de objetos matemáticos, así como conceptos débiles en relación con la noción de área y volúmenes de figuras, incluida la falta de claridad en la escritura de sus respectivas fórmulas. Estas apreciaciones proporcionaron información valiosa que permitió ubicar a los estudiantes entre el nivel 1 y nivel 2 de Van Hiele.

Ahora bien, en cuanto a la prueba final, se reveló un notable progreso en el desempeño de los estudiantes; ya que, se pudo ver un claro entendimiento del concepto de razón y proporción de segmentos, mejoras significativas en la comprensión y representación gráfica de objetos geométricos como tipos de rectas, figuras planas y tridimensionales. De la misma forma, los alumnos demostraron habilidad para justificar sus respuestas con argumentos sólidos basados en las definiciones pertinentes.

También, a diferencia de la prueba inicial, se destacó un amplio conocimiento sobre tipos de ángulos y sus propiedades, así como la identificación de diferentes familias de polígonos y una aplicación competente del teorema de Pitágoras. Se evidenció, además, un buen desempeño en la resolución de problemas relacionados con el cálculo de áreas de regiones sombreadas y el de volúmenes de sólidos inscritos. En estos cálculos, además de utilizar todos los conceptos previos, fomentaron habilidades como la de resolución de ecuaciones.

Lo anterior expuesto ha permitido situar a los estudiantes en el nivel 3 de Van Hiele, en consonancia con las características definitorias de (Gutiérrez, y otros, 1994) que categorizan a los alumnos en esta etapa. Esto constata que, gracias a las actividades desarrolladas a lo largo de la intervención, los estudiantes lograron progresar en su nivel de razonamiento geométrico. Un dato adicional es que, con la enseñanza de la prueba de Arquímedes, los estudiantes superaron la carencia explícita en la comprensión de lo que implica una demostración matemática, aspecto que, según (Gutiérrez, y otros, 1994), es una característica del nivel 2.

10 CONCLUSIONES

Al principio de la práctica pedagógica nos enfrentamos al desafío de captar la atención de los estudiantes que estaban acostumbrados a metodologías tradicionales; sin embargo, la implementación de la matemática recreativa dentro de la propuesta didáctica demostró ser efectiva para la comprensión de conceptos abstractos, lo que logró despertar el interés por las temáticas abordadas y que los estudiantes inscritos se mantuvieran hasta el final de la práctica.

La prueba inicial reveló que los estudiantes se situaban entre los niveles 1 y 2 de Van Hiele. Con esto, se buscó redireccionar las actividades para ajustarlas a sus conocimientos. Ahora bien, a medida que transcurrían las sesiones se observó un progreso notable en el abordaje de los problemas matemáticos. La estructura y precisión en la resolución de estos aumentó con el tiempo, lo que indicaba un avance en el nivel de razonamiento geométrico. Además, la estrategia de resolución de problemas de acuerdo con los planteamientos de Pólya fue bien recibida por los estudiantes; ya que, proporcionó pautas claras para afrontar problemas complejos como los de calcular áreas de regiones sombreadas y volúmenes de sólidos inscritos.

Un aspecto destacado, fue la implementación de mesas redondas al comienzo de cada sesión, donde se les preguntaba a los estudiantes sobre los temas que habían sido vistos en clases pasadas; lo cual no sólo les ayudó a recordar lo aprendido, sino que también promovió la participación. La mesa redonda además de mejorar sus habilidades de comunicación incrementó su confianza para expresar dudas y opiniones, sin temor a ser juzgados o evaluados únicamente en función de calificaciones cuantitativas.

El modelo de Van Hiele brindó una estructura escalonada para el desarrollo del proceso de aprendizaje en esta práctica pedagógica. Las etapas que se llevaron a cabo en la propuesta didáctica al estar basadas en las fases del modelo, permitieron un entendimiento gradual de nociones geométricas que se pudo ver reflejado en el transcurso de las sesiones, culminando en la confirmación, mediante la prueba final, de que los estudiantes habían alcanzado el nivel 3 de Van Hiele según las características presentadas en los estudios de (Gutiérrez, y otros, 1994).

El tiempo limitado fue una de las restricciones principales en el desarrollo de la práctica; debido a que, el proyecto Metro Talentos se llevaba a cabo como actividad extracurricular un día a la semana y solo teníamos tres horas disponibles para intervenir. Este intervalo semanal resultaba en una desconexión entre las sesiones, lo cual afectaba la continuidad del aprendizaje; fue así como, la mesa redonda se convirtió en una herramienta fundamental para poner a los estudiantes al día nuevamente y retomar el hilo conductor de las actividades.

Otro de los retos que enfrentamos, fue invitar a los estudiantes salón por salón a inscribirse en nuestro proyecto. Dado que era una actividad extracurricular, debíamos generar suficiente curiosidad para convencerlos de asistir, para ello, la presentación del proyecto se realizó de manera lúdica. Seguido a esto, la primera sesión fue crucial, pues tenía como objetivo mantener el interés y motivar su participación en las siguientes sesiones. La estrategia utilizada fue efectiva y logró la permanencia de los estudiantes en el curso, lo que permitió realizar él análisis comparativo entre las pruebas inicial y final.

Una de las situaciones que afrontamos y que puso a prueba nuestra capacidad de resolver, fueron las preguntas inesperadas por parte de los estudiantes, como por ejemplo: ¿Cuál es el origen del número pi? Estos interrogantes nos llevaron a buscar respuestas que pudieran aclarar sus dudas y estuvieran acorde a su nivel de razonamiento. Aunque en un principio nos tomó por sorpresa, tales cuestionamientos nos dieron la oportunidad de incentivarlos a la investigación e indagar más allá de lo que se les enseñaba en clase.

Por otra parte, aprendimos que el trabajo en equipo y la colaboración son fundamentales para superar obstáculos, al trabajar juntos, los estudiantes no solo pudieron explorar diferentes perspectivas y encontrar soluciones innovadoras a los problemas planteados, sino que les permitió interactuar y establecer nuevas amistades, pues en el curso asistieron alumnos de los grados décimo 01, 02 y 03 que no se conocían previamente.

Ser profesor de matemáticas va más allá de impartir saberes abstractos; implica conectar con los estudiantes, conocer sus realidades, ganarse su confianza y mostrarles que las matemáticas son mucho más que números y fórmulas. Durante esta práctica pedagógica, hemos experimentado la satisfacción de aplicar los conocimientos teóricos en situaciones reales, de establecer nuevas amistades y de aprender de cada estudiante. Nos dimos cuenta de que el desafío no radica en el desinterés de los estudiantes por las matemáticas, sino en la manera en que se han enseñado tradicionalmente; por esta razón, es fundamental buscar formas innovadoras de enseñar esta disciplina para captar su atención y que reconozcan su importancia.

11 BIBLIOGRAFÍA

Arranz, J. M. (s.f.). *Geogebra* . Obtenido de https://www.geogebra.org/m/vvuw9pRX

Benaben, J., Márquez, A., & Núñez, J. (Agosto de 2020). Juegos para enseñar estrategias a estudiantes de Secundario y Bachillerato. *REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA* , págs. 310-329.

Buesaquillo, W. (2022). *Juegos con dados, significado clasico de la probabilidad.* Popayán.

Castillo Ramírez, J. E. (2020). *Una propuesta para el análisis de los procesos de visualización y las aprehensiones en la construcción de áreas de regiones sombreadas.* Palmira - Colombia.

del Rosario, E. M., & Rojas Bello, R. (2020). *Integración del método de Pólya para la resolución de problemas de Geometría en estudiantes del Nivel Secundario.* República Dominicana.

E.U.ESCAR. (s.f.). *MANUAL DE FORMULAS Y JUEGOS MATEMATICOS.* Editorial Distribuidora ESCAR.E.U.

EcuRed, c. (03 de Junio de 2012). *Modelo de Van Hiele*. Obtenido de https://acortar.link/gIoOrL

Franco Guacaneme, E., & Fonseca, H. H. (2021). *Matemática Recreativa, una Estrategia para Fortalecer el Pensamiento Numérico y Espacial.* El Socorro.

Gamboa Araya, R., & Ballestero Alfaro, E. (15 de Diciembre de 2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometria en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educare, Vol. XIV*, págs. 125-142.

Garoy, N. (10 de Septiembre de 2020). *Brainly*. Obtenido de https://brainly.lat/tarea/23309813

Gutiérrez, Á., Corberán, R., Huerta, M., Pastor, A., Margarit, J., Peñas, A., & Ruiz, E. (1994). *Diseño y Evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el Modelo de Razonamiento de Van Hiele.* Madrid, España: Secretaría General Técnica Cenwo de Publicaciones.

Guzmán, J. H. (2023). *NEUROCHISPAS*. Obtenido de https://www.neurochispas.com/wiki/volumen-de-un-cubo/

Hernández Escobar, E. F. (2016). *Estrategia para la enseñanza de los conceptos de Área y de Volumen, utilizando como mediadores de aprendizaje el origami y las tecnologías digitales.* Medellín - Colombia.

Lety, L. m. (Mayo de 2020). *Área figuras compuestas* . Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=i2iHPW068Ek&ab_channel=LamaestraLety

May, I. d. (2015). *George Polya (1965). Cómo plantear y resolver problemas [título original: How To Solve It?]. México: Trillas. 215 pp.* Obtenido de Entreciencias: Diálogos en la Sociedad del Conocimiento: https://www.redalyc.org/journal/4576/457644946012/html/

Mejia, M. R. (2012). *Sistematizacion. Una forma de investigar las prácticas y de produccion de saberes y conocimientos.* La Paz, Bolivia: Ministerio de Educacion Estado plurinacional de Bolivia .

Pólya, G. (1965). *Como plantear y resolver problemas.* México D.F.: Trillas México.

Ramirez, L. (03 de Octubre de 2018). *Prezi*. Obtenido de Estrategia, Carrera a 20: https://prezi.com/p/xjnlgq6zankt/estrategia-carrera-a-20/

Ríos, J. (2016). *Julio Profe*. Obtenido de Áreas sombreadas: https://www.youtube.com/watch?v=cIa6HtiW3ZI&ab_channel=julioprofe

Ruiz, L. (16 de Enero de 2017). *UNCOMO*. Obtenido de https://www.mundodeportivo.com/uncomo/educacion/articulo/como-sacar-el-area-de-un-prisma-37156.html

Sanchez, S., & Joven, S. (2023). *El evento matemáticas a la calle bajo el marco de la divulgación matemática.* Popayán.

Slideshare. (21 de Enero de 2016). *Slideshare*.

SOYMATEMATICAS.COM. (2016). *Juegos de matematicas para secundaria (I) (con soluciones)* . Obtenido de soymatematicas.com/juegos-de-matematicas/

Torres, A. (13 de Diciembre de 2016). *La Teoría del Aprendizaje Significativo de David Ausubel*. Obtenido de Psicología y Mente: https://psicologiaymente.com/desarrollo/aprendizaje-significativo-david-ausubel

Vega, H. (s.f.). *IES Los Neveros*. Obtenido de https://acortar.link/ovdl5f

12 ANEXOS

Anexo 1. Prueba Inicial

"La mejor preparación para el mañana es hacer lo mejor posible hoy" Jackson Brown.

Institución Educativa Metropolitano	
Prueba Inicial	**Fecha:**
Docentes: José Stiven Trujillo, Cristian Eduardo Yugue	**Asignatura:** Geometría
Estudiante:	**Grado:**

1. ¿Cuál de las siguientes figuras es una recta?

a)

b)

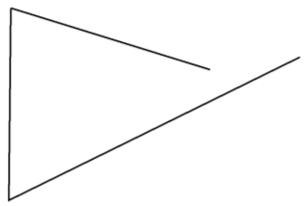
c)

d)

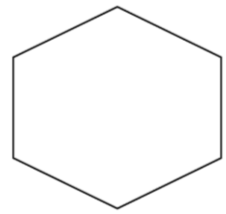
2. La característica más importante de un ángulo es su amplitud; y por esta razón, se clasifican en agudos, rectos, obtusos y llanos. Dibuje diferentes ángulos y escriba a su lado que tipo de ángulo es.

3. Observe, analice y decida cuáles de las siguientes figuras son polígonos ¿Por qué?

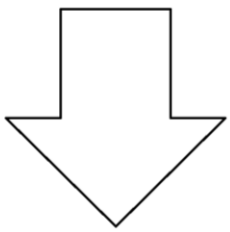
a)



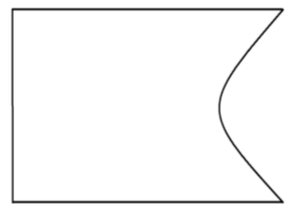
b)



c)



d)

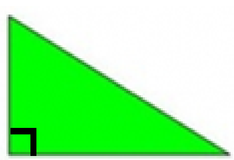


Respuesta:

4. ¿Cuál de los siguientes triángulos es un triángulo rectángulo? ¿Por qué?

a)

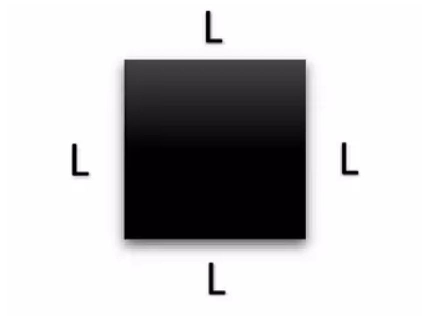
b)

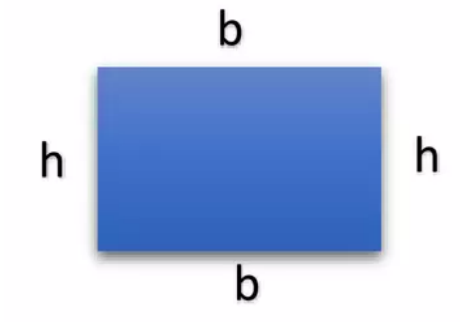


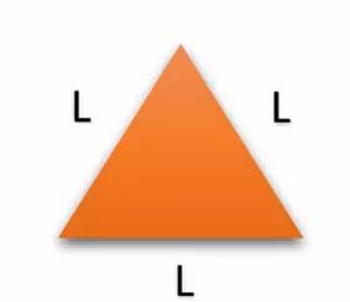
c)

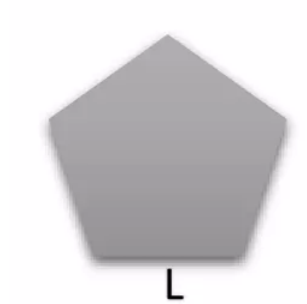
Respuesta:

5. A continuación, se muestran algunas figuras geométricas y la medida de sus lados, calcule el perímetro de cada una de estas y escriba el nombre dicha figura.





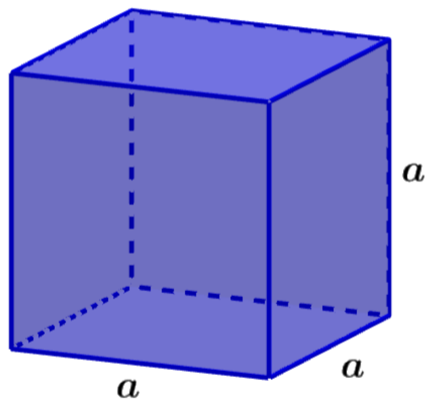




Respuesta:

6. ¿Cuáles formulas recuerdas para calcular el área de una figura geométrica? Escríbelas.

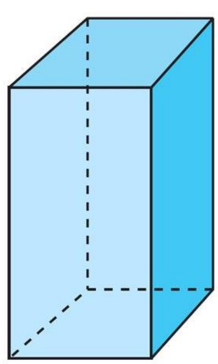
7. Se le puede determinar el volumen a la siguiente figura, ¿Qué se requiere para ello?

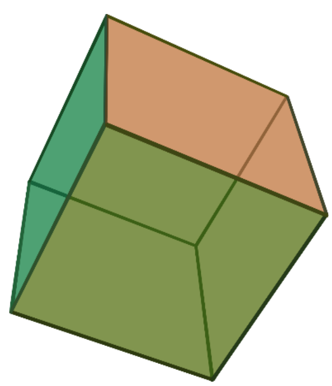


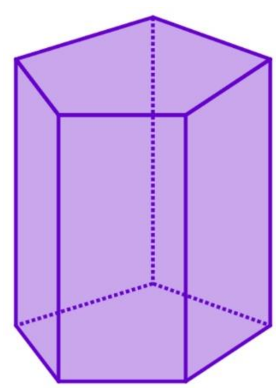
Respuesta:

8. ¿Cuáles de las siguientes figuras son un prisma rectangular?

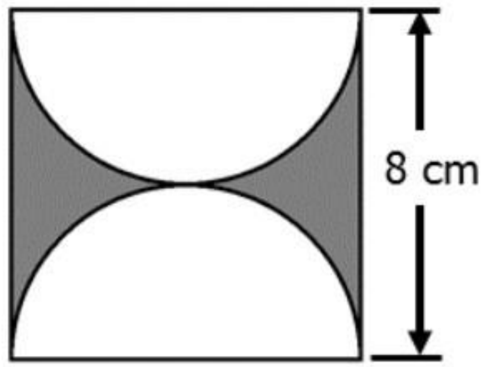
a) **b)** **c)**







9. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es la que permite calcular el área que forma la figura sombreada?



a) Se calcula el área del cuadrado y se multiplica por dos.

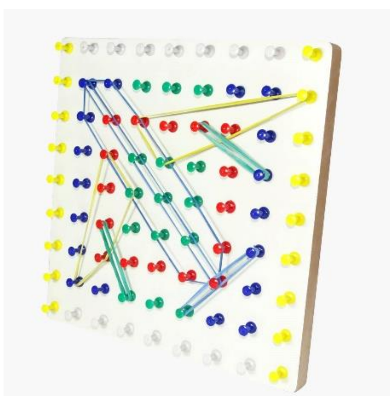
b) Se calcula el área de un círculo de radio $4\ cm$ y le resto el área del cuadrado.

c) Se calcula el área de un triángulo de base $8cm$ y con altura $4cm$; al resultado obtenido lo multiplico por dos.

d) Se calcula el área del cuadrado y a este resultado se le resta el área de un círculo de radio $4cm$.

Anexo 2. Trabajando con rectas

"Si no sabes por dónde empezar, empieza por sonreír"

<table>
<tr><td colspan="3">Temáticas: Punto, recta, tipos de recta (paralelas, secantes, perpendiculares), semirrecta y segmento.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Docentes: José Stiven Trujillo Urbano, Cristian Eduardo Yugue</td><td>Fecha:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Correos: josetru@unicauca.edu.co cristianyague@uniauca.edu.co</td><td>Asignatura: Geometría</td></tr>
<tr><td colspan="2">Estudiante:</td><td>Grado:</td></tr>
<tr><td colspan="3">Objetivos
Clasificar los distintos tipos de rectas con ayuda del geoplano.
Reconocer objetos geométricos en una dimensión.
Impulsar el razonamiento geométrico a través de la resolución de problemas.</td></tr>
<tr><td>Recurso didáctico: GEOPLANO
</td><td colspan="2">Un geoplano es un instrumento manipulativo matemático, consiste en un tablero cuadrado (aunque puede ser también de cualquier forma), generalmente de madera u otro material resistente. El geoplano es un recurso didáctico para la introducción de gran parte de las figuras geométricas. El carácter manipulativo de este permite a los estudiantes una mayor comprensión de toda una serie de términos abstractos, que muchas veces o no entienden o les generan ideas erróneas en torno a ellos.</td></tr>
<tr><td colspan="3">ORDEN DE LA SESION
1- Se presentarán los conceptos de recta, segmento y semirrecta con ayuda de elementos presentes en el salón de clase, que conceda al estudiante una idea de estos objetos geométricos.
2- Se dará una breve explicación del recurso didáctico denominado Geoplano; con el fin</td></tr>
</table>

de que el estudiante se familiarice con este.

3- Se planteará una serie de problemas donde el estudiante deberá exigir su habilidad de razonamiento, para esto, utilizará el recurso didáctico Geoplano.

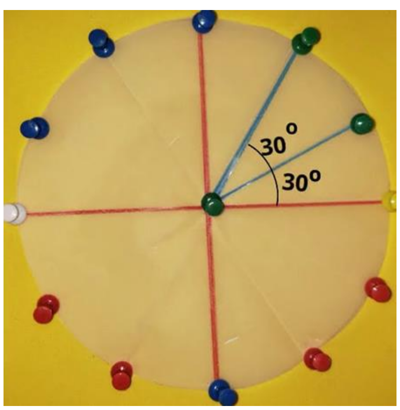
4- Se hará una mesa redonda, donde los estudiantes darán sus puntos de vista acerca de los resultados obtenidos; con el fin de analizar si se han apropiado los conceptos trabajados. Finalmente, se hará una retroalimentación de estos.

Ejercicios

1. Construya en el Geoplano los 3 tipos de rectas.
2. Construya dos segmentos, de tal forma que uno de ellos sea $\frac{3}{5}$ de la medida del otro.
3. Construya dos segmentos, de tal forma que uno de ellos sea $\frac{7}{4}$ de la medida del otro.
4. Construya dos semirrectas secantes, pero no perpendiculares.
5. Construya un segmento y una recta perpendiculares.
6. Construya dos segmentos paralelos de longitud distinta, de tal forma que la distancia entre los dos sea la mitad de la suma de sus longitudes.
7. Construya dos segmentos y una semirrecta que sean paralelos entre sí, de tal forma que la distancia del uno al otro duplique la suma de la medida de los segmentos.

Anexo 3. Explorando ángulos

"Mantente fiel a los sueños de tu juventud" Friedrich Schiller

<table>
<tr><td colspan="2">Temáticas: Ángulos y tipos de ángulos</td></tr>
<tr><td>Docentes: José Stiven Trujillo Urbano, Cristian Eduardo Yugue</td><td>Fecha:</td></tr>
<tr><td>Correos: josetru@unicauca.edu.co cristianyague@uniauca.edu.co</td><td>Asignatura: Geometría</td></tr>
<tr><td>Estudiante:</td><td>Grado:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos
Reconocer los distintos tipos de ángulos según su medida y su posición con ayuda del geoplano circular.
Alcanzar una mayor precisión de la noción de ángulo.
Estimular el razonamiento lógico a través de la resolución de problemas.</td></tr>
<tr><td>Recurso didáctico: Geoplano Circular
</td><td>Una herramienta educativa para la enseñanza de la geometría y las matemáticas es un geoplano circular. Consiste en un disco circular con una fila de clavos o puntas uniformemente espaciados alrededor del borde. Los puntos se usan para hacer formas geométricas y para explorar conceptos matemáticos como ángulos, simetría y fracciones.</td></tr>
<tr><td colspan="2">ORDEN DE LA SESION
Se presentará de manera interactiva la noción de ángulo, los tipos de ángulos según su medida (agudos, rectos, obtusos, llanos y completos) y según su posición (adyacentes, consecutivos y opuestos). Para esto, se hará una salida a la cancha de la Institución dónde con ayuda de cuerdas los estudiantes construirán los conceptos.
Al regresar al aula se dará una breve explicación del geoplano circular; con el fin de que el estudiante pueda resolver los ejercicios que serán propuestos.</td></tr>
</table>

3. Se plantearán problemas de razonamiento donde el estudiante tendrá que pensar de manera crítica y creativa para llegar a una solución.
4. Se hará una mesa redonda, donde los estudiantes darán sus puntos de vista acerca de los resultados obtenidos; con el fin de analizar si se han apropiado los conceptos trabajados. Finalmente, se hará una retroalimentación de estos.

Ejercicios

1. Construya en el Geoplano tres ángulos: un obtuso, uno llano y uno agudo, de tal forma que no sean consecutivos entre sí.
2. ¿Es posible formar dos ángulos obtusos consecutivos cuyas medidas sumen 180°? ¿Si o No? ¿Por qué? Justifique su respuesta.
3. Diseñe cuatro ángulos consecutivos en el geoplano. Un ángulo llano y tres ángulos agudos de distinta medida, de tal forma que los cuatro formen un ángulo completo. Escriba la medida de los ángulos que utilizó y con estos datos compruebe que el resultado es correcto.
4. Se ha formado un ángulo completo con cuatro ángulos, de los cuales hay: un ángulo recto, un ángulo obtuso y ángulo agudo, ¿Cómo debería ser el cuarto ángulo? Justifique su respuesta utilizando el geoplano.
5. Si sumas cinco ángulos completos y al resultado le restas siete ángulos rectos, ¿cuál es la medida en grados del ángulo resultante? Apóyate en el geoplano para llegar a la solución.
6. Sean A y B dos ángulos adyacentes entre sí; y sean C y D dos ángulos adyacentes entre sí. Elabore en el geoplano estos cuatro ángulos, de tal forma que A sea opuesto por el vértice con C, y B sea opuesto por el vértice con D.

Anexo 4. Jugando con el tangram

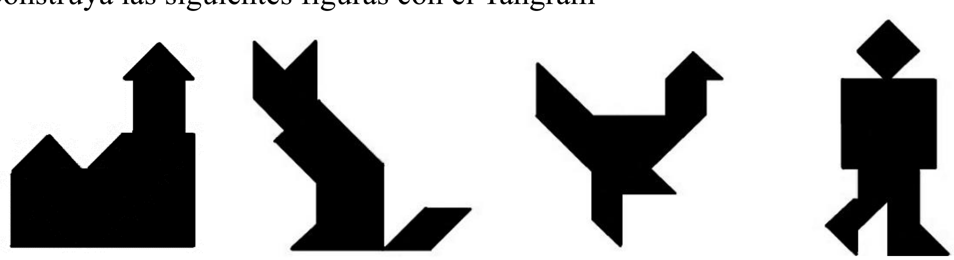
"Si buscas resultados distintos, no hagas siempre lo mismo" Albert Einstein

<table>
<tr><td colspan="2">Temáticas: Figuras planas (Triángulos, Cuadriláteros, Circulo y Polígonos).</td></tr>
<tr><td>Docentes: José Stiven Trujillo Urbano, Cristian Eduardo Yugue</td><td>Fecha:</td></tr>
<tr><td>Correos: josetru@unicauca.edu.co cristianyague@uniauca.edu.co</td><td>Asignatura: Geometría</td></tr>
<tr><td>Estudiante:</td><td>Grado:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos
• Desarrollar el pensamiento reflexivo y creativo, al inventar nuevas formas y diseños con base en las piezas existentes.
• Impulsar las capacidades de autoaprendizaje a través del desarrollo de habilidades matemáticas, como el reconocimiento de formas y la resolución de problemas.
• Fomentar el trabajo en equipo y la participación con la ayuda de actividades de integración.</td></tr>
<tr><td>Recurso didáctico: Tangram chino
</td><td>El tangram chino es un juego matemático compuesto por siete figuras planas que forman un cuadrado. Entre ellas están: cinco triángulos rectángulos, un cuadrado y un romboide.
Además, ha revolucionado la enseñanza de la geometría; puesto que, permite el reconocimiento y clasificación de figuras geométricas, desarrolla la habilidad lógico-matemática; y más aún, facilita el cálculo de áreas y perímetros de figuras planas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">ORDEN DE LA SESION
1. Se presentarán las figuras planas de manera lúdica, haciendo un recorrido por la institución para que el estudiante pueda ver la relación de la geometría con objetos ya conocidos. Por ejemplo: la forma de la cancha, el diseño de las ventanas, puertas, gradas, etc.</td></tr>
</table>

2. Al regresar al aula se dará una explicación formal de las figuras planas; con el fin de que el estudiante pueda apropiar el lenguaje matemático.
3. Se hará una breve introducción del recurso didáctico "Tangram", para que el estudiante comprenda su funcionamiento y se familiarice con las piezas que lo conforman.
4. Se plantearán una serie de problemas que el estudiante deberá abordar con la ayuda del tangram; exigiendo su razonamiento y creatividad.
5. Se realizará una mesa redonda, donde los estudiantes darán sus puntos de vista acerca de los resultados obtenidos; con el fin de analizar si se han apropiado los conceptos trabajados. Finalmente, se hará una retroalimentación de estos.

Ejercicios

1. Utilizando todas las piezas del tangram, construya las siguientes figuras:
   a) Cuadrado
   b) Triangulo
   c) Rectángulo
   d) Hexágono
   e) Circulo
   f) Trapecio
   g) Romboide
      - ¿Cuál fue la figura más difícil de construir?
      - Compara con tus compañeros las figuras construidas y observa si alguna de ellas tiene más de una forma de realizarse.
2. Construya las siguientes figuras con el Tangram



Anexo 5. Conociendo el Teorema de Pitágoras

"La naturaleza está escrita en lenguaje matemático" Galileo Galilei

<table>
<tr><td colspan="2">Temática: Teorema de Pitágoras</td></tr>
<tr><td>Docentes: José Stiven Trujillo Urbano, Cristian Eduardo Yugue</td><td>Fecha:</td></tr>
<tr><td>Correos: josetru@unicauca.edu.co cristianyague@uniauca.edu.co</td><td>Asignatura: Geometría</td></tr>
<tr><td>Estudiante:</td><td>Grado:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos
• Facilitar la comprensión del Teorema de Pitágoras a través del juego "Aventura Pirata".
• Impulsar habilidades de razonamiento y resolución de problemas por medio de ejercicios matemáticos que lleven a pensar de manera crítica para llegar a la solución.
• Fomentar el trabajo en equipo y la sana competencia mediante desafíos en donde se debe aplicar el Teorema de Pitágoras.</td></tr>
<tr><td>Recurso didáctico: JUEGO AVENTURA PIRATA

Recuperado de: https://n9.cl/eyy5s</td><td>El juego aventura pirata consiste en un tipo de “Parqués Matemático”, que sirve como ayuda en el aula para comprender un tema particular en matemáticas mientras el estudiante se divierte. Para esta ocasión, se le han hecho una serie de modificaciones, con el propósito de mejorar la comprensión del Teorema de Pitágoras; para ello, se fabricaron algunas tarjetas con problemas de razonamiento que el estudiante deberá resolver utilizando este concepto.</td></tr>
</table>

ORDEN DE LA SESIÓN

1. Se hará un recorrido por las instalaciones del colegio, con el fin de mostrar al estudiante a que tipo de figuras es posible aplicar el Teorema de Pitágoras.

2. Al regresar al aula, se dará una explicación con ayuda de material manipulativo del Teorema de Pitágoras con sus respectivos ejemplos.

3. Se presentará el juego "Aventura Pirata" con su respectiva metodología.

4. Se desarrollará el juego "Aventura Pirata" donde los estudiantes enfrentarán desafíos que deberán superar con la ayuda del Teorema de Pitágoras.

5. Se hará una mesa redonda, donde los estudiantes darán sus puntos de vista acerca de los resultados obtenidos; con el fin de analizar si se han apropiado los conceptos trabajados. Para terminar, se hará una retroalimentación de estos.

Anexo 6. Descubriendo áreas y perímetros de figuras planas

"Las matemáticas convierten lo invisible en visible" Keith Devlin

Temática: Área y Perímetro de Figuras Planas	
Docentes: José Stiven Trujillo Urbano, Cristian Eduardo Yugue	**Fecha:**
Correos: josetru@unicauca.edu.co cristianyague@uniauca.edu.co	**Asignatura:** Geometría
Estudiante:	**Grado:** Varios

Objetivos

- Conocer y deducir las fórmulas de área de figuras planas con ayuda de material manipulativo.
- Desarrollar habilidades de razonamiento lógico y visualización espacial a través de la resolución de problemas que involucran el cálculo de áreas.
- Reconocer la diversidad de habilidades a partir del trabajo colaborativo, entendiendo que cada integrante tiene diferentes ideas y perspectivas para resolver un ejercicio.

RECURSO DIDÁCTICO: Figuras planas de cartulina

Se proporcionarán cartulinas de colores con las que los estudiantes construirán algunas figuras geométricas como: cuadrados, triángulos, rombos, trapecios, círculos, entre otros. Esto con el fin de que puedan desarmarlas y observar cómo se deducen las fórmulas para calcular su determinada área.

ORDEN DE LA SESION

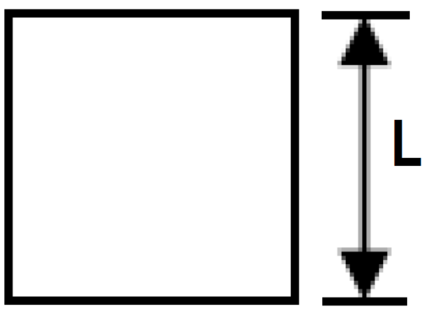
1. Se proporcionarán el material para que los estudiantes construyan las figuras
2. Se deducirán intuitivamente las fórmulas para calcular las áreas de las diferentes figuras con ayuda de las construcciones realizadas.
3. Se plantearán una serie de problemas que involucren el cálculo de áreas de figuras no

convencionales, donde el estudiante deberá exigir su habilidad de razonamiento.

4. Se hará una mesa redonda, donde los estudiantes darán sus puntos de vista acerca de los resultados obtenidos; con el fin de analizar si se han apropiado los conceptos trabajados. Finalmente, se hará una retroalimentación de estos.

Área del Cuadrado

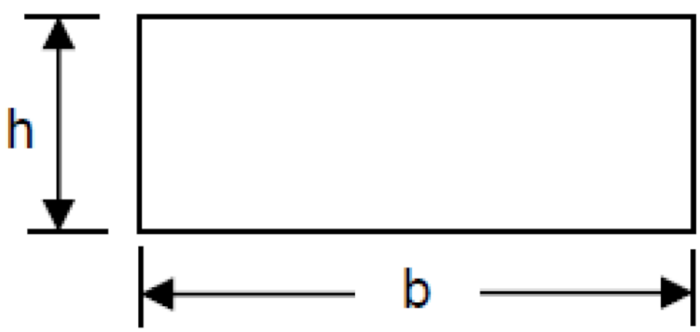
El área de un cuadrado es el cuadrado de la longitud de uno de sus lados; es decir, multiplicar dos veces la longitud del lado.



$$\boldsymbol{Área = L^2}$$

Área del Rectángulo

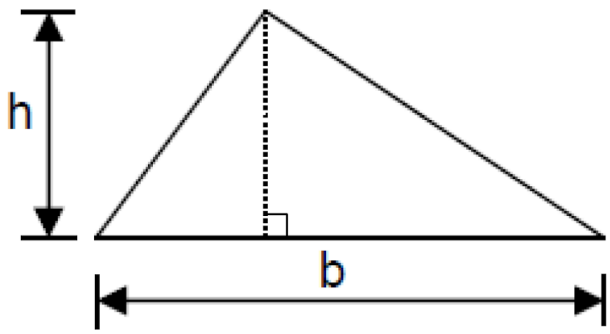
El área del rectángulo se halla multiplicando la longitud de su base (b) por la longitud su altura (h).



$$\boldsymbol{Área = b \times h}$$

Área del Triángulo

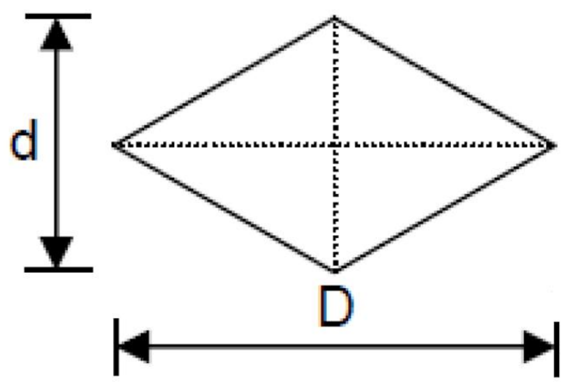
Él área del triángulo es el producto de la longitud de su base (b) por la longitud de su altura (h) y el resultado se divide entre dos.



$$Área = \frac{b \times h}{2}$$

Área del Rombo

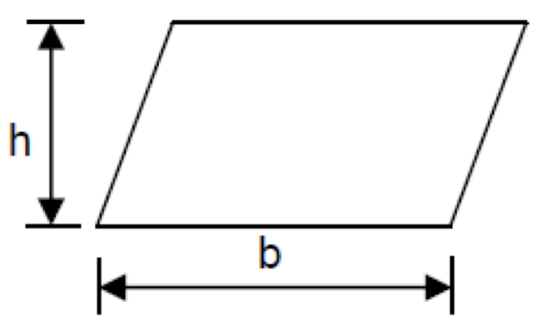
El área del rombo se halla multiplicando la longitud de la diagonal mayor (D) por la longitud de la diagonal menor (d) y luego el resultado se divide entre dos.



$$Área = \frac{D \times d}{2}$$

Área del Paralelogramo o Romboide

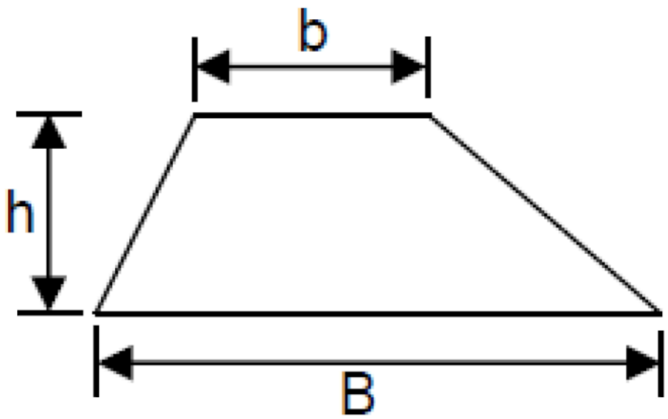
El área se halla multiplicando la longitud de su base (b) por la longitud de su altura (h).



$$Área = b \times h$$

Área del Trapecio

El área del trapecio se halla sumando la base mayor (B) con la base menor (b), luego este resultado se divide entre dos, y finalmente lo obtenido se multiplica por la altura (h).

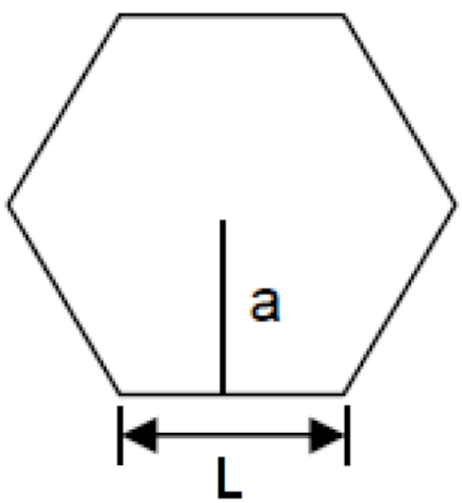


$$\acute{A}\boldsymbol{rea} = \left(\frac{\boldsymbol{B+b}}{\boldsymbol{2}}\right) \times \boldsymbol{h}$$

Áreas de Polígonos Regulares

El área de un polígono regular se halla multiplicando su perímetro (P) por su apotema (a) y después se divide este resultado entre dos. Hay que recordar que la apotema de un polígono regular es el segmento que une el centro del polígono con el punto medio de uno de sus lados, además ésta forma un ángulo recto con dicho lado.

Nota: n es el número de lados del polígono

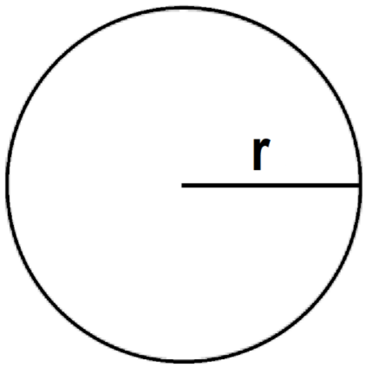


$$\boldsymbol{P = n \times L}$$

$$\acute{A}\boldsymbol{rea} = \left(\frac{\boldsymbol{P \times a}}{\boldsymbol{2}}\right)$$

Área del Círculo

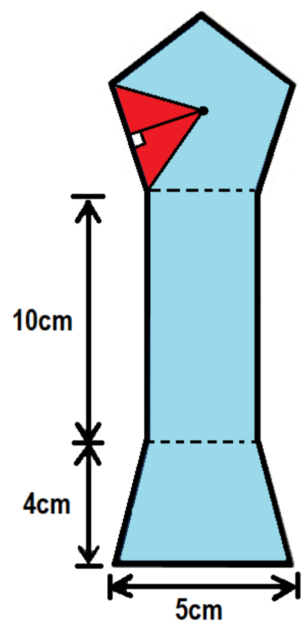
Un círculo es una figura plana formada por una circunferencia y su interior. El área del círculo se halla multiplicando π por el cuadrado del radio



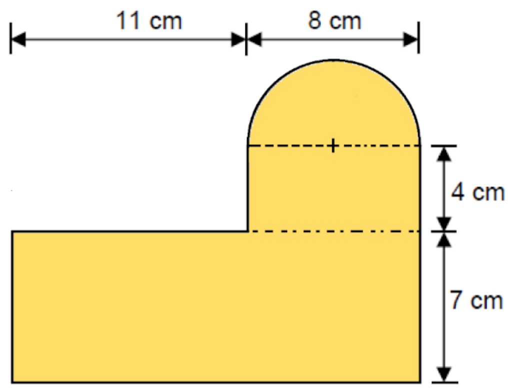
$$\acute{A}\boldsymbol{rea} = \boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{r}^2$$

Ejercicios:

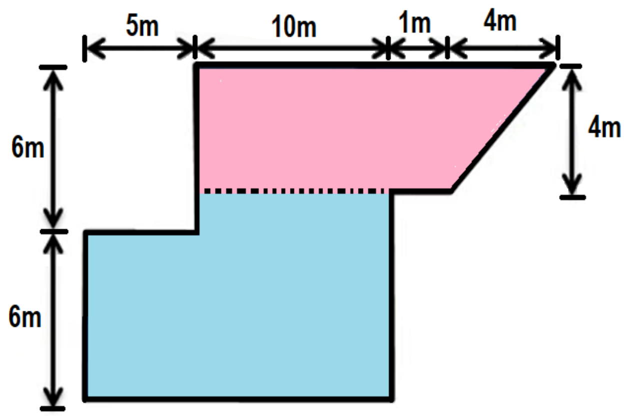
1. Observe y analice la siguiente figura, calcule su área; sabiendo que la longitud de la base del triángulo inscrito en el pentágono es $3cm$ y la longitud de la apotema del pentágono es $2cm$.



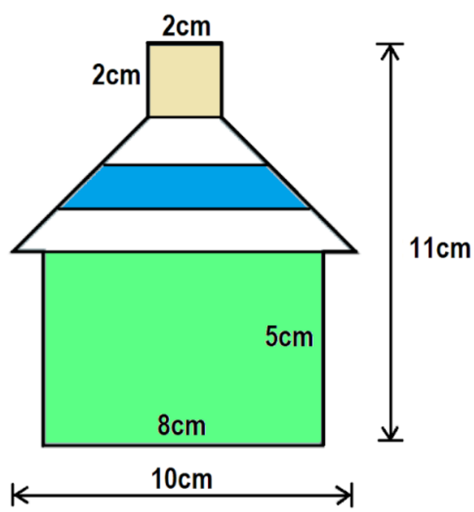
2. Observe la siguiente figura y determine el valor de su área.



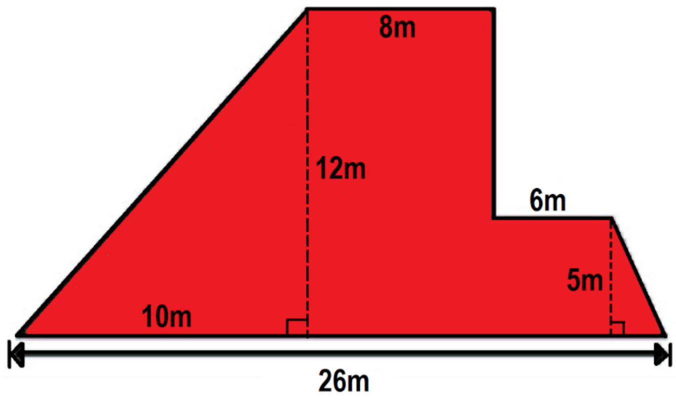
3. Determine el área de la siguiente figura



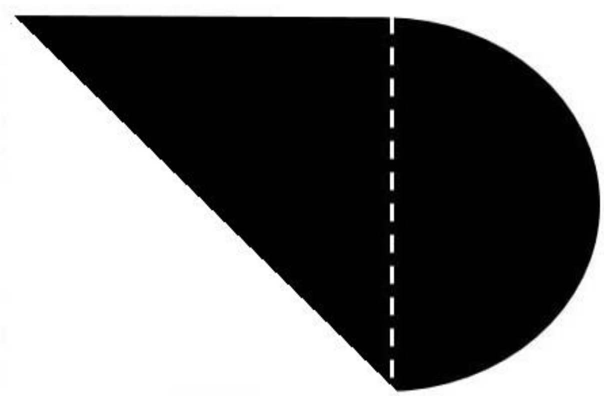
4. Observe la siguiente figura, determine la longitud del perímetro y calcule su área



5. Analice la siguiente figura y determine la longitud de su perímetro.

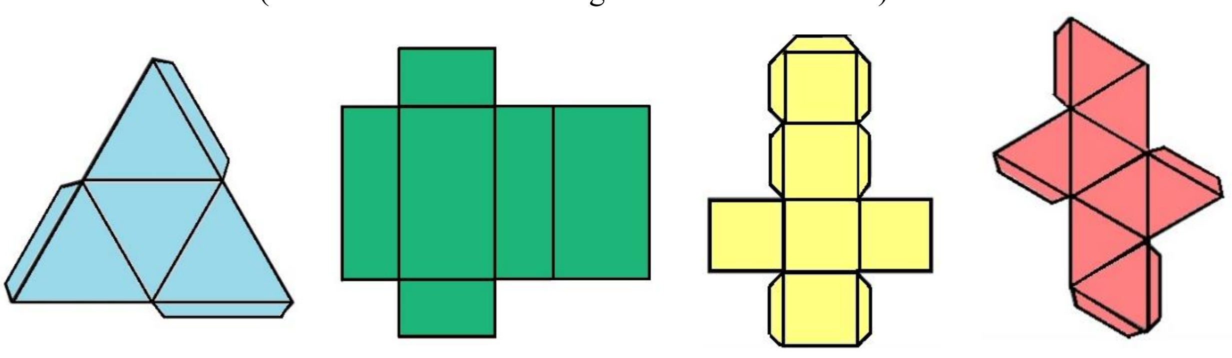


6. Observe la figura siguiente y calcule el valor de su área sabiendo que la longitud del diámetro de la semicircunferencia es $12cm$ y el triángulo es rectángulo e isósceles



Anexo 7. De dos a tres dimensiones

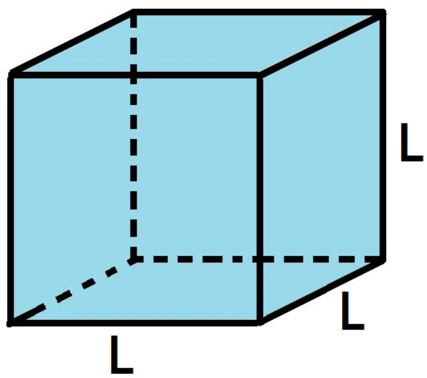
"La única forma de aprender matemáticas es hacer matemáticas" Paul Halmos

<table>
<tr><td colspan="2">Temática: Volumen de Figuras Tridimensionales</td></tr>
<tr><td>Docentes: Cristian Eduardo Yugue, José Stiven Trujillo</td><td>Fecha:</td></tr>
<tr><td>Correos: josetru@unicauca.edu.co cristianyague@uniauca.edu.co</td><td>Asignatura: Geometría</td></tr>
<tr><td>Estudiantes:</td><td>Grados:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos:
• Facilitar la comprensión del concepto de volumen en distintas figuras geométricas, como cubos, prismas, cilindros y conos a través de objetos manipulables.
• Impulsar habilidades de razonamiento lógico y visualización espacial a través de la resolución de problemas que involucran el cálculo de volúmenes.
• Promover el trabajo en equipo y la colaboración entre los estudiantes al resolver ejercicios de volumen, fomentando también la comunicación, el intercambio de ideas y la cooperación entre los estudiantes.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Recurso Didáctico: (Moldes de cartulina de figuras tridimensionales)
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Estos moldes sirven como una herramienta útil para enseñar geometría y fomentar habilidades manuales en los estudiantes. La cartulina es un material resistente y fácil de trabajar que permite a los estudiantes construir figuras como cubos, esferas, conos, cilindros, pirámides, entre otras figuras geométricas tridimensionales. Al utilizar estos moldes, los estudiantes pueden visualizar de manera más clara la forma y estructura de cada figura, lo que facilita la comprensión del concepto de</td></tr>
</table>

volumen y la relación entre las diferentes caras y aristas.

VOLUMEN DEL CUBO

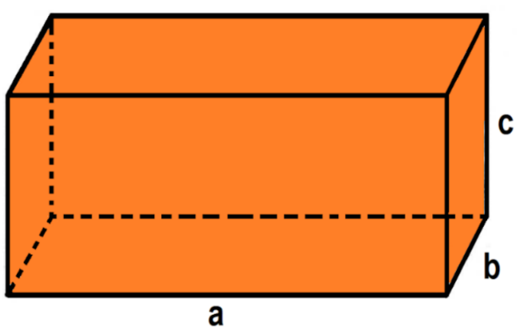
Un cubo es un prisma particular formado por seis caras cuadradas. El volumen de un cubo se calcula elevando la longitud de uno de los lados al cubo. Es decir , si la longitud de un lado del cubo es "$\boldsymbol{L}$" se obtiene multiplicando el lado $\boldsymbol{L}$ por sí mismo tres veces.



$$\boldsymbol{V = L \cdot L \cdot L = L^3}$$

VOLUMEN DEL ORTOEDRO

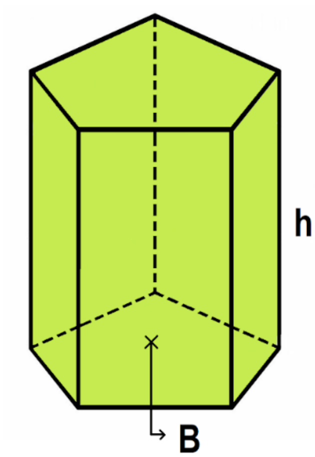
Un ortoedro, también conocido como prisma rectangular, es un tipo de figura tridimensional que se caracteriza por tener seis caras rectangulares. Sus caras laterales son perpendiculares entre sí, y todas las aristas son de igual longitud. El volumen de un ortoedro se calcula multiplicando su largo $\boldsymbol{a}$ por su ancho $\boldsymbol{b}$ por su alto $\boldsymbol{c}$.



$$\boldsymbol{V = a \times b \times c}$$

VOLUMEN DEL PRISMA

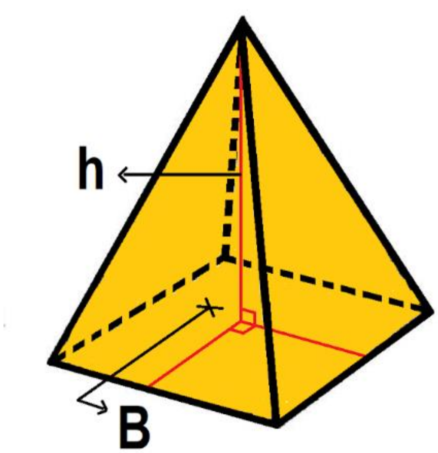
Un prisma es un sólido geométrico tridimensional que se caracteriza por tener dos caras iguales y paralelas llamadas bases, y caras laterales que son paralelogramos. La altura del prisma es la distancia entre las bases. El volumen de un prisma se calcula multiplicando el área de la base "$\boldsymbol{B}$" por la altura "$\boldsymbol{h}$".



$$\boldsymbol{V = B \times h}$$

VOLUMEN DE LA PIRÁMIDE

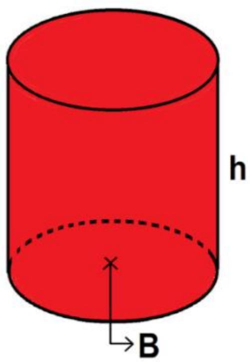
Una pirámide es un poliedro que tiene una base plana y un vértice común desde el cual se extienden las caras triangulares que se unen en los lados de la base. La altura de la pirámide es la distancia desde el vértice hasta el plano de la base . El volumen de una pirámide se calcula multiplicando el área de la base "$\boldsymbol{B}$" por su altura "$\boldsymbol{h}$", a este resultado se divide entre "**3**". En otras palabras, el volumen de una pirámide es igual a un tercio del producto del área de la base y la altura de la pirámide.



$$\boldsymbol{V = \frac{B \times h}{3}}$$

VOLUMEN DEL CILINDRO

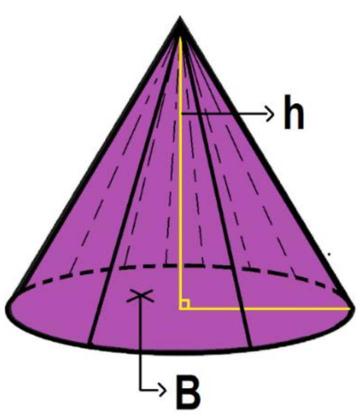
Un cilindro es un sólido geométrico tridimensional que consta de dos bases circulares paralelas congruentes y una superficie curva lateral que conecta las bases. La altura de un cilindro es la distancia entre las bases. El volumen de un cilindro se calcula multiplicando el área de la base circular “$\boldsymbol{B}$” por la altura “$\boldsymbol{h}$”.El área de la base circular se calcula utilizando la fórmula del área de un círculo, que es "$\boldsymbol{\pi r}^2$", donde "$\boldsymbol{r}$" representa el radio de la base. Por lo tanto, la fórmula completa para el volumen de un cilindro es:



$$\boldsymbol{V = \pi \times r^2 \times h}$$

VOLUMEN DEL CONO

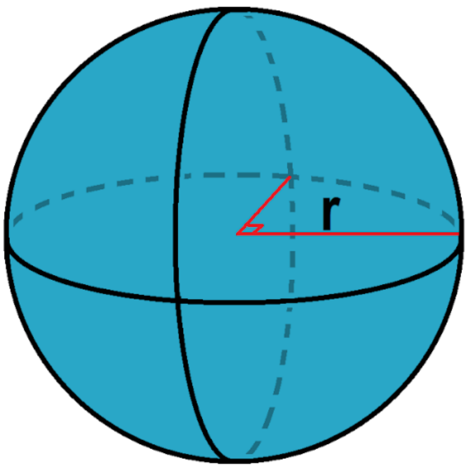
Un cono es un sólido geométrico que tiene una base circular y una superficie curva que se extiende desde la base hasta un punto en la parte superior llamado vértice. Cabe precisar que el cono es un cuerpo de revolución. Es decir, se puede obtener haciendo girar una figura o superficie plana alrededor de un eje. El volumen de un cono se puede calcular multiplicando el área de la base circular “$\boldsymbol{B}$” por la altura **“h”** y dividiendo el resultado entre “$\boldsymbol{3}$”. El área de la base circular se calcula utilizando la fórmula del área de un círculo, que es $\boldsymbol{\pi r^2}$, donde "$\boldsymbol{r}$" representa el radio de la base. Por lo tanto, la fórmula completa para el volumen de un cono es:



$$\boldsymbol{V = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3}}$$

VOLUMEN DE LA ESFERA

Una esfera es una figura geométrica tridimensional que consta de todos los puntos en el espacio que están a una distancia constante de un punto central. En otras palabras, es una figura perfectamente redonda y simétrica en todas sus direcciones. El volumen de la esfera se calcula elevando el radio "$\boldsymbol{r}$" al cubo, luego se multiplicar por $(\mathbf{4/3})$ y por $\boldsymbol{\pi}$**.** El radio "$\boldsymbol{r}$"es la distancia desde el centro de la esfera hasta cualquier punto de su superficie.

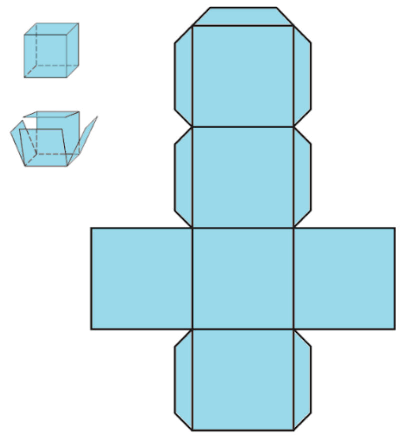


$$\boldsymbol{V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3}$$

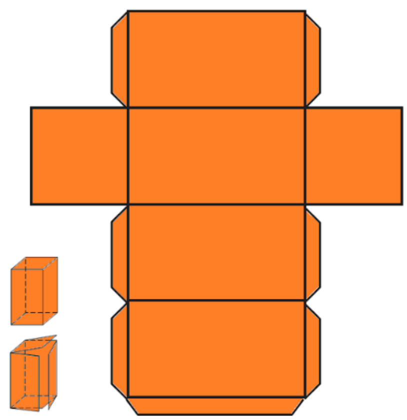
ORDEN DE LA SESIÓN

1. Se proporcionará el material didáctico junto con los moldes para que los estudiantes construyan algunas de las figuras tridimensionales
2. Se explicará de manera informal el concepto de las figuras y seguido a esto se presentarán las fórmulas que determinan el volumen de cada una de estas.
3. Se plantearán una serie de problemas que involucren el cálculo de volúmenes de las figuras presentadas, donde estas se relacionan con objetos de la vida real.
4. Se hará una mesa redonda, donde los estudiantes darán sus puntos de vista acerca de los resultados obtenidos; con el fin de analizar si se han apropiado los conceptos trabajados. Finalmente, se hará una retroalimentación de estos.

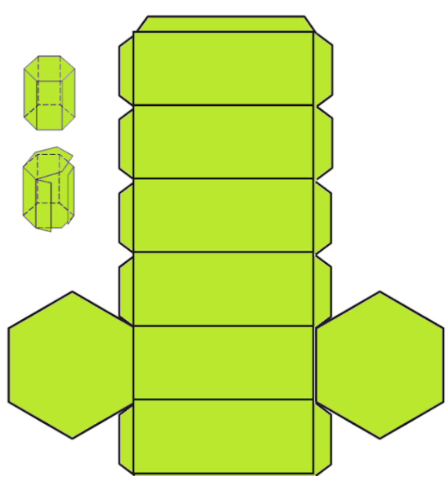
Molde para la construcción del Cubo



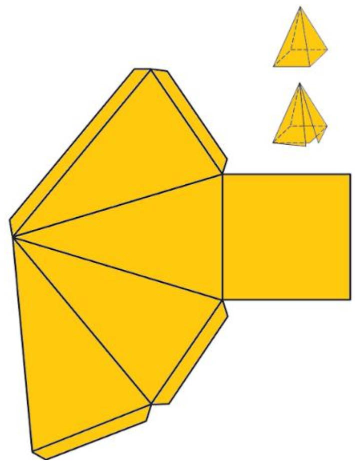
Molde para la construcción del Ortoedro



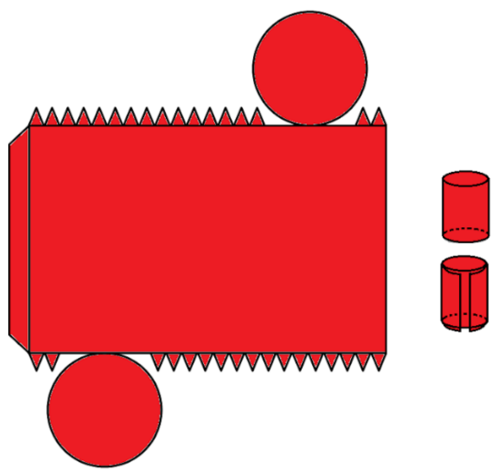
Molde para la construcción del Prisma



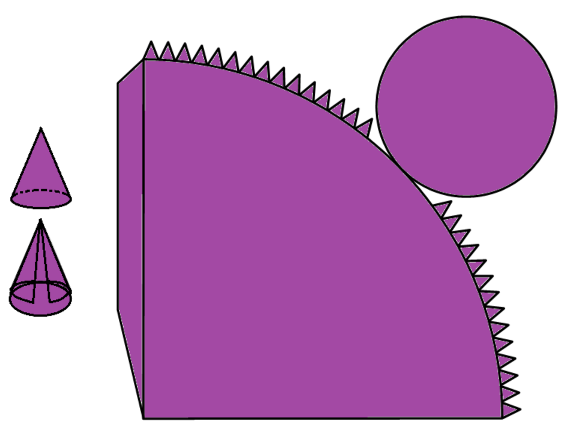
Molde para la construcción de la Pirámide



Molde para la construcción del Cilindro

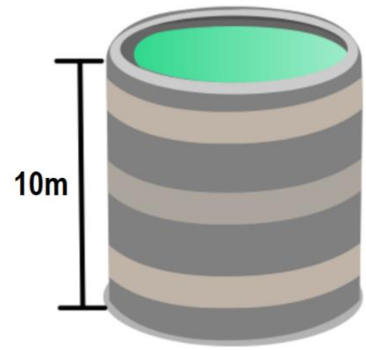


Molde para la construcción del Cono

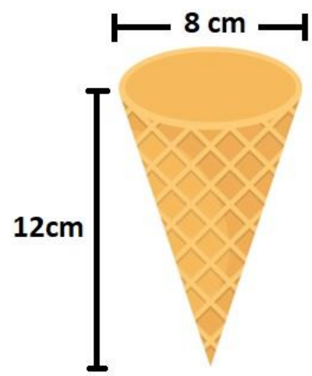


Ejercicios

1. Un cilindro de altura $\mathbf{10\ m}$ y radio de la base $\mathbf{2\ m}$ está lleno de agua. ¿Cuál es el volumen de agua en el cilindro?



2. Un cono de helado tiene una altura de $\mathbf{12\ cm}$ y diámetro de la base de $\mathbf{8\ cm}$. ¿Cuál es el volumen de el helado dentro del cono?



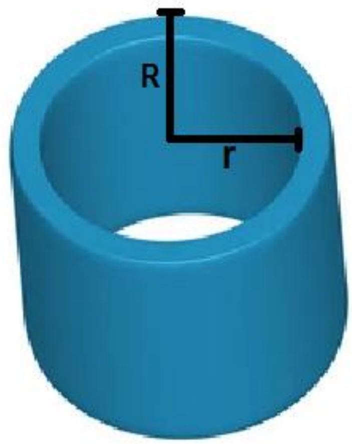
3. La piramide de Guiza ubicada en el Cairo capital de Egipto fue construida en los años 2550 y el 2490 a.C , tiene una base rectangular con medidas aproximadas de $\mathbf{230\ m}$ de largo, $\mathbf{235\ m}$ de ancho, y una altura de $\mathbf{146\ m}$. Determine el volumen de esta piramide.

4. Un balón de baloncesto tiene un volumen de $\mathbf{7.200\ cm}^3$. ¿Cuál es su radio?

5. Una piscina tiene la mitad de agua de su capacidad; si las medidas de la piscina son $10\ m$ de ancho, $18\ m$ de largo y $2m$ de profundidad. Determine el volumen del agua de la piscina.

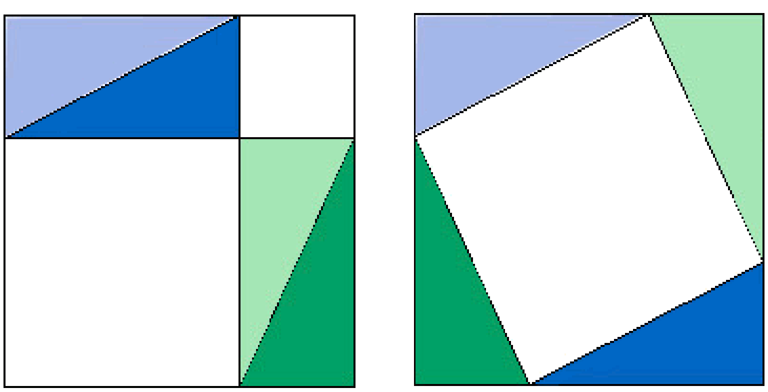
6. Se tienen cuatro trozos de madera iguales que tienen forma de prisma pentagonal, la longitud de su altura es $\mathbf{13\ cm}$, el lado de la base tiene $\mathbf{2\ cm}$ y la apotema de la base tiene $\mathbf{\frac{7}{5}\ cm}$ de longitud. Determine el volumen de ocupan los cuatro trozos de madera.

7. En la figura se muestra un cilindro hueco que tiene una altura de $\boldsymbol{15\ cm}$, un radio exterior de la base $\boldsymbol{R = 8\ cm}$ y un radio interior de la base $\boldsymbol{r = 6\ cm}$. ¿Cuál es el volumen del cilindro hueco?



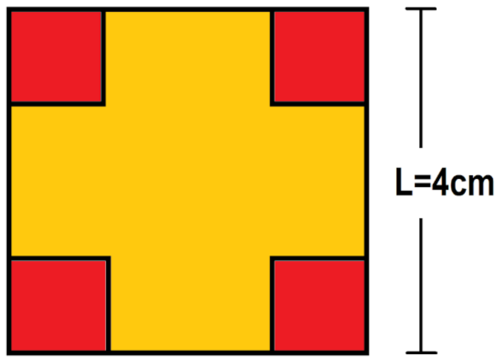
Anexo 8. Taller Áreas de Regiones Sombreadas

“Las matemáticas son la creación más bella y poderosa del espíritu humano” Stefan Banach

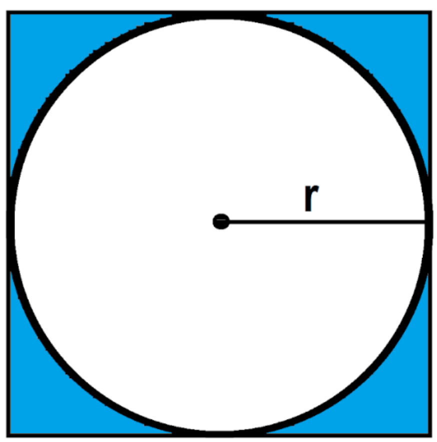
<table>
<tr><td colspan="2">Temática: Cálculo de áreas de regiones sombreadas</td></tr>
<tr><td>Docentes: José Stiven Trujillo Urbano, Cristian Eduardo Yugue</td><td>Fecha:</td></tr>
<tr><td>Correos: josetru@unicauca.edu.co cristianyague@uniauca.edu.co</td><td>Asignatura: Geometría</td></tr>
<tr><td>Estudiante:</td><td>Grado: Varios</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos
• Comprender el concepto de área sombreada y su importancia en la resolución de problemas geométricos y cotidianos.
• Desarrollar habilidades de razonamiento lógico y visualización espacial al trabajar con figuras planas complejas y calcular sus áreas.
• Fomentar la búsqueda de estrategias al trabajar en equipo cuando se quieren resolver problemas de áreas sombreadas, mediante la discusión, el intercambio de ideas y la toma de decisiones conjunta.</td></tr>
<tr><td></td><td>Una figura sombreada es una figura geométrica no convencional, y se produce por la superposición de dos o más figuras geométricas tradicionales.
Para resolver ejercicios que involucren calcular áreas sombreadas se debe calcular el área de cada una de las figuras y restar una de la otra según corresponda.</td></tr>
</table>

Problemas.

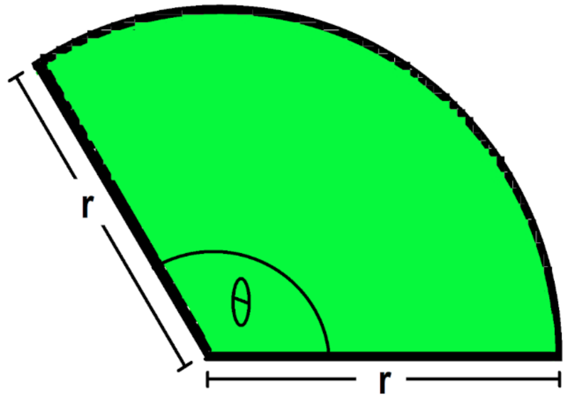
1. Determine el área de la región de color amarillo inscrita en el cuadrado grande, sabiendo que la longitud del lado de los cuadrados rojos es $\frac{L}{4}$.



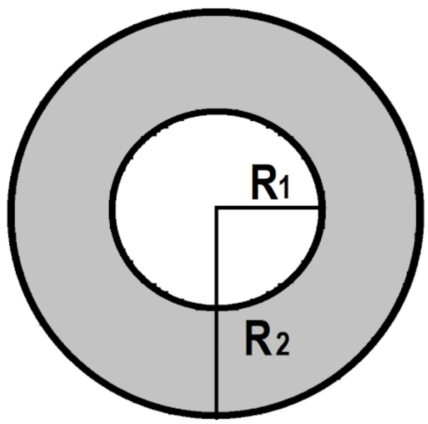
2. Observe y analice la siguiente figura, determine el área de la región de color azul sabiendo que $r = 7u$.



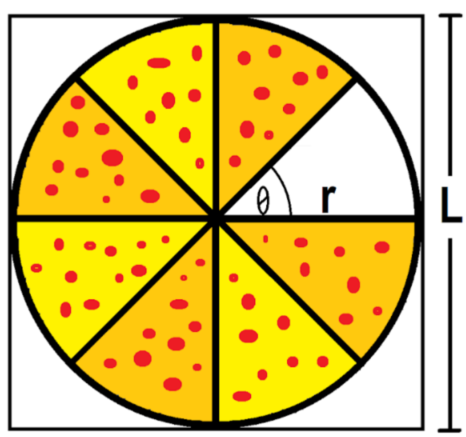
3. Calcule el área de la región de color verde (sector circular) en donde $r = \sqrt[3]{\frac{1}{27}}$ y el ángulo θ es un tercio de $360°$.



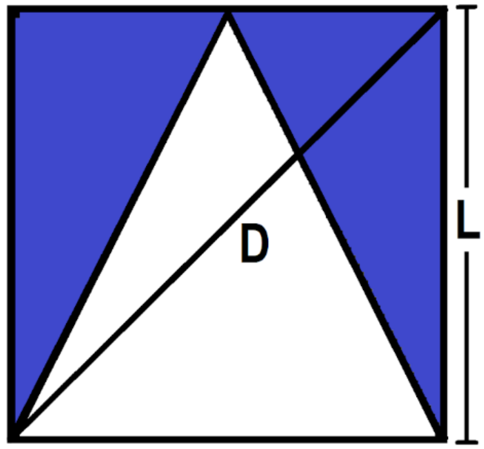
4. Observe la siguiente figura y determine el área de la región sombreada (corona circular) en donde $R_1 = \sqrt[4]{4^2}cm$ y $R_2 = 2R_1$



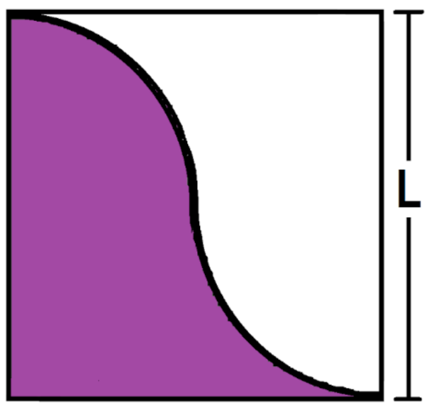
5. Un repartidor entrego una pizza a un grupo de estudiantes, uno de ellos se comió un octavo de la pizza, ¿Cuál es el área de pizza sobrante? Teniendo en cuenta que $L = \sqrt{64}u$



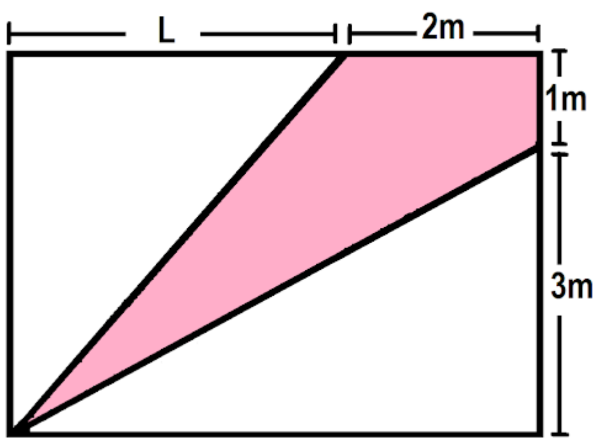
6. Si $D = 6\sqrt{2}cm$. Determine el área de la región de color azul, sabiendo que la longitud del lado del cuadrado es L



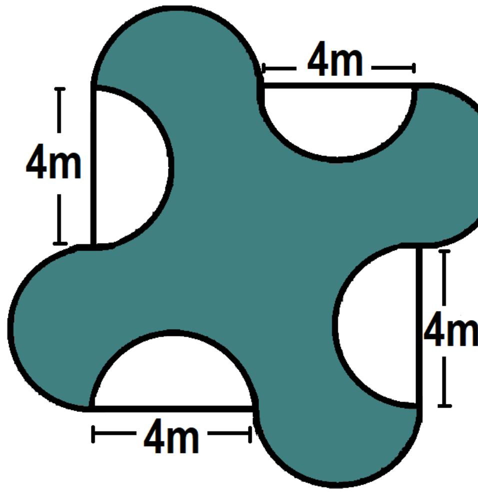
7. La longitud del lado del cuadrado es $L = 4\ cm$. Determine el área de la figura de color morado.



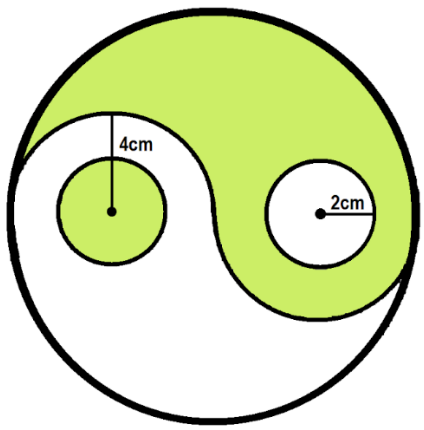
8. Observe la siguiente figura, determine el área de la figura rosada, sabiendo que L es un número tal que es la raíz cúbica de veintisiete y la raíz cuarta de ochenta y uno.



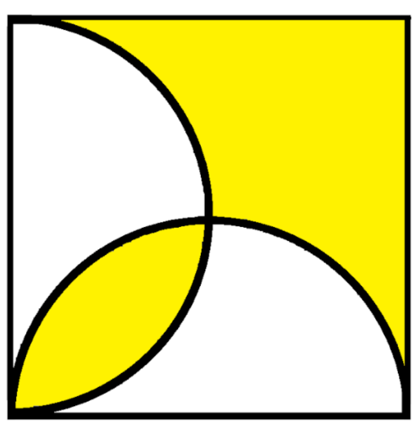
9. Observe y analice la siguiente figura, determine el valor del área coloreada.



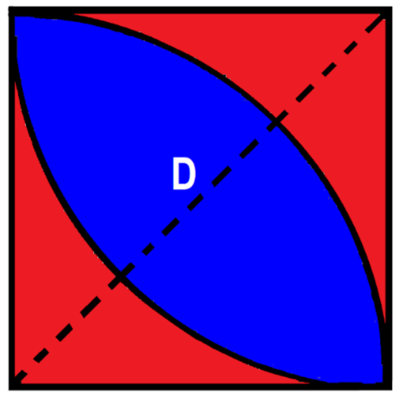
10. Observe la siguiente figura y calcule el área de color verde.



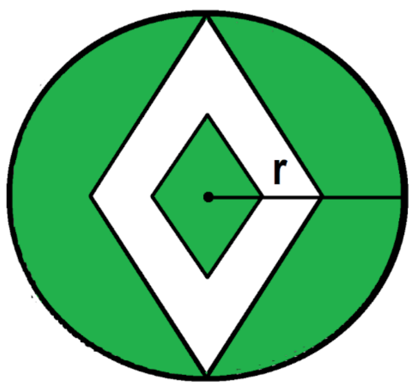
11. Calcule el área de color amarillo sabiendo que la longitud de la diagonal del cuadrado es $4\sqrt{2}m$.



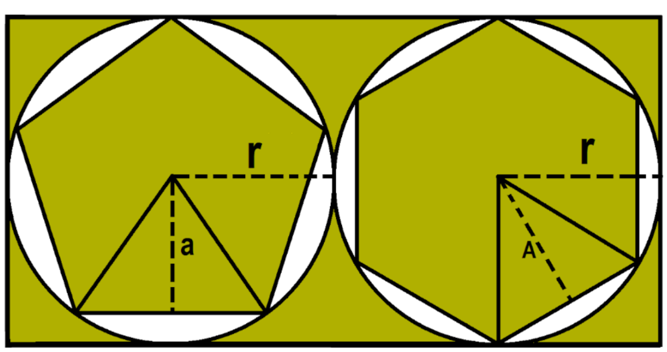
12. Observe la siguiente figura y calcule el área de color azul sabiendo que la longitud de la diagonal del cuadrado es $D = 7\sqrt{2}cm$.



13. Determine el área de color verde. Tenga en cuenta que la longitud del radio del círculo es $r = 8m$ y el área del rombo pequeño es la cuarta parte del área del rombo grande. Además, la diagonal menor del rombo grande tiene una longitud de $4m$.



14. Determine el área coloreada teniendo en cuenta que $r = 4u$, además, la longitud del lado del hexágono es $4u$ y la longitud del lado del pentágono es $6u$.



Anexo 9. Volúmenes de Sólidos Inscritos

“La esencia de las Matemáticas no es hacer las cosas simples complicadas, sino hacer las cosas complicadas simples” Stanley Gudder

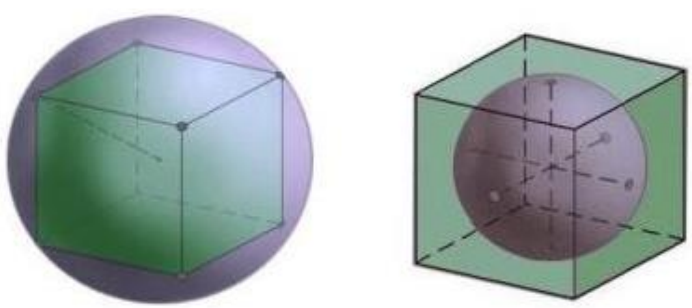
Problemas:

1. Observe la siguiente figura, determine el volumen resultante del cubo (azul claro) cuando la esfera se introduce como se muestra en la figura. Tenga en cuenta que el radio de la esfera es $r = L/2$ siendo L el lado del cubo cuya longitud es 8 cm.

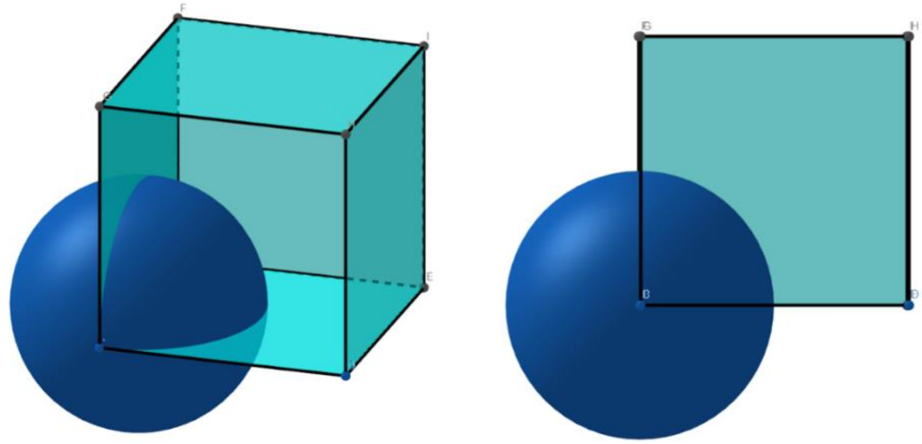
Temática: Cálculo de Volúmenes de sólidos inscritos	
Docentes: José Stiven Trujillo Urbano, Cristian Eduardo Yugue	**Fecha:**
Correos: josetru@unicauca.edu.co cristianyague@uniauca.edu.co	**Asignatura:** Geometría
Estudiantes:	**Grado:**

Objetivos

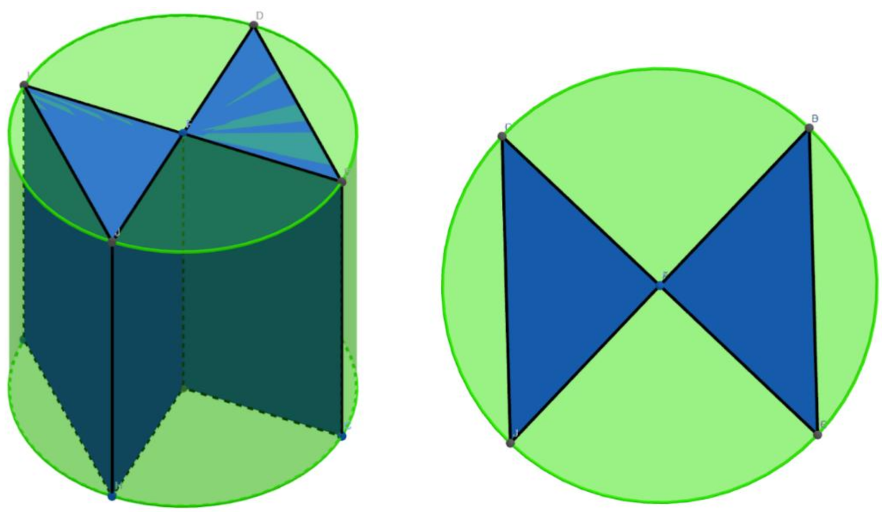
- Potenciar la comprensión del concepto de volumen a partir de la resolución de problemas geométricos que involucren volúmenes inscritos.
- Desarrollar habilidades de razonamiento lógico y visualización espacial al trabajar con figuras tridimensionales y calcular sus volúmenes.
- Fomentar la discusión y el intercambio de ideas entre los estudiantes al trabajar en grupos, promoviendo el abordaje conjunto de problemas y el aprovechamiento de las fortalezas individuales para lograr soluciones efectivas.



Las figuras geométricas inscritas en 3D, son una forma común de representar la presencia de una figura más pequeña dentro de una figura más grande. Estas figuras pueden tener una variedad de formas y tamaños y pueden ser encontradas en muchos contextos diferentes. Las figuras geométricas dentro de otras pueden ser útiles en la geometría y la física para representar objetos complejos y descomponerlos en partes más simples.

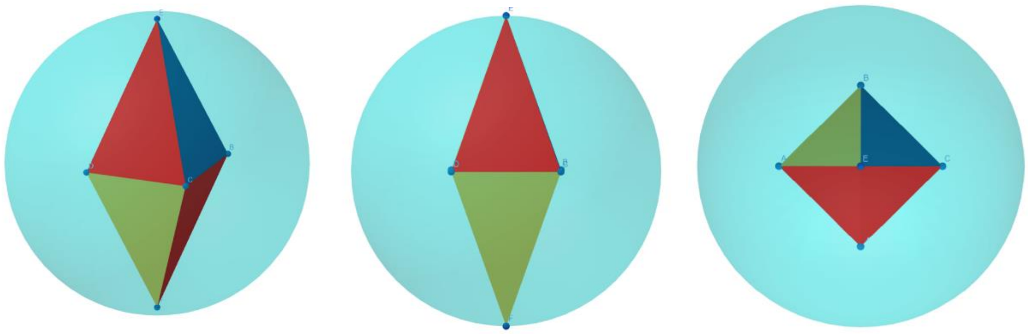


2. Observe la siguiente figura, determine el volumen que **NO** ocupan los prismas triangulares azules dentro del cilindro. Para esto tenga en cuenta que el radio de la base del cilindro es $r = 5m$ y la altura del cilindro es $h = 20m$



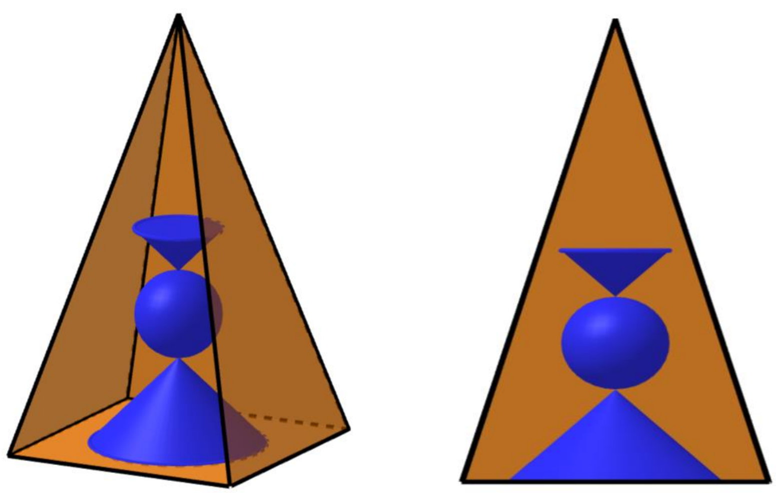
3. En las figuras se presentan dos pirámides cuadrangulares iguales que están pegadas desde sus bases, las cuales están inscritas en una esfera. Se muestran también las pirámides desde el frente de la esfera y desde la parte superior de ésta.

Tenga en cuenta que el radio de la esfera es $r = 1m$ y la longitud de la diagonal de la base de las pirámides es $D = r$, determine el volumen que ocupan las dos pirámides.



4. Observe y analice las siguientes figuras. Determine el volumen de la figura azul teniendo en cuenta lo siguiente:

- ***Pirámide cuadrangular:*** La diagonal de su base tiene una longitud $\boldsymbol{D = 8\ cm}$ y la longitud de su altura es $\boldsymbol{h = 10\ cm}$
- ***Cono grande:*** Su base tiene un diámetro de longitud $\boldsymbol{d = \frac{D}{2}}$ y su altura $\boldsymbol{A = 2\ cm}$
- ***Esfera:*** Tiene un radio de longitud $\boldsymbol{R = \frac{A}{2}}$
- ***Cono pequeño:*** Su base tiene un diámetro de longitud $\boldsymbol{M = 2R}$ y su altura $\boldsymbol{b = 1\ cm}$



Anexo 10. Prueba Final

“Yo puedo, yo quiero, yo voy a lograrlo” Tony Meléndez

Institución Educativa Metropolitano	
Prueba Final	**Fecha:**
Docentes: José Stiven Trujillo, Cristian Eduardo Yugue	**Asignatura:** Geometría

Estudiante:	Grado:

Problemas:

1. Dibuje dos segmentos, de tal forma que uno de ellos sea $\frac{5}{7}$ de la medida del otro.

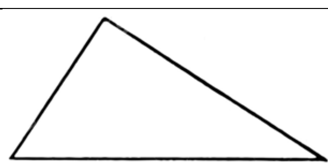
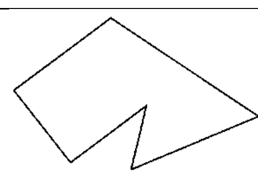
2. Dibuje dos segmentos y una semirrecta que sean paralelos entre sí, de tal forma que la distancia entre los tres objetos geométricos duplique la suma de la medida de los segmentos.

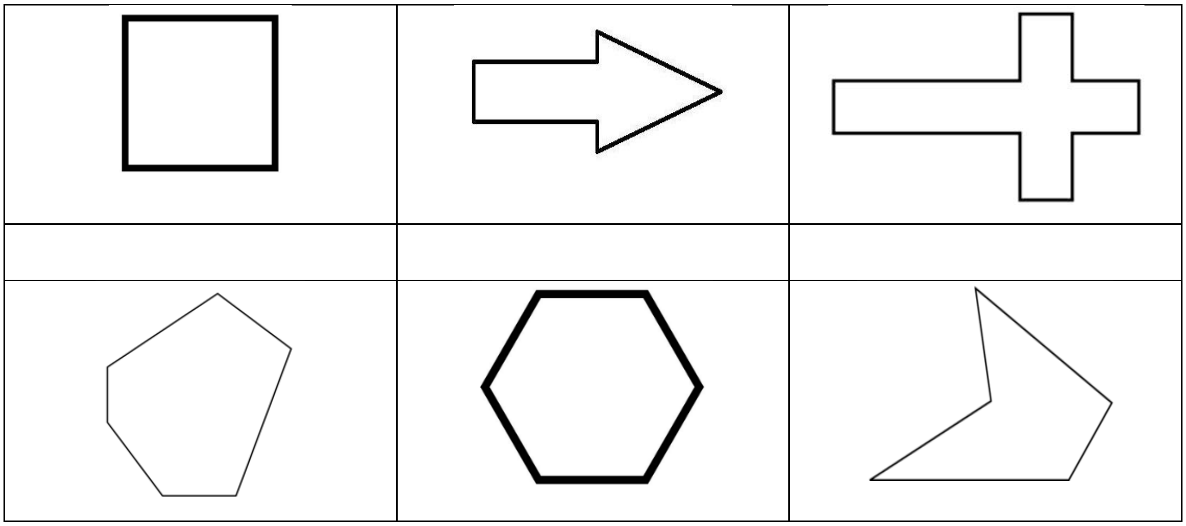
3. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera? Justifique su respuesta.
   c) Todas las rectas perpendiculares son secantes.
   d) Todas las rectas secantes son perpendiculares.

4. Dibuje un ángulo obtuso, un agudo, un recto, un llano y un ángulo completo.

5. Responde:
   c) ¿Cuál es la medida del ángulo suplementario a 35°?
   d) ¿Cuál es la medida del ángulo complementario a 35°?

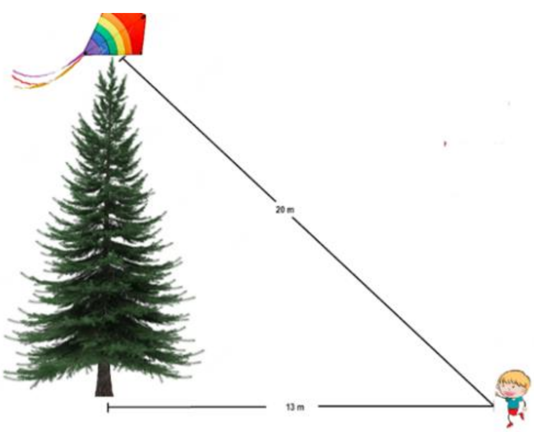
6. Escriba en la parte superior de la figura si es un polígono regular o irregular; además, si la figura es cóncava o convexa.

		Triángulo Equilátero 

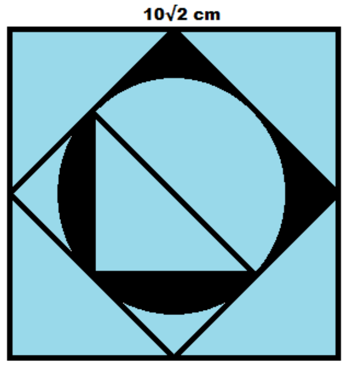


7. Escribe el teorema de Pitágoras, y responde ¿A qué tipo de triángulos es posible aplicarlo?

8. A un niño se le ha quedado atrapada una cometa en un árbol, la longitud de la cuerda de la cometa es de 20 metros, y el niño está situado a una distancia de 13 metros de la base del árbol como se muestra en la figura. ¿Cuál es la altura del árbol?



9. Determine el area de color negro teniendo cuento lo siguiente:
   - La longitud del lado del cuadrado grande es de $10\sqrt{2}cm$**.**
   - Los vertices del cuadrado pequeño caen sobre los puntos medios de los lados del cuadrado grande.



10. Determine el volumen del cubo inscrito en la esfera, teniendo en cuenta que el radio de la esfera es $r = 4\sqrt{3}cm$ y la diagonal de la base del cubo es $d = 8\sqrt{2}cm$.