RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: UNA OPORTUNIDAD PARA EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS

Mariana Urrutia Barragán

Universidad del Cauca

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación

Licenciatura en Matemáticas

Popayán

2023

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: UNA OPORTUNIDAD PARA EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS

Trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Mariana Urrutia Barragán

Directora

Dra. Martha Lucia Bobadilla Alfaro

Universidad del Cauca

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación

Licenciatura en Matemáticas

Popayán

2023

Nota de Aceptación

____

____

____

El presente trabajo fue aprobado por:

Directora:_______________________________

Dra. Martha Lucia Bobadilla Alfaro

Evaluador:_______________________________

Dr. Francisco Eduardo Enríquez Belalcázar

Coordinador del programa de Licenciatura en Matemáticas:_______________________________

Dr Aldo Iván Parra Sánchez

Lugar y fecha de sustentación: Popayán, 22 diciembre de 2023

Tabla de Contenido

Lista de ilustraciones

Lista de tablas

Introducción

Este documento es el resultado de un proceso reflexivo y analítico que busca de manera sistemática, presentar la práctica pedagógica realizada con los estudiantes de 9, 10 y 11 del Centro Educativo indígena Nasa Kiwe Tekh Ksxaw.

Los educadores matemáticos esperamos que los jóvenes no tengan que dejar en el olvido años de esfuerzo y estudio, porque no adquirieron competencias matemáticas que les permitirán hacer un uso flexible del conocimiento matemático escolar en la diversidad de contextos de la vida diaria en el que se puede aplicar. Deseamos que las competencias matemáticas relacionadas con la capacidad para analizar, razonar, comunicar ideas efectivamente , formular, resolver e interpretar problemas; los motiven y les permitan *recorrer la distancia* hacia una educación superior, si es que así lo desean. Pero ¿Cómo hacerlo?

La resolución de problemas en el contexto educativo es una herramienta fundamental que puede potenciar el desarrollo de las competencias matemáticas en los estudiantes. En este sentido, el presente trabajo se adentra en el análisis, aplicación e importancias de esta herramienta pedagógica, implementada dentro del Semillero de Matemáticas, que se enfoca en estrechar la brecha entre la educación básica y la educación superior; el Semillero no sólo busca difundir el gusto por las matemáticas, sino también mejorar las oportunidades educativas de jóvenes provenientes de entornos de bajos recursos.

El propósito central de la práctica fue contribuir al desarrollo de las competencias matemáticas de los estudiantes, centrándose en la resolución de problemas tipo Prueba Saber 11. Se plantean objetivos específicos que abordan la formulación de estrategias para resolver problemas matemáticos en diferentes contextos, la evaluación de las competencias mediante simulacros y la exposición de la importancia de la resolución de problemas en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Descripción del escenario de Práctica Docente

La práctica docente tuvo lugar dentro del Programa de interacción social: Semillero de Matemáticas. Este proyecto se estableció en el 2019 con el propósito principal de construir puentes entre la educación básica y la educación superior pública; para contribuir con el cierre de brechas existentes entre estos niveles educativos. Con el Semillero de Matemáticas se pretende llevar las matemáticas a diferentes comunidades e instituciones de la región, para despertar el gusto por las matemáticas y mejorar las condiciones de jóvenes de bajos recursos que mediante la educación pueden ascender en la escala social y económica.

El proyecto, se realizó en la Sede Norte de la Universidad del Cauca ubicada en el municipio de Santander de Quilichao, con la colaboración del Centro de Regionalización. La población a quien se dirige el proyecto está conformada por 30 estudiantes de los grados 9, 10 y 11 del Centro Educativo Agroecológico Nasa Kiwe Tekh Ksxaw, con énfasis agropecuarios, cuyo calendario corresponde al tipo A. El nombre Nasa Kiwi se traduce como “Los tres caminos”, pues a esta institución, pertenecen estudiantes de origen afrodescendiente, indígena y mestizo.

El referente teórico para las distintas metodologías implementadas en el Semillero es la Pedagogía Dialogante, que se caracteriza por repensar la manera de entender los fenómenos de la educación matemáticas, sus problemáticas y las relaciones existentes entre la educación matemática, la sociedad, la democracia y la justicia social. Esta pedagogía hace énfasis en diversos aspectos como la educación dialogada y problematizadora, la reflexión y acción, la emancipación, la competencia democrática, el conocimiento reflexivo matemático, la relación cultural y matemática, la matemática como construcción humana y social, y propende porque docente y estudiante sean sujetos políticos y no sólo cognitivos; aspectos necesarios para contribuir con la formación integral de ciudadanos críticos dispuestos a favorecer el desarrollo de su entorno.

Problemática

Si "la educación es la llave maestra que abre todas las puertas", entonces en Colombia las puertas continúan cerradas para muchos, el sistema educativo no es robusto ni de calidad, y en zonas rurales las oportunidades son mucho más reducidas; sin embargo, según (MEN, 2021) en el 2021 se incrementó el número de estudiantes que participaron en la Prueba Saber 11 de Calendario A, desde 2014. Esto evidencia el deseo de los jóvenes de progresar y acceder a una educación superior; no obstante, los resultados son desfavorecedores para sus anhelos.

La situación en el Cauca no es más reconfortante, el puntaje promedio de la Prueba Saber 11 en matemáticas es de 46%, que se encuentra por debajo del 52% a nivel nacional para los colegios de calendario A (Icfes, 2022), siendo éste último igualmente una cifra preocupante. Pero en el Centro Educativo Nasa Kiwe Tekh Ksxaw el resultado promedio en la prueba de matemáticas es aún más bajo, registrando un 40%, en el año 2022 (Icfes, 2022).

La Prueba Saber 11 es una evaluación estandarizada que mide las competencias matemáticas que los estudiantes desarrollan en su tránsito por la vida escolar; sin embargo es claro que a nivel nacional y en particular en el Cauca, dichas competencias no son alcanzadas. Esto tal vez se debe a que en Colombia se insiste en una educación matemática memorística y repetitiva, basada en contenidos, características propias de la educación tradicional donde prevalecen las técnicas algorítmicas y procedimentales; de esta manera se impone una matemática autoritaria y dogmática y el discurso matemático aparece aislado de las necesidades cotidianas, es descontextualizado y sin sentido, lo que a su vez desmotiva el interés de los estudiantes.

En vista de estas características de la educación tradicional, es difícil alcanzar una educación de calidad y significativa que impulse el futuro de los jóvenes; en particular, una educación que conecte los niveles de la educación básica-media y la educación superior pública. Uno de los aspectos que ayuda a cerrar las brechas entre estos dos niveles es el desarrollo de competencias matemáticas; es por ello que en este proyecto nos planteamos ¿Cómo mediante la solución de Problemas tipo Saber 11 se pueden desarrollar y potencializar las competencias matemáticas de los estudiantes?

Objetivos

Objetivo General:

Contribuir con el desarrollo de las competencias matemáticas de los participantes del Semillero, mediante solución de problemas tipo prueba Saber 11.

Objetivos Específicos:

- Plantear y diseñar estrategias que permitan a los estudiantes resolver problemas matemáticos en diferentes contextos.
- Estimular en los estudiantes la necesidad de integrarse, descubrir y sorprenderse sobre los diferentes fenómenos reales que se pueden estudiar con las matemáticas.
- Evaluar la evolución de las competencias de los estudiantes mediante una serie de simulacros.

- Mostrar la importancia de la resolución de problemas en el proceso enseñanza-aprendizaje que dará lugar a desmitificar las matemáticas.

Justificación

Los problemas matemáticos, majestuosa forma de poner en acto teorías y contenidos, por tanto herramienta esencial en esta compleja tarea de enseñar; son temidos para algunos y se convierten en una obsesión para otros, pero sin duda son la "excusa" perfecta para orientar el proceso de enseñanza - aprendizaje. En este sentido, la resolución de problemas se convierte en una oportunidad para ayudar a los estudiantes a ser "matemáticamente competentes". Ser matemáticamente competente es desarrollar "un conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socioafectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores" (MEN, 2006). No basta con la simple memorización y ejercitación de conceptos, de ser así, la enseñanza tradicional sería suficiente para contribuir con el desarrollo de competencias. Sin embargo los resultados de las pruebas nos muestran que este método no ha sido muy exitoso; por esto es necesario ir más allá. El (MEN, 2020) en su página oficial plantea que "*la actividad*", entendida como el trabajo intelectual, personal y grupal de los estudiantes, estimulada por las situaciones problema, es la que permitirá avanzar y profundizar en la comprensión, en las habilidades y en las actitudes de los estudiantes es decir, en la adquisición de competencias matemáticas.

Enseñar matemáticas por medio de la resolución de problemas es una forma diferente de vivir el aula, y distanciarse un poco de la popular y poco fructífera enseñanza tradicional.

Así pues, trabajar con la solución de problemas matemáticos presentes en la Prueba Saber 11 puede tener al menos dos ventajas: se desarrollan competencias matemáticas y se fortalecen y comprenden conceptos antes vistos; en consecuencia, se espera que cambien positivamente los puntajes en las Prueba Saber 11, lo cual será favorable para el porvenir de los estudiantes del Semillero.

Antecedentes

Muchos son los factores que estropean el alcance de competencias matemáticas en la etapa escolar, pero también son muchas las investigaciones que se hacen en busca del adecuado desarrollo de estas competencias utilizando las preguntas presentes en la Prueba Saber 11.

> La investigación realizada por (Barriosnuevo, Ceballos, & Suarez, 2017) sobre la poderosa capacidad que ejercen los problemas matemáticos en el aprendizaje de los estudiantes está expresa por la frase de Pólya, que citan los autores: "Se puede decir que aprender matemáticas es sinónimo de aprender a resolver problemas". También se afirma que esta habilidad contribuirá al mejoramiento de los resultados en las Pruebas Saber. Los autores apoyan su trabajo en estrategias lúdicas y en el método de la pregunta, con el objetivo de que los estudiantes adquieran habilidades que le permitan resolver los problemas y desarrollar una conciencia crítica que les conducirá a obtener seguridad en sí mismos.

(Pacheco & Pacheco, 2021) en su investigación nos invitan a evidenciar la relación entre la resolución de problemas y el desarrollo de competencias matemáticas en estudiantes de secundaria. En el desenvolvimiento del estudio se concluye que "el proceso de resolución de problemas potencializa las capacidades operativas y las habilidades cognoscitivas dentro y fuera del contexto educativo”; en consecuencia, el conocimiento mismo y el desarrollo de dicho proceso fortalecen el desarrollo y adquisición de las competencias matemáticas por parte de estudiantes.

Analizando los resultados de la investigación, las autoras concluyen que los estudiantes a través del proceso de resolución de problemas aprenden a pensar matemáticamente y a plantear estrategias para solucionar situaciones específicas; a la vez este proceso les permite identificar principios, leyes, operaciones y categorías. Todo esto contribuye con el desarrollo del conocimiento matemático y su praxis dentro y fuera del aula de clase.

El trabajo realizado por (Mazzilli, Hernández, & De La Hoz, 2016), considera que la resolución de problemas se configura como una de las actividades de mayor relevancia en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles. Los contenidos cobran sentido desde el momento en que los estudiantes comprenden adecuadamente procesos matemáticos y los asocian a la resolución de diversas situaciones que se presenten en la vida diaria. “Más que enseñar a los alumnos a resolver problemas, se trata de enseñarles a pensar matemáticamente, es decir, a que sean capaces de abstraer y aplicar ideas matemáticas a un amplio rango de situaciones y, en este sentido, los propios problemas serán las “herramientas” que los llevarán a ello” (Echenique,2006,p.10 citado por Mazzilli, Hernández, & De La Hoz, 2016, p.104).

Así, las investigadoras concluyen que enseñar a los estudiantes a resolver problemas matemáticos debe figurar entre las intenciones educativas de los docentes. No basta con proponer problemas matemáticos para que los alumnos los resuelvan; es necesario que se le dé un tratamiento adecuado, analizando estrategias y técnicas de resolución, “verbalizando” el pensamiento y contrastándolo con el de otras personas. Se debe enseñar procesos de resolución a través de buenos modelos, con ejemplos adecuados, dedicar un espacio en el horario escolar y conseguir un clima propicio en el aula que favorezca la adquisición de las correspondientes destrezas y hábitos. No solo es importante enseñar la teoría para resolver problemas, se necesita que el estudiante aprenda a utilizar procedimientos que le permitan de manera autónoma resolver problemas matemáticos; lamentablemente los docentes no acostumbran a enseñar estos procedimientos en el aula, situación que ha despertado el interés entre numerosos investigadores.

Por su parte (López J. E., 2022) propone usar la modelación matemática para la solución de problemas tipo Pruebas Saber 11. En su investigación registró los procesos matemáticos utilizados por los estudiantes, permitiendo conocer sus dificultades respecto al conocimiento matemático y por medio de los diversos registros de representación: simbólica, de lenguaje natural, tabulación y gráfica, el investigador comprobó que la modelación matemática permite establecer modelos que ayudan a afianzar el conocimiento acerca de los procedimientos y definiciones matemáticas.

Por otra parte, su trabajo encuentra una similitud entre el proceso de modelación matemática y el proceso de resolución de problemas; ambos utilizados para la solución de problemas con contextos cotidianos y en la construcción de modelos a partir de las condiciones del problema.

Marco teórico

Estándares básicos de competencias: guía básica de lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden

Los estándares básicos de competencias han sido creados por el Ministerio de Educación Nacional como uno de “los parámetros de lo que todo niño, niña y joven debe saber y saber hacer para lograr el nivel de calidad esperado a su paso por el sistema educativo”.

"Los estándares son unos referentes que permiten evaluar los niveles de desarrollo de las competencias que van alcanzando los estudiantes en el transcurrir de su vida escolar. Una competencia ha sido definida como un saber hacer flexible que puede actualizarse en distintos contextos, es decir, como la capacidad de usar los conocimientos en situaciones distintas de aquellas en las que se aprendieron. Implica la comprensión del sentido de cada actividad y sus implicaciones éticas, sociales, económicas y políticas" (MEN, 2006, pág. 12)

Los estándares básicos de competencias se constituyen en una guía para:

• El diseño del currículo, el plan de estudios, los proyectos escolares e incluso el trabajo de enseñanza en el aula.

• La producción de los textos escolares, materiales y demás apoyos educativos

• El diseño de las prácticas evaluativas adelantadas dentro de la institución

• La formulación de programas y proyectos, tanto de la formación inicial del profesorado, como de la cualificación de docentes en ejercicio.

Si bien los estándares hacen énfasis en las competencias más que en los contenidos temáticos, no los excluyen. La competencia no es independiente de los contenidos temáticos de un ámbito del saber qué, del saber cómo, del saber por qué o del saber para qué; pues para el ejercicio de cada competencia se requieren muchos conocimientos, habilidades, destrezas, comprensiones, actitudes y disposiciones específicas del dominio que se trata, sin los cuales no puede decirse que la persona es realmente competente en el ámbito seleccionado.

Es conveniente aclarar que un estándar no es un objetivo, una meta o un propósito, una vez fijado un estándar, proponerse alcanzarlo o superarlo sí se convierte en un objetivo, una meta o un propósito, pero el estándar en sí mismo no lo es. Un estándar tampoco es un logro. Una vez fijado un estándar, haberlo alcanzado o superado sí es un logro.

El diseño curricular de cada institución debe desarrollar de manera integrada los distintos pensamientos y no cada uno de ellos de manera aislada, *esto se logra si el trabajo en el aula se piensa desde las situaciones problema, más que desde los contenidos*. De esta forma es posible aprovechar en cada situación las posibilidades de interrelacionar los estándares correspondientes a los diferentes pensamientos.

"Ahora bien, lo que verdaderamente hace posible desarrollar las competencias en su plena expresión, es la generación de situaciones de aprendizaje significativas en donde la formulación de problemas y la búsqueda de respuestas a ellas, la valoración de los saberes previos, el estudio de referentes teóricos, las preguntas constantes, el debate argumentado y la evaluación permanente, sean ingredientes constitutivos de toda práctica pedagógica" (MEN, 2006, pág. 17)

Estándares básicos de competencias en matemáticas

Desde inicios de la República en Colombia, hasta la década de los sesenta del siglo pasado, los fines de la educación matemática se fundamentaron en un carácter científico cuya visión de la naturaleza de las matemáticas como cuerpo estable e infalible de verdades absolutas, condujo a suponer que:

"sólo se requería estudiar, ejercitar y recordar un listado más o menos largo de contenidos matemáticos–hechos, definiciones, propiedades de objetos matemáticos, axiomas, teoremas y procedimientos algorítmicos– para formar a todos los estudiantes en el razonamiento lógico y en los conocimientos matemáticos." (MEN, 2006, pág. 46)

Sin embargo, estos argumentos comenzaron a ser cuestionables, especialmente por la consolidación de los valores democráticos y por el ejercicio de la ciudadanía crítica es decir, es necesario que en los procesos de la enseñanza de las matemáticas se asuma la clase como una comunidad de aprendizaje donde docentes y estudiantes interactúen para validar conocimientos, para ejercitar la iniciativa y la crítica y aplicar ese conocimiento en diversas situaciones y contextos.

Competencias matemáticas:

Las competencias matemáticas se definen como un conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socioafectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores.

Las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos

En el conocimiento matemático también se han distinguido dos tipos básicos: *el conocimiento conceptual* y el *conocimiento procedimental*. El primero está más cercano a la reflexión y se caracteriza por ser un conocimiento teórico, producido por la actividad cognitiva, muy rico en relación entre sus componentes y con otros conocimientos; tiene un carácter declarativo y se asocia con el *saber qué* y el *saber por qué*. Por su parte, el procedimental está más cercano a la acción y se relaciona con las técnicas y las estrategias para representar conceptos y para transformar dichas representaciones; con las habilidades y destrezas para elaborar, comparar y ejercitar algoritmos y para argumentar convincentemente.

Según el (MEN, 2006, pág. 50), ser matemáticamente competente significa:

- Formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas. Ello requiere analizar la situación; identificar lo relevante en ella; establecer relaciones entre sus componentes y con situaciones semejantes; formarse modelos mentales de ella y representarla externamente en distintos registros; formular distintos problemas, posibles preguntas y respuestas que surjan a partir de ella. Este proceso general requiere del uso flexible de conceptos, procedimientos y diversos lenguajes para expresar las ideas matemáticas pertinentes y para formular, reformular, tratar y resolver los problemas asociados a dicha situación. Estas actividades también integran el razonamiento, en tanto exigen formular argumentos que justifiquen los análisis y procedimientos realizados y la validez de las soluciones propuestas.

- Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; para utilizar y transformar dichas representaciones y, con ellas, formular y sustentar puntos de vista. Es decir, dominar con fluidez distintos recursos y registros del lenguaje cotidiano y de los distintos lenguajes matemáticos.
- Usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración.
- Dominar procedimientos y algoritmos matemáticos y conocer cómo, cuándo y por qué usarlos de manera flexible y eficaz. Así se vincula la habilidad procedimental con la comprensión conceptual que fundamenta esos procedimientos.

Prueba Saber 11

Según el Ministerio de Educación Nacional**,** las Pruebas Saber son evaluaciones externas estandarizadas aplicadas por el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (Icfes). Uno de los propósitos de esta prueba es comprobar el grado de desarrollo de las competencias de los estudiantes que están por finalizar el grado undécimo de la educación media y proporcionar elementos al estudiante para la realización de su autoevaluación y el desarrollo de su proyecto de vida.

Prueba Saber 11 en matemáticas

Según la guía de orientación Saber 11 del 2021-2, la prueba de matemáticas evalúa tres componentes, determinadas por las competencias establecidas, que recogen los elementos centrales de los procesos que se describen en los estándares básicos de competencias:

- *Interpretación y representación:* "Es la habilidad para comprender y transformar la información presentada en formatos distintos como tablas, gráficas, conjuntos de datos, diagramas, esquemas, entre otros, así como la capacidad de utilizar estas representaciones para extraer información relevante que permita establecer relaciones matemáticas e identificar tendencias y patrones. Con el desarrollo de esta competencia se espera que un estudiante utilice coherentemente registros como el simbólico, el natural, el gráfico y todos aquellos que se dan en situaciones que involucran las matemáticas" (Icfes, 2021). Esta competencia se relaciona con los elementos centrales de los procesos de comunicación, representación y razonamiento mencionado en los estándares básicos de competencias.
- *Formulación y ejecución:* "Es la capacidad de plantear y diseñar estrategias que permitan solucionar problemas provenientes de diversos contextos, bien sean netamente matemáticos o bien sean aquellos que pueden surgir en la vida cotidiana, siempre que sean susceptibles de un tratamiento matemático. Se relaciona también con la habilidad o destreza para seleccionar y verificar la pertinencia de soluciones propuestas a determinados problemas y estrategias de solución desde diferentes puntos de vista. Se

espera que un estudiante diseñe estrategias apoyadas en herramientas matemáticas, proponga y determine rutas posibles para la solución de problemas, siga estrategias dadas para encontrar soluciones y finalmente resuelva las situaciones que se le propongan" (Icfes, 2021, págs. 15,16). Esta componente evalúa el proceso de formulación, tratamiento y resolución de problemas; el proceso de formulación, comparación y ejercitación de procedimientos, y el proceso de modelación.

- *Argumentación:* Se relaciona con la capacidad para validar o refutar conclusiones, estrategias, soluciones, interpretaciones y representaciones en diversas situaciones, siempre justificando el por qué o el cómo se llegó a estas, a través de ejemplos y contraejemplos, o señalando y reflexionando sobre inconsistencias presentes. Se espera que un estudiante justifique la aceptación o el rechazo de afirmaciones, interpretaciones y estrategias de solución basado en propiedades, resultados o verbalizando procedimientos matemáticos (Icfes, 2021, pág. 16). Cabe indicar que esta competencia se relaciona con los procesos de razonamiento y la modelación.

Contenidos matemáticos, curriculares y estructura de la Prueba Saber 11

Los contenidos matemáticos son los recursos de los que dispone un estudiante para enfrentar las situaciones de la prueba. La prueba Saber 11 consta de 50 preguntas de matemáticas distribuidas en tres categorías: Estadística, Geometría, Algebra y Cálculo. Estas están divididas de la siguiente manera:

Interpretación y Representación 34%, Formulación y Ejecución 43% y Argumentación 23%

Situaciones y contextos de la Prueba Saber 11:

a. Familiares o Personales: involucran situaciones cotidianas del entorno familiar o personal. Incluyen cuestiones como finanzas personales, gestión del hogar, transporte, salud y recreación.
b. Laborales u ocupacionales: involucran tareas que se desarrollan en el trabajo, siempre y cuando no requieran conocimientos o habilidades técnicas propias de una ocupación específica.
c. Comunitarios o sociales: involucran lo relacionado con la interacción social de los ciudadanos y aquello que es propio de la sociedad en su conjunto. Incluyen cuestiones como política, economía, convivencia y cuidado del ambiente.
d. Divulgación científica: involucran situaciones propias de la ciencia que son de conocimiento público por la naturalidad de su lenguaje e importancia social y cultural.

Situación problema y método de solución de problemas

"Un problema es una situación cuantitativa o no, de la que se pide una solución, para la cual los individuos implicados no conocen medios o caminos evidentes para obtenerla". (S. Krulik y K. Rudnik, 1980, como se citó en Becerra et.al, 2005)

Perales (1993) plantea que "el problema podría ser definido genéricamente como cualquier situación prevista o espontánea que produce, por un lado, un cierto grado de incertidumbre y, por el otro, una conducta tendente a la búsqueda de su solución".

Woods et al. (1985) referenciando por Sigüenza (1990) expone que el "problema es una situación estimulante para la cual el individuo no tiene respuesta, es decir, el problema surge cuando el individuo no puede responder inmediata y eficazmente a la situación". Sin embargo, Sigüenza (1990) aclara que una "situación no debe considerarse como problema si no requiere análisis de los hechos y razonamiento para elaborar la estrategia a seguir durante el proceso de resolución, es decir, para diseñar la forma de obtener los datos necesarios (numéricos o no) y de procesarlos para conseguir la respuesta correcta."

Como se puede observar todas las anteriores definiciones concuerdan en que un problema es una situación que no tiene una respuesta inmediata para el individuo, por lo cual es necesario de un análisis y un razonamiento de hechos, datos y conceptos para poder hallar respuestas; además genera una sensación de incertidumbre que provoca interés y la búsqueda de la solución de este.

El uso de situaciones problema brinda al alumno diversidad de actividades y herramientas que ayudan a la construcción de su conocimiento; es decir, ofrece oportunidades diferentes para que pueda aprender, crear significados, asimilar y acomodar la nueva información a su estructura conceptual y construir conocimiento y afianzarlo. Además las situaciones problema permiten el fortalecimiento de habilidades cognitivas propias de las ciencias como el pensamiento hipotético-deductivo, pues la construcción de un conocimiento en el marco de una situación problema puede generar un aprendizaje más significativo al apropiar una imagen de ciencia más cercana a la realidad, lo que adquiere relevancia en la vida cotidiana del niño.

Furio (1994) plantea que cada unidad temática podría abordarse como una situación problema, la cual se traducirá en un conjunto de actividades articuladas que se realizan por grupos para llegar a la solución del problema. Esta metodología es nueva para el alumno lo cual reevaluaría su rol en el aula de clases, pues pasaría a ser un agente activo de su propio aprendizaje y así generar más interés por parte de este.

Una de las primeras referencias acerca del significado de la resolución de problemas la encontramos en Leif y Delazy (1961). Para ellos, la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas encuentra su significado en saber aplicar los conocimientos que previamente se han adquirido. Para estos autores, resolver un problema significa buscar la respuesta a la cuestión planificada, sin necesidad de hacer experimentos reales, que a veces, incluso, son imposibles de realizar. Por tanto se trata de buscar un determinado número de problemas adecuados al nivel de conocimiento y lenguaje de los estudiantes que les facilite esta aplicación práctica de aquello que han aprendido.

Pedagogía de la pregunta

(Zuleta, 2005) nos invita en su artículo "La pedagogía de la pregunta. Una contribución para el aprendizaje" a que tanto maestros como alumnos adoptemos mutuamente una actitud crítica y creativa frente a la pedagogía de la pregunta, que logra avivar la imaginación, la fantasía y la curiosidad en todos los compañeros de clase. De acuerdo con (Gadamer,1997 citado por Zuleta, 2005, p.116) "el preguntar es también el arte de pensar" es decir, son dos procesos intelectuales inseparables y a partir de este enlace se producen nuevos conocimientos, primero porque quien pregunta formaliza la búsqueda reflexiva del conocimiento; segundo porque si el hombre piensa y tiene conciencia de ello, puede así mismo plantearse preguntas y posibles respuestas; a partir de este necesario enlace se producen nuevos conocimientos.

Pedagogía dialogante

Hace años Julián de Zubiría se empeñó en convertir las prácticas educativas en experiencias pedagógicas; así fue como publicó su libro *Los modelos pedagógicos: hacía una pedagogía dialogante.* Decidido a defender la idea de que "uno no va a la escuela a aprender, sino a desarrollarse" (Zubiría Samper, 2006). Presenta un modelo innovador, La Pedagogía

Dialogante, que se ha convertido en un ideal a seguir para muchas escuelas y colegios que desean renovar su forma de enseñar.

Zubiría cree que el conocimiento se construye a partir del diálogo pedagógico entre el estudiante, el saber y el docente y para ello es condición indispensable contar con la mediación adecuada de un maestro que favorezca de manera intencionada y trascendente el desarrollo integral del estudiante. Primeramente, el modelo pedagógico dialogante debe medir el nivel de desarrollo de los estudiantes y en especial detectar sus debilidades y fortalezas. Reconocer su talento para apoyarlo y orientarlo es tan importante como ubicar las debilidades. Después de esto se debe ahondar en contenidos cognitivos, procedimentales y valorativos; por ejemplo la lectura no es un simple proceso decodificador, leer consiste en convertir el texto en una breve estructura de proposiciones, la cual se liga con las estructuras mentales y socioafectivas del sujeto.

Por último, las estrategias metodológicas de este modelo deben ser de tipo interestructurante y dialogante: el maestro diluye su función y se convierte en un guía, en un facilitador o en un acompañante del estudiante; desaparecen las tareas, los ejercicios y las lecturas pasivas; se recurre así a la acción, al taller y al trabajo por proyectos. De esta manera se asigna al maestro la función esencial de mediador de la cultura; él planifica, organiza, selecciona, jerarquiza y ordena los propósitos y contenidos a ser trabajados, para garantizar que esos propósitos y contenidos sean acordes con el nivel de desarrollo cognitivo y socioafectivo de los estudiantes.

La enseñanza dialogada exige que el que aprende comprenda lo que hace, sepa por qué lo hace, conozca las razones que justifican las elecciones de las actividades para conseguir las metas y comprender la organización de su desenvolvimiento. En este sentido, las mesas redondas, las lecturas colectivas, los debates y los seminarios son excelentes maneras para favorecer el diálogo constructivo que generan condiciones propicias para la enseñanza y el aprendizaje. El autor propone también que las temáticas a tratar deberán dividirse y ser claras para los estudiantes con anterioridad a su realización, trabajándose por niveles de complejidad y de profundidad y no de extensión, así contribuir de manera sensible a fomentar la autonomía de los estudiantes.

La investigación realizada por (Zuleta Araújo, 2011)nos invita a tomar en consideración algunos aspectos al trabajar con situaciones problema:

Requisitos a cumplir una situación problema: Debe referirse a la construcción como mínimo de un concepto, debe haber varias situaciones problema especificas dentro de la general debe incluir las unidades conceptuales ya construidas por los alumnos, debe estar contextualizada para que el alumno pueda darle sentido y debe incluir un componente lúdico, imaginativo o literario.

Aspectos para que sean más interesantes las situaciones problema

- Magnificación: dar valores límites a los datos del problema.
- Atributos inverosímiles: asignar atributos que no corresponden lógicamente a la situación mencionada.
- Cambios espacio-tiempo: futuriza, retrocede el tiempo, utiliza contextos geográficos diferentes, entre otros.
- Búsqueda de incoherencia: generar ideas que concuerden con la falsedad de las condiciones del enunciado.
- Problematización: nuevos puntos de vista a las situaciones que parecen ya resueltas.
- Reconvención de estados negativos: convertir las condiciones negativas de un problema haciendo de ellas ventajas.

El trabajo en grupo para la resolución de problemas

Una de las estrategias que plantea (Matute, 2004)para la resolución de problemas es trabajar en grupo. Según (Pons, González, & Serrano, 2008) para que se dé un verdadero aprendizaje es importante que el estudiante sea considerado como autor o constructor de su propio aprendizaje poniendo al docente como la persona que estará presente para guiar y acompañar todo momento en el que el alumno necesita ayuda (p. 1). Por consiguiente, el trabajo en equipo será una de las mejores maneras para lograr el desarrollo de competencias matemáticas y sociales ya que requiere del intercambio de ideas matemáticas y a la vez un compromiso de todos los miembros para el cumplimiento de los objetivos propuestos.

- **¿Cómo preparar el trabajo en grupo?:** Después de formar los grupos de trabajo es necesario que tanto el docente como los estudiantes tengan claro los objetivos del trabajo, el tiempo de duración y a la vez cuenten con el material que será indispensable para demostrar el progreso del grupo. Al preparar a los estudiantes a trabajar en equipo es fundamental incentivar la discusión y diferentes puntos de vista, con el fin de que durante el proceso de resolución, la información que se vaya a brindar esté encaminada desde las preguntas que hayan surgido del grupo, para que el apoyo del docente esté dirigido más que a buscar una respuesta, hacia la creación de hábitos de hacer preguntas.
- **¿Cómo actuar durante el trabajo en grupo?**: En esta etapa del trabajo cooperativo, el docente juega un papel importante pues es él quien deberá dar seguimiento a los grupos, debe promover en los grupos de aprendizaje la reflexión tanto individual como grupal con la finalidad de que todos los sujetos que conforman el equipo interactúen y aprendan al mismo tiempo.

- **¿Cómo finalizar el trabajo de los grupos?**: La socialización de los trabajos grupales no se trata de que cada grupo presente uno tras otro sus resultados; es más eficaz pedir la respuesta de un solo grupo para que los demás maticen, completen o critiquen; o bien solicitar una transcripción simultánea de las respuestas de los grupos en la pizarra, para discutir las convergencias y discrepancias (Vilches & Gil, 2012:45). Para Riveros et al. (1990), la discusión final debe estar guiada por: inventario de las respuestas que se encontraron; inventario de las maneras correctas e incorrectas de resolución, de tal manera que se explique a los demás miembros del grupo los procesos que los llevaron a obtener el resultado. Finalmente se debe discutir y reflexionar sobre las formas correctas e incorrectas de resolver problemas, usando el modelo de resolver los problemas, en donde puedan expresar el porqué del uso de una u otra heurística. Dentro de esta discusión el análisis de los errores servirá de mucho para el enriquecimiento del conocimiento.

Metodología

El método que se propone para el desarrollo de la práctica pedagógica será mediante secuencias didácticas inspiradas en la teoría de Robert Gagné mencionada en (Barraza Macías, 2020) y estableciendo las fases del Método de Mason, Burton y Stacey.

Método de Mason, Burton y Stacey

El método de Mason, Burton y Stacey citado en la investigación de (Gómez, 2007) puede ser utilizado para resolver ciertos problemas de matemáticas que no están alejados del contexto real de cualquier individuo. Se propone una serie de estrategias para que el resolutor las utilice en el proceso de resolución. Estas estrategias están enmarcadas en tres grandes fases asociadas a rótulos. Los rótulos son unas etiquetas que aconsejan utilizar durante la resolución de cualquier problema de matemáticas y que se convierten en una manera de sistematizar el proceso de resolución, para que pueda ser analizado durante el mismo. Las características de cada una de las fases con sus respectivos rótulos son descritas a continuación:

1. Fase de abordaje: Esta fase tiene que ver con formular el problema de forma precisa y decidir exactamente qué es lo que se quiere hacer. Hay que hacerse con el problema de dos maneras distintas; identificando la información que se da y determinando qué es lo que se pregunta realmente. Por último, se debe hacer preparativos técnicos para el ataque central, que pueden consistir en decidir una notación a utilizar o una forma de anotar los resultados de las particularizaciones. Por estas razones es útil estructurar el trabajo en la fase de abordaje respondiendo a las tres preguntas siguientes, que a su vez son rótulos: ¿Qué es lo que sé?, ¿Qué es lo que quiero? y ¿Qué puedo usar?

2. Fase de ataque: La fase de ataque está determinada cuando se siente que el problema se ha instalado dentro de la mente y ya es propiedad del individuo, y se completa cuando o bien se abandona o bien se resuelve. Intentar, podría ser, pero ¿por qué?, ¡ATASCADO! y ¡AJA! Son los rótulos propuestos en esta fase.

3. Fase de revisión: Está determinada cuando se consigue una resolución razonablemente buena o cuando se está a punto de rendirse, en este momento es esencial revisar el trabajo hecho. Como su nombre lo indica, es el momento de mirar atrás, a lo que ha pasado, para mejorar y ampliar la capacidad de razonamiento y para intentar situar la resolución en un contexto más general. Comprobar, reflexionar, y extender son los rótulos que se aconseja utilizar en la fase de revisión.

Secuencia didáctica de Robert Mills Gagné

El método propuesto para el desarrollo de la práctica pedagógica será mediante la secuencia didácticas inspiradas en la teoría de Robert Gagné mencionada en (Barraza Macías, 2020).

Para el psicólogo y pedagogo estadounidense Robert Mills Gagné (1916-2002), el aprendizaje parte de la interacción de la persona con su entorno y en tal sentido hay un cambio en sus capacidades, produciendo maduración o desarrollo orgánico. Gagné establece una relación significativa entre el aprendizaje y los eventos organizados ante una situación instruccional.

Las 8 fases de aprendizaje que propone Gagné son: Motivación, Comprensión, Adquisición, Retención, Recuperación, Generalización, Desempeño y Retroalimentación. Al trabajar estas fases se pretende contribuir con la construcción de redes neuronales que archiven la información en la memoria a largo plazo, con el fin de realizar estructuras cognitivas que faciliten el aprendizaje, para ser retomado en cualquier situación requerida.

Se busca que la propuesta de secuencia didáctica logre un impacto dentro del aula con los alumnos, para que estos registren en su memoria información útil que puedan usar en la resolución de problemas de su vida cotidiana.

No obstante, en esta propuesta metodológica hemos considerado pertinente modificar algunas de las fases de Gagné y reemplazarlas por otras, con la intención de contribuir con el desarrollo de competencias matemáticas (argumentación, interpretación y representación y formulación y ejecución) mediante problemas tipo saber 11.

De esta manera la secuencia didáctica propuesta tiene la siguiente estructura.

Tabla 1: Secuencia didáctica

Secuencia didáctica			
Periodo de Aplicación:			
Categoría:			
Temas:			
Contenidos:			
Objetivo de la guía:			
Sesiones	**Fase de aprendizaje**	**Descripción de actividades**	**Tiempo (min)**
Inicio	**1) Motivación:** Es un llamado a la atención de los alumnos o puesta en alerta.	Implementar actividades y ejercicios que estimulen la atención en los estudiantes y los preparen para estar concentrados al trabajar. Además, impulsa la participación y el trabajo en grupo. (Juego matemáticos, videos, actividades de atención)	10
	2) Comprensión: Se dirigen los mecanismos de atención hacía los contenidos que se desean comprender y las competencias que se esperan alcanzar.	Dar a conocer el tema y contenidos a trabajar mediante una pregunta tipo Prueba Saber 11, de dificultad baja, presentadas en la guía, que será utilizada para introducir los contenidos.	20
Desarrollo	**3) Adquisición:** Captar y utilizar elementos cognitivos con el fin de interpretar la realidad, incluyendo la capacidad de simbolización	Proponer problemas de la prueba saber 11, en especial aquellos que para su resolución sean necesaria las competencias de formulación y ejecución e interpretación y representación.	30
	4) Retención: La información es procesada dentro de la memoria a corto plazo con la intención de determinar la permanencia en la memoria a largo plazo de forma indefinida o con desvanecimiento paulatino.	Plantear problemas que fortalezcan y demuestren las competencias aplicadas anteriormente en especial aquellas de formulación e interpretación y representación.	20
Cierre	**5) El efecto protegido:** Es la aplicación de lo aprendido al enseñar a otros	Al finalizar los problemas propuestos en la guía didáctica, se pedirá que grupos o estudiantes expliquen la resolución de un problema determinado al resto de los estudiantes.	30
	6) Socialización: Los estudiantes comparten y argumentan las decisiones tomadas ante el problema	Se realizarán problemas que requieran de habilidades argumentativas para encontrar la solución, este tipo de problemas se plantean para ser discutidos por los integrantes del grupo.	20
	7) Recuperación:	Se desarrollan actividades y juegos dinámicos con el fin fortalecer conceptos y desarrollar habilidades.	60

Cronograma

Tabla 2: Cronograma de actividades

Sesión	Guía	Contenidos Matemáticos
1	Inauguración	
2	Estadística	• Prueba Diagnóstica • Diferentes tipos de representación de datos • Promedio y rango estadístico • Media, mediana, moda y rango estadístico.
3	Estadística	• Probabilidad y Combinaciones • Prueba Diagnóstica
4	Estadística	• Los números racionales expresados como fracciones, razones, números decimales o porcentajes
5	Geometría	• Área y Perímetro de rectángulos, triángulos y círculos. • Teoremas clásicos como el de Pitágoras y de Tales.
6	Geometría	• Paralelogramos, esferas, paralelepípedos rectos, cilindros y sus medidas • Sólidos y figuras geométricas como pirámides y polígonos de más de cuatro lados
7	Geometría	• Paralelogramos, esferas, paralelepípedos rectos, cilindros y sus medidas • Sólidos y figuras geométricas como pirámides y polígonos de más de cuatro lados
8	Algebra y Calculo	• Expresiones algebráicas y operaciones entre ellas.
9	Algebra y Calculo	• Representación gráfica y algebraica de funciones racionales, trigonométricas, polinomiales, exponenciales y logarítmicas, además de propiedades básicas, periodicidad, dominios y rangos.
10	Algebra y Calculo	• Relaciones lineales y afines, y razones de cambio (tasas de interés, tasas cambiarias, velocidad, aceleración, etcétera).
11	Preparación de Clausura	• Preparación de carteleras y juegos matemáticos • Tercera Prueba.
12	Clausura	

- Se realizaron 5 guías didácticas para las 3 categorías que evalúa la prueba Saber. Cada secuencia contó con las guías respectivas para su realización (ver guía 1, 2 y 3 de Estadística; guía 4 de Geometría y guía 5 de Álgebra)

- Al iniciar la práctica se aplicó un simulacro de la prueba Saber 11 en matemáticas como diagnóstico del nivel de desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes.
- Trabajada una categoría, se evaluó el éxito con un simulacro de 1 hora.
- Se finalizó el proceso con un simulacro, para evaluar las competencias de los estudiantes, analizar y extraer conclusiones de la práctica pedagógica.

Recuento histórico y análisis crítico

Inauguración: yincana matemática

Ilustración 1. Participantes del Semillero en la Sede Norte de la Universidad del Cauca

Un total de 63 estudiantes asistieron al Semillero en su inauguración. De ellos 33 son de la Institución Educativa Guillermo León Valencia, donde se llevó a cabo por primera vez el programa de bienvenida. Los 30 restantes son estudiantes de los grados noveno, décimo y undécimo del Centro Educativo Nasa Kiwe Tekh Ksxaw, quienes serán participantes de esta práctica pedagógica en la sede norte de la Universidad del Cauca.

La inauguración del Semillero de Matemáticas tuvo por objetivo anunciar el comienzo de este Programa de Proyección Social de una manera entretenida y organizada. Para tal fin se preparó un cronograma de actividades. La protagonista fue la “Yincana Matemática”: un conjunto de juegos de ingenio, que presentan una versión interesante y simpática de las matemáticas para así impulsar y cultivar el interés por ellas.

El programa de inauguración fue desarrollado en el siguiente orden:

Palabras de bienvenida, entrega de materiales, encuesta sobre la perspectiva de las matemáticas, juegos de concentración y agilidad mental, organización de los equipos, entrega de folletos e indicaciones para la Yincana, receso, y finalmente la Yincana Matemática.

Cada grupo escogió el nombre que los identificaría, estos fueron: “Mil de cilantro”, “caldo sin carne”, “dos mil de ajo”,” Legend” y “sin señal”. Estas nominaciones manifiestan un componente cultural de los participantes, su conciencia y sentido del humor ante situaciones cotidianas de la vida y el ímpetu que los caracterizó durante esta jornada. Vale decir que el efusivo interés de algunos participantes se desorientó hacia deshonestas intenciones de juego.

- **“Vence al dragón”:** El juego de realidad aumentada “Vence al Dragón” dio inició a la serie de juegos matemáticos. El juego consistía en descargar la aplicación CoSpaces Edu en virtud de acceder a un espacio de realidad aumentada. La idea era responder a las preguntas de geometría de unos aldeanos para obtener pistas y develar la frase secreta. Se evidenció confusión en conceptos básicos de geometría como la suma de los ángulos internos de un triángulo o la clasificación de los ángulos.

  Tangram: Algunos grupos en el tercer nivel, Tangram, manifestaron dificultades para su superación. Se observó inconvenientes para recibir e interpretar las formas que debían construir con las 7 piezas del Tangram, lo que nuevamente condujo a intentos de trampas.

- **Torre de Hanoi:**

Con el penúltimo nivel de la Torre de Hanoi, se pretendía evaluar las dificultades y estrategias durante la resolución de un problema. En este nivel surgieron palpables limitaciones de planificación y razonamiento, así como la capacidad de tomar decisiones, la capacidad de realizar varias tareas al mismo tiempo y la estimación temporal.

- **Acertijos matemáticos:** El último nivel en la Yincana lo conformaron tres acertijos matemáticos:

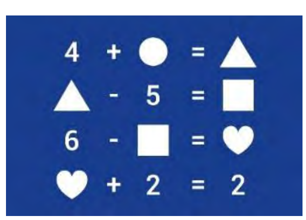
Ilustración 2: Acertijo visual

El primero, una prueba de agudeza visual en la que fue necesario identificar todos los cuadrados del dibujo. Los chicos no tuvieron mayores inconvenientes, pues identificaron qué estrategia usar para encontrar el número total de cuadrados.

Ilustración 3: Reto matemático

Este reto pretendía que los estudiantes analizaran y encontraran una regla general. Los participantes no manifestaron mayor dificultad para conseguirlo.

Ilustración 4: Acertijo figuras geométricas



Este acertijo no es más que un sistema de ecuaciones en el que los grupos encontraron el valor de las figuras sin mayor trabajo.

Aunque algunos estudiantes no demostraron total disposición para realizar las actividades, en términos generales los estudiantes participaron con la mejor actitud, dispuestos a aprender y disfrutar de este espacio educativo. La Yincana Matemática los motivó a superar los obstáculos que se presentaron durante los juegos por difíciles que les pudieran parecer, lo que confirma una vez más que el carácter flexible pero entretenido del juego es un estímulo para esforzarse por aprender.

Clausura del semillero de matemáticas.

El Semillero de Matemáticas culminó su décima segunda sesión con un evento de clausura en el Centro Educativo Nasa Kiwe Tekh Ksxaw. La jornada se destacó por la participación entusiasta de 18 estudiantes pertenecientes a los grados 9, 10 y 11, quienes demostraron su compromiso y habilidades adquiridas a lo largo del programa.

La ceremonia comenzó con la entrega de los certificados a los estudiantes que completaron satisfactoriamente su participación en el Semillero de Matemáticas. Acto seguido, se llevó a cabo una emocionante feria matemática, donde los estudiantes asumieron roles activos en la presentación de juegos matemáticos preparados previamente.

Ilustración 5: Preparación de los carteles para la Feria Matemática

La feria incluyó una amplia variedad de actividades, desde juegos matemáticos como Tangram, Torre de Hanoi, Geoplano y Caja Mágica, hasta trucos matemáticos con cartas y desafíos numéricos, como adivinar números al lanzar dados. La participación no solo se limitó a los estudiantes del Semillero, sino que también se integraron alumnos de grados inferiores (de 3° a 7°), profesores y directivos de la institución para jugar y aprender con los juegos matemáticos.

Ilustración 6: Feria Matemática en el Centro Educativo Nasa Kiwe Tekh Ksxaw

Las impresiones y testimonios resaltan el éxito del evento. Los estudiantes se convirtieron en los protagonistas de las explicaciones y aprendizajes, evidenciando un claro impacto positivo de los juegos matemáticos en su actitud hacia esta disciplina.

A pesar de ser una jornada intensa, la clausura fue considerada como una experiencia enriquecedora y motivadora. Los estudiantes demostraron un compromiso excepcional al postergar la hora del almuerzo para completar el simulacro de matemáticas, lo que refleja su dedicación y entusiasmo por finalizar de manera exitosa este proyecto educativo.

El evento de clausura del Semillero de Matemáticas no solo marcó la conclusión de un ciclo formativo, sino que resaltó el impacto positivo en el desarrollo de habilidades matemáticas y el fomento de una actitud positiva hacia esta disciplina en los participantes

Resultados de la encuesta de percepción hacia las matemáticas al iniciar el proyecto

El objetivo de la encuesta fue determinar el nivel de afinidad hacia las matemáticas, así como el grado de motivación en su estudio. Además, se buscó conocer la importancia que los participantes otorgan a esta disciplina en su desarrollo social, académico y profesional, un interés que persigue y promueve el semillero de matemáticas.

Los resultados de la encuesta son:

Tabla 3: Resultados de la encuesta de percepción hacia las matemáticas

	Noveno=4		**Decimo=20**		**Once=6**	
Pregunta	Si	No	Si	No	Si	No
1. ¿Las matemáticas se te facilitan?	3	1	7	13	4	2
2. ¿Te gusta estudiar matemáticas?	4	0	15	5	4	2
3. ¿Las matemáticas son importantes para tú futuro?	4	0	20	0	6	0
4. ¿Consideras que todos podemos aprender matemáticas?	4	0	20	0	6	0

	Noveno			**Decimo**			**once**		
	Si	**No**	**No estoy seguro**	**Si**	**No**	**No estoy seguro**	**Si**	**No**	**No estoy seguro**
5. ¿Las matemáticas sólo se aprenden en el salón de clase?	0	3	1	2	13	4	1	5	0
6. ¿Los juegos y actividades que involucran matemáticas son divertidos?	3	1	0	14	3	2	4	0	2
7. ¿Las matemáticas son importantes en la vida cotidiana?	3	0	1	18		1	6	0	0

Análisis de Resultados:

La encuesta nos permitió conocer las justificaciones de las primeras cuatro preguntas y el análisis es el siguiente:

- La totalidad de los estudiantes reconocen la importancia de las matemáticas para su futuro, considerando que son "la base de todo", que pueden aportar positivamente en su desempeño laboral y que tiene una presencia ineludible en la vida diaria al poseer potencialidades prácticas y cotidianas como contabilizar, realizar negociaciones y aplicar finanzas.

- Los participantes del semillero consideran que todos podemos aprender matemáticas. Algunas respuestas son principalmente motivacionales, expresando que con esfuerzo, voluntad y dedicación es posible aprender a un ritmo propio. Frases como: "nada es imposible" y "querer es poder" evidencian el deseo genuino por aprender de esta ciencia pese a lo difícil que pueda parecer. Una respuesta destacó por su sencillez y precisión: "Todos tenemos **derecho** a aprender matemáticas y ser mejores en ello".
- El 75% de los estudiantes de noveno consideran que se les facilitan las matemáticas, seguidos por el 60% de los estudiantes de grado décimo y solo un 33% del undécimo grado. Se encontraron variadas justificaciones de estos resultados por parte de los estudiantes, entre las cuales no figuran que las matemáticas son aburridas y complicadas o que producen estrés al no ser entendidas rápidamente, les "molesta ver mucho número", les cuesta recordar procesos y que las explicaciones de algunos profesores resultan complicadas.
- Mientras que en algunas respuestas se ve reflejada una justificación introspectiva, en otras se señala que las matemáticas pueden ser más complicadas debido a las explicaciones que reciben de sus profesores.
- Existe una relación intrínseca para quienes se les facilitan las matemáticas y quienes desean estudiarlas, al considerar que les podrán ayudar en su vida académica o simplemente encuentran entretenidos los problemas matemáticos.

Las mismas estadísticas fueron presentadas en el salón de clase con dos propósitos: el primero, exponer la valoración de las matemáticas y su estudio a nivel grupal, y aprovechar estos datos estadísticos para introducir y explicar qué representan los porcentajes y la importancia de este concepto. Observamos que los estudiantes estaban familiarizados con el concepto de porcentajes, lo que les permitió interpretar y entender las gráficas.

Resultados de la encuesta al finalizar el proyecto:

La amplia mayoría de estudiantes disfrutó de las actividades desarrolladas en el semillero; el 70% las disfrutó mucho, expresando que las explicaciones, la buena actitud de los practicantes, las actividades didácticas, el aprendizaje y los espacios resultaron ser lo que más les gustó del semillero. No obstante, sugieren que se pueden mejorar en los refrigerios, aumentar el tiempo de recreo, incrementar el número de clases y de actividades dinámicas. La totalidad de los estudiantes reconoció haber aprendido cosas nuevas en el semillero, siendo [aprender] "mucho" la respuesta predominante. Esta misma totalidad reconoció que, en mayor o menor medida, la participación en el semillero influyó positivamente en su desempeño en el curso de matemáticas. Las respuestas evidencian que el semillero fomentó un aumento en el gusto por las matemáticas, puesto que en la encuesta inicial se observó que al 77% de los participantes les gustaba estudiar matemáticas y tan sólo el 55% consideran sentirse bien respecto a ellas. Al finalizar el proyecto, el 80% de los encuestados reconocen que su gusto por las matemáticas aumentó, lo que indica un cambio positivo con respecto a la percepción de las matemáticas en la mayoría de los participantes.

Por otra parte, la gran mayoría de los participantes no conocía las instalaciones de la Universidad del Cauca. El hecho de que el semillero haya sido desarrollado en la nueva sede Norte de la universidad resultó ser un impulso significativo para que los estudiantes quisieran estudiar allí, como lo manifestó el 85% de los estudiantes.

La totalidad de los estudiantes reconoció que les gustó la labor de los practicantes.

En resumen, aunque no se podría afirmar que el proyecto educativo fue un éxito rotundo, sí contribuyó satisfactoriamente en las experiencias educativas y en la percepción de las matemáticas que tienen la mayoría de los participantes. El hecho de que hayan “aprendido mucho” induce un desarrollo de habilidades matemáticas para resolver problemas que servirán de base para futuros escenarios de aprendizaje en matemáticas.

Secuencias didácticas

Considerando la metodología, el siguiente recuento histórico y análisis crítico se ha organizado evidenciando el desarrollo de cada una de las 7 fases de aprendizaje de la secuencia anteriormente propuesta.

No obstante, se decidió mencionar de manera conjunta alguna de las actividades de la fase motivacional, puesto que esta sistematización desea centrarse especialmente en aquellas fases donde el estudiante resuelve los problemas presentes en las guías didácticas, para identificar el despliegue de las competencias matemáticas en desarrollo.

Se analizarán 14 problemas matemáticos tipo saber 11, de los 53 problemas propuestos en las guías didácticas, así como un problema matemático inspirado en el video de (Derivando, 2022). Además, se examinarán tres actividades que contribuyeron con el desarrollo de la fase de socialización y recuperación.

Fase Motivacional:

Video de 5 minutos del matemático Eduardo Sáenz de Cabezón sobre ¿Para qué sirven las matemáticas?: Esta charla de divulgación, pretendía evidenciar la importancia de las matemáticas en la vida social y responder sobre su utilidad, manifestando las relaciones existentes entre la educación matemática, la sociedad, la democracia y la justicia social, intereses que persigue el semillero, excelente punto de partida para generar expectativas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes.

Juego de Concentración musical: Los juegos con movimiento y expresión corporal además de ser divertidos, resultan ser una motivación para trabajar en clase y permiten desarrollar procesos de atención y concentración según lo expresado por (Anania, 2015).

Reto con palillos: Reconocemos que este tipo de juegos es un excelente entrenamiento para la capacidad de concentración, el desarrollo del análisis crítico y la imaginación, que no siempre está reñida con la lógica formal.

Cuadrado Mágico: Según el trabajo realizado por (Peña, 2022) sobre las potencialidades didácticas de los cuadrados mágicos, se concluye que el uso de cuadrados mágicos "abre un espacio para el desarrollo de competencias matemáticas ligadas con temas como las secuencias, patrones, geometría y progresiones, permitiendo colocar en escena una gran variedad de ejes transversales afiliados con la creación y el desarrollo de actividades dinámicas y lúdicas que involucran comportamientos, conocimientos, saberes y afectos". Por otro lado, su resolución también les permitió a los estudiantes comprender que "las matemáticas no son una simple memorización de reglas y algoritmos, sino que tienen sentido, son lógicas, potencian la capacidad de pensar y son divertidas" (MEN, 2006).

Juego Goldfish: El objetivo de este juego de cartas es introducir el concepto de probabilidad. Los jugadores debían formar conjuntos de cuatro cartas del mismo rango numérico. El juego les permitió conocer las cartas francesas y comprender que aunque el azar es incierto, se pueden hacer afirmaciones probabilísticas sobre la ocurrencia de ciertos eventos. De esta manera se empezaron a desarrollaron habilidades de cálculo mental y estrategias matemáticas resultantes del pensamiento aleatorio.

Primera, segunda y tercera secuencia didáctica:

Periodo de Aplicación: 22, 29 de abril; 13, 24 de mayo y 1 de julio.

Categoría: Estadística

Temas: Diagrama de Barras, Circular, Temporal y Promedio.

Contenidos: Pensamiento aleatorio y sistemas de datos.

Objetivo de la guía: Contribuir con el desarrollo del pensamiento aleatorio y los sistemas de datos al resolver problemas que involucren información estadística y situaciones de incertidumbre, azar o ambigüedad.

Objetivos específicos:

- Dominar conceptos y procedimientos necesarios para recoger, estudiar y diagramar sistemas de datos estadísticos y extraer de ellos la información necesaria que permita responder a preguntas específicas del problema.
- Proponer inferencias a partir del análisis de combinaciones estadísticas y calcular la probabilidad de eventos simples y compuestos.
- Predecir si las probabilidades de ocurrencia de un evento son mayores que las de otro.

Inicio:

- ***Fase de Comprensión:***

Breve historia del concepto de porcentaje

Con el objetivo de proporcionar una visión dinámica de las matemáticas que permita apreciar cómo sus desarrollos han estado relacionados con las circunstancias socioculturales, la profesora narra brevemente la historia del símbolo del porcentaje. Hace más de 2000 años en la antigua Roma, el emperador Augusto propuso que las personas pagaran el 1 por cada 100 de aquello que producían, se empezó a utilizar la expresión *"per cento",* que significa "por cada 100". Con el tiempo, la expresión se acortó a *"P cento"* y evolucionó hasta el símbolo que actualmente conocemos "%".

Ilustración 7: Evolución del símbolo de porcentaje

En colaboración con los estudiantes, concluimos que lo que en la época del emperador Augusto la gente hacia era pagar un impuesto del 1% en a la ciudad de Roma. Al compararlo con el impuesto actual de Colombia del 19%, muchos hicieron expresiones de insatisfacción diciendo que “Acá nos roban mucho”, comprendiendo que el impuesto de nuestro país es más alto que el de hace 2000 años. También se comentó que lo que compramos ya tiene el impuesto incluido, es decir, que el precio real de un producto es menor. Este hecho sorprendió tanto a los estudiantes, que decidieron contarle al profesor de matemáticas de su colegio la historia del símbolo del porcentaje y el impacto económico y social en su municipio.

Este tipo de diálogo y análisis fomenta la participación y crítica de los estudiantes en temas relevantes para su vida cotidiana y para la sociedad en general, promoviendo así valores democráticos y el ejercicio de una ciudadanía crítica, lo que motiva a los estudiantes a asombrarse y descubrir la diversidad de fenómenos del mundo real que pueden ser comprendidos y estudiados a treves del uso de las matemáticas, objetivo que persigue el semillero de matemáticas.

Considerando que una chica del semillero vende sándwiches, decidimos calcular el precio de dicho producto sin el IVA, y pudimos encontrar su valor sin el impuesto agregado. Con los resultados calculados, dejamos como interrogante si ella debiera también debería agregarle el IVA al precio de venta de sus sándwiches.

Los estudiantes manifestaron una actitud diferente hacia las matemáticas al observar su notable utilidad y la influencia de conceptos muy antiguos como el porcentaje en la sociedad actual. Aunque estos ejercicios fueron solo una introducción al tema, reconocemos que la historia de las matemáticas ofrece la oportunidad de mostrar la relación que existe entre las matemáticas como una construcción histórica y otras producciones culturales de la humanidad, como el comercio y la política, tal como lo explica (Anacona, 2003).

- ***<u>Introducción a las tablas de doble entrada</u>***

Ilustración 8: Primer problema ejemplo de la guía de gráficos

Con el fin de elegir el color de un nuevo juguete, se realizó una encuesta a un grupo de niños entre los 5 y 12 años sobre su color favorito. Cada niño podía mencionar solo un color. Las respuestas de todos los niños se muestran en la tabla.

Edad(Años)	Rojo	Blanco	Verde	Azul
5 a 8	12	4	11	9
9 a 12	6	13	9	8

Respecto a estos registros. ¿Cuál de los siguientes NO puede ser un resultado calculado con la información presentada?

a). El color preferido por los niños entre los 5 a 8 años
b). El color preferido por los niños mayores de 10 años
c). El número total de niños que prefieren el color rojo
d).El número de niños que fueron encuestados

Competencia: Interpretación y Representación

Afirmación: Lee e interpreta información contenida en tablas de doble entrada para formular y resolver preguntas.

Evidencia: Analiza e interpreta información que ofrecen las tablas de frecuencia de acuerdo con el contexto. Compara la información representada en tablas y gráficos para formular y responder preguntas.

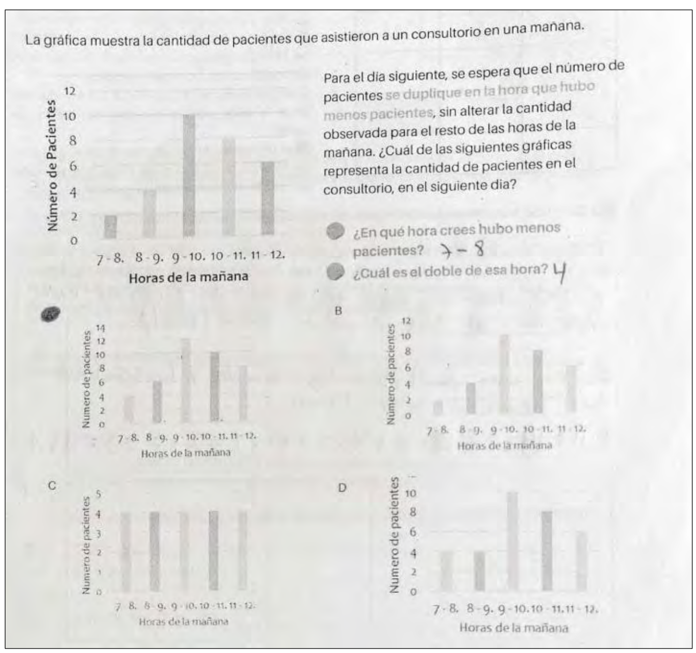
Estándar relacionado: Interpreto y comparo representaciones gráficas, para representar diversos tipos de datos.

Descripción y Análisis: El primer *problema ejemplo* tenía por objetivo introducir el concepto de tablas estadísticas. A pesar de no tener claro el término "*tabla de doble entrada*", todos los estudiantes lograron identificar qué valor no era deducible a partir de la información presentada, evidenciando su habilidad para interpretar gráficos al discernir qué datos proporcionaba la gráfica, y cuáles quedaban fuera de su alcance.

Desarrollo:

Fase de Adquisición:

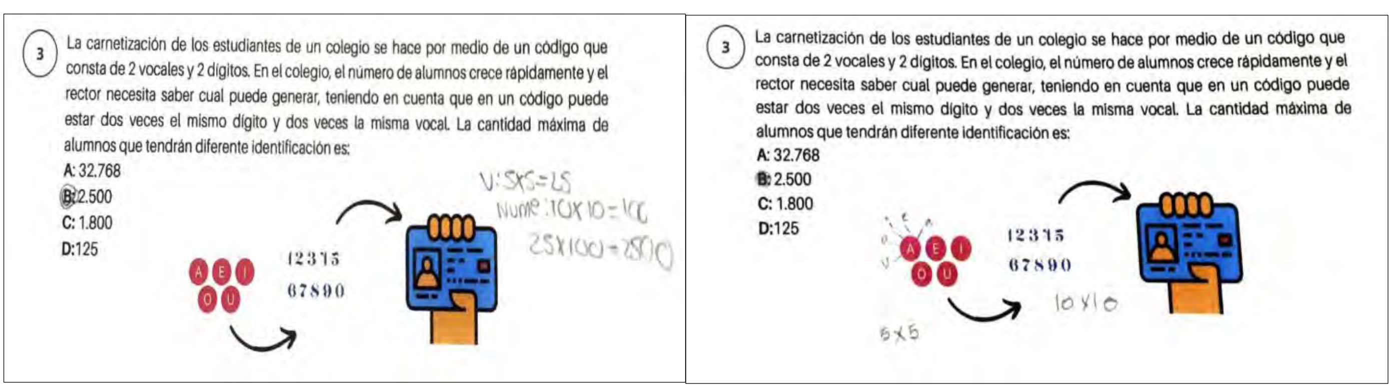
Ilustración 9: Quinto problema de la primera guía de estadística



Después de un par de problemas con histogramas, esta situación requería comparar la gráfica del enunciado con las opciones de respuesta que manifestaban el comportamiento de la gráfica después de un día, con la información estadística presentada.

No obstante como podemos observar, muchos estudiantes seleccionaron opciones incorrectas probablemente por dos razones, primera: las dos preguntas planteadas en la guía para ayudar a los participantes a responder se volvieron confusas e incluso innecesarias al momento de tomar una decisión. Esto nos lleva a la segunda posible razón: aunque los estudiantes sí interpretaron correctamente la gráfica del problema, no leyeron detenidamente el enunciado ni analizaron las opciones de respuestas, lo que los llevó a seleccionar la gráfica que representaba un aumento de 2 pacientes en todas las horas de la mañana, en lugar de duplicar la frecuencia solo en la hora en que hubo menos pacientes; revelando que no fueron capaces de analizar completamente la información del problema, lo que los llevó a establecer relaciones equivocadas y comparar erróneamente dicha información con las gráficas presentadas en las opciones de respuesta. Por lo anterior, concluimos que aunque se evidencie el desarrollo de una competencia en un problema, esto no significa su alcance definitivo.

Ilustración 10: Tercer problema de la tercera guía de estadística



Competencia: Formulación y Ejecución.

Componente: Estadística

Afirmación: Encuentra el número de posibles resultados de experimentos aleatorios con reemplazo, usando técnicas de conteo adecuadas y argumenta la selección realizada en el contexto de la situación abordada. Encuentra la probabilidad de eventos aleatorios compuestos.

Evidencia: Encuentra el número de posibles resultados de un experimento aleatorio, usando métodos adecuados (diagramas de árbol, regla de la multiplicación). Encuentra la probabilidad de eventos dados usando razón entre frecuencias.

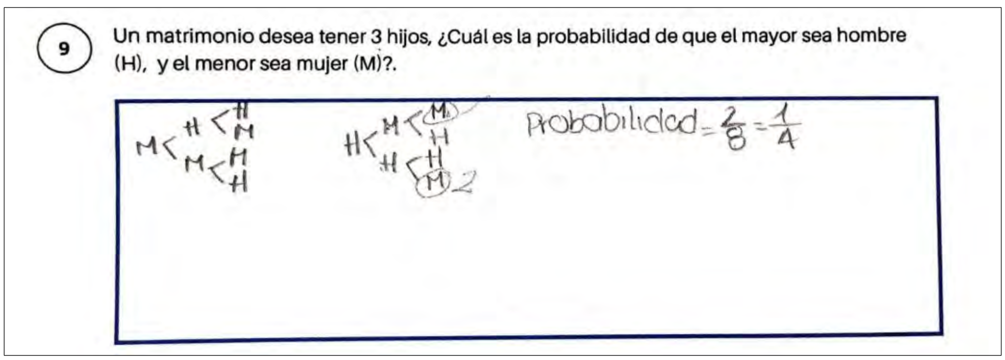
Estándar relacionado: Resuelvo y planteo problemas usando conceptos básicos de conteo y probabilidad (espacio muestral, muestreo aleatorio, muestreo con remplazo).

En la tercera pregunta de la guía de probabilidad, notamos gran dificultad para llegar a la respuesta, puesto que el número de combinaciones posibles para formar el código eran muchas, sin embargo, como se puede observar los estudiantes se apoyaron en el principio multiplicativo de manera lógica; en la imagen de la izquierda se evidencia cómo el joven identificó que para la primera vocal se tienen 5 opciones, y para el primer dígito 10 opciones y en la imagen de la derecha se observan las multiplicaciones realizadas para encontrar todas las combinaciones posibles, procedimientos propios de la competencia de formulación y ejecución al seleccionar las opciones posibles para organizar los códigos y usar la multiplicación para encontrar el número total de combinaciones, demostrando la capacidad para diseñar y seguir la estrategias y resolver la situación.

Uno de los participantes que comprendió cómo funcionaba el procedimiento, se atrevió a preguntar qué pasaría si sólo tomamos en cuenta las combinaciones posibles con números pares. Justamente esta intervención evidencia que el estudiante está recorriendo el camino para ser matemáticamente competente, al proponer problemas y preguntas y posibles respuestas que surgen a partir de estas. De esta manera empezamos a proponer nuevas condiciones al problema, por ejemplo ¿cuántos códigos se podrían formar si todos ellos inician con la letra A? o ¿Qué pasaría si empiezan en 3 y terminan en 2? Se puede utilizar este tipo de situaciones como una oportunidad perfecta para explorar en el problema, plantear, preguntar y reflexionar sobre modelos matemáticos.

Fase de Retención:

Ilustración 11: Noveno problema de la tercera guía de estadística



Como se puede evidenciar, el estudiante fue capaz de construir un diagrama de árbol para visualizar el número total de posibles combinaciones del orden de los sexos de los 3 hijos que desea tener el matrimonio y como se observa por los círculos que marcó, identificó correctamente las únicas dos posibilidades en la que el mayor sea hombre y la menor sea una mujer. Finalmente calculó la probabilidad considerando el número total de sucesos favorables (2), sobre el número total de sucesos posibles (8). Al resolver el problema el estudiante demostró su capacidad para formular y ejecutar procedimientos al plantear un modelo gráfico de la situación (diagrama del árbol) que le permitiera realizar el cálculo de las opciones que cumple con las condiciones deseadas.

Ilustración 12: Sexto problema de la primera guía de estadística: “Diagrama de barras, circulares y promedio”

Un grupo de 32 estudiantes se inscribe para realizar una competencia de ajedrez. Se dispone de la información en la tabla respecto a la edad y sexo de los estudiantes inscritos.

Edad/sexo	Mujeres	Hombres
14	5	3
15	8	2
16	8	x
17	3	1

Al analizar la información inicial y los datos que aparecen en la tabla, es correcto afirmar que en el grupo de inscritos:

A. El promedio de las edades de las mujeres es de 16 años, porque es el dato que más se repite.

B. el promedio de las edades de los hombres es de 14 años, porque es el resultado de la suma de las edades de los hombres dividido 6.

C. el promedio de las edades de los estudiantes es de 17 años, porque es el dato que menos se repite.

D. el promedio de las edades de las mujeres es de 15 años, porque es el resultado de la suma de las edades de las mujeres dividido 24.

Afirmación: Compara características diferentes dentro de una muestra, utiliza representaciones gráficas adecuadas y analiza los resultados obtenidos usando conjuntamente las medidas de tendencia central.

Evidencia: Compara las características de dos o más grupos y usa estrategias numéricas para encontrar la media de un conjunto de datos.

Estándar Relacionado: Uso e interpreto la media o promedio de un conjunto de datos. Reconozco la relación entre un conjunto y su representación.

Ilustración 13: Septimo problema de la primera guía de estadística; explicación del concepto “promedio” con un ejemplo particular

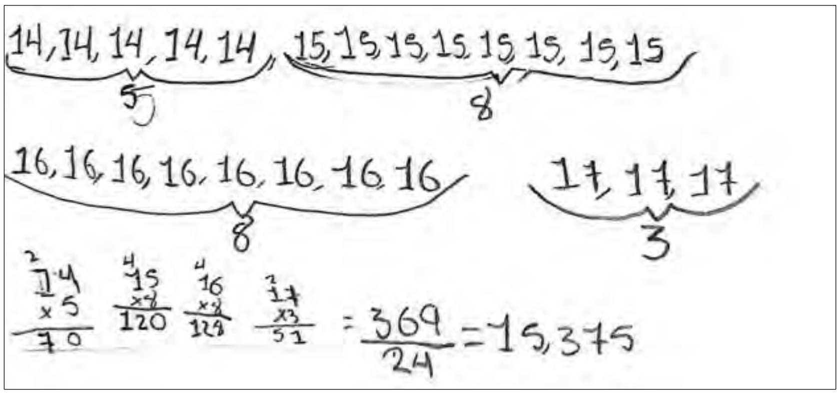
Será más sencillo responder si conoces qué es el promedio y cómo se calcula

Son 32 en total y hacen falta 2 para completar la tabla
se debe sumar la variable y luego dividirla
y obtener el valor

E) $\frac{3+5+2+3}{4} = 3.25$

Descripción y Análisis Para considerar los conocimientos básicos necesarios para resolver el problema, la guía sugirió que los estudiantes explicaran qué es el promedio. Se percibió que la mayoría ya estaban familiarizados con este cálculo, incluso, aunque no lograron encontrar una definición sí argumentaron con un ejemplo particular de un conjunto de datos, el proceso para calcular la media aritmética, lo que demuestra la comprensión del concepto.

Ilustración 14:Proceso para calcular el promedio de las edades de las 24 mujeres



Para solucionar el problema se observaron dos clases de procedimientos, y por tanto, dos tipos distintos de competencias en acción.

La primera, (ilustración 14) se relaciona más con los procesos de formulación y ejecución de procedimientos, al diseñar y plantear una estrategia para calcular la edad de las mujeres: el estudiante fue capaz de identificar y seleccionar la información relevante de tabla, realizar las operaciones adecuadas y finalmente calcular la media aritmética. Por otro lado justificó la pertinencia del cálculo de la edad en un valor entero y no aproximado y lo razonable de la opción de respuesta seleccionada, usando el pensamiento numérico.

La segunda tiene que ver con la habilidad de argumentación y razonamiento y la capacidad para validar o refutar conclusiones. Es ciertamente interesante haber notado que algunos grupos utilizaron la refutación para descartar las opciones de respuesta que carecían de justificaciones acertadas sobre el proceso matemático para calcular el promedio de un conjunto de datos, y aceptaron como respuesta correcta la única opción que argumentaba correctamente cómo se calcula la media aritmética de las edades de las mujeres, pero sin necesidad de realizar dicho cálculo.

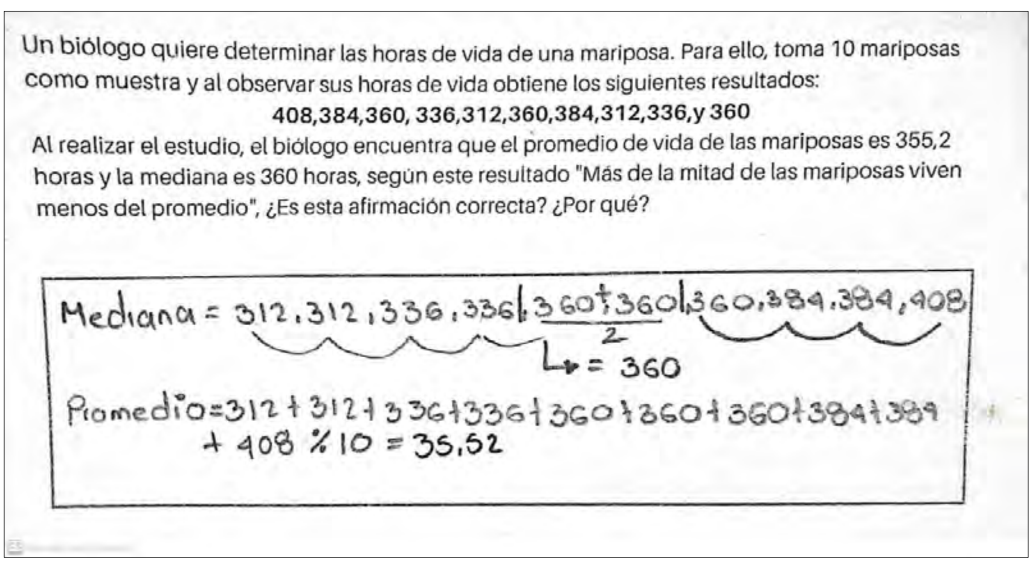
Cierre

Socialización:

La sección "Vedad o Mito" es un espacio en las guías para discutir con argumentos y aclarar conceptos. En esta ocasión la afirmación puesta en duda es: "El promedio es la mitad de los datos", y la guía sugería usar un contraejemplo como medio para refutar dicha proposición. Aunque todos los estudiantes identificaron el enunciado como un mito, ninguno fue capaz de presentar un argumento matemático que permitiera justificar la respuesta. Ni usaron un contraejemplo como prueba que para refutar la afirmación y avanzar hacia la demostración, esta omisión posiblemente se debió a su falta de familiaridad previa con el término "contraejemplo". A pesar de que los practicantes explicaron su significado, esto no fue suficiente para que pudieran concebir uno.

Fase del Efecto Protegido:

Ilustración 15: Décimo segundo problema de la primera guía de estadística.



Un biólogo quiere determinar las horas de vida de una mariposa. Para ello, toma 10 mariposas como muestra y al observar sus horas de vida obtiene los siguientes resultados:

408,384,360, 336,312,360,384,312,336,y 360

Al realizar el estudio, el biólogo encuentra que el promedio de vida de las mariposas es 355,2 horas y la mediana es 360 horas, según este resultado "Más de la mitad de las mariposas viven menos del promedio", ¿Es esta afirmación correcta? ¿Por qué?

Mediana = 312, 312, 336, 336 | $\frac{360+360}{2}$ | 360, 384, 384, 408

= 360

Promedio = 312+312+336+336+360+360+360+384+389
+ 408 % 10 = 35,52

Competencia: Argumentación.

Componente: Estadístico.

Afirmación: Utiliza la media y la mediana para resolver problemas en los que se requiere presentar o resumir el comportamiento de un conjunto de datos.

Evidencia: Explica la información que brinda cada medida en relación con el conjunto de datos. Selecciona una de las medidas como la más representativa del comportamiento del conjunto de datos estudiado.

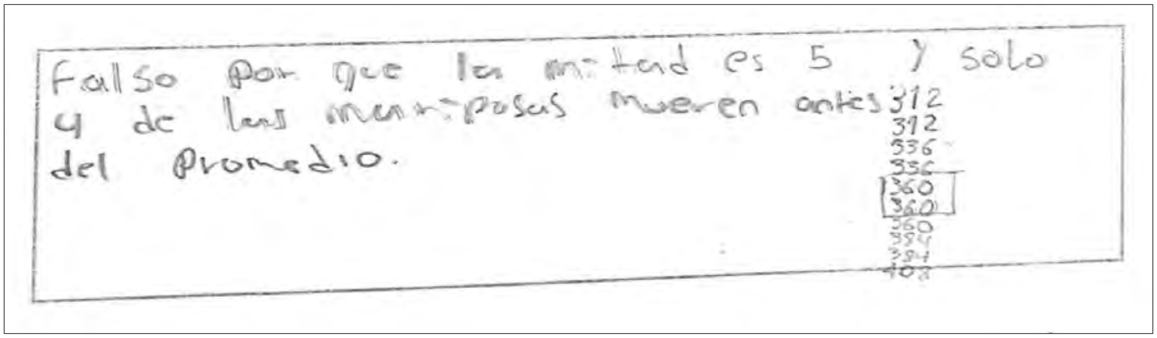
Estándar Relacionado: Uso la media y la mediana para interpretar comportamientos de un conjunto de datos.

Descripción y análisis

El siguiente problema ponía a prueba nuevamente los conceptos de media y mediana aritmética. Aunque todos los estudiantes respondieron correctamente la pregunta, se observó que muchos no la justificaron adecuadamente, pues no llegaron a inferir ningún razonamiento basado en la información que arrojaba el enunciado. No analizaron la situación ni identificaron lo relevante en ella, lo que hizo que calcularan innecesariamente la media y la mediana pues estos datos ya estaban proporcionados en el enunciado.

Otro estudiante organizó los datos de menor a mayor para identificar cuántas mariposas viven menos del promedio, encontrando que solo serían 4; uso este argumento para refutar la conclusión y comunicar de manera escrita su deducción.

Ilustración 16: Promedio de horas de vida de 10 mariposas organizado de menor a mayor.



Mientras que otros participantes sin necesidad de organizar los datos, compararon cuántos de ellos estaban sobre el promedio; así notaron que son más de la mitad. Este razonamiento les permitió justificar y argumentar la invalidez de la afirmación.

Ilustración 17: Argumento de la falsedad del enunciado sin calcular ni organizar los datos.

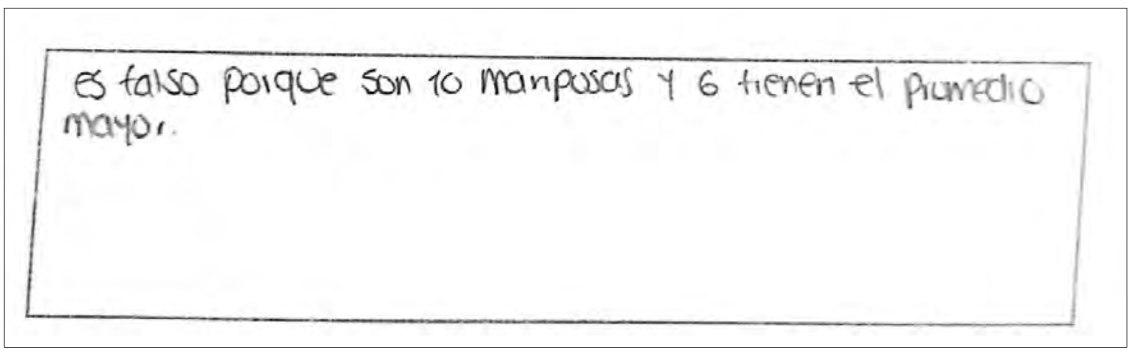
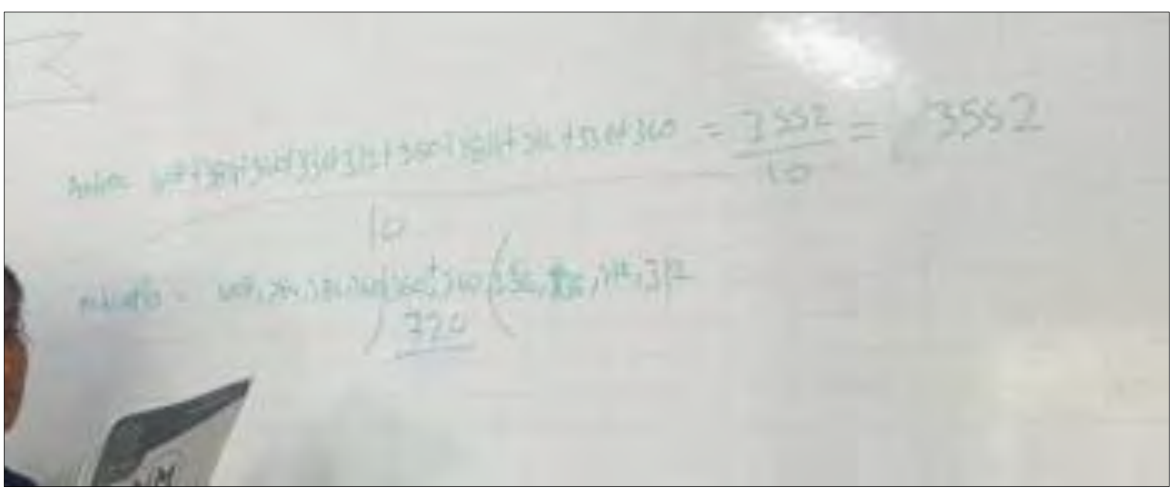


Ilustración 18: Explicación en el tablero por parte de la estudiante argumentando su solución.

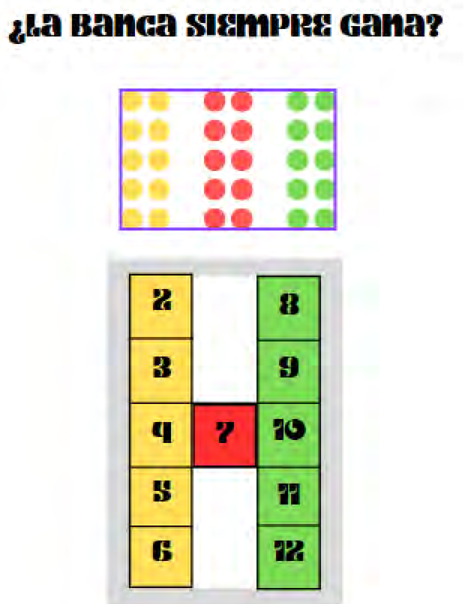


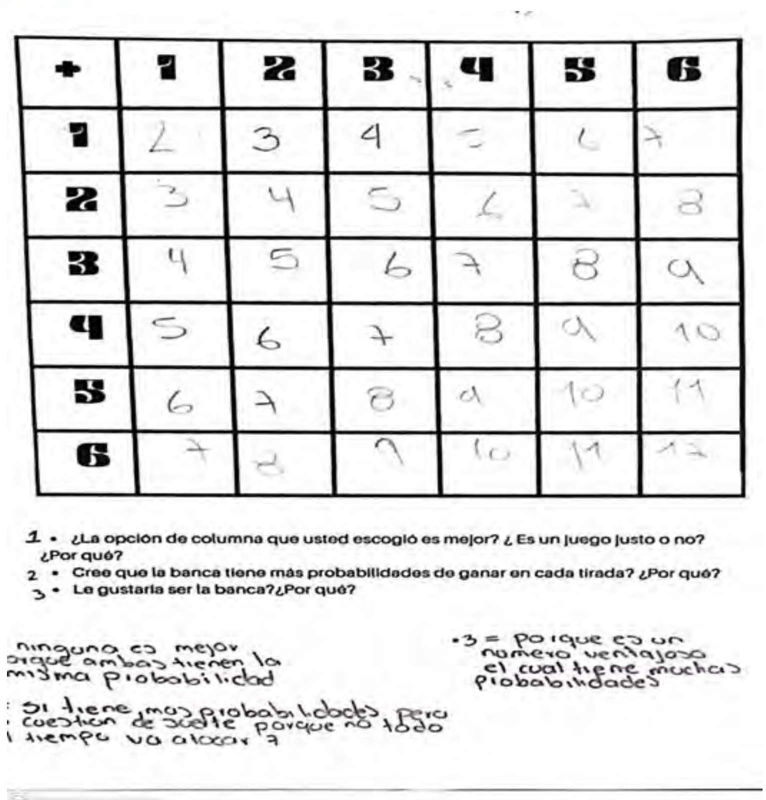
Este punto fue explicado a todos los estudiantes por una participante del semillero; ella inicialmente no comprendía el problema pero después de las aclaraciones pertinentes, encontró el argumento para refutar la afirmación propuesta. Al explicar y comunicar su razonamiento, ella consolidó lo aprendido y los participantes se vieron favorecidos por su explicación.

Como podemos constatar, esta sección de la secuencia que permite explicar a otros lo que el estudiante ha entendido, se presentó como un ambiente perfecto para que la comunicación sea una práctica natural en la cual la discusión de ideas sea valorada por todos y el desarrollo de esforzarse por presentar una explicación favorece la misma comprensión del estudiante.

Recuperación*:*

Ilustración 19: Participantes jugando y resultado de las respuestas a las preguntas del juego





+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	=	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

1 • ¿La opción de columna que usted escogió es mejor? ¿ Es un juego justo o no? ¿Por qué?
2 • Cree que la banca tiene más probabilidades de ganar en cada tirada? ¿Por qué?
3 • Le gustaría ser la banca?¿Por qué?

ninguna es mejor
orque ambas tienen la
misma probobabilidad

Si tiene mas probabilidades pero
cuestion de suerte porque no todo
tiempo va alocar 7

•3 = porque es un
numero ventajoso
el cual tiene muchas
probabilidades

En el diagrama en forma de H, los estudiantes debían elegir una columna, lanzar un par de dados y apostar una ficha en cada grupo. Si los resultados están entre 1-6, las dos fichas apostadas se suman al grupo de la izquierda. De manera similar, si los resultados están entre 8-12, las fichas pasan al grupo de la derecha. Si los resultados suman 7, entonces la banca gana ambas fichas.

Para responder las preguntas (ver actividad ¿La banca siempre gana?), los estudiantes completaron una tabla que mostraba todas las combinaciones posibles al sumar los resultados de dos dados y finalmente, calcularon la probabilidad de cada suma posible. De esta manera los estudiantes notaron que las probabilidades de la columna izquierda y la derecha eran iguales, a excepción de la probabilidad de que al lanzar los dos dados el resultado fuera 7. Conservaron la idea de que la probabilidad de ganar siendo la banca era mayor en comparación con alguno de los números de las columnas (verde y amarilla). Sin embargo la banca tiene 6/36 posibilidades de ganar, mientras que los números de las columnas tienen como se puede observar en la tabla, 15/36 probabilidades.

Aunque respondieron incorrectamente, se reconoce este tipo de actividades como un medio para potenciar el pensamiento aleatorio que premia la experimentación, la recolección y organización cuidadosa de datos. Por otro lado, la búsqueda a las preguntas del juego en parejas impulsó a los estudiantes a respaldar de manera efectiva los razonamientos y justificaciones, usando la capacidad para expresar los argumentos lógicos utilizados para abordar el problema.

Cuarta secuencia didáctica

Periodo de Aplicación: 1 julio, 8 julio y 5 agosto.

Categoría: Geometría

Tema: Perímetro y área de figuras geométricas

Contenido:

Pensamiento métrico y los sistemas de medidas.

Pensamiento espacial y los sistemas geométricos.

Objetivo de la guía: Contribuir con el desarrollo del pensamiento espacial y los sistemas geométricos al resolver problemas que involucren la comprensión del concepto de perímetro, área, superficies de área y volumen.

- Proponer el desarrollo del pensamiento visual, el análisis abstracto de figuras y formas en el plano a través del razonamiento geométrico.
- Contribuir con la comprensión de los procesos de conservación y estimación de magnitudes derivadas de los conceptos de perímetro, área y volumen.

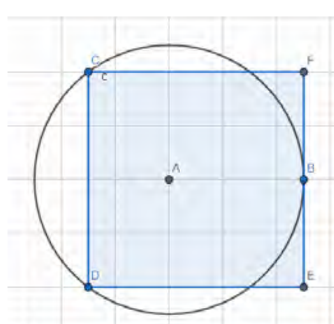
Inicio:

Fase de comprensión: El problema del cuadrado y la circunferencia que se tocan

Objetivo: Este problema, propuesto en el video de (Derivando, 2022) fue presentado y analizado en clase con el propósito de evidenciar cómo el uso de los conceptos matemáticos y geométricos, y el uso de las competencias matemáticas nos permiten resolver problemas que involucran pocos datos.

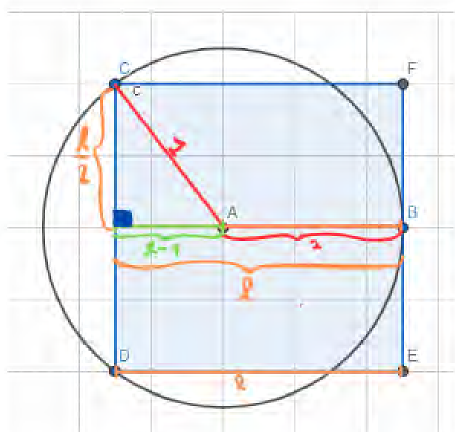
Descripción y Análisis

Ilustración 20: Problema del cuadrado y la circunferencia que se tocan



La configuración dada muestra un cuadrado y una circunferencia que se intersecan en tres puntos (B, C y D). La cuestión planteada es: ¿Mide más la circunferencia o el perímetro del cuadrado? Este problema despliega todas las competencias matemáticas para su resolución

Ilustración 21: Resolución del problema por parte de la practicante.



Teorema de Pitágoras:
$1^2 = (l/2)^2 + (l-1)^2$
$1 = l^2/4 + l^2 - 2l + 1$
$0 = (5l^2)/4 - 2l$
$0 = 5l/4 - 2$
$0 = 5l/8 - 1$
$(1)8 = 5l$
$8/5 = l$

Perímetro del cuadrado (P):
$4(8/5) = P = 32/5$

Medida de la circunferencia (C):
$C = 2\pi(1) = 2\pi$

Comparemos los dos perímetros:
P > C
$32/5 > 2\pi$
$32/10 > \pi$
$3.2 > 3.14$

La modelación, formulación y el tratamiento del problema permitió diseñar estrategias para encontrar el siguiente camino de solución.

La gráfica anterior presenta la solución expuesta en clase, haciendo uso de tres pasos, todos con el objetivo de encontrar la medida del lado del cuadrado. La idea fue: centrarse en el triángulo CAG para encontrar el valor del lado del cuadrado l, haciendo uso del teorema de Pitágoras, y posteriormente aplicar las fórmulas del perímetro de cuadrado y la circunferencia para comparar sus medidas (ver Ilustración 21)

1. Ver elementos implícitos en el problema (lado del cuadro, diámetro y radio de la circunferencia).
2. Dar medida a algunos elementos claves o asignarles incógnitas: longitud del lado del cuadrado (asignado con la letra l,), radio (considerándolo con el valor arbitrario de 1).

3. Usar resultados conocidos, como el Teorema de Pitágoras para relacionar elementos y encontrar las incógnitas.

Por una parte el razonamiento lógico favorece la reflexión que se hace con la medida del lado del cuadro y una parte del diámetro de la circunferencia. Por otra parte después de construir el triángulo CAG, para encontrar el valor de los lados, es necesario traducir o expresar el grafico algebráicamente y para ello se hace uso de el Teorema de Pitágoras, pasando de un registro gráfico al algebráico. Se observó en los estudiantes gran dificultad en atribuirle símbolos no numéricos a las longitudes de la gráfica, describir una figura de manera formal y conectar lógicamente diversas propiedades de esa figura; no fueron capaces de asignar longitudes variables a la gráfica y hacer operaciones con ellas. Por ejemplo al percibir que si la longitud de G a B es l y que de A a B es 1, entonces la longitud de G a A debe ser l-1. Lo que evidencia la limitada competencia de comprender y utilizar lógicamente diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólicos para crear, expresar y representar ideas matemáticas.

La ejercitación de procedimientos contribuye a aumentar la velocidad y precisión al resolver ecuaciones y conocer cómo, cuándo y por qué usarlos de manera flexible y eficaz. Sin embargo se percibió gran dificultad en identificar los catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo CAG y aplicar el teorema de Pitágoras, pero además, se hizo evidente la dificultad y lentitud para efectuar operaciones algebraicas necesarias para resolver la ecuación plateada. La notable deficiencia de estos conceptos básicos de la geometría y el algebra, llegaron a estropear la evolución del pensamiento espacial.

El problema podría ser para muchos una asombrosa oportunidad de presenciar cómo trabaja la “magia” de las matemáticas para resolver problemas que proporcionan muy pocos datos, pero se hizo más evidente la confusión en los estudiantes al no poseer los conocimientos básicos y necesarios que les permitieran desarrollar las competencias matemáticas básicas para afrontar siquiera su explicación.

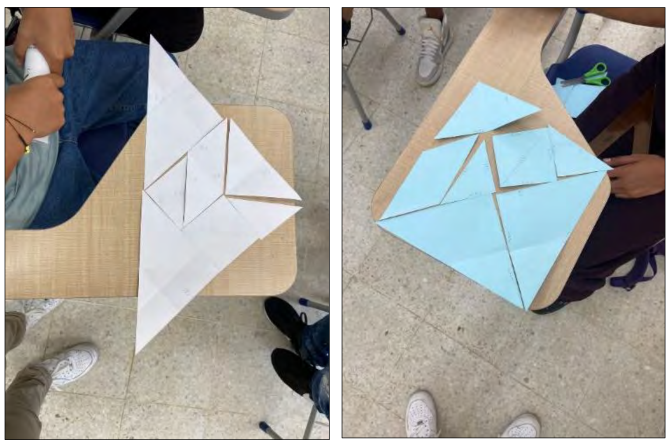
Desarrollo

Fase de Adquisición: Concepto de área y perímetro haciendo uso del Tangram

Objetivo: Distinguir y justificar la diferencia entre el concepto de área y perímetro.

Descripción y Análisis:

Ilustración 22: Formación de un cuadrado y un triangulo con piezas del tangram



.

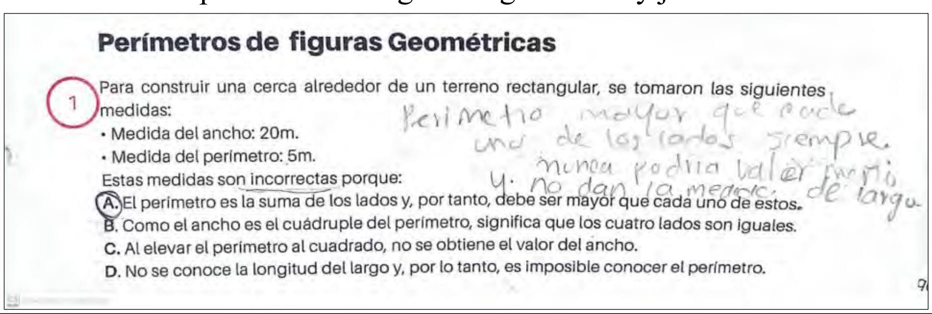
Esta actividad fue la apertura a los sistemas geométricos: al pasar la mano por las caras de las figuras, los estudiantes están comprendiendo el concepto de área y al pasar el dedo por el borde de cada ficha, se prepara el concepto de perímetro, brindando la oportunidad de distinguir ambos conceptos.

La actividad hace parte de la sección "Verdad o Mito". La afirmación que se pone en duda es <u>"El perímetro y el área de figuras geométricas son conceptos iguales".</u> Para responder los estudiantes debían elaborar un tangram clásico de 7 piezas siguiendo las indicaciones proporcionadas en la guía y luego ensamblar todas las piezas para crear un cuadrado y un triángulo, y finalmente calcular el área y el perímetro de las figuras resultantes. Los estudiantes reconocieron como mito la afirmación y sus justificaciones fueron: *"es un mito porque el* *perímetro es la medida de todos los lados, y el área es la parte interna", "mito porque los perímetros de las figuras cambian, pero el área es la misma porque se utilizan las mismas medidas pero en distintas figuras", "porque el área y perímetro son dos cosas muy diferentes porque a la hora de calcular, nos dan resultados diferentes", "es un mito porque los perímetros son diferentes y las áreas iguales".*

Las explicaciones proporcionadas por los estudiantes constituyen argumentos que evidencian que figuras de formas distintas pueden tener perímetros diferentes, pero áreas iguales, de esta manera se hace evidente que los estudiantes están comprendiendo que bajo las reglas del tangram, es decir evitando la superposición de figuras, la propiedad de conservación de la medida del área tiene lugar a pesar de las alteraciones en el espacio.

Fase de Retención

Ilustración 23: Primer problema de la guía de geometría y justificación de la respuesta.



Perímetros de figuras Geométricas

1 Para construir una cerca alrededor de un terreno rectangular, se tomaron las siguientes medidas:

- Medida del ancho: 20m.
- Medida del perímetro: 5m.

Estas medidas son incorrectas porque:

A. El perímetro es la suma de los lados y, por tanto, debe ser mayor que cada uno de estos.
B. Como el ancho es el cuádruple del perímetro, significa que los cuatro lados son iguales.
C. Al elevar el perímetro al cuadrado, no se obtiene el valor del ancho.
D. No se conoce la longitud del largo y, por lo tanto, es imposible conocer el perímetro.

Perimetro mayor que cada uno de los lados siempre. nunca podria valer menos y. no dan la medida de largo.

"*Perímetro mayor que cada uno de los lados siempre, nunca podría valer menos. Y no dan la medida de largo"*

Competencias en juego: Argumentación

Afirmación: Propone estrategias de estimación, medición y cálculo de longitudes para resolver problemas.

Evidencia: Decide acerca de las estrategias para determinar qué tan pertinente es la estimación y analiza las causas de error en procesos de medición y estimación.

Estándar Asociado: Resuelvo y formulo problemas que requieren técnicas de estimación.

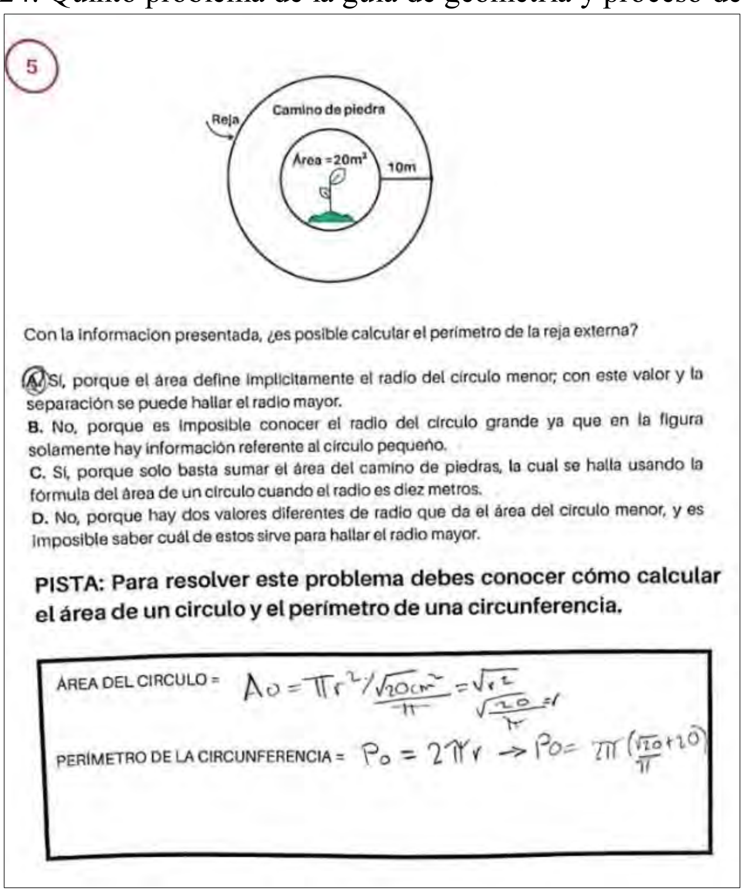
Descripción y Análisis:

La pregunta obliga a los estudiantes a comunicar en forma de argumento lógico por qué las medidas dadas debían necesariamente ser incorrectas, permitiéndoles fijarse en algo que tal vez, no eran conscientes, (ver ilustración 23): el perímetro, al representar la suma de las longitudes de los lados, debe ser necesariamente mayor que cada lado individualmente. Lo que demuestra que identificaron a la luz de los datos del problema, que el resultado obtenido no era razonable.

Todos los estudiantes justificaron acertadamente, lo que pone en evidencia su capacidad para determinar qué tan pertinente es la estimación que propone el enunciado y analizando las causas del error en la medición de las longitudes.

Fase de Adquisición

Ilustración 24: Quinto problema de la guía de geometría y proceso de resolución.



Competencias en juego: Argumentación

Componente: Geométrico y Variacional

Afirmación: Válida o refuta conclusiones y representaciones en diversas situaciones, justificando por qué o cómo se llegó a estas. Explica las relaciones entre el perímetro y el área del círculo, a partir de mediciones, superposiciones de figuras y cálculo.

Evidencias: Compara diferentes figuras a partir de las medidas de sus circunferencias. Propone estrategias para la solución de problemas relativos a la medida de la superficie de figuras planas. Mide longitudes utilizando la descomposición y el cálculo.

Estándar Relacionado: Usa argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias. Resuelve y fórmula problemas usando modelos geométricos.

Descripción y Análisis:

Para resolver este problema el estudiante debe identificar qué variable determina el perímetro de una circunferencia, lo que implica la necesidad de recordar dicha fórmula. La guía brinda una pista y una instrucción para continuar con la resolución del problema, esta es escribir la fórmula del área del círculo y el perímetro de la circunferencia.

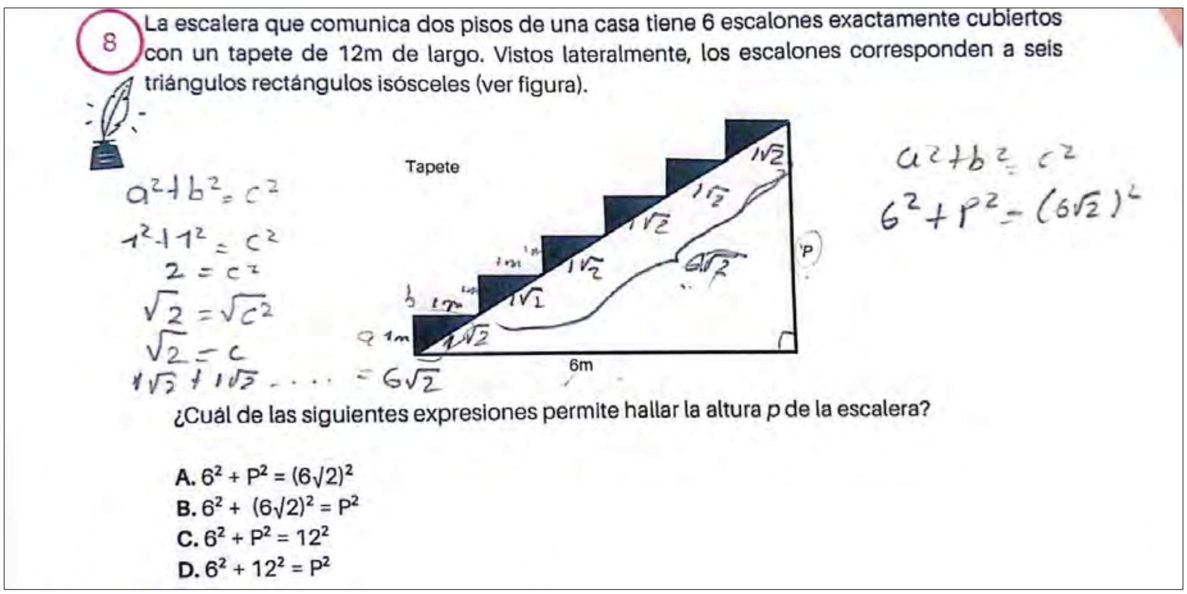
Después de hacerlo los estudiantes se dieron cuenta de que el dato faltante para calcular el perímetro de la reja externa era el radio correspondiente. Sin embargo este no es un limitante para encontrar el valor deseado, pues al comparar el radio del círculo mayor con el radio del círculo menor, notaron que si a este se le suma 10m, el resultado será el radio del círculo mayor. Por otro lado los estudiantes identificaron que el valor del área del círculo pequeño (dato que proporciona el problema), permite encontrar su radio. De esta manera se puede observar cómo los estudiantes emplean sus habilidades de razonamiento para trabajar directamente con proposiciones y cadenas argumentativas e intentos de validar conclusiones, apoyándose en el modelo matemático planteado y en el dibujo presentado por el problema.

Después de encontrar el radio del círculo mayor, los estudiantes aplicaron la fórmula para calcular la circunferencia externa, demostrando y justificando en la opción de respuesta que sí es posible encontrar la longitud de la reja, y efectivamente lo hicieron expresando algebráicamente con seguridad el procedimiento que realizaron. (ver Ilustración 24)

Cierre:

Fase del Efecto Protegido:

Ilustración 25: Octavo problema de la guía de geometría y proceso de resolución.



Competencia: Formulación y Ejecución

Afirmación: Identifica regularidades y argumenta propiedades de figuras geométricas a partir del teorema de Pitágoras en situaciones reales.

Evidencia: Reconoce relaciones geométricas al utilizar el teorema de Pitágoras.

Estándares Asociados: Frente a un problema que involucra información cuantitativa, planteo e implemento estrategias que lleven a soluciones adecuadas Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.

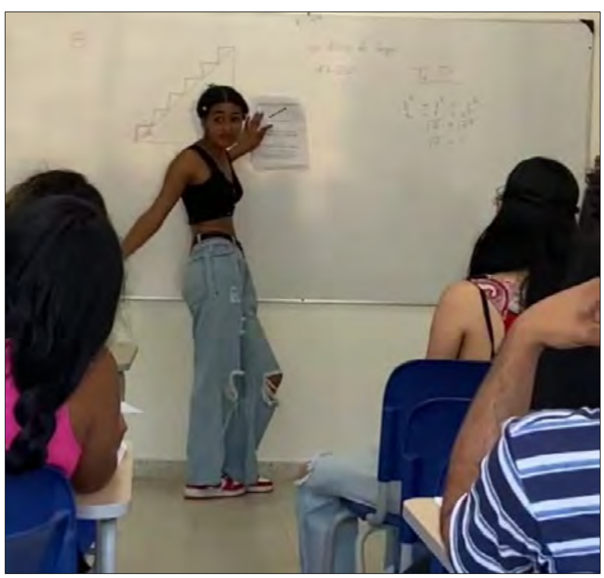
Descripción y Análisis:

Para abordar el problema en primer lugar, se reconoció que la incógnita a determinar es la altura "p" de la escalera. El dibujo hace evidente que la altura "p" ; la base de $6m$ y la diagonal de los 6 escalones vistos lateralmente forman un triángulo rectángulo (ver ilustración 25) cada escalón forma un triángulo rectángulo de catetos "$1m$" (se deduce porque según el enunciado, 6 escalones son cubiertos por un tapete de "$12m$" de largo) Con esta información, se hace uso del teorema de Pitágoras, para hallar la suma de las diagonales de todos los escalones:

$$1^2 + 1^2 = c^2 \Leftrightarrow 2 = c^2 \Leftrightarrow \sqrt{2} = c$$

La suma de estos 6 escalones es la hipotenusa del triángulo rectángulo, que permite encontrar la altura "p" de la escalera nuevamente con el teorema de Pitágoras. $6^2 + p^2 = (6\sqrt{2})^2$ (ver ilustración 25)

Ilustración 26: Explicación por parte de la estudiante de cómo soluciona el problema



Puesto que este problema estaba en la fase del Efecto protegido, se presentó como una oportunidad para que una estudiante constatara su capacidad para comunicar ideas matemáticas, explicar y justificar sobre los procesos realizados en la resolución del problema.

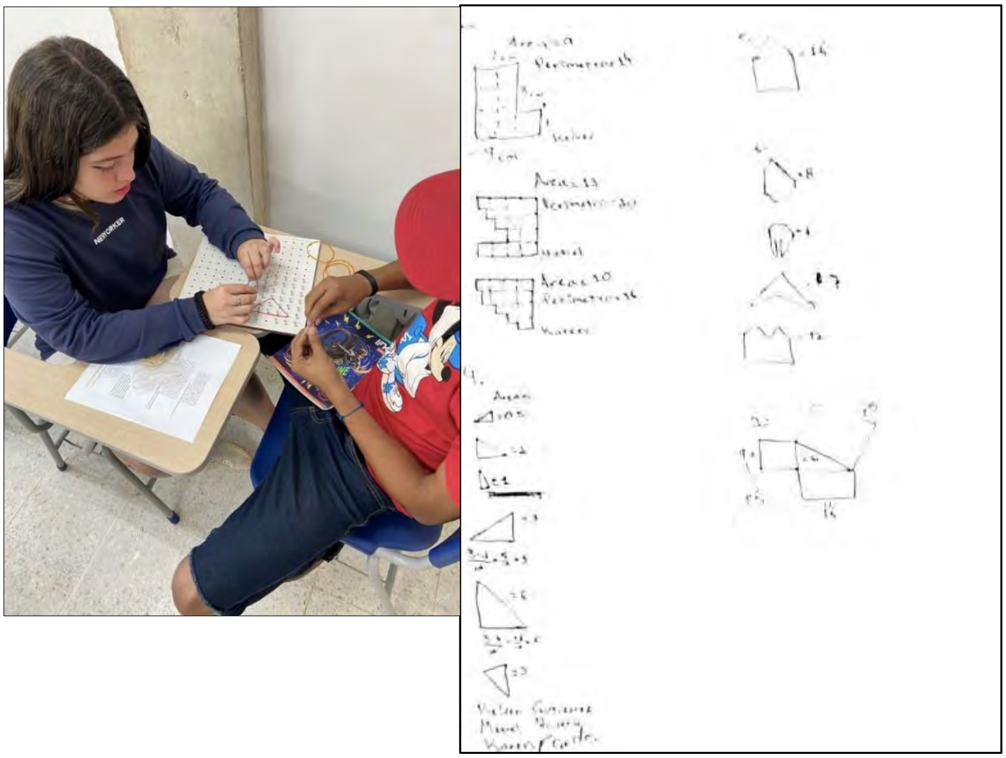
Se evidenció la competencia de formulación y ejecución por parte de la estudiante al plantear, modelar y resolver el problema: identificó la medida del lado más extenso del triángulo representado en la gráfica, como el dato necesario para hallar la altura "p" de la escalera mediante el teorema de Pitágoras. La estudiante reconoció que al aplicar el teorema de Pitágoras a los triángulos sombreados, encontraría las longitudes de sus hipotenusas, que al sumarlas, constituía precisamente la medida faltante para llevar a cabo su planteamiento inicial, como se puede observar en el proceso matemático realizado en la Ilustración 25.

Socialización y Recuperación:

Con la intención de recuperar y fortalecer los conceptos de área y perímetro de figuras geométricas, además de desarrollar habilidades matemáticas y el pensamiento geométrico, se considera la siguiente actividad del geoplano en parejas (Ver Actividad del Geoplano).

En el momento de calcular el área y perímetro de algunas figuras propuestas en la actividad, los estudiantes comprendieron que el perímetro de una figura es la medida de la longitud de la “parte externa” (la longitud de la goma) y el área es la medida de la parte interna de la figura (el número de cuadritos que conforman la figura).

Ilustración 27: Proceso y respuestas de los estudiantes en la actividad del geoplano.



Por otro lado, durante el desarrollo de la actividad, los estudiantes usaron procesos de razonamiento, al analizar la estructura de las figuras y deducir que el área de un triángulo es la mitad del área de un rectángulo. Además jugo un papel fundamental la competencia de comunicación y trabajo en grupo, pues era necesario expresar las observaciones y conclusiones de manera clara y precisa para resolver los puntos de la actividad. Finalmente, para la construcción de las figuras (ver anexo, actividad del geoplano) se observaron habilidades relacionadas con la modelación, pues el estudiante debió crear representaciones visuales de conceptos geométricos y experimentar con diferentes configuraciones para validar sus conclusiones.

Quinta secuencia didáctica

Periodo de Aplicación: 12 de Agosto

Categoría: Geometría y Álgebra

Tema: Regularidades y Ángulos

Contenido: Pensamiento Variacional y Sistema Algebraico.

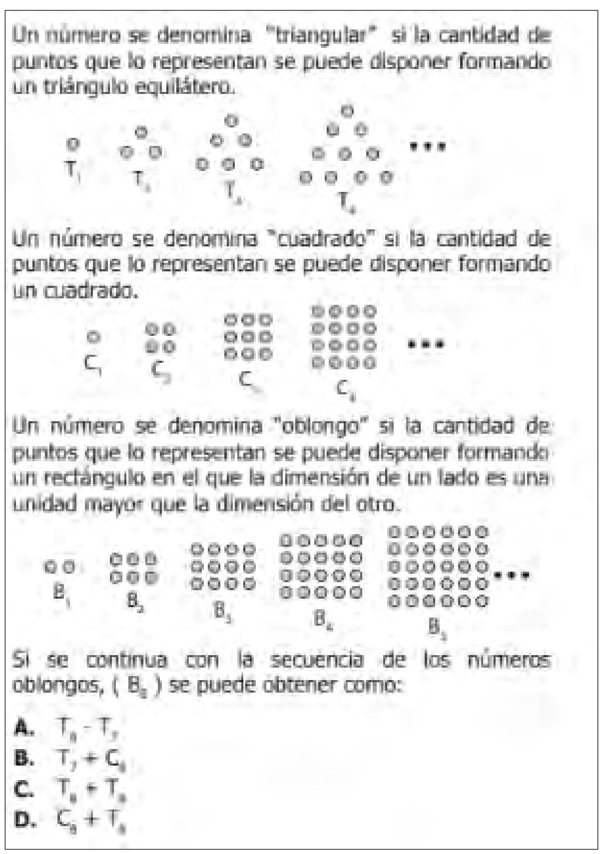
Objetivo: Fomentar el desarrollo del pensamiento variacional con la resolución de problemas matemáticas que involucren secuencias numéricas.

La intención inicial de esta guía es ser una puerta de entrada para el desarrollo del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, al ser conscientes del papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas.

Inicio

Fase de Comprensión:

Ilustración 28: Primer problema de la guía de álgebra.



Un número se denomina "triangular" si la cantidad de puntos que lo representan se puede disponer formando un triángulo equilátero.

T_1 T_2 T_3 T_4 …

Un número se denomina "cuadrado" si la cantidad de puntos que lo representan se puede disponer formando un cuadrado.

C_1 C_2 C_3 C_4 …

Un número se denomina "oblongo" si la cantidad de puntos que lo representan se puede disponer formando un rectángulo en el que la dimensión de un lado es una unidad mayor que la dimensión del otro.

B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 …

Si se continua con la secuencia de los números oblongos, (B_8) se puede obtener como:

A. $T_8 - T_7$
B. $T_7 + C_8$
C. $T_8 + T_8$
D. $C_8 + T_8$

Competencias en juego: Interpretación y Representación

Componente: Pensamiento variacional y sistemas algebráicos y analíticos.

Afirmación: Utiliza los números reales, sus operaciones, relaciones y representaciones para analizar procesos infinitos y resolver problemas.

Evidencia: Describe de manera cualitativa situaciones de cambio y variación utilizando lenguaje natural, gestos, dibujos y gráficas, encuentra las relaciones y propiedades que determinan la formación de secuencias numéricas.

Estándar asociado: Describo e interpreto variaciones representadas en gráficos, predigo patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica. Uso procesos inductivos y lenguaje algebráico para formular y poner a prueba conjeturas.

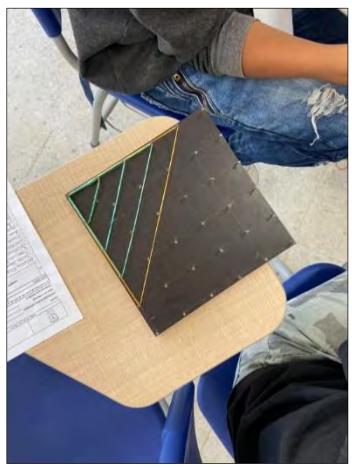
Descripción y Análisis:

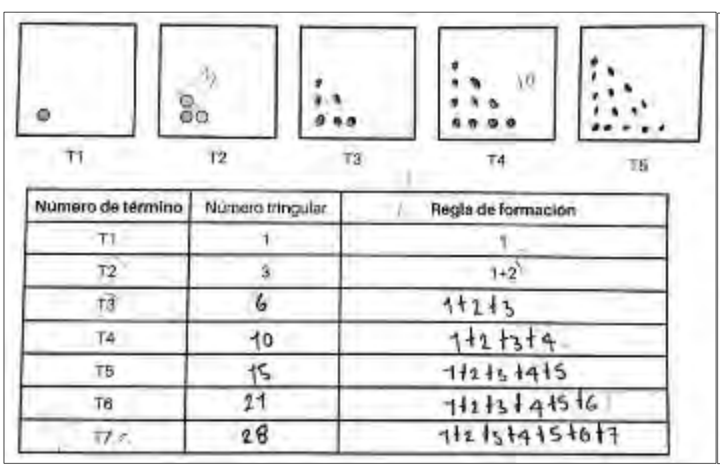
La resolución de este problema podría ser directo, sin mayores dificultades para quienes identificaron el funcionamiento de la secuencia de los número triangulares y cuadrados. Por otro lado, la elección de la respuesta podría haber estado determinada por ensayo y error y de hecho así fue. Sin embargo, aprovechando las definiciones de los números triangulares y cuadrados que presenta el problema, la guía se adentra en estos conceptos para introducir a los estudiantes en el desarrollo del pensamiento variacional, preparándolos para construir expresiones algebráicas mediante la formulación de conjeturas sobre la forma o el valor del siguiente término de la secuencia, expresándolo por medio de dibujos y otras representaciones. (Invito al lector a ver la guía de Algebra para observar cómo se cambió el problema)

Para la solución de este problema se presenta primero el concepto de "número poligonal" desde un enfoque constructivista, con la intención de que sean los mismos estudiantes quienes descubran cómo se construyen. Se examina y verifican conceptos como: polígonos regulares y sobre cómo los pitagóricos disponían los números de ciertas formas al representarlos con piedras o semillas.

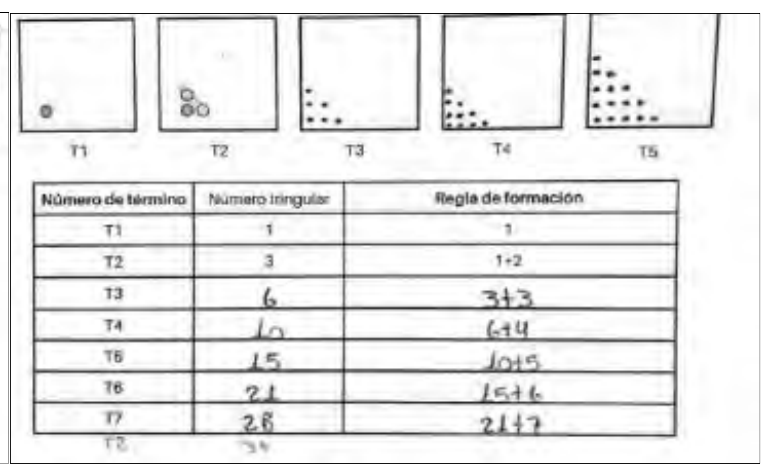
Posteriormente se les pidió a los estudiantes construir y encontrar la regla de formación de los números triangulares. Para lograrlo utilizaron el geoplano para formar los seis primeros números triangulares y registraron la cantidad de clavos empleados en una lista (ver Ilustración 29), Posteriormente al examinar los términos de la sucesión y la representación en el geoplano, los estudiantes notaron que cada número triangular era el resultado de la suma de los primeros números naturales consecutivos, desde uno hasta el número de la posición.

Ilustración 29: Números triangulares en el geoplano y la regla de formación.





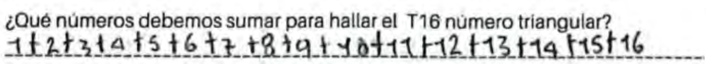
Número de término	Número tringular	Regla de formación
T1	1	1
T2	3	1+2
T3	6	1+2+3
T4	10	1+2+3+4
T5	15	1+2+3+4+5
T6	21	1+2+3+4+5+6
T7	28	1+2+3+4+5+6+7

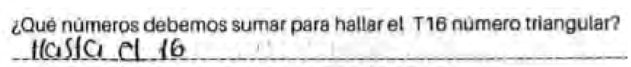


Número de término	Número tringular	Regla de formación
T1	1	1
T2	3	1+2
T3	6	3+3
T4	10	6+4
T5	15	10+5
T6	21	15+6
T7	28	21+7
T8	36	

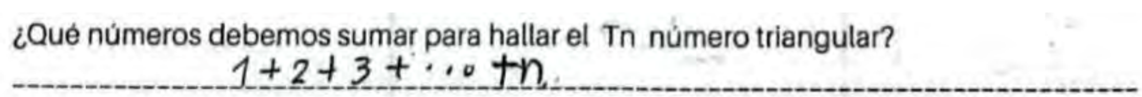
Todos los estudiantes completaron correctamente la tabla; poder representar y visualizar los números mediante dibujos y en especial construir y “tocar” en el geoplano los números triangulares. Esto les permitió hacer uso del razonamiento lógico para observar y percibir claramente las regularidades o patrones de la secuencia, identificar y describir cómo los términos de la secuencia cambiaban con respecto al termino anterior y hacer conjeturas al proponer y comprender acertadamente la regla de formación.

Para comprobar la comprensión de la regla de formación se hizo la siguiente pregunta: Qué números debemos sumar para hallar el T16 número triangular?


¿Qué números debemos sumar para hallar el T16 número triangular?
1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16


¿Qué números debemos sumar para hallar el T16 número triangular?
hasta el 16

Como podemos observar, los estudiantes fueron capaces de abstraer la regularidad de las secuencias, identificar el número triangular sin depender del anterior, sino de la posición y encontrar las relaciones y propiedades que determina la formación de esta secuencia: los estudiantes evidenciaron sus habilidades para identificar la expresión general de la sucesión y calcular cualquier término de esta.


¿Qué números debemos sumar para hallar el Tn número triangular?
1+2+3+ ··· +n

Finalmente al responder la pregunta sobre ¿qué números deben sumarse para hallar el Tn número triangular? notamos una fuerte dificultad para utilizar notación simbólica para formular, expresar y sustentar ideas matemáticas.

Como se pudo observar, este tipo de problemas desarrolla la capacidad para identificar en qué cosiste la repetición de un mismo patrón y la habilidad para reproducirlo por medio de un cierto procedimiento; en este caso los estudiantes no utilizaron ni se les pidió lenguaje algebraico para formular la conjetura, por ejemplo al expresar el número triangular como $T_n = T_{n-1} + n$ o al expresar la suma de los primeros números naturales como $Tn = \frac{n(n+1)}{2}$. Sin embargo, sí se hizo evidente la habilidad de utilizar los números enteros y sus operaciones para describir y analizar procesos indeterminados, haciendo uso de los puntos suspensivos.

Este tipo de problemas son una excelente puerta de entrada para el desarrollo del pensamiento variacional y la comprensión de nociones claves de las matemáticas, como *"variable"* o la construcción de futuros conceptos más profundos *como función, tasa de cambio, relaciones de desigualdad y el manejo de ecuaciones e infinito.*

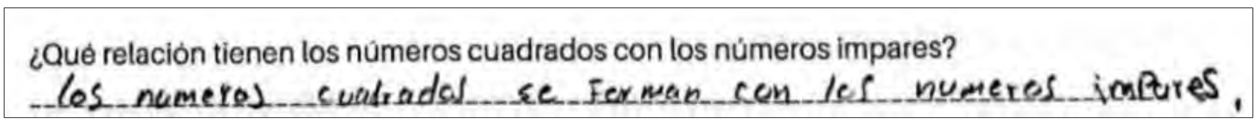
Por otro lado y en vista de esta última dificultad, concluimos que:

- Aunque encontrar la regularidad en la construcción de la secuencia podría parecer una tarea sencilla, se observó una notable dificultad para comprender conceptos que deberían ser elementales en estudiante de noveno, decimo u once, como la apropiación del concepto de variable. Por ello es tan importante considerar en la busca del desarrollo de las competencias matemáticas, la valoración de los saberes previos. Los estándares básicos de competencias mencionan que: "La construcción y reconstrucción constante de significados matemáticos en la mente del estudiante, en la medida en que se encuentra en la tensión entre lo que ya sabe o cree saber y lo que se le presenta para aprender, estimula su participación y una actitud positiva para enfrentar nuevos aprendizajes". (pag.73). Justamente este argumento me lleva a considerar el siguiente punto.
- El uso de situaciones problema como el presentado, es una excelente forma de darle sentido a aquellas nociones previas, al usar, recordar o reestructurar lo que ya se sabe para proporcionarle al estudiante un papel activo en situaciones problema y nuevos aprendizajes. Por otra parte, se concluye para futuras prácticas que la idea de cultivar las

competencias matemáticas usando más situaciones problema tipo secuencias le permitirá al estudiante fortalecer el uso del lenguaje algebraico para poner a prueba conjeturas.

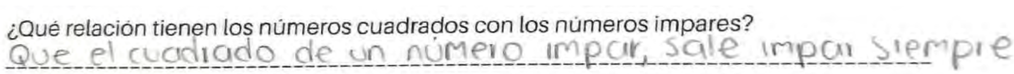
Las mismas estrategias (dibujar, representar en el geoplano y registrar en la tabla) se usaron para encontrar la regla de formación de los números cuadrados, no solo elevando el número de la posición al cuadrado, sino que los estudiantes identificaron y describieron los números cuadrados como la suma de los primeros números impares. De esta manera los estudiantes demostraron construir secuencias numéricas usando propiedades de los números y de las figuras geométricas.

Cuando se les pregunto; ¿qué relación tienes los números cuadrados con los números impares? 7 estudiantes dieron la siguiente respuesta esperada:


¿Qué relación tienen los números cuadrados con los números impares?
los numeros cuadrados se Forman con los numeros imPares.

Se puede observar cómo los estudiantes utilizan la regla de formación que registraron en la tabla para describir la generalidad de manera cualitativa o de forma verbal, demostrando que interpretaron correctamente dicha generalidad.

Pero, 5 estudiantes dieron la siguiente respuesta.


¿Qué relación tienen los números cuadrados con los números impares?
Que el cuadrado de un número impar, sale impar siempre

"Que el cuadrado de un número impar sale impar siempre"

Aunque no es la respuesta esperada tampoco es equivocada; los estudiantes posiblemente se dieron cuenta de que la suma de números impares consecutivos, iniciando desde el 1, puede dar como resultado un número par o impar, pero justamente el resultado impar es correspondiente a la posición impar en la secuencia. Aunque no hicieron una demostración formal para asegurar su resultado, demuestran hacer uso del razonamiento lógico inductivo, al establecer esta conjetura, apoyada en los datos, tendencias, evidencias específicas, propiedades y relaciones entre los números enteros que identificaron en la tabla.

Por otro lado, la afirmación establecida por los estudiantes podría ponerse en juicio en el salón de clase, con el objetivo de fomentar el desarrollo del razonamiento lógico deductivo en vista de la necesidad de intentar demostrar, sin lugar a refutaciones, dicha conjeturara.

La demostración es:

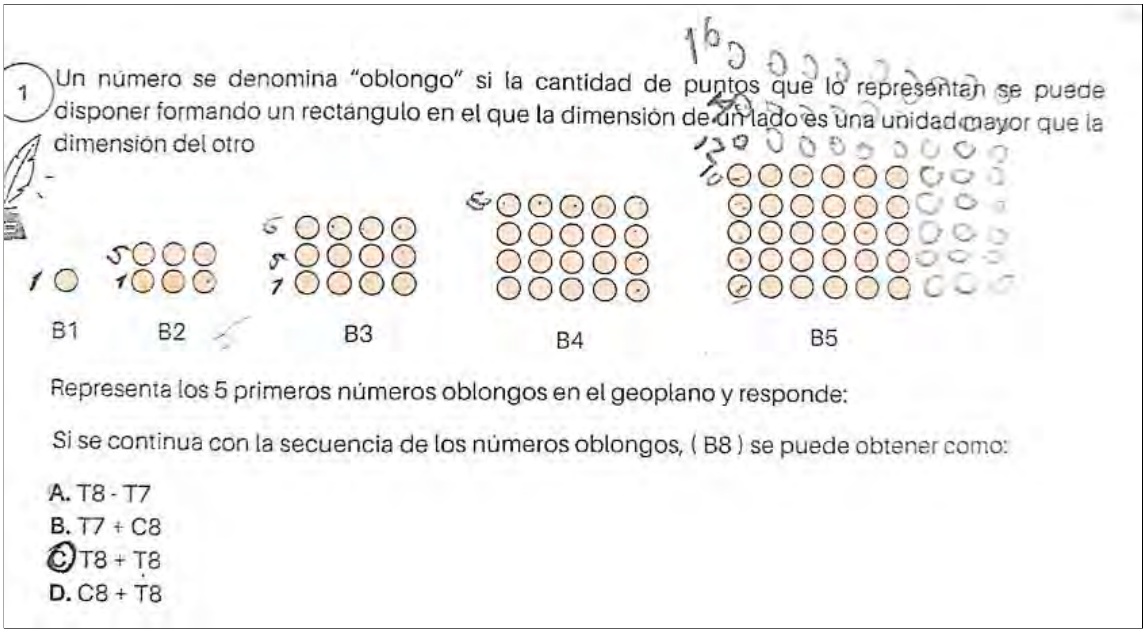
Consideremos un número impar, 2n +1, donde n es un número entero cualquiera. Como queremos probar que *"El cuadrado de un número impar, sale impar siempre"*

Veamos que cuando elevamos un número impar al cuadrado es decir, $(2n+1)^2$ da como resultado $(2n)^2+2(2n)+1$. podemos expresar esto último como: $[2(2n^2+2n)]+1$, esto es, un número par más 1, es decir, un número impar.

Al promover el desarrollo de este tipo de demostraciones, no solo nos quedamos en la puerta del pensamiento variacional con razonamientos inductivos, sino que entramos en el pensamiento variacional y los sistemas algebráicos y analíticos usando el razonamiento deductivo, promoviendo la interpretación de expresiones numéricas y la toma de decisiones en base a esa interpretación, evidenciando que el álgebra no es simplemente un juego de símbolos sin significado, es una herramienta práctica al utilizar de manera significativa objetos algebráicos como variables, constantes, expresiones y operaciones algebráicas, objetos que permiten que se valide esta y muchas otras proposiciones.

Finalmente, la guía presenta el problema de los números oblongos, definiéndolos y mostrando su representación gráfica, para finalmente hacer la pregunta: si se continua con la secuencia de los números oblongos. (B8) se puede obtener cómo:

Ilustración 30: Procedimiento para encontrar el patrón en la secuencia



1 Un número se denomina "oblongo" si la cantidad de puntos que lo representan se puede disponer formando un rectángulo en el que la dimensión de un lado es una unidad mayor que la dimensión del otro

B1 B2 B3 B4 B5

Representa los 5 primeros números oblongos en el geoplano y responde:

Si se continua con la secuencia de los números oblongos, (B8) se puede obtener como:

A. T8 - T7
B. T7 + C8
C. T8 + T8
D. C8 + T8

A excepción de dos estudiantes que no respondieron, todos acertaron correctamente.

Para ello lograron discernir un patrón en la gráfica, lo que les permitió configurar el rectángulo correspondiente a la posición 8 mediante la disposición de pequeños círculos, los cuales al ser sumados totalizaron 72.

Este procedimiento demuestra su capacidad de encontrar y representar gráficamente el patrón de la secuencia.

Posteriormente, conociendo el número oblongo B8, los estudiantes usaron el geoplano para para representar las opciones de respuesta e ir descartando aquellas en las que la suma de los clavos no fuera 72 .La respuesta correcta básicamente se debe a la pericia de usar métodos informales, como ensayo y error y quedarse con la opción adecuada.

Otras preguntas interesantes para utilizar ingeniosamente este método podrían ser:

- ¿Cuál es el menor y cuál es el mayor número oblongo menor que 100?
    - Ha de considerarse si el 0 representa un número oblongo y por qué

Desarrollo

Fase de Adquisición:

Competencias en juego: Formulación y Ejecución

Componente: Variacional y Espacial

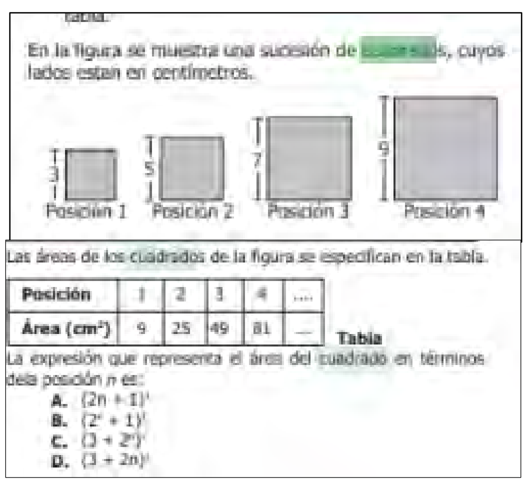
Afirmación: Utiliza procesos inductivos y lenguaje simbólico o algebraico para formular, proponer y resolver conjeturas en la solución de problemas numéricos, geométricos, métricos, en situaciones no cotidianas.

Evidencia: Propone conjeturas sobre configuraciones geométricas o numéricas y las expresa verbal o simbólicamente. Reconoce patrones numéricos y los describe verbalmente. Representa relaciones numéricas mediante expresiones algebráicas y opera con y sobre variables.

Estándar Asociado: Modela situaciones de variación con funciones polinómicas. Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.

Descripción y Análisis:

Ilustración 31: Segundo problema de la guía de álgebra


En la figura se muestra una sucesión de cuadrados, cuyos lados estan en centímetros.

Las áreas de los cuadrados de la figura se especifican en la tabla.

Posición	1	2	3	4	....
Área (cm²)	9	25	49	81	...

Tabla

La expresión que representa el área del cuadrado en términos dela posición *n* es:

A. $(2n + 1)^2$
B. $(2^n + 1)^2$
C. $(3 + 2^n)^2$
D. $(3 + 2n)^2$

Las opciones de respuesta en esta pregunta no se presentaron, para evidenciar y potenciar otras habilidades matemáticas en los estudiantes y no solo la refutación por descarte.

En la resolución del problema, se observó gran dificultad en los estudiantes por encontrar un camino para llegar a la respuesta. La guía presentó una serie de "pistas" para encontrar la expresión deseada. (ver problema 2 de la guía de Álgebra y la sección bajo el tema "algunas pistas")

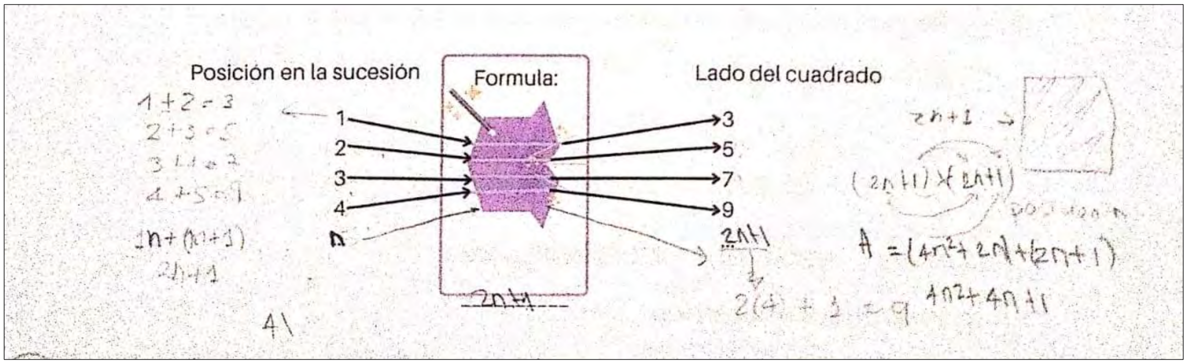
Como el área del cuadrado, no dependía de su lado, sino de la posición, era necesario que encontraran alguna relación entre estas dos variables:

Estas preguntas, les permitieron a los estudiantes reconocer el lado del cuadrado aumenta en *2 cm*, con respecto al lado anterior. De esta manera comprendieron que como el primer lado es 3, le seguiría el 5 y luego el 7, es decir, los números impares mayores que 1.

Posteriormente, se les pidió a los estudiantes construir una fórmula que representara dicho patrón, es decir comunicar de manera algebraica "los números impares", pero ningún grupo lo puedo hacer.

Podemos observar que aunque son capaces de proponer conjeturas sobre configuraciones geométricas o numéricas (como hemos analizado en estos dos problemas) el desarrollo de su pensamiento variacional es tan inmaduro, que les impide usar un registro simbólico, como una letra, para representar aquella posición cualquiera, que puede variar, y hacer la modelación matemática de aquella generalidad que bien pueden representar verbalmente. Esto posiblemente se deba a que los ejercicios rutinarios con variables se han impuesto sobre situaciones problemáticas como esta, que le dan significado y sentido a la variación, lo que les impidió, representar relaciones numéricas mediante expresiones algebraicas.

Ilustración 32: Proceso para encontrar la fórmula que permite hallar el lado del cuadrado en la sucesión.



La analogía de la guía que presenta la fórmula, como una caja mágica, que convierte el número de la posición de la sucesión, en la medida del lado del cuadrado, permitió que los estudiantes, comprendieran, cómo de manera controlada, se puede cambiar un número a otro, gracias a la construcción de dicha fórmula.

Esta fórmula, no es más que una función, que convierte la posición de la sucesión (la variable independiente), en el lado del cuadrado (variable dependiente). El estudiante utiliza un proceso inductivo como método de razonamiento que le permite reconocer que cada lado del cuadrado se obtiene sumando dos números consecutivos, de esta manera, a la posición “n”, le suma su número consecutivo “n+1” y asi encuentra la regla de formación de los lados del cuadrado.

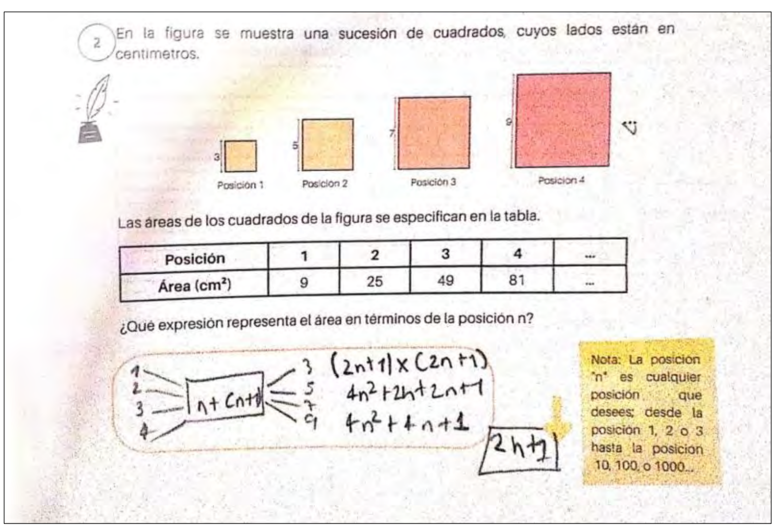
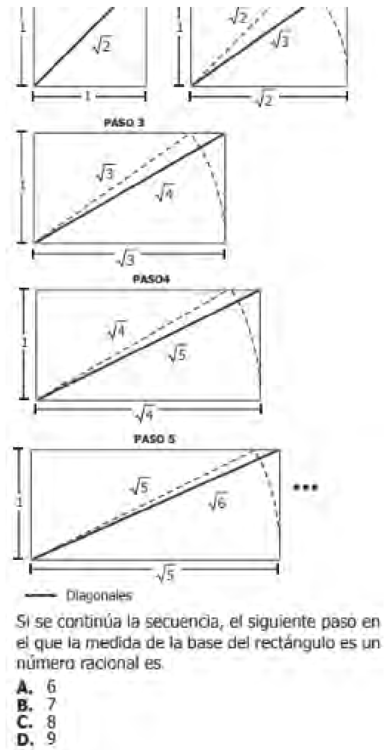


Ilustración 33: Resolución del segundo problema de la guía de álgebra.

Fase de Retención:



Competencias en juego: Interpretación y Representación

Componente: Cálculo y Álgebra.

Afirmación: Utiliza los números reales, operaciones entre ellos, relaciones y representaciones para analizar procesos infinitos y resolver problemas. Reconoce la existencia de los números irracionales como números no racionales y los describe de acuerdo con sus características y propiedades.

Evidencia: Encuentra las relaciones y propiedades que determinan la formación de secuencias numéricas. Utiliza procedimientos geométricos para representar números raciónales e irracionales. Identifica las diferentes representaciones (decimal y no decimal) para argumentar por qué un número es o no racional.

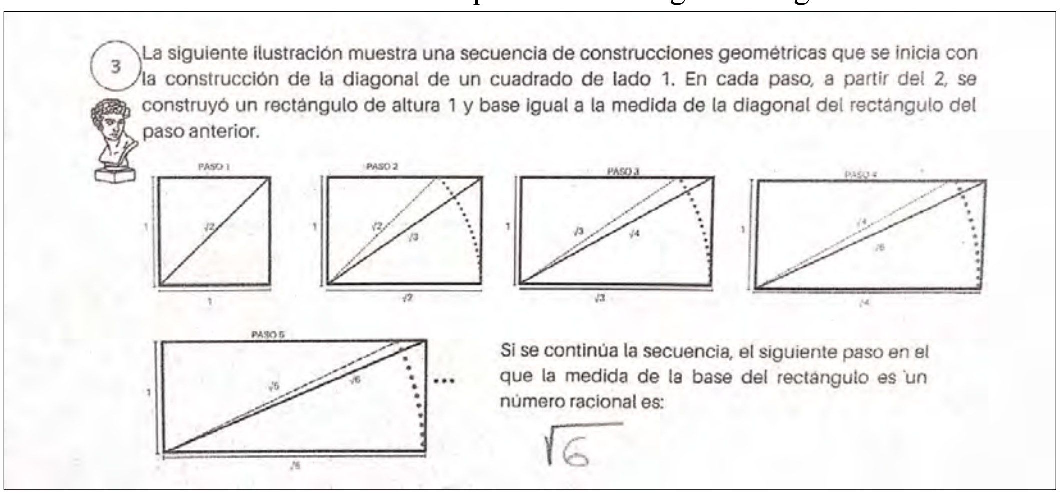
Estándar Relacionado: Analizo representaciones decimales de los números reales para diferenciar entre racionales e irracionales, predigo patrones de variación en una secuencia gráfica. Uso procesos inductivos para formular y poner a prueba conjeturas.

Descripción y Análisis:

Los estudiantes fueron capaces de utilizar la representación gráfica del problema para extraer la información relevante, que les permitió identificar el patrón en la secuencia, encontrando que la base del rectángulo es la raíz cuadrada del número del paso correspondiente.

Esto es: $b(p) = \sqrt{p}$

Ilustración 34: Tercer problema de la guía de álgebra.



Aunque no escribieron un registro algebráico, la misma respuesta de todos demostró que establecieron correctamente la relación de la secuencia numérica al encontrar la longitud de la base del rectángulo en el *siguiente el paso*

Sin embargo curiosa y sorprendentemente, todas las respuestas fueron equivocadas. Esto ocurrió por al menos tres razones:

- Falta de comprensión conceptual: Se observó que los estudiantes no estaban familiarizados con las definiciones y propiedades de los números racionales y sus diferencias con los irracionales. Los practicantes tampoco se percataron de esta situación y asumieron que los estudiantes ya tenían un entendimiento de estos términos. Esto posiblemente llevó a que ninguno lograra identificar la representación simbólica de $\sqrt{6}$ como un número irracional, ni realizaran una verificación de su expresión decimal para determinar si se trataba de un número racional o no.

- Falta de atención y concentración: El problema no preguntaba sobre la siguiente **medida** de la base del rectángulo en la secuencia, sino sobre ¿Cuál era el siguiente **paso**? Pero los estudiantes no fueron capaces de tomarse el tiempo para procesar la información antes de tomar decisiones o expresar sus opiniones. Encontrar una posible respuesta los llevó a establecerla inmediatamente como válida, sacrificando la seguridad que brinda la paciencia de rectificar en la resolución de problemas.
- ¿Acaso no influye en la comprensión lectora la manera cómo está formulado el enunciado del problema? Si analizamos con detenimiento la pregunta, podemos observar que en realidad se está preguntando por el *"siguiente paso"*, de tal manera que este sería el paso 6 y por tanto, la base del rectángulo es $\sqrt{6}$.

Observaciones generales durante el desarrollo de las guías.

- Se observaron algunos comportamientos no tan positivos de algunos grupos: sus integrantes se limitaron a copiar las respuestas de los compañeros y esta actitud relajada contagiaba a los demás e impedía un trabajo fructífero. Sin embargo, a lo largo de las sesiones se reveló un cambio de actitud más comprometida e independiente por parte de algunos estudiantes, en la elaboración de guías y actividades propuestas.

  Pese a ello no todos los estudiantes estaban interesados en resolver los problemas matemáticos de las guías, pues aunque reconocían la aplicación de los conceptos matemáticos en las preguntas, simplemente no encontraban su relevancia; quizás por el desafío intelectual, conexión con sus interés o contextualización significativa. Respecto a este último cito a (Valero, 2009) quien nos invita a considerar en la educación matemáticas no solo su contenido, nociones o competencias, sino también y principalmente factores sociales y políticos que constituyen las relaciones de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas en el aula, escuela y sociedad. Uno de los nodos de la red de prácticas de educación matemática que hicieron parte del contexto educativo es: la cultura de la juventud, la familia, la comunidad y el mercado de trabajo. Lamentablemente al no considerar tales incidencias, se pudo haber pasado por alto la oportunidad de presentar desafíos más atractivos y relevantes para los estudiantes, como por ejemplo, situaciones relacionadas con su interés en las redes sociales, su formación en el ámbito agropecuario o su inclinación por una labor o carrera profesional específica. Esta falta de conexión con su realidad podría haber generado una actitud hostil, desinteresada o resistente al abordar problemas tipo saber 11.

- Muchos grupos optaron (o se vieron obligados) a buscar en internet las respuestas a algunas preguntas, en especial a aquellas de tipo conceptual. Este hecho de ninguna manera es considerado negativo; al contrario, actualmente el uso del internet y su integración en el aprendizaje es ventajoso y efectivo siempre que se haga un uso adecuado. El artículo ¿Usamos el móvil en clase de matemáticas? Publicado por (Lorenzo, 2015), menciona que el uso del smartphone "permite acceder a la información desde cualquier lugar en el que se disponga de una conexión a internet, hecho que rompe todas las barreras, permitiendo el aprendizaje en cualquier lugar y en cualquier momento y desarrollando una rama de conocimiento que se conoce como mobile learning (m-learning[1])" . El autor también aclara que "La tecnología debe entenderse como un recurso y como tal, no garantiza un mejor aprendizaje sino que debe ir acompañado de una pedagogía adecuada que permita obtener el máximo rendimiento con los recursos utilizados". Es precisamente por esta razón que no discurrimos sobre cómo o dónde se encuentra información verídica y relevantes sobre los contenidos matemáticos, sino sobre su verdadera comprensión y las competencias matemáticas que se desarrollan durante la solución de un problema, partiendo de conceptos mencionados ya sea en clase por el profesor, en libros o en la web.

- Uno de los desafíos más notables fue que muchos estudiantes querían solucionar rápidamente el problema sin prestar atención a la información detallada que proporciona la guía, pero como es de esperar, el no contar con explicaciones suficientes, representa un impedimento para la resolución de problemas, los estudiantes entonces se veían motivados a consultar a la practicante, una y otra vez, para hallar respuestas rápidas y el profesor inmediatamente se las brindaba. Sin embargo la respuesta inmediata del profesor no alienta a buscar respuestas autónomas y frenaba un posible análisis cuidadoso de la información presentada por escrito. (Gonzáles, 2004) menciona que el resolutor del problema debe "Hablar con el problema: establecer un diálogo con el enunciado en el cual se toma en cuenta que los problemas responden cuando se le formulan preguntas tales como las siguientes ¿Qué me das? ¿Qué me pides? ¿Qué es lo que debo encontrar? Estas interrogantes pueden ser respondidas satisfactoriamente a partir de la lectura reiterada del enunciado del problema tantas veces como sea necesario." Es fundamental que como profesor guía tengamos en cuenta que el alumno está en una conversación

[1] El m-learning o móvil learning en inglés, es una estrategia educativa que aprovecha los contenidos de internet a través de dispositivos electrónicos móviles, como tabletas o teléfonos para aprender

constante con el problema para que este le brinde respuestas. Si interrumpimos este diálogo con respuestas inmediatas, podemos afectar el interés de los jóvenes por el problema.

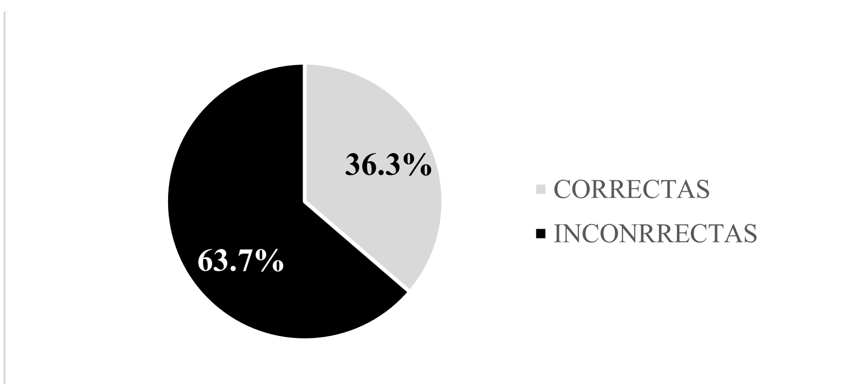
Resultados de las pruebas

- **Prueba Diagnóstica:**

La prueba diagnóstica que elegimos para analizar las respuestas de los estudiantes, predecir sus resultados en la Prueba Saber 11 y conocer las capacidades de solucionar problemas con base en los conocimientos y competencias matemáticas, fue un simulacro elaborado por el programa “Evaluar para avanzar”, Cuadernillo 1, tomado de (Icfes, 2021). Este examen consta de 20 preguntas de opción múltiple con única respuesta. Los resultados de los 27 participantes fueron los siguientes:

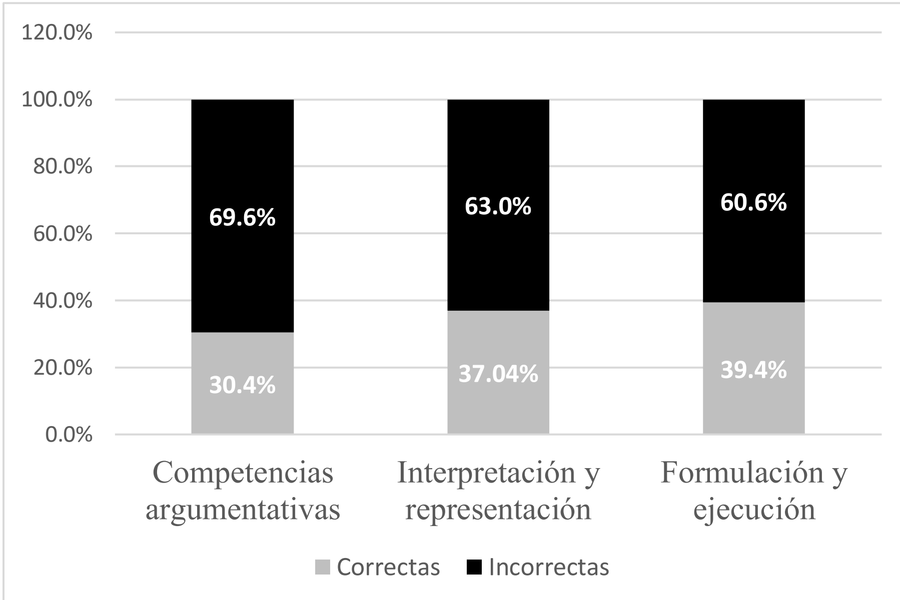
El total de preguntas que se evaluaron fueron 560 de las cuales 196 fueron correctas, lo que representa un promedio de 7 repuestas correctas por cada 20 preguntas. En definitiva este resultado no es positivo; sin embargo esperamos que mejore al finalizar la intervención.

Ilustración 35: Resultados de la primera prueba 1



Al clasificar las preguntas de la prueba por competencias se obtuvieron los siguientes resultados:

Ilustración 36: Resultado de la prueba por competencias matemáticas



Como se observa, la competencia en la que más se desatacan los estudiantes es de formulación y ejecución; le siguen las competencias de interpretación y representación y por último las de tipo argumentativas todo esto probablemente se deba a que “*las competencias no se alcanzan por generación espontánea”* , sin o que requieren de ambientes de aprendizajes enriquecidos por situaciones problema, y pocas veces en el entorno escolar se permite desarrollar la capacidad para validar o refutar conclusiones, estrategias o soluciones, justificando por qué se llegó a éstas.

Ilustración 37: Descifrando los resultados presentados en porcentajes de la prueba 1.

Los gráficos anteriores se presentaron a los participantes, que entendieron que el grupo no respondió correctamente ni la mitad de las preguntas. Luego, con la intención de aprender sobre porcentaje, calculamos haciendo uso de la regla de tres cuántas respuestas correctas correspondían al 36,3%, esto es 196 de 540 posibles. Al preguntarles ¿Cómo creen que les fue? casi al unísono respondieron “mal” y un estudiante expresó: “Estos puntajes no nos alcanzan pa’ nada”. Al mismo tiempo esta actividad les permitió demostrar su competencia para interpretar y representar gráficos, al utilizar estas representaciones para extraer información relevante que permita establecer conclusiones. Además de realizar diferentes conversiones entre registros, como entre el gráfico y el natural (al expresar conclusiones).

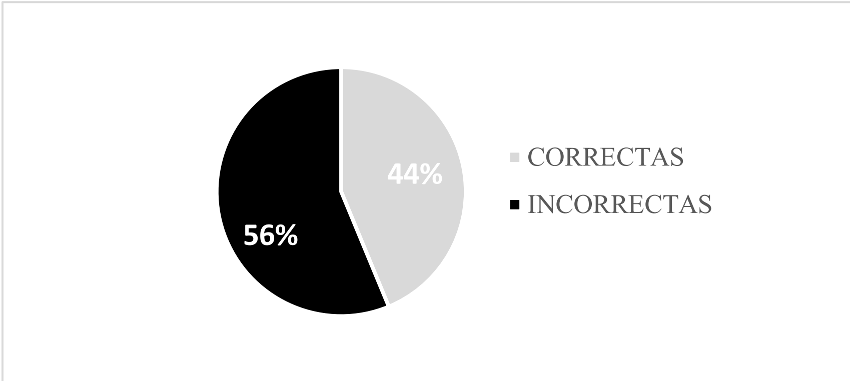
Aunque fue desalentador para los participantes conocer su puntaje a nivel global, este ejercicio exhibió de manera directa uno de los objetivos del proyecto; estimular en los estudiantes la necesidad de integrarse con las matemáticas específicamente con estadística, para cuantificar la realidad, analizarla y tomar acción para cambiarla al visualizar la importancia de reajustar y mejorar en sus estudios si ingresar a la educación superior es su deseo.

- **Segunda Prueba**

Para llevar a cabo esta segunda evaluación se decidió emplear el simulacro diseñado por el programa "Evaluar para avanzar", cuadernillo 2 (Icfes, 2021). La ejecución del simulacro tuvo lugar después de completar 6 sesiones de clase y concluir las guías didácticas relacionadas con la categoría de Estadística.

En total se evaluaron 320 preguntas de las cuales solo 101 fueron respondidas correctamente, representando un 32% de respuestas correctas.

Ilustración 38: Resultados de la prueba 2

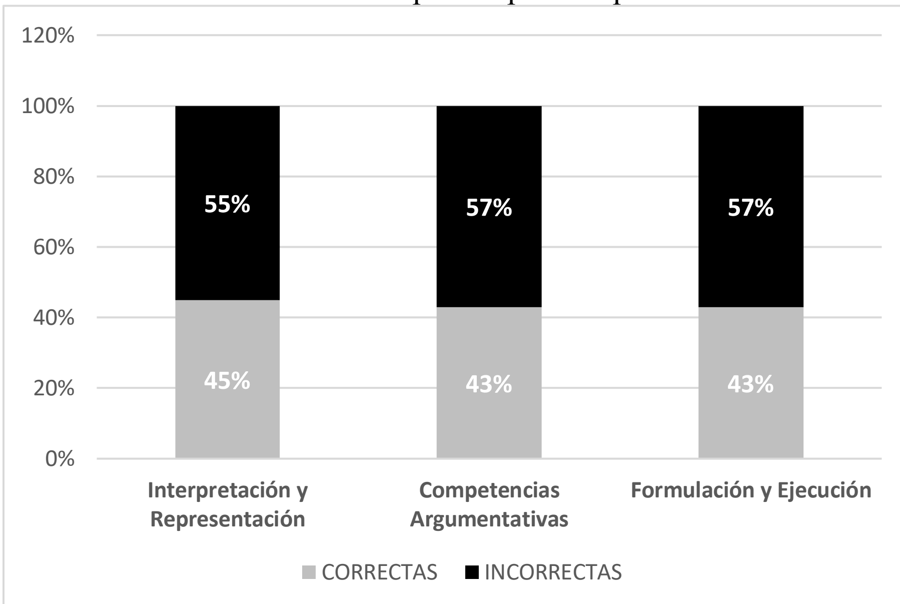


Al contrastar estos resultados con los de la primera prueba, se puede observar una reducción en el porcentaje de respuestas correctas. Esta disminución puede atribuirse a diversas razones: la ausencia de algunos estudiantes en esta segunda prueba o la inclusión de preguntas conceptuales que aún no habían sido abordadas en las guías didácticas.

Con el objetivo de evidenciar el desarrollo de las competencias matemáticas producto de la participación en el semillero, hemos decidido no considerar la contribución de dos estudiantes debido a su ausencia e indisciplina en clase, y nos enfocamos en las preguntas relacionadas con los temas abordados durante las sesiones, como porcentajes, probabilidad y combinatoria, diagrama de barras, circular, temporal y promedio. Al analizar dichas preguntas, identificamos un total de 49 respuestas correctas de un conjunto de 112 preguntas, lo que indica que el 44% de las respuestas fueron contestadas de manera acertada. Esto ubica a los estudiantes en el nivel 2 de desempeño de la prueba de matemáticas, según lo expresado por (Icfes, 2022)

Al clasificar tales preguntas por competencias se obtuvieron los siguientes resultados:

Ilustración 39: Resultado de la prueba por competencias matemáticas



Como se puede apreciar en relación con la gráfica 2, se observa un aumento significativo de 14.6 puntos porcentuales en las preguntas vinculadas a la interpretación y representación. Esto señala que, conforme al nivel 2 de desempeño, los estudiantes tienen la capacidad de comparar datos de dos variables presentados en una misma gráfica sin necesidad de realizar operaciones aritméticas. Además son capaces de transformar gráficos de barras en tablas de doble entrada y reconocen e interpretan el significado del promedio simple.

Por otro lado, al responder correctamente al 43% de las preguntas relacionadas con la competencia argumentativa, demuestran su habilidad para tomar decisiones sobre la veracidad o falsedad de una afirmación al explicar verbalmente la lectura directa que se realiza de la información.

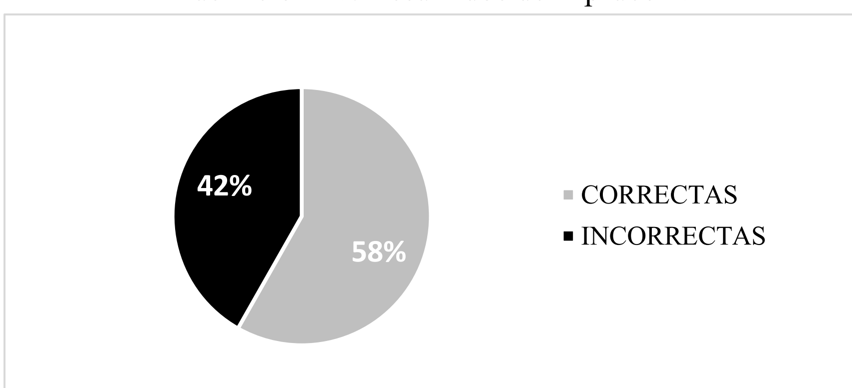
Finalmente, el 43% de respuestas correctas a preguntas que requieren competencias de formulación y ejecución de procedimientos evidencian que los estudiantes pueden identificar valores o puntos representativos en diferentes tipos de registros, considerando el significado que tienen en la situación, y comparar la probabilidad de eventos simples (casos favorables/casos posibles).

- **Tercera Prueba:**

Para llevar a cabo esta la última evaluación, se decidió hacer una prueba de 20 preguntas, utilizando algunas preguntas de los simulacros anteriores y el cuadernillo 1 del 2022 (Icfes, 2021) considerando los temas abordados en las categorías de estadística, geometría y calculo para observar la influencia de las guías didácticas que abordaron estos temas, en el desarrollo de las competencias matemáticas de los estudiantes. La ejecución del simulacro tuvo lugar en la última sesión de actividades.

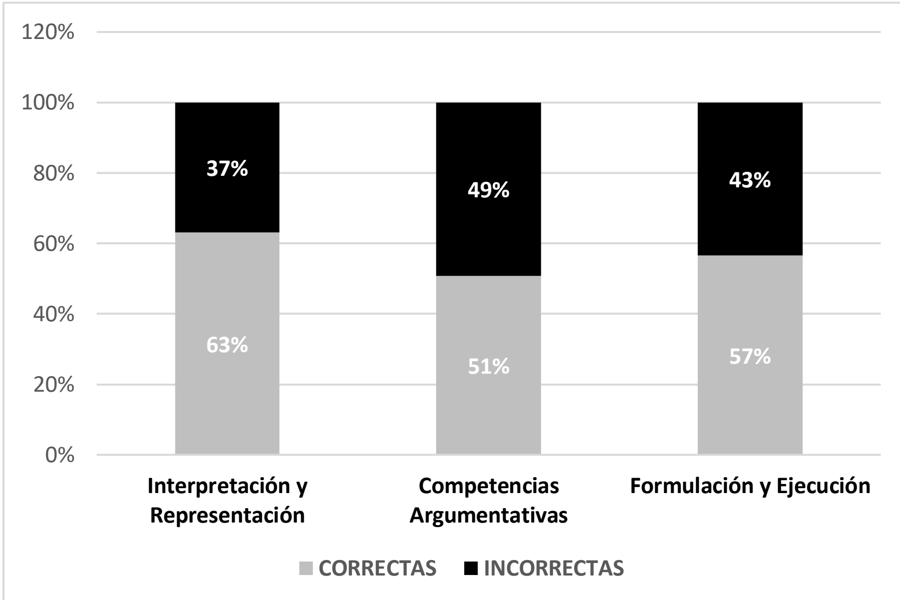
En total, se evaluaron 304 preguntas, de las cuales 177 fueron respondidas de manera correcta, esto representa un total de 58% de repuestas correctas.

Ilustración 40: Resultados de la prueba 3



Al clasificar tales preguntas por competencias se obtuvieron los siguientes resultados:

Ilustración 41: Resultado de la prueba por competencias matemáticas



Al contrastar estos resultados, con las primeras pruebas, podemos observar una evidente mejora de 21 puntos porcentuales. Este puntaje general asciende a los estudiantes al nivel 3 de desempeño según (Icfes, 2022). Además de las habilidades demostradas en el nivel anteriormente descrito, los estudiantes mostraron ser capaces de señalar información representada en formatos no convencionales e identificar información relevante cuando el tipo de registro contiene información de más de tres categorías y comparar información gráfica que requiere de manipulaciones aritméticas, habilidades necesarias para responder correctamente el 63% de las preguntas de interpretación y representación.

Por otro lado, el 51% de respuestas correctas en las preguntas de competencias argumentativas, exhiben las capacidades de los estudiantes de reconocer errores ocurridos al realizar una transformación entre diferentes tipos de registros y justificar afirmaciones utilizando planteamiento y operaciones aritméticas o haciendo uso directo de un concepto es decir, a partir de un único argumento. Se destaca un incremento notable de 20 puntos porcentuales en esta competencia en comparación con la primera guía, lo que evidencia un progreso significativo en el desarrollo de la competencia argumentativa. Este avance lo atribuimos a las discusiones de los problemas presentes en la fase del efecto protegido y la socialización en los problemas de las guías. También se vio beneficiado por la sección de verdad o mito en las guías, que contribuye al fortalecimiento de habilidades de razonamiento y comunicación además de la comprensión de conceptos fundamentales como base teórica para argumentar.

Finalmente al responder correctamente el 57% de preguntas de competencia de formulación y ejecución, los estudiantes demostraron poder: comparar la probabilidad de eventos simples en diversos contextos, seleccionar información necesaria para resolver problemas que involucran operaciones aritméticas, características medibles de figuras geométricas elementales (triángulos, cuadriláteros y circunferencias) y hacer manipulaciones algebráicas sencillas (aritmética de términos semejantes).

Conclusiones

- Como se pudo evidenciar en el análisis de los problemas propuestos en las guías, los jóvenes demostraron hacer uso flexible y con sentido del conocimiento matemático, evidenciando la capacidad para analizar, razonar y comunicar ideas, al igual que sus habilidades para formular, resolver, e interpretar problemas.
- Las preguntas que se plantearon en las guías, en especial en la Guía de Álgebra , que se diseñó con un enfoque constructivista, incorpora una analogía que presenta la fórmula matemática como una caja mágica, que convierte el número de la posición de la sucesión, en la medida del lado del cuadrado, lo que permitió a los estudiantes, comprender, cómo de manera controlada se puede transformar un número por otro, gracias a la construcción de dicha fórmula. Esta estrategia no sólo promovió la comprensión conceptual, sino

también el desarrollo del pensamiento variacional y la resolución efectiva del problema propuesto.

- Las actividades asociadas a las fases del "Efecto protegido" y "Socialización", así como la sección "Verdad o Mito" de la guía, se presentaron como escenarios propicios para que los estudiantes demuestren sus habilidades argumentativas. En estos contextos los estudiantes fueron capaces de validar o refutar afirmaciones, interpretaciones y estrategias de resolución fundamentadas en propiedades, hechos o suposiciones matemáticas, al verbalizar procedimientos y razonamientos.

Las actividades motivacionales se presentaron como una estrategia divertida para incentivar la participación en el aula y fomentar el desarrollo de habilidades de cálculo mental, atención y concentración. En particular, tanto los juegos con Palillos y Reto del Cuadrado Mágico se destacaron por su capacidad para potenciar el análisis crítico y la imaginación, al tiempo que desmitificaron a las matemáticas como una simple memorización de reglas, sino que tienen sentido, son lógicas y potencian la capacidad de pensar y son divertidas; actitudes que son esenciales para enfrentarse a situaciones problema.

- La breve exploración de la historia del porcentaje permitió mostrar cómo las matemáticas se entrelazan con otros aspectos culturales, como el comercio y la política, incitando a los estudiantes a apreciar la relevancia y amplitud de aplicación que las matemáticas poseen en el mundo que los rodea. Esta experiencia y la presentación del video ¿Para qué sirven las matemáticas? estimularon su curiosidad y su deseo de entender y analizar fenómenos diversos, abriendo la puerta a una comprensión más profunda de cómo las matemáticas pueden ser herramientas poderosas para cuantificar, analizar y actuar en la transformación de la realidad que les rodea. Por otro lado, los resultados de la encuesta final muestran que las experiencias educativas de la práctica pedagógica tuvieron un impacto positivo en la percepción de las matemáticas de la mayoría de los estudiantes.

- La aplicación y los resultados de las tres pruebas, aunque no alcanzan la excelencia, si muestran un progreso significativo y permiten evidenciar un mejoramiento de 21 puntos porcentuales, con respecto a la prueba inicial. Además se ha logrado la reubicación de los estudiantes previamente clasificados en el nivel 1 de desempeño al nivel 3, lo que constituye un avance significativo en las competencias matemáticas, particularmente en el ámbito argumentativo. Esta evolución implica un cambio desde la habilidad de tomar decisiones acerca de la veracidad de una afirmación basada en una comprensión directa de la información, hasta la capacidad de justificar afirmaciones mediante la aplicación de operaciones aritméticas o el empleo directo de conceptos específicos.

El avance en los resultados evidencia los efectos positivos de enseñar mediante un enfoque basado en competencias matemáticas, en contraposición con centrarse únicamente en contenidos, incluso con solo unas cuantas sesiones de clase. En este sentido, me gustaría llamar la atención de la comunidad educativa hacia una realidad que quizás no hayamos considerado o de la que no somos conscientes.

En su origen, "La prueba Icfes de Estado" fue creada con el propósito de asistir a las instituciones de educación superior en sus procesos de selección y admisión de estudiantes. Posteriormente esta evaluación era aplicada a todos los estudiantes que estaban por finalizar la educación media, y estaba *alineada* con el enfoque educativo predominante en aquel entonces en el país, basado en contenidos y sistemas.

Sin embargo desde finales de la década de los noventa, se inició un proceso de reconceptualización de la prueba, que permitió ampliar sus objetivos, lo que implicó dejar de evaluar contenidos, y hacerlo con las competencias interpretativas, argumentativas y propositivas para todas las áreas. Pero ¿está *alineada* la educación escolar actual con esta nueva visión competencial, a la que indudablemente se enfrentaran los estudiantes al finalizar su trayecto escolar en la prueba Saber 11? ¿Es suficiente adoptar un enfoque basado en contenidos, similar al utilizado en décadas anteriores, para garantizar mejoras en la Prueba Saber 11 y facilitar el acceso a la educación superior? La respuesta es evidentemente negativa, como lo confirman las estadísticas. A partir de los 2000, "se registra una caída considerable en el coeficiente en todas las pruebas, lo que indica que el cambio de metodología y de forma efectuado a la prueba en dicho año modificó la importancia del colegio en el rendimiento académico de los estudiantes colombianos" (Mera, 2010)

Es prácticamente un deber y una responsabilidad académica y profesional implementar un enfoque competencial, que pretenda desarrollar un conocimiento en acto y no tanto un conocimiento formal y abstracto; promover actividades para que el sujeto trabaje de manera activa el conocimiento y saberes que recibe, a partir de lo que posee y de lo que le es brindado desde su entorno. Este enfoque, propicia oportunidades para poder jugar con el conocimiento, abstraer, deducir, inducir, particularizar y generalizar los procesos. Puede significarlo desde varios referentes, puede utilizarlo de múltiples maneras y para múltiples fines; describir, comparar, criticar, argumentar, proponer, crear, solucionar problemas. Fomentar dichas acciones es crucial si se pretende reducir las brechas entre la educación básica-media y superior.

- Aunque en este trabajo, utilizamos los problemas tipos Saber 11 para desarrollar competencias, hay muchas otras formas de hacerlo: los problemas tipo Olimpiadas son desafiantes y requieren un alto grado de pensamiento creativo y habilidades matemáticas, además que se apartan de los problemas convencionales, alejándose de las fórmulas y procedimientos tradicionales para centrarse en el análisis profundo y el razonamiento matemático. La resolución de este tipo de problemas en definitiva, requiere de múltiples competencias matemáticas. Por otro lado, las preguntas tipo saber 11 (por ser pertenecientes a una prueba masiva), sólo puede presentar situaciones hipotéticas del contexto: familiar, ocupacional, social y de divulgación científica; sin embargo también se podría trabajar en el aula, con situaciones problema que involucren necesidades e intereses de la comunidad escolar que se ve afectada por la enseñanza, como lo es, trabajar por proyectos. Esta metodología permite a los estudiantes explorar ideas, soluciones y métodos creativos para abordar problemas o alcanzar objetivos específicos, fomentando la imaginación, el desarrollo de habilidades y la innovación.

Referencias

Anacona, M. (2003). *La historia de las matemáticas en la educación matemática.* Bogotá: EMA.

Anania, M. (2015). *Importancia del movimiento y la expresion corporal en la adquisición de los Procesos de Atención y Concentración.* Santiago de Chile: Universidad Andres Bello.

Barraza Macías, A. (2020). *Modelo de Secuencias Didácticas.* Ciudad de México : Universidad Pedagógica de Durango.

Barriosnuevo, E., Ceballos, J. A., & Suarez, J. E. (2017). *La implementación de la pregunta como estrategia didáctica para propiciar el desarrollo de la competencia de resolución de problemas en estudiantes de básica primaria.* Barranquilla: Universidad del Norte.

Becerra Labra, C., Gras-Martí, A., & Martiınez Torregrosa, J. (2005). ¿De verdad se enseña a resolver problemas en el primer curso de fiısica universitaria? La resolución de problemas de "lápiz y papel" en cuestión. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 299 - 308.

Derivando. (22 de junio de 2022). *El problema del cuadrado y la circunferencia que se tocan*. Obtenido de YouTube: https://www.youtube.com/watch?v=UQXGkEtD2sQ&t=167s

Gómez, J. (2007). *La Resolución de Problemas en el Pensamiento Matemático: El Caso de la Elaboración de Significados de la Definición de Espacio Topológico.* Bógotá.

Gonzáles, F. (2004). Cómo desarrollar clases de matemática centrada en resolución de problemas. *Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de Matemática*, 235-262.

Icfes. (Mayo de 2021). *Guía de orientación grado 11. Matemáticas.* Obtenido de Icfes: https://www.icfes.gov.co/documents/39286/2921847/Guia_PC-Matematicas-11-1.pdf

Icfes. (junio de 2022). *Informe nacional de resultados Saber 11° 2022.* Obtenido de Icfes: https://www.icfes.gov.co/documents/39286/21440788/Informe_nacional_de_resultados_Saber_11.pdf/7779712d-d21e-b56f-fd02-9336833dffde?t=1699491358277

Icfes. (Noviembre de 2022). *Niveles de desempeño: Prueba Matemáticas.* Obtenido de Icfes: https://www.icfes.gov.co/documents/39286/10065230/Niveles+de+desempe%C3%B1o+Matem%C3%A1ticas+Saber+11.%C2%BA+2022.pdf

Icfes. (14 de noviembre de 2022). *Tucole.* Obtenido de Icfes: https://www.icfes.gov.co/web/guest/tucole

López, J. E. (2022). *La Modelación Matemática para Solución de Problemas Tipo Saber Once.* Popayán: Universidad del Cauca.

López, S. M. (2010). *El efecto colegio en Colombia: tres décadas de estudio.* Bogotá.

Matute, M. E. (2004). *Estrategias de resolución de problemas para el aprendizaje significativo de las Matemáticas en Educación General Básica.* Cuenca: Universidad de Cuenca.

Mazzilli, D. M., Hernández, L. E., & De La Hoz, S. I. (2016). *Procedimiento para Desarrollar la Competencia Martemática Resolución de Problemas.* Barranquilla.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Bogotá: Escribe y Edita.

MEN. (septiembre de 2020). *Estándares básicos de competencias en matemáticas.* Obtenido de Ministerio de Educación Nacional: https://www.mineducacion.gov.co/portal/men/Publicaciones/Guias/116042:Estandares-Basicos-de-Competencias-en-Lenguaje-Matematicas-Ciencias-y-Ciudadanas

MEN. (2021). *Resultados agregados examen saber 11 2021.* Obtenido de Genia.ly: https://view.genial.ly/61fda1b2e940aa00121bafa4

Mera, S. L. (2010). El efecto colegio en Colombia: tres décadas de estudio. *Equidad y desarrollo*(14), 85-101.

Pacheco, S., & Pacheco, W. (2021). *Resolución de problemas y su relación con el desarrollo de competencias matemáticas en estudiantes de secundaria.* Barranquilla: Tesis doctoral, Corporación Universidad de la Costa.

Peña, H. (2022). *Potencialidades didácticas de los Cuadrados Mágicos.* Janeiro: Revista Científico-Pedagógica do Bié.

Pons, R. M., González, M. E., & Serrano, J. M. (2008). Aprendizaje cooperativo en matemáticas: Un estudio intracontenido. *Anales de Psicología, 24*(2), 253–261.

Valero, P. (2009). La educación matemática como una red de prácticas sociales. En P. Valero, & O. Skovsmose, *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (págs. 299-326). Bogotá: una empresa docente.

Zubiría Samper, J. (2006). *Los modelos pedagógicos: Hacia una pedagogía dialogante.* Bogota D.C: Coop. Editorial Magisterio.

Zuleta Araújo, O. (2011). Resolución de situaciones problemas en la enseñanza de las ciencias: un estudio de análisis. *Revista Electrónica EDUCyT (4)*, 123-138.

Zuleta, O. (2005). La Pedagogía de la Pregunta. Una Contribución para el aprendizaje. *Educere, 9(28)*, 115-119

Anexos

FACNED

Centro de Regionalización

Universidad del Cauca

Semillero

MATEMÁTICAS

Guía N°1 Estadística. Diagrama de Barras, Circular, Temporal y Promedio

01

Diagrama de Barras, Circulares y Temporales
Promedio o Media Aritmética

Con el fin de elegir el color de un nuevo juguete, se realizó una encuesta a un grupo de niños entre los 5 y 12 años sobre su color favorito. Cada niño podía mencionar solo un color. Las respuestas de todos los niños se muestran en la tabla.

Edad(Años)	Rojo	Blanco	Verde	Azul
5 a 8	12	4	11	9
9 a 12	6	13	9	8

Respecto a estos registros. ¿Cuál de los siguientes NO puede ser un resultado calculado con la información presentada?

a). El color preferido por los niños entre los 5 a 8 años
b). El color preferido por los niños mayores de 10 años
c). El número total de niños que prefieren el color rojo
d).El número de niños que fueron encuestados

COMPRENDAMOS LOS TEMAS

Veamos que podemos aprender del anterior ejemplo, y cómo utilizar estos conocimientos para resolver problemas y desarrollar competencias matemáticas.

¿Qué son las tablas Estadísticas?

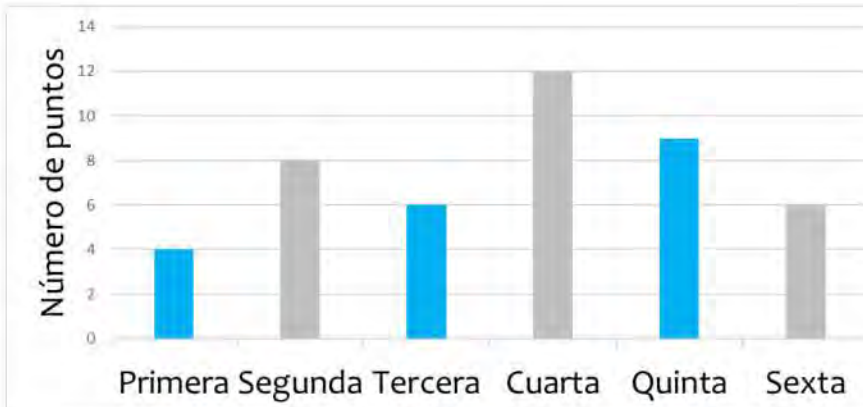
Las tablas más usadas son las llamadas de doble entrada, en las cuales se organiza una de las variables en forma vertical y la otra en forma horizontal, con el fin de relacionar los datos de una variable con la otra.

¿Cuáles son las dos variables que se utilizaron en el ejemplo anterior?

¿Podrías explicar qué es una variable?

Escribamos algunos ejemplos de variables que encuentran en tu equipo, pueden ser <u>cuantitativas</u> (se expresan numéricamente), o <u>cualitativas</u> (expresan una cualidad no numérica)

La gráfica muestra la cantidad de puntos obtenidos en un partido de Baloncesto, durante seis rondas.
De acuerdo con la información de la gráfica, ¿Cuál es el rango de los puntos obtenido en las seis rondas?



¿Qué es el rango estadístico?

¿Cómo calcular el rango de los puntos obtenidos en las seis rondas?

Los Diagramas de Barras

Es un gráfico que se plasma sobre un plano cartesiano usando barras horizontales o verticales que toman alturas proporcionales a los valores que corresponden y se usan para comparar dichos valores.

Por ejemplo en el caso anterior gracias al diagrama de barras se puede observar claramente que la ronda con mayor numero de puntos es_____ y la ronda con menor numero de puntos obtenidos es_____.

Diagrama Circular

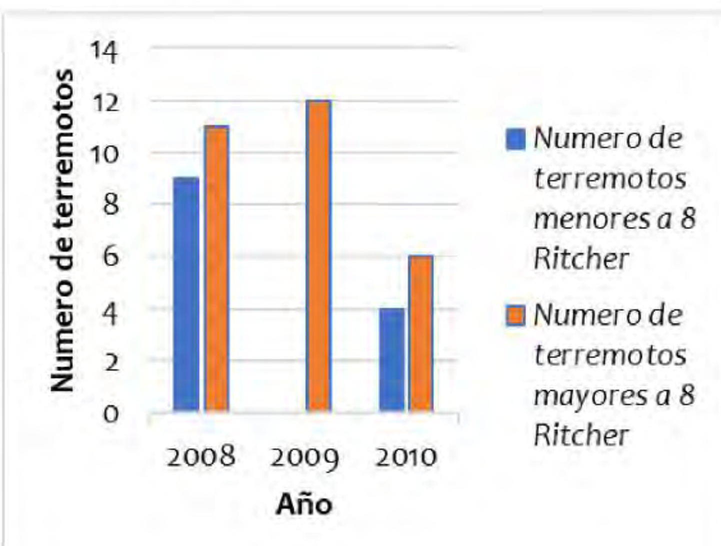
En la universidad se indagó sobre actividades realizadas por los estudiantes en su tiempo libre. Los resultados se muestran en la gráfica

De acuerdo con la información de la gráfica y teniendo en cuenta que los estudiantes solo podían escoger una actividad, es correcto afirmar que la mayoría de los estudiantes de la universidad en su tiempo libre se dedican a:

A. Practicar algún deporte o chatear.
B. Chatear o estudiar.
C. Descansar o practicar algún deporte,
D. Estudiar o descansar.

El diagrama circular generalmente se presenta con una sutileza que lo identifica, y que a la vez se diferencia del diagrama de barras, ¿sabes cuál es?

En la gráfica se muestra la información de los terremotos que ocurrieron en el mundo en los años 2008, 2009 2010



Completa la tabla con la información de la gráfica

Terremoto / Año	Menores a 8	Mayores a 8
2008		
2009		
2010		

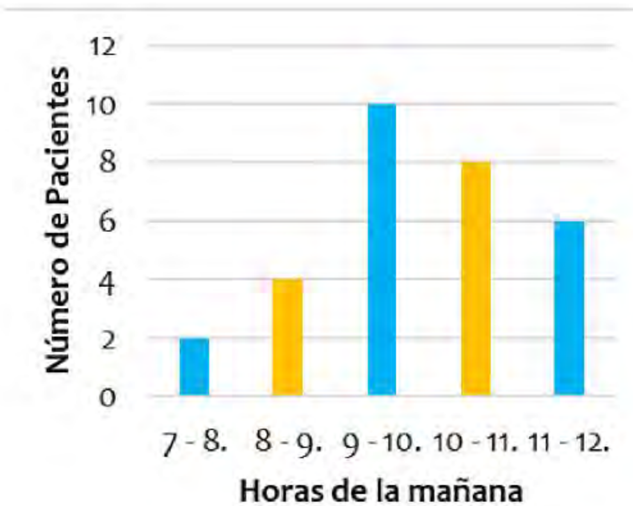
Diagramas temporales

Como se puede observar , el diagrama temporal es un gráfico en el cual se muestra el comportamiento de una variable cualquiera con respecto al **tiempo** en que ocurre

ADQUISICIÓN Y RETENCIÓN

La valoración de los saberes previos es un elemento importante para el desarrollo de competencias matemáticas, pero no son suficientes. Los problemas de las Pruebas Saber 11 son excelentes oportunidades para usar los conocimientos en situaciones distintas en los que los aprendiste. Recuerda que no tener una respuesta inmediata al problema te brinda motivos para conocer y desarrollar saberes, destrezas y actitudes que te permitirán buscar la solución del problema.

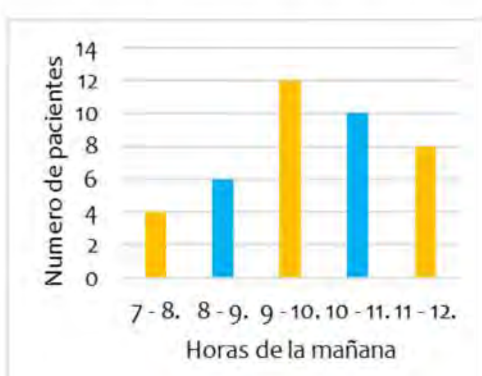
La gráfica muestra la cantidad de pacientes que asistieron a un consultorio en una mañana.



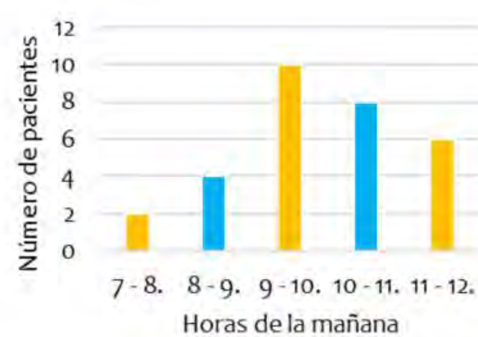
Para el día siguiente, se espera que el número de pacientes **se duplique en la hora que hubo menos pacientes**, sin alterar la cantidad observada para el resto de las horas de la mañana. ¿Cuál de las siguientes gráficas representa la cantidad de pacientes en el consultorio, en el siguiente dia?

- **¿En qué hora crees hubo menos pacientes?**
- **¿Cuál es el doble de esa hora?**

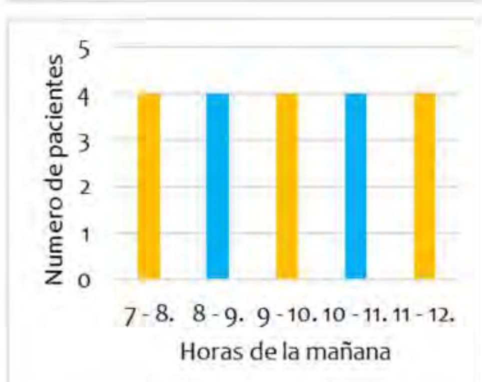
A



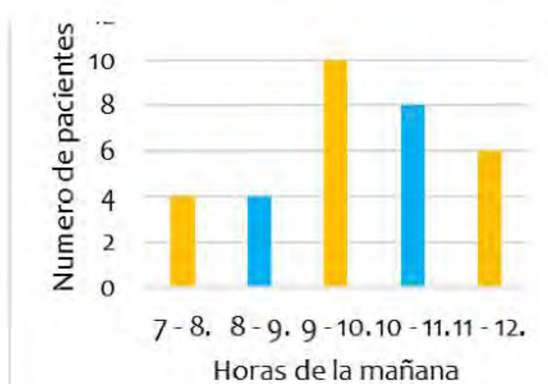
B



C



D



Un grupo de 32 estudiantes se inscribe para realizar una competencia de ajedrez. Se dispone de la información en la tabla respecto a la edad y sexo de los estudiantes inscritos.

Edad/sexo	Mujeres	Hombres
14	5	3
15	8	2
16	8	*
17	3	1

Al analizar la información inicial y los datos que aparecen en la tabla, es correcto afirmar que en el grupo de inscritos:

A. El promedio de las edades de las mujeres es de 16 años, porque es el dato que más se repite.

B. el promedio de las edades de los hombres es de 14 años, porque es el resultado de la suma de las edades de los hombres dividido 6.

C. el promedio de las edades de los estudiantes es de 17 años, porque es el dato que menos se repite.

D. el promedio de las edades de las mujeres es de 15 años, porque es el resultado de la suma de las edades de las mujeres dividido 24.

Será más sencillo responder si conoces qué es el promedio y cómo se calcula

Con la información anterior, ¿Podrías responder la pregunta y justificar tu respuesta?...

Durante el primer periodo académico, un profesor presentó la siguiente gráfica para mostrar las notas obtenidas en su clase de matemáticas, en un curso de 40 estudiantes. La gráfica es la siguiente:

Una vez culminado el segundo perido académico, el profesor tabula los resultados obtenidos durante el mismo. La tabla es la siguiente

Frecuencia de notas segundo periodo	
Notas	Frecuencia
1	6
2	9
3	12
4	7
5	6

Respecto a la nota promedio en cada uno de los periodos académicos, es correcto afirmar que:

A. El promedio de nota es mayor en el segundo periodo debido a que la nota central tiene una mayor frecuencia

B. Durante el segundo periodo, un mayor número de estudiantes estuvo más cerca de la nota promedio del curso que durante el primer perdido

C. Durante el primer periodo, la nota promedio del curso fue mayor debido a que un mayor número de estudiantes obtuvo una nota de 5

D. Durante el primer periodo, la nota promedio del curso fue 5 mientras que en el segundo fue de 3, puesto que son las notas que más se repiten en cada periodo.

Calcular el promedio de los dos periodos académicos podría ayudarte a encontrar la respuesta

¿MITO O VERDAD?: "El promedio es la mitad de los datos"
¿Qué contraejemplo usarías para aclarar este enunciado?

Un biólogo quiere determinar las horas de vida de una mariposa. Para ello, toma 10 mariposas como muestra y al observar sus horas de vida obtiene los siguientes resultados:

408,384,360, 336,312,360,384,312,336,y 360

Al realizar el estudio, el biólogo encuentra que el promedio de vida de las mariposas es 355,2 horas y la mediana es 360 horas, según este resultado "Más de la mitad de las mariposas viven menos del promedio", ¿Es esta afirmación correcta? ¿Por qué?

En la tabla se muestra la cantidad de personas que asisten a un parque los fines de semana, al igual que el rango de edades de las mismas.

Rango de Edades	Frecuencia
0 - 5 años	8
6 - 15 años	15
16 - 25 años	12
26 - 35 años	35
46 - 55 años	20
Mayores de 55	10

A. La mediana está entre 46-55 años y la moda entre 6-15 años.
B. La mediana está entre 26-35 años y la moda entre 26-35 años.
A. La moda está entre 46-55 años y la mediana entre 16-25 años.
A. La moda está entre 26-35 años y la mediana entre 16-25 años.

Realicemos un diagrama de barras con los datos obtenidos al preguntarle a todo el salón de clase sobre su edad y qué desean estudiar cuando finalicen la educación media. También podemos conocer la mediana de las edades totales y la moda de carreras u estudios.

FACNED

Centro de Regionalización

Universidad del Cauca

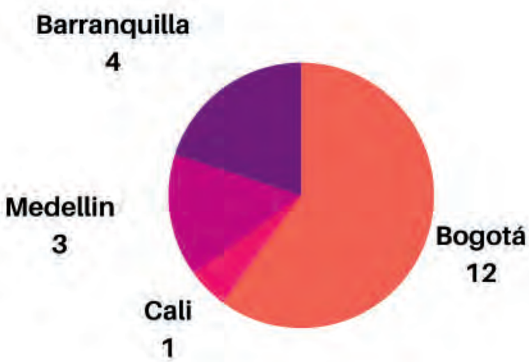
Semillero

MATEMÁTICAS

Guía N°2 Estadística. Porcentajes

Porcentajes

1. En el salón de clases de una universidad se registran los datos de las ciudades de origen de 20 estudiantes. Los resultados se observan en la gráfica



Escribe la información de la gráfica expresada en porcentajes (%)

El porcentaje: Lugar de encuentro de las razones, fracciones y decimales.

Para resolver el problema anterior es necesario entender qué son los porcentajes y cómo funcionan.

Piensa en esto, un descuento del 50% en una tienda de ropa es exactamente 50/100 es decir 1/2 (o la mitad) del precio original, y a su vez esto es 0.5 como resultado de efectuar la división de 1 entre 2 ¿ Por qué tantas formas de expresar lo mismo, y cómo utilizar estas expresiones para calcular porcentajes?

Explica con tus palabras qué son los porcentaje

Piensa en esto

75% = ______

75/100 = ______

Al expresar el porcentaje como una fracción con denominador 100, obtienes?

Al simplificar al máximo la fracción, obtienes?

El juego de los Porcentajes

Con el juego de los porcentajes vamos a calcular porcentajes de forma diferente, la idea es hacer cálculos **de forma estratégica** para que nos resulte más fácil sumar.

Por ejemplo si queremos calcular el 84% de 200 pesos solo tendremos que sumar:

El 50% de 200
+25% de 200
+5% de 200
+1% de 200
+1% de 200
+1% de 200
+1% de 200

84% de 200

Estos porcentajes no se escogieron aleatoriamente, sino estratégicamente. Mira ¿Por qué?

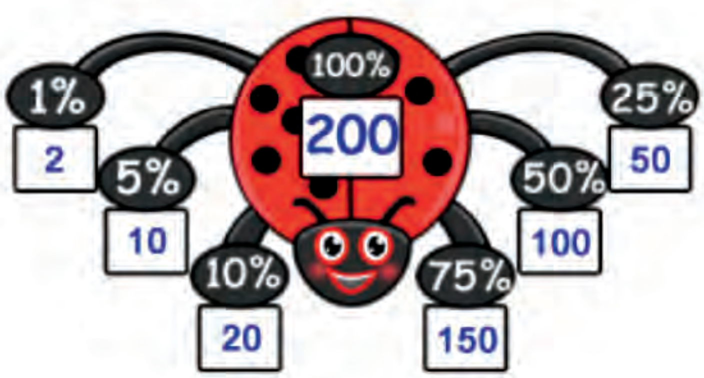
Podemos calcular rápidamente el

- 50% de 200 = 100 (es solo la mitad de 200)

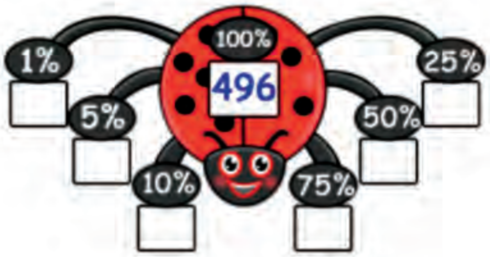
luego

- 25% de 200= 50 (el 25% representa la mitad de la mitad de 200)
- 5% de 200=10 (Sabemos que el 10% de 200 es 20 así que el 5% es la mitad)
- 1% de 200 = 2 (cuatro veces) = 2*4 =8

Si sumamos todo tendremos que el 84% de 200 es 168



¿Te animas a hacerlo por tú cuenta?.
Calcula el 96% de 496



¿Te animas a hacerlo por tú cuenta?.
Calcula el ___ de ___

% Cómo cálcular porcentajes

Recuerda el problema inicial de está guía. Calculemos el porcentajes que representa el número de estudiantes que son de Barranquilla?

- Lo principal es determinar cuántos estudiantes representan el 100% _____
- Cuántos estudiantes son de Barranquilla _____

... mediante una sencilla **Regla de tres**

Porcentaje	Nímero de Estudiantes
100	el 100% de los estudiantes
x	#estudiantes de barranquilla

x =

2 Se realizó una encuesta a 200 clientes de una empresa de telecomunicaciones para saber cómo califican la calidad del servicio que reciben. La siguiente gráfica muestra los porcentajes de las calificaciones dadas por los clientes:

Clientes insatisfechos con el servicio

Clientes satisfechos con el servicio

¿Cuál de las siguientes afirmaciones acerca de los resultados de la encuesta es verdadera?

A. Más de 30 clientes consideran que la calidad del servicio que ofrece la empresa es excelente.

B**.** Menos de 50 clientes consideran que la calidad del servicio que ofrece la empresa es regular.

C. Menos de 55 clientes están satisfechos con el servicio que ofrece la empresa.

D. Más de 60 clientes consideran que la calidad del servicio que ofrece la empresa es bueno.

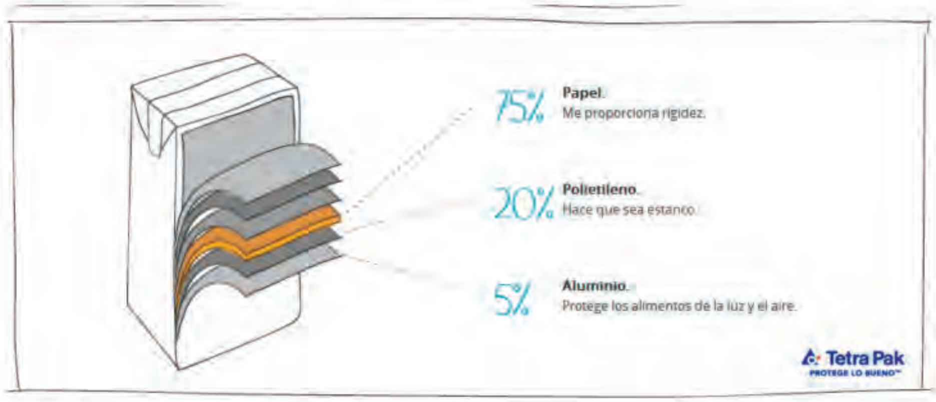
3 En la siguiente tabla se muestra la cantidad de horas trabajadas por semana para cada mes del año y el valor en pesos que se paga por cada una de ellas a cierta persona en los meses de enero a mayo.

	Horas trabajadas por semana	**Precio por hora**
Enero	50	$6000
Febero	54	$6100
Marzo	60	$6500
Abril	66	$7000
Mayo	72	$7200
Total	302	

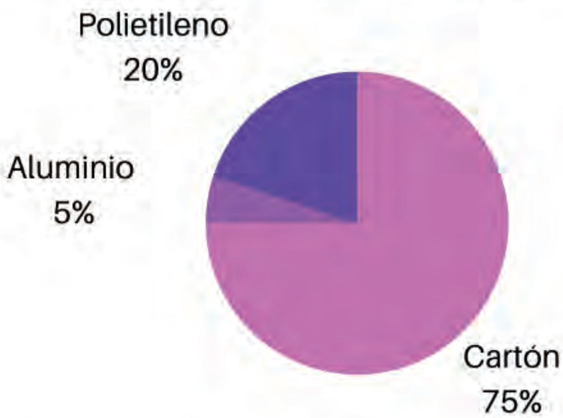
¿Cuál es el porcentaje aproximado que representa las de horas trabajadas en febrero con respecto al total de horas trabajadas de enero hasta mayo?.

- ¿Qué me están preguntando?
- ¿Según la información de la tabla cuál es el 100% de horas trabajadas de enero hasta mayo?_____
- ¿Cuántas horas se trabajó en febrero?_____

4 Los empaques de Tetra Pak MR son elaborados con cartón, polietileno y aluminio, distribuidos en 6 capas, lo cual evita el contacto de alimentos con el medio exterior. La gráfica muestra la distribución porcentual aproximada de los materiales de una lámina de Tetra Pak MR



Lamina de Tetra Pak MR por componentes



De la información presentada se puede afirmar que en las láminas de Tetra Pak MR existe

A. Una relación de 1 a 70 entre el aluminio y el cartón

B. Una relación de 4 a 1 entre aluminio y polietileno.

C. Una relación de 1 a 15 entre aluminio y cartón

D. Una relación de 4 a 15 entre el cartón y el polietileno

La torre de Pisa en Toscana es uno de los sitios turisticos más representativos de Italia. En la siguiente tabla se relaciona la cantidad de personas que ingresaron cada día durante una semana, según el tipo de entrada que pagó

Cantidad de personas que ingresaron							
Tipo de entrada	Lunes	Martes	Miercoles	Jueves	Viernes	Sabado	Domingo
Sin Reserva	300	300	500	700	300	300	700
Con Reserva	700	800	200	600	500	500	600

5 Resuelve las siguientes preguntas y preparate para explicarlas

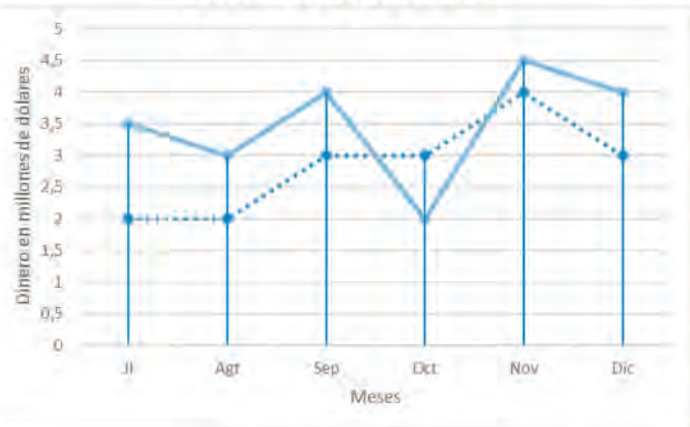
Se pagan 17 euros de entrada y 5.5 más si se hace una reserva
La mediana de la cantidad de turistas sin reserva que ingreso a la torre es 300, la de los que ingresan con reserva es 600. Solamente teniendo esto en cuenta, **¿es correcto afirmar que entran el doble de turistas con reserva que sin reserva? ¿Cómo argumentarías tú respuesta?**

¿Cuál fue el recaudo aproximado total de la semana registrada en la tabla ?

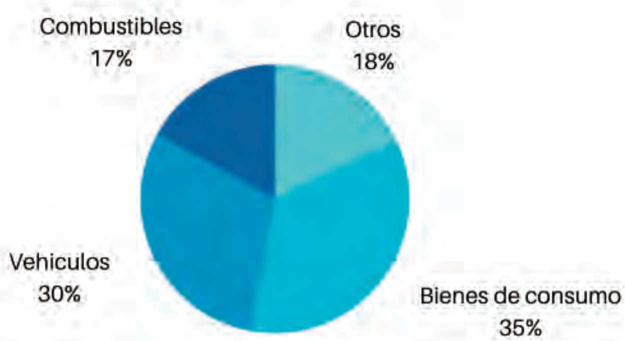
Aproximadamente qué porcentaje del total de personas que visitaron la torre esa semana entraron sin reserva.

6 Un periódico publicó las siguientes gráficas en las que se muestra la cantidad de dinero que ingresó a un país por concepto de exportaciones y la cantidad de dinero que invirtió el país en importaciones durante los últimos 5 meses del año 2008:

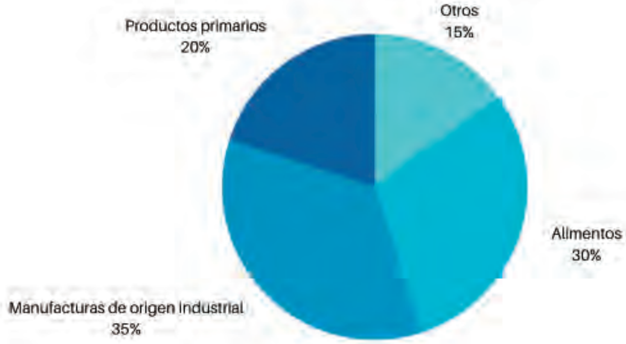
Grafica 1
Importaciones y exportaciones Julio a Diciembre de 2008



Grafica 2
Porcentaje de inversión en importaciones según sector



Grafica 3
Porcentaje de ganancia en exportaciones según sector



En el articulo que explica las gráficas se afirma que las exportaciones de alimentos y productos primarios generaron ingresos superiores a la cantidad invertida para importar vehículos y combustible.
La anterior afirmación es correcta porque:

A. Se puede observar en la primera gráfica que en el mes de diciembre del año 2008, la cantidad de dinero que ingreso por exportaciones fue mayor que la cantidad de dinero investido en exportaciones
B. Las exportaciones generaron un ingreso superior a 20 millones de dólares mientras que las importaciones requirieron una inversión inferior a 20 millones de dólares
C. El dinero que ingresó por exportación de alimentos y productos primarios representan el 50% del total, mientras que el dinero invertido en importaciones de vehículos y combustibles representan el 47% del total.
D. Las ganancias por exportar alimentos y productos primarios superan los 10 millones de dólares, mientras que la inversión en importaciones de vehículos y combustibles fue inferior a 9 millones de dólares

7 Si se quiere saber cuánto dinero se ahorró al comprar un artículo que costaba $125.000 y tenía un descuento del 25%, ¿Cuál de los siguientes procedimientos permite calcular este valor?

A. 0,75 X 125.000
B. 1,25 X 125.000
C. $\frac{125.000 \text{ X } 25}{100}$
D. $\frac{125.000 \text{ X } 125}{100}$

Busca otra manera de conocer el valor del descuento

8 Cuatro cursos, cada uno con igual número de estudiantes, presentan anualmente una prueba de matemáticas. La tabla muestra el puntaje promedio obtenido por cada curso.

Promedio de los puntajes en el examen por cursos.

Curso	**I**	**II**	**III**	**IV**
Promedio año anterior	63	61	50	53
Promedio año actual	65	45	53	54

Tabla

Al revisar los puntajes de la tabla, una persona afirma que hubo un aumento en el puntaje respecto al año anterior.
Esta afirmación es:
A. Correcta, ya que el promedio de la mayotía de los cursos aumentó respecto al año anterior.
B. Incorrecta, ya que el promedio total en el año anterior es superior al promedio total en el año actual.
C. Correcta, ya que al observar todos los promedio, el mayor corresponde al curso I en el año actual.
D. Incorrecta, ya que se necesita el puntaje de cada estudiante para realizar la comparación

El acertijo de Einstein

El dilema es el siguiente: "En una calle hay cinco casas, cada una de un color distinto. En cada casa vive una persona de distinta nacionalidad. Cada dueño bebe un único tipo de bebida, fuma una sola marca de cigarrillos y tiene una mascota diferente a sus vecinos. A partir de las 15 pistas presentadas a continuación, la consigna que hay que responder es: ¿Quién es el dueño del pez?".

1. El británico vive en la casa roja.
2. El sueco tiene un perro como mascota.
3. El danés toma té.
4. El noruego vive en la primera casa.
5. El alemán fuma Prince.
6. La casa verde está inmediatamente a la izquierda de la blanca.
7. El dueño de la casa verde bebe café.
8. El propietario que fuma Pall Mall cría pájaros.
9. El dueño de la casa amarilla fuma Dunhill.
10. El hombre que vive en la casa del centro bebe leche.
11. El vecino que fuma Blends vive al lado del que tiene un gato.
12. El hombre que tiene un caballo vive al lado del que fuma Dunhill.
13. El propietario que fuma Bluemaster toma cerveza.
14. El vecino que fuma Blends viveal lado del que toma agua.
15. El noruego vive al lado de la casa azul.

FACNED

Centro de Regionalización

Universidad del Cauca

Semillero

MATEMÁTICAS

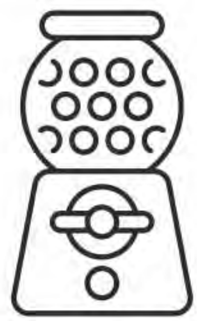
Guía N°3 Estadística. Probabilidad

"Las matemáticas convierten lo invisible, en visible."
Keith Devlin

¡Apreciados estudiantes!
Esta guía nos permitirá resolver y plantear problemas usando conceptos de combinatoria y probabilidad.

Combinatoria

1 La buena de la señora Dariana pretendía pasar de largo junto a la maquina de chicles, sin que sus compañeras Zharit y Danna se dieran cuenta.
Zharit: ¡Dariana, yo quiero un chicle!
Danna: ¡Dariana, yo también. Y lo quiero del mismo color que el Zharit!



La maquina que traga monedas está casi vacía, no hay forma de saber el color de la próxima bola. Si la Sra. Dariana quiere estar segura de sacar dos bolas iguales ¿Cuántas monedas tiene que estar dispuesta a gastar?

Supongamos ahora que la máquina contenga 6 bolas rojas, 4 blancas y 5 azules. ¿Sabrá usted cuántas monedas a de tener a la mano la señora Dariana para estar segura de conseguir dos iguales?

Objetivo: Proponer inferencias a partir de el análisis de combinaciones estadísticas.

2 Se lanzan cuatro fichas que tienen dos caras cada una. Una de las fichas es azul por sus dos caras, otra es blanca por sus dos caras y las otras fichas tienen una cara azul y una cara blanca. ¿Cuál de los siguiente eventos es imposible que ocurra?

A. Obtener una cara azul y tres caras blancas

B. Obtener dos caras azules y dos caras blancas

C. Obtener tres caras azules y una cara blanca

D. Obtener cuatro caras azules y cero caras blancas

Responde:

1. Qué es un evento estadístico:

2. Por qué es imposible que ocurra este evento:

La combinatoria, estudia cómo podemos disponer cosas. Es decir, se ocupa de los métodos para agrupar elementos en conjuntos que verifiquen determinadas reglas, asi como las propiedades de estas agrupaciones. **El análisis combinatorio pide el número total de distintas formas en que podemos combinar ciertos objetos, sometiéndonos a unas reglas específicas**

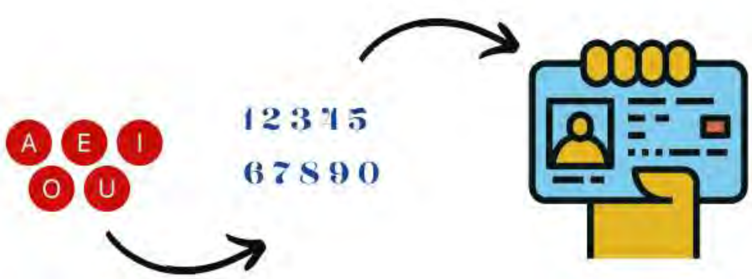
3 La carnetización de los estudiantes de un colegio se hace por medio de un código que consta de 2 vocales y 2 dígitos. En el colegio, el número de alumnos crece rápidamente y el rector necesita saber cual puede generar, teniendo en cuenta que en un código puede estar dos veces el mismo dígito y dos veces la misma vocal. La cantidad máxima de alumnos que tendrán diferente identificación es:

A: 32.768

B: 2.500

C: 1.800

D:125



Objetivo: Calcular la probabilidades de eventos simples usando métodos diversos como el diagrama del árbol, el listado o técnicas de conteo .

4 Una fábrica de manufacturas hace un control de calidad sobre sus artículo. Para ello selecciona aleatoriamente tres artículos, examina cada uno de ellos y los clasifica como defectuosos (D) ó no defectuosos (N)

¿Cuáles son todos los posibles resultados del control de calidad de los artículos?

A. N, D

B. NNN, DDN, DNN, DDD

C.NNN, DDN,DNN, DND, NDD, NDN, NND, DDD

D. NN, DN, ND, DD

Diagrama del árbol: Realizar este tipo de diagramas te permitirá visualizar todos los posibles resultados del control de calidad de los artículos.

5 En una bolsa hay 18 bolas: 3 rojas, 3 negras y 12 blancas. Una persona afirma que al sacar una bola al azar, los tres colores tienen la misma probabilidad de salir. Esta afirmación es:

A. Correcta, pues el número de bolas de cada cada color no importa.

B. Falsa, pues no se sabe el número total de bolas en la bolsa.

C. Incorrecta, pues hay un color que tiene más bolas que los otros.

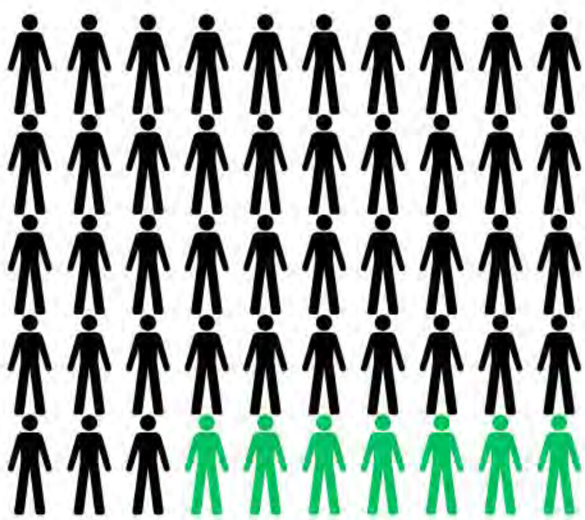
D. Verdadera, pues las bolas están repartidas de igual manera

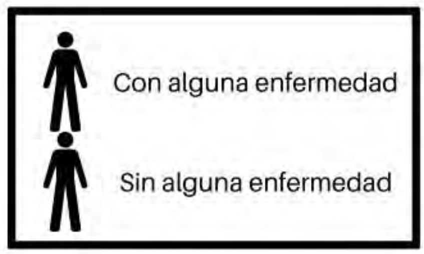
- Cuál es la probabilidad de que al sacar una bola de la bolsa, esta sea de color blanco?

¿Qué es la probabilidad y cómo calcularla?

Es la posibilidad de que suceda un fenómeno o un hecho, dadas determinadas circunstancias. Se expresa como un porcentaje.
Se calcula dividiendo el **número de sucesos favorables** entre el **número total de sucesos posibles.**
Por ejemplo: Imaginemos que una persona va a elegir una de las 52 cartas (que están boca abajo) que vienen en un mazo, sin contar con mayor información. Entonces, la probabilidad de que saque un as de espadas es: 1/52 = 0.0192 = 1,92

6 Un estudio proyecta la cantidad de persona que, para el año 2050, habrán tenido algún tipo de enfermedad antes de los 70 años. En la gráfica se muestra los resultados de tal proyección





De acuerdo con esta información, ¿Qué porcentaje de la población habrá tenido alguna enfermedad antes de los 70 años de edad en el 2050?

A. 430% **B.** 86% **C.** 7% **D.** 3%

- **Cuál es la probabilidad de que una persona antes de los 70 años no haya tenido ninguna enfermedad: ____**

Algunas preguntas que te ayudarán a descubrir la respuesta:

- Cuál es el número de sucesos favorables: ____
- Cuál es el número total de sucesos posibles: ____

Objetivo: Justificar o refutar inferencias basadas en razonamientos estadísticos.

7 La probabilidad de elegir aleatoriamente una mujer de un grupo de 35 personas en el que hay 30 hombres, es igual a la probabilidad de escoger al azar un número par del conjunto G = { 3, 5, 7, 8, 9, 11, 13}.

Esta afirmación es verdadera porque:

A. El tamaño del grupo de personas y el número de elementos del conjunto G son múltiplos de 7.

B. Es posible obtener un grupo de 7 personas en el que una de ellas sea mujer a partir del grupo de 35.

C. La proporción de números pares en el conjunto G es la misma que de mujeres en las 35 personas.

D. La proporción de mujeres en el grupo de personas es un múltiplo de la proporción de números pares en G.

8 La siguiente tabla muestra el número de automóviles que hay en un taller de mecánica.

Automoviles	**Pariculares**	**Públicos**
Revisado	12	4
No revisado	9	15

Uno de los mecánicos del taller hace entrega a un cliente de un automóvil revisado.

El enunciado "*La probabilidad de que el automóvil entregado haya sido particular es igual a 12/16", es:*

A. Verdadero. porque corresponde a la razón entre el número de autos particulares y revisados y el total de automóviles revisados.

B. Falso, porque la probabilidad de este evento se debe calcular hallando la razón entre el total de automóviles particulares y el total de revisados.

C. Verdadero, porque representa la razón entre el total de los automóviles y el número de particulares que están revisados.

D. Falso, porque la probabilidad de este evento se debe calcular hallando la razón entre el número de automóviles particulares revisados y el total de automóviles.

PROFUNDICEMOS EN EL TEMA

Veamos como calcular la probabilidad cuando ocurren dos sucesos simultáneamente. Por ejemplo, cual sería la probabilidad del siguiente problema:

9 Un matrimonio desea tener 3 hijos, ¿Cuál es la probabilidad de que el mayor sea hombre (H), y el menor sea mujer (M)?.

Objetivo: Aplicar los conocimientos de probabilidad para predecir sucesos favorables.

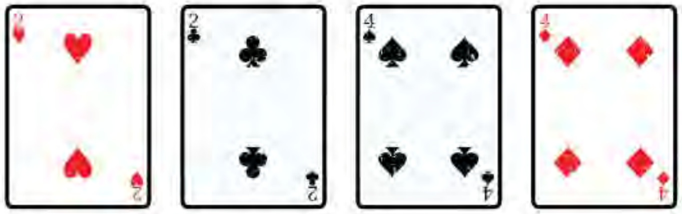
Juguemos Goldfish

- El juego inicia repartiendo 5 naipes a cada cada jugador
- Los naipes restantes se distribuyen en una pila que se llamará océano, y que estará compartida entre todos los jugadores.
- Se juega por turnos, comenzando por quien esté ubicado a la izquierda de quien reparte los naipes.
- En cada turno, el jugador solicitará (qué posea) un rango numérico de naipe a otro jugador (por ejemplo, un 4 o puede pedir dos 4).
- Si el jugador a quien se le solicitó el naipe posee uno o más dentro de ese rango, debe entregárselos al otro jugador. Si no dice "gracias" al entregar la carta, el jugador que posee la carta se la queda.
- Si no posee ningún naipe en el rango, debe decir ¡ve a pescar!; el jugador solicitante, entonces retirará un naipe del océano.

Objetivo

- Los jugadores tendrán que hacer conjuntos de cuatro naipes del mismo rango numérico. De lograrlo, colocarán esos naipes boca arriba a un costado.
- El juego termina cuando se forman todos los grupos de cuatro naipes del mismo rango.
- Gana el jugador que más grupos ha logrado formar.

10 En un juego que utiliza una baraja francesa (52 cartas en toral, divididas en 4 grupos de cartas con figuras: picas, corazones, diamantes, y trevoles, cada grupo con cartas numeradas del 2 al 10, las letras A, J, Q, K) se debe completar un trío , es decir, tres cartas con el mismo número. Mario comienza la partida con las cuatro cartas mostradas en la figura.



El debe deshacerse de una carta o reemplazarla por otra que debe seleccionar aleatoriamente entre las 48 cartas restantes. Su hermano le dice a Mario que con los posible trios para armar, se debe seguir las siguientes instrucciones:

- Determinar con qué cartas podría completar cada uno de los tríos (una carta con el número 2 o una carta con el número 4, en este caso).
- Estudiar la probabilidad de obtener al azar cada una de dichas cartas.
- Deshacerse de una de las cartas del juego que es más improbable de completar.

Mario a propósito del consejo de su hermano, opina que dicha estrategia es inútil, ya que la probabilidad de sacar una carta de un número 2 o un número 4 es la misma. La opinión de Mario es:

A. Correcta porque en cualquier caso la cantidad de cartas posibles para completar cada trio es la misma

B. Incorrecta, porque al tratarse de números diferentes es imposible que las probabilidades coincidan,

C. Correcta porque la figura de cada una de las cartas de Mario es diferente asi que queda la misma cantidad de cartas de cada figura.

D. Incorrecta porque los número más grandes tienen mayor probabilidad de obtenerse que los números más pequeños

Objetivo: Establecer diferencias y relaciones entre distintas notaciones de números reales para decidir sobre una situación dada.

11 De acuerdo con la OAG (Official Airline Guide), una agencia internacional especializada en cifras de aviación, la probabilidad de morir en un accidente aéreo es de 1 en 4,7 millones cuando viaja en aerolínea comercial.

En otro estudio de la OAG se determinó que la probabilidad de morir en un accidente de barco es de 10 en 47 millones. Una persona prefiere viajar en avión que en barco , pues afirma que el avión es más seguro. Esta afirmación es:

A. Correcta porque es 10 veces más probable morir en un barco que en un avión

B. Incorrecta, porque es más seguro viajar en barco que en avión

C. Correcta, porque hay 10 veces menos viajes en avión

D. Incorrecta, porque es igual de seguro viajar en avión que en barco.

12 Marte es una aerolínea comercial que ha transportado 10.000 personas en 100 vuelos (todos a su máxima capacidad) y solo tuvo un accidente aéreo, en el cuál murieron 5 pasajeros.
¿Qué probabilidad debe calcular la aerolínea Marte para compararse con el resultado presentado por la OAG?

A. La probabilidad de morir en un accidente aéreo de la aerolínea Marte
B. La probabilidad de que una persona sea victima de un accidente aéreo.
C. La probabilidad de ser pasajero de un vuelo que sufrirá un accidente.
D. La probabilidad de que un vuelo de la aerolínea Marte sufra un accidente.

Objetivo: Interpretar analítica y críticamente información estadística provenientes de diversas fuente.

13 Se realiza una encuesta para averiguar las preferencia de marcas de lápices en una empresa. Los resultados se muestran en la tabla.

	Hombres	**Mujeres**	**Total**
Marca 1	260	210	470
Marco 2	190	60	250
Marca 3	200	80	280
Total	650	350	1000

Afirmar que la probabilidad de que un hombre prefiera la marca 1 es mayor que la probabilidad de que una mujer prefiera la marca 1 es:

A. Correcto, porque hay más hombre que prefieren la marca 1 que mujeres que prefieren la marca 1
B Correcta, porque las probabilidades de estos eventos son 0,26 y 0,21, respectivamente.
C. Incorrecto, porque el número de hombre que prefieren la marca 1 es diferente del número de mujeres.
D. Incorrecto, porque las probabilidades de estos eventos son 0,4 y 0,6, respectivamente.

14

La tabla 1 muestra la distribución por estrato socioeconómico de 50 empleados de una fábrica.

Estrato	Número de empleados
1	7
2	10
3	20
4	8
5	5
6	0

La tabla 2 muestra la clasificación por estrato que hace la empresa

Estrato	Clasificación
1 - 2	Bajo
3 - 4	Medio
5 - 6	Alto

Para llevar a cabo un proyecto de bienestar, la fábrica necesita formar grupos de tres trabajadores (uno de cada estrato socioeconómico "bajo, medio, alto")
El número de grupos posible , en estas condiciones y teniendo el cuenta la cantidad de trabajadores de cada estrato, se halla calculando.

A. (7 + 10) X (20 + 8) X (5 + 0)
B. (7 + 10) + (20 + 8) + (5 + 0)
C. 7 + 10 + 20 + 8 + 5
D.7 X 10 X 20 X 8 X 5

15

A continuación se presenta un gráfico en el que se muestra el porcentaje de los niños del mundo que tienen edad para asistir a la escuela secundaria en relación con el nivel económico de la región y su nivel educativo.

Si se considera que un 25% de los países del mundo son desarrollados, ¿Cuál es la probabilidad de encontrarse un niño que tenga edad para cursar la secundaria y la esté cursando?

A. 53%
B. 60%
C. 63%
D. 81%

FACNED

Centro de Regionalización

Universidad del Cauca

3.14159265358979323846264338327950288419716

Semillero

MATEMÁTICAS

Guía N°4 Geometría. Figuras Geométricas

"Lo que es afirmado sin prueba, puede ser denegado sin prueba"
Christopher Hitchens (1949 - 2011)

Perímetros de figuras Geométricas

1 Para construir una cerca alrededor de un terreno rectangular, se tomaron las siguientes medidas:

- Medida del ancho: 20m.
- Medida del perímetro: 5m.

Estas medidas son incorrectas porque:

A. El perímetro es la suma de los lados y, por tanto, debe ser mayor que cada uno de estos.
B. Como el ancho es el cuádruple del perímetro, significa que los cuatro lados son iguales.
C. Al elevar el perímetro al cuadrado, no se obtiene el valor del ancho.
D. No se conoce la longitud del largo y, por lo tanto, es imposible conocer el perímetro.

COMPRENDAMOS LOS TEMAS

Miremos, ¿por qué no podemos calcular el perímetro con los datos mencionados?.

¿Qué es el perímetro?

El perímetro es la suma de las medidas de los lados de un rectángulo

Tomando en cuenta el primer problema, ¿Cuál sería el perímetro del terreno rectangular si la medida del largo fuera de 30m?

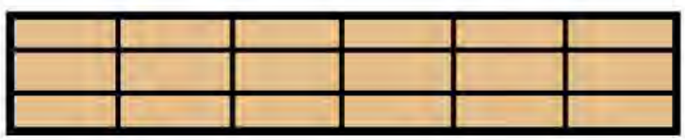
2 En la figura está sombreado un triángulo equilátero (todos sus lados tienen igual longitud) inscrito en un rectángulo.

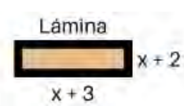
Al observar la figura, una persona afirma que el área del triángulo sombreado es igual a 1/3 del área del rectángulo. Esta afirmación es:

A. Incorrecta, porque el área del triángulo es igual a la del cuadrilátero.
B. Correcta, porque las dos figuras tienen la misma base.
C. Incorrecta, porque el área sombreada es igual a la no sombreada.
D. Correcta, porque se dividió el cuadrilátero en tres partes.

El área de un triángulo es muy parecida al área de un rectángulo, ¿Por qué? ¿Cuál es la diferencia?

3 Una región rectangular se cubre completamente con 18 láminas rectangulares que tienen igual forma y tamaño como se muestra en la figura



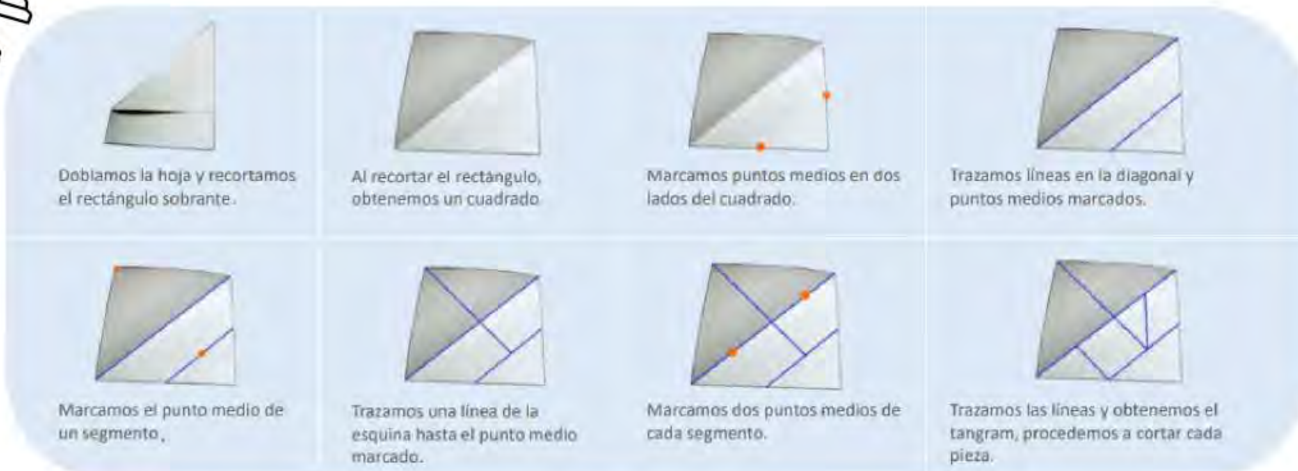


Si se conoce la medida de la base de la lámina, una manera de determinar el área de la región rectangular es:

1) Determinar la medida del otro lado de la lámina.
2) Hallar el área de cada lámina.
3) Multiplicar el área de cada lámina por 18.

¿Cuál es el área de la región rectangular, si se sabe que la base mide 5cm?

A. 90 cm^2
B. 369 cm^2
C. 450 cm^2
D. 1.008 cm^2

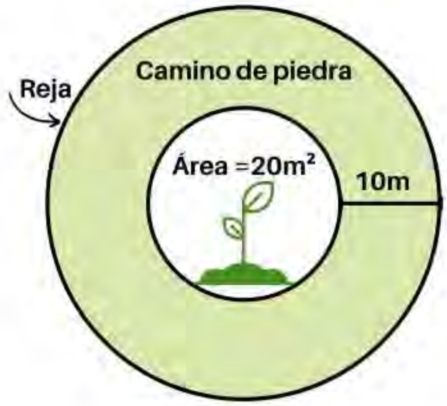


Formar un cuadrado con todas las piezas, y luego un triángulo
Observa la relación entre los dos perímetros y áreas de las dos figuras

4

¿MITO O VERDAD?: El área y el perímetro de figuras geométricas son conceptos iguales. Justifica tú respuesta.

5



Con la información presentada, ¿es posible calcular el perímetro de la reja externa?

A. Sí, porque el área define implícitamente el radio del círculo menor; con este valor y la separación se puede hallar el radio mayor.
B. No, porque es imposible conocer el radio del círculo grande ya que en la figura solamente hay información referente al círculo pequeño.
C. Sí, porque solo basta sumar el área del camino de piedras, la cual se halla usando la fórmula del área de un círculo cuando el radio es diez metros.
D. No, porque hay dos valores diferentes de radio que da el área del círculo menor, y es imposible saber cuál de estos sirve para hallar el radio mayor.

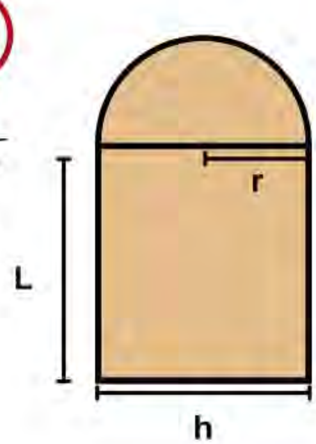
PISTA: Para resolver este problema debes conocer cómo calcular el área de un circulo y el perímetro de una circunferencia.

ÁREA DEL CIRCULO =

PERÍMETRO DE LA CIRCUNFERENCIA =

Tomando en cuenta la información que ya conoces, halla el perímetro de la reja externa, del problema anterior.

6



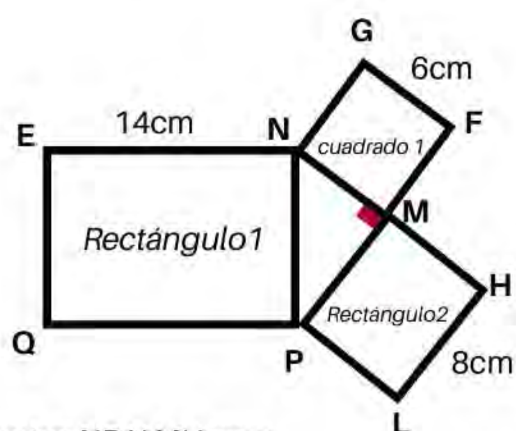
La figura muestra el marco de una puerta, formado por un rectángulo de lados L y h, una semicircunferencia de radio r.

La(s) medida(s) que debe(n) conocerse para calcular el área de la figura es (son):

A. h y r
B. L y r
C. L.
D. h.

7

En la figura se cumple que el área del *rectángulo 1* equivale a la suma de las áreas del *cuadrado 1* y del *rectángulo 2*.



Las longitudes de los segmentos NP Y MH son:

A. NP = 10cm y MH = 13cm
B. NP = 10cm y MH = 104cm
C. NP = 14cm y MH = 20cm
D. NP = 114cm y MH = 160cm.

solucionemos el problema anterior haciendo uso del ...

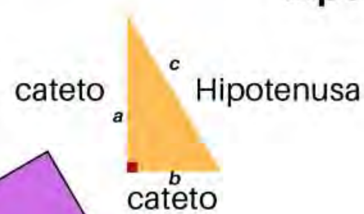
Teorema de Pitágoras

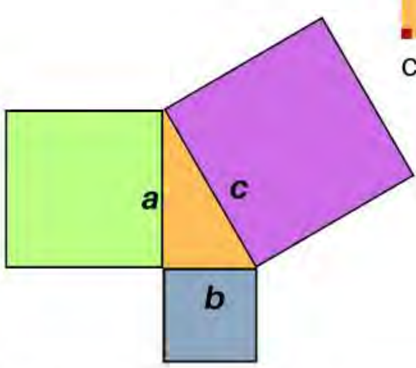
El Teorema de Pitágoras es uno de los teoremas que más ha maravillado a todas las civilizaciones a lo largo de la historia. Algunos historiadores sugieren que en Babilonia por el año 1600 a.C., se calculaban las diagonales de ciertas figuras utilizando este teorema, sin embargo, la primera demostración formal conocida se le otorga usualmente al filósofo matemático griego Pitágoras de Samos, considerado el primer matemático puro. Este teorema cuenta con una gran cantidad de demostraciones realizadas por personajes importantes de la ciencia y la matemática a lo largo de toda la historia

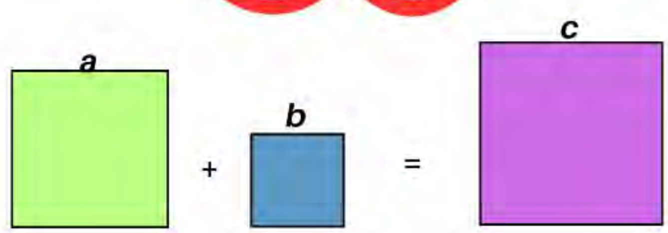
El Teorema es el siguiente:

En todo triangulo rectángulo se cumple que; la suma de los cuadrados de las longitudes de sus catetos es igual al cuadro de la longitud de su hipotenusa

$$a^2 + b^2 = c^2$$

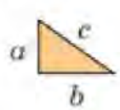




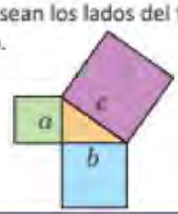


Verificación del teorema de Pitágoras con recortes: Verifica que el área del cuadrado más grande (de área c^2) es igual a la suma de las áreas de los otros dos cuadrados (cuyas áreas son b^2 y a^2).

Dibuja un triángulo rectángulo.



Recorta tres cuadrados con páginas de color, cuyos lados sean los lados del triángulo.



Dobla el cuadrado celeste por sus diagonales; desdobla y marca su punto de intersección.

Traza un segmento paralelo a la hipotenusa que pase por el punto marcado.

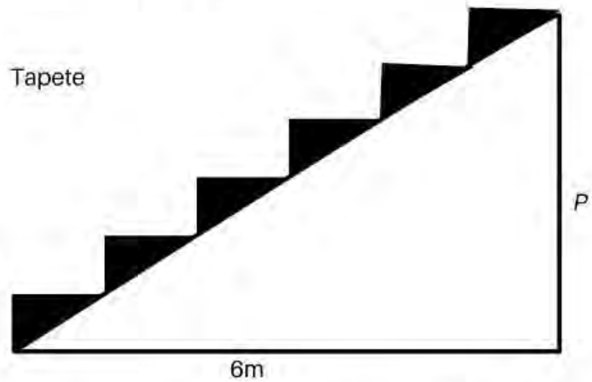
Traza un segmento perpendicular a este último y que pase por el mismo punto.

Corta las 4 partes en que ha quedado dividido el cuadrado celeste.

Une las 4 partes cortadas con el otro cuadrado.

Se forma un cuadrado congruente al más grande.

8 La escalera que comunica dos pisos de una casa tiene 6 escalones exactamente cubiertos con un tapete de 12m de largo. Vistos lateralmente, los escalones corresponden a seis triángulos rectángulos isósceles (ver figura).

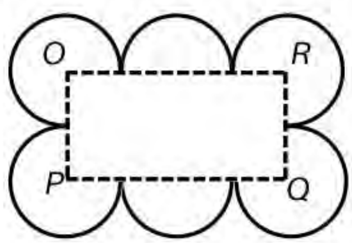


¿Cuál de las siguientes expresiones permite hallar la altura *p* de la escalera?

A. $6^2 + P^2 = (6\sqrt{2})^2$
B. $6^2 + (6\sqrt{2})^2 = P^2$
C. $6^2 + P^2 = 12^2$
D. $6^2 + 12^2 = P^2$

9 La figura mostrada se compone de diferentes partes de circunferencias de igual radio, donde se cumple que:

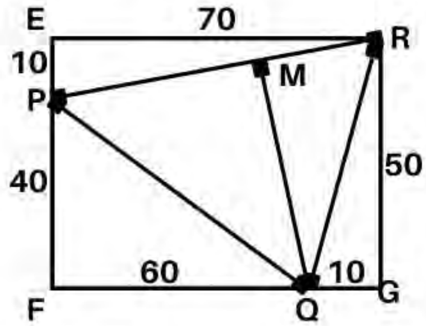
- Los centros de todas las circunferencias están sobre los lados del rectángulo *OPQR*.
- Las circunferencias sobre un mismo lado del rectángulo *OPQR* son tangentes entre sí.



Se requiere determinar el radio de la circunferencia para medir el perímetro de la figura. Sabiendo que la medida del lado *OP* es *k*, el radio de cada una de las circunferencias será k/3. La anterior afirmación es:

A. Correcta, porque el lado *OP* equivale a un diámetro y medio de la circunferencia que son 3 radios de esta.
B. Incorrecta, porque el lado *OP* equivale a un radio y medio de la circunferencia.
C. Incorrecta, porque en el lado *OP* no reposan diámetros completos de circunferencia, en cambio sobre *PQ* hay dos, así el radio será K/2.
D. Correcta, porque los puntos *O* y *P* pertenecen a 3 circunferencias distintas.

10 La *figura 4* muestra el triángulo *PQR* inscrito en el rectángulo *EFGR*, una de sus alturas *QM* y las medidas de algunos segmentos del rectángulo.



Figura

Dos procedimientos correctos se describen para calcular el área del triángulo PQR.

Procedimiento 1: Se calcula el área del rectángulo *EFGR* ese valor se le restan las áreas de los triángulos *PFQ, EPR* y *QRG*.
Procedimiento 2: Se calcula la altura *QM* y la base *PR* del triángulo a partir de los datos existentes. Luego, la multiplicación de estos dos valores se divide entre 2.

Una persona afirma que es más rápido utilizar el procedimiento 1 que el procedimiento dos, un argumento que puede utilizar esta persona para justificar correctamente su afirmación es el siguiente:

A. El primer procedimiento se puede efectuar con los datos que se muestran en la figura, el segundo requiere calcular información adicional.
B. El segundo procedimiento se puede efectuar utilizando solo las medidas de un triángulo, el primero requiere medidas de varias figuras.
C. El primer procedimiento requiere solo el cálculo del área del rectángulo, el segundo requiere el cálculo de área de triángulos.
D. El segundo procedimiento requiere realizar una multiplicación y una división; el primero solo requiere realizar una resta.

Encuentra el lado MQ

11 Una profesora de Matemáticas le entrega a sus estudiantes un cuadrado cuya área es 1 dm^2 . En el cuadrado se encuentra la construcción de la *Figura 1*.

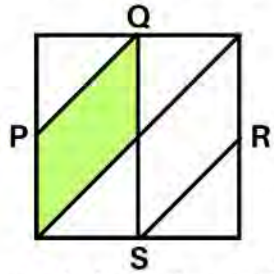


Figura 1

P, Q, R, S son los puntos medios de cada lado. La profesora les pide a sus estudiantes que calculen el área del pentágono sombreado, para la cual Alexis razona de la siguiente manera: Si se mueven los triángulos de las esquinas es posible obtener una figura con cuatro paralelogramos congruentes al sombreado, en la *figura 2* se muestra la construcción hecha por Alexis.

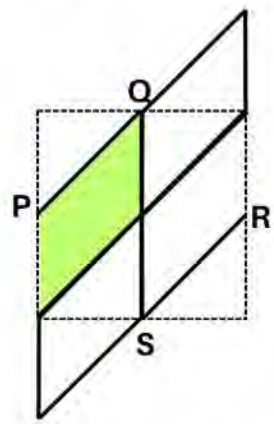


Figura 2

Alexis concluye. "Cómo el área de esta figura es igual al área del cuadrado inicial, cada paralelogramos tiene área de 1/4 dm^2".
Al ver la solución de Alexis, la profesora le dice: "Excelente idea; usa una estrategia similar para hallar fácilmente el área del cuadrado sombreado en la *figura 3.* Recuerda que el cuadrado grande tiene 1dm^2 de área.

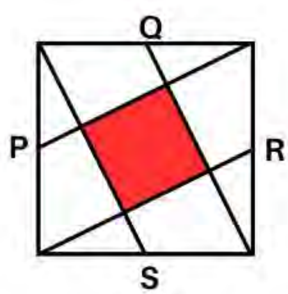


Figura 3

¿Cuál es el área de los cuadrados sombreados en la figura 3?

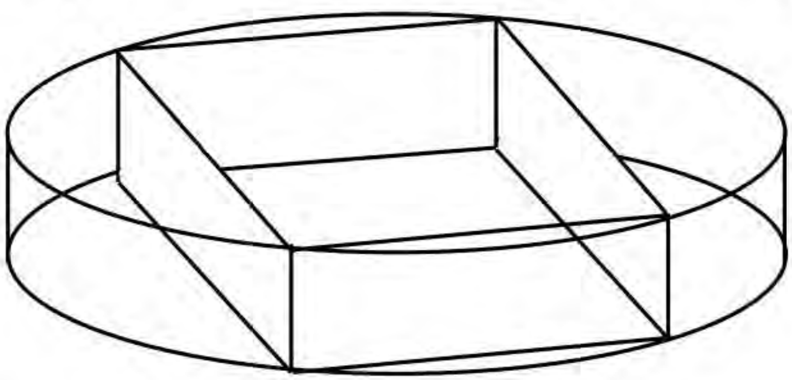
A. 1/9 dm^2
B. 1/8 dm^2
C. 1/6 dm^2
D. 1/5 dm^2

12 Una persona quiere construir una piscina que sea llenada por una reserva de $24m^2$ de agua. Para ello, un arquitecto le propone las siguientes medidas: 4 metros de ancho, 6 metros de profundidad y 2 metros de altura. La persona considera que estas medidas son erradas, porque para llenar esta piscina se requiere:

A. El volumen total de la reserva
B. El doble del volumen de la reserva
C. La mitad de la reserva
D. La tercera parte de la reserva.

Qué es un paralelepípedo y cómo se calcula su volumen

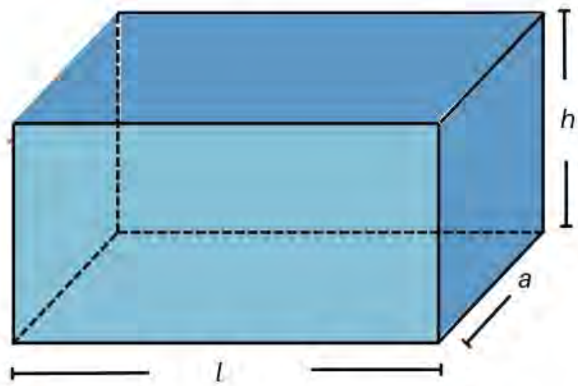
13 El propietario de un piscina rectangular decide modificarla de manera que quede de forma circular. El borde de la piscina circular debe pasar por los cuatro vértices de la piscina que ya existe y mantener la misma altura, como se muestra en la figura.



De acuerdo con la información de la piscina circular, la afirmación que NO es correcta es:

A. El volumen de la piscina circular depende de las medidas de largo, ancho y altura de la piscina rectangular.
B. El radio de la circunferencia de la piscina circular depende de alguna de las diagonales del rectángulo que describe la piscina rectangular.
C. El área del circulo de la piscina circular depende del perímetro del rectángulo que describe la piscina rectangular.
D. El centro del círculo de la piscina circular es el punto donde se intersecan las diagonales del rectángulo que describe la piscina rectangular.

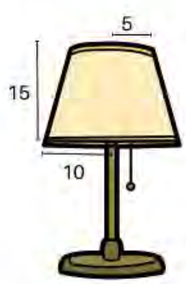
14 La longitud de las aristas de la caja de la figura son *l, a y h.*



¿Cuál de las siguientes expresiones determina la longitud total de las arista de la caja?

A. lah
B. $4lah$
C. $l + a + h$
D. $4l + 4a + 4h$

15 Se requiere remplazar la caperuza de una lámpara de escritorio que tiene forma de cono truncado como la que se muestra en la siguiente ilustración



Para el reemplazo de la caperuza se cortó una pieza como la siguiente.

Con esa pieza no se formó el cono deseado, porque:
A. Las longitudes de los arcos A1 y A2 deberían ser respectivamente 5π y 10π.
B. las medidas de los lados rectos L1 Y L2 deben ser mayores que 15cm.
C. Los arcos A1 y A2 deben tener la misma medida.
D. La medida de L1 debe ser 15cm y la de L2 más de 15 cm.

Universidad del Cauca

Semillero

MATEMÁTICAS

Guía N°5 Regularidades y Ángulos

Estimado estudiante:

¿Qué vas a aprender?

Las regularidades (entendidas como unidades de repetición) se encuentran en sucesiones o secuencias que presentan objetos, sucesos, formas o sonidos, uno detrás de otro en un orden fijado o de acuerdo a un patrón. En esta guía presentaremos algunas actividades de generalización de patrones que te permitirán construir expresiones algebraicas a través de la formulación verbal de una regla recursiva que muestre cómo construir los términos siguientes a partir de los precedentes y el hallazgo de un patrón que los guíe más o menos directamente a la expresión algebraica.

Objetivos

Pensamiento Variacional y Sistemas Álgebraicos y Analíticos

- Reconocer y describir regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros).
- Construir secuencias numéricas y geométricas utilizando propiedades de los números y de las figuras geométricas.
- Predecir patrones de variación en una secuencia numérica o gráfica.

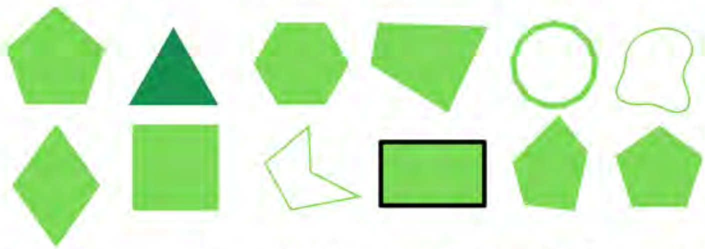
Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos

- Identificar, representar y utilizar ángulos en giros, aberturas, inclinaciones, figuras en situaciones estáticas y dinámicas.

Números Poligonales

Un número poligonal es un número natural que puede recomponerse en un polígono regular.

- Da 3 ejemplos de número naturales: ___, ___, ___.
- Da 3 ejemplos de números no naturales: ___, ___, ___.
- Encierra en un circulo los polígonos regulares y escriba para ellos sus nombres



COMPRENDAMOS LOS TEMAS

Los pitagóricos, quienes conformaron una secta griega de astrónomos, matemáticos y filósofos del siglo V a. C, descubrieron que los números podían disponerse de cierta forma cuando los representaban mediante piedras o semillas. Por ejemplos...

El número 10 puede recomponerse como un *<u>triángulo</u>*

El número 10 sin embargo, no puede formar un *<u>cuadrado</u>*, pero el 9 sí

El número 15 puede recomponerse como un triángulo equilátero, dibuja con puntos como lo harías	Dibuja con puntos el número 12 como un pentágono de lado 3	Dibuja con puntos el número 16 como un polígono regular

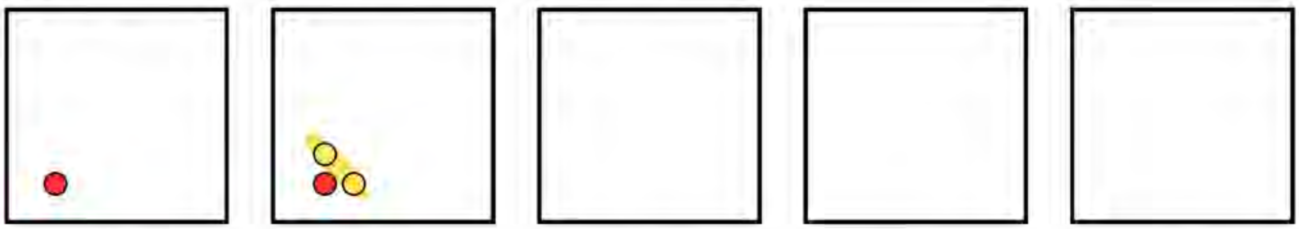
Construye números poligonales con el geoplano.

Números triangulares

Un número se denomina "triangular" si la cantidad de puntos que lo representan se puede disponer formando un triángulo equilátero.

1) Utiliza los cauchos para formar los 10 primeros número triangulares.
Yo empiezo!

- El primer número triangular (T1) es 1 pues está formado por un solo tornillo.
- El segundo número triangular (T2) es 3, pues está formado por 3 tronillos y es un triángulo formado por 2 tornillos de base.
- Continua tú, y completa la tabla...
- Dibuja con puntos los primeros 5 números triangulares e identifica cuantos tornillos son agregados con respecto al anterior triangulo



T1 T2 T3 T4 T5

Número de término	Número tringular	**Regla de formación**
T1	1	1
T2	3	1+2
T3		
T4		
T5		
T6		
T7		

¿Qué números debemos sumar para hallar el T16 número triangular?

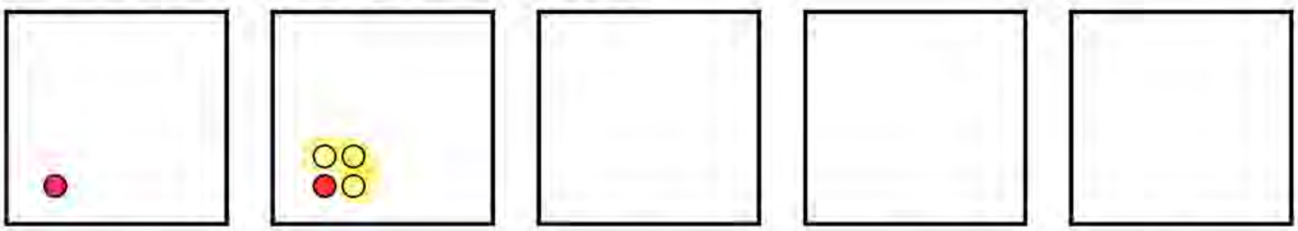
¿Qué números debemos sumar para hallar el Tn número triangular?

Números Cuadrados

Un número se denomina "cuadrado" si la cantidad de puntos que lo representan se puede disponer formando un cuadrado.

1) Utiliza los cauchos para unir los tornillos y formar los 10 primeros número cuadrados.
Yo empiezo!:

- El primer número cuadrado (C1) es 1 pues está formado por un solo tornillo.
- El segundo número cuadrado (C2) es 4, pues está conformado por 4 tronillos y es un cuadrado de 2 tornillos de lado.
- Continua tú, y completa la tabla...
- Dibuja con puntos los primeros 5 números cuadrados e identifica cuantos tornillos son agregados con respecto al anterior triangulo



C1 C2 C3 C4 C5

Número de término	Número cuadrado	**Regla de formación**
C1	1	1
C2	4	1 + 3
C3		
C4		
C5		
C6		
C7		

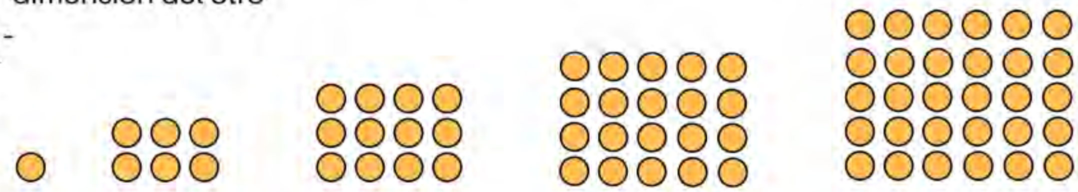
¿Qué relación tienen los números cuadrados con los números impares?

____

¿Qué números debemos sumar para hallar el Cn número cuadrado?

____

1 Un número se denomina "oblongo" si la cantidad de puntos que lo representan se puede disponer formando un rectángulo en el que la dimensión de un lado es una unidad mayor que la dimensión del otro



B1 B2 B3 B4 B5

Representa los 5 primeros números oblongos en el geoplano y responde:

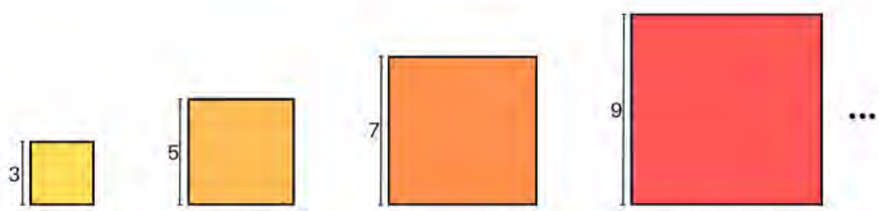
Si se continua con la secuencia de los números oblongos, (B8) se puede obtener como:

A. T8 - T7
B. T7 + C8
C. T8 + T8
D. C8 + T8

Cómo se construyen los números oblongos según tú respuesta

----

2 En la figura se muestra una sucesión de cuadrados, cuyos lados están en centímetros.



Posición 1 Posición 2 Posición 3 Posición 4

Las áreas de los cuadrados de la figura se especifican en la tabla.

Posición	**1**	**2**	**3**	**4**	**...**
Área (cm^2)	9	25	49	81	...

¿Qué expresión representa el área en términos de la posición n?

Nota: La posición "n" es cualquier posición que desees; desde la posición 1 o 3 hasta la 10, 100, o 1000...

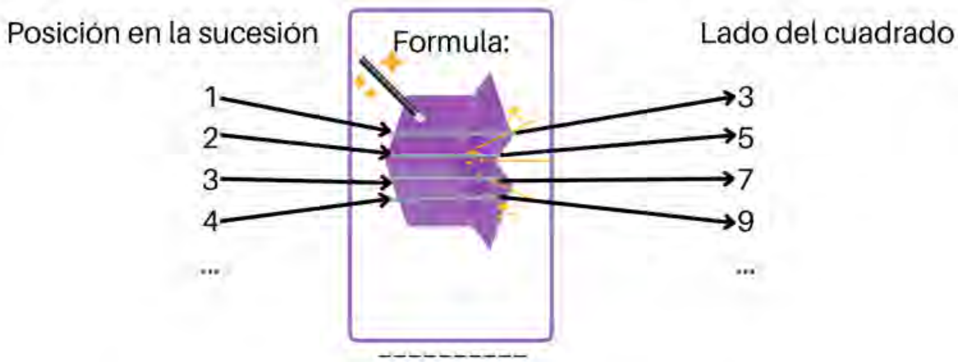
Algunas pistas

Solo sí no has encontrado la expresión, responde estás preguntas, de seguro te ayudaran:

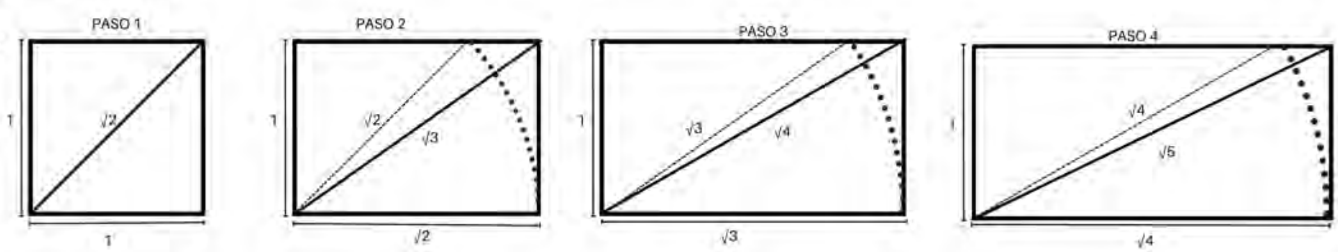
¿Qué medidas particulares encuentras en los lados de los cuadrados de la sucesión?

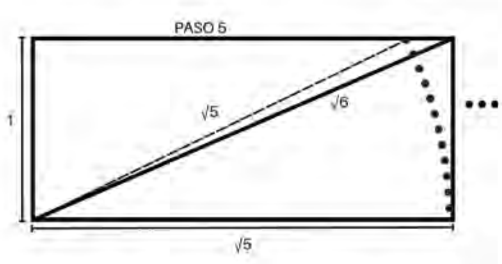
- ¿Cuál es el lado del cuadrado en la posición 1?___
- ¿Cuál es el lado del cuadrado en la posición 2?___
- ¿Cuál es el lado del cuadrado en la posición 3?___

El problema no es tan sencillo, porque debe buscar el área del cuadrado sin tomar en cuanta su lado sino la posición del cuadrado en la sucesión. Es decir, el área del cuadrado en este caso, no va a depender del lado, sino de la posición del cuadrado en la sucesión.
Pero no te preocupes, puedes convertir la posición del cuadrado en la medida del lado del cuadrado, la clave es encontrar *la generalidad*: Diseña una sola formula que convierta cualquier numero de la posición a la medida del lado del cuadrado correspondiente con la posición. Supón que la caja mágica es esa formula, mira lo que arroja la caja...



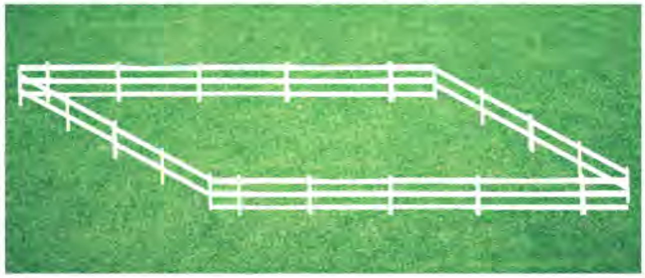
3 La siguiente ilustración muestra una secuencia de construcciones geométricas que se inicia con la construcción de la diagonal de un cuadrado de lado 1. En cada paso, a partir del 2, se construyó un rectángulo de altura 1 y base igual a la medida de la diagonal del rectángulo del paso anterior.





Si se continúa la secuencia, el siguiente paso en el que la medida de la base del rectángulo es un número racional es:

4 Un potrero tiene forma rectangular y las longitudes de sus lados están en relación 2:1. Si el mayor de los lados mide 20 m, el valor del área de este es:____



¿Cómo resolver el problema?: Responde las siguientes preguntas, seguro te ayudarán...

- ¿Cómo se calcula el área de un rectángulo?: _______
- Qué dato te hace falta para encontrar el área del potrero rectangular: ______
- Qué significa que las longitudes de los lados de un rectángulo están en relación 2:1

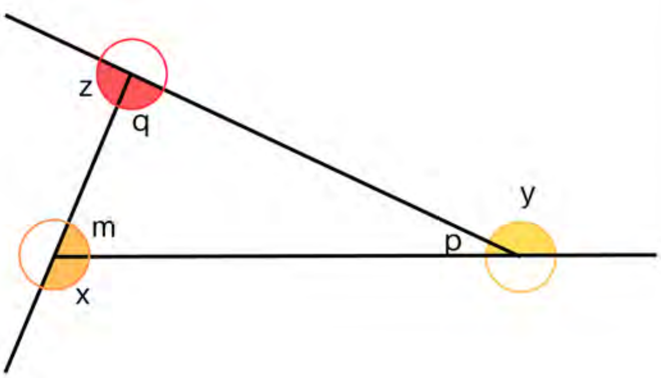
____

Si encontraste el valor del dato que te faltaba, ya puedes calcular el área del potrero

Ángulos y semejanza de triángulos

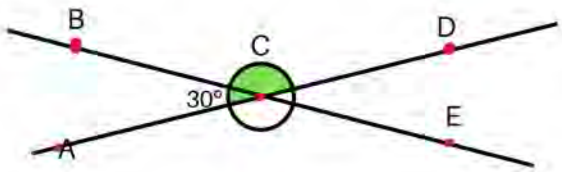
Ángulos Alternos Internos

5 La figura muestra una construcción geométrica. Observa la gráfica y completa la tabla:



$x + y + z =$ ____°
$m + p + q =$ ____°
$x + m =$ ____°
$y + p =$ ____°
$z + q =$ ____°

Test de ángulos



1). Qué valor tiene el ángulo BCD. Explica tu razonamiento:

____

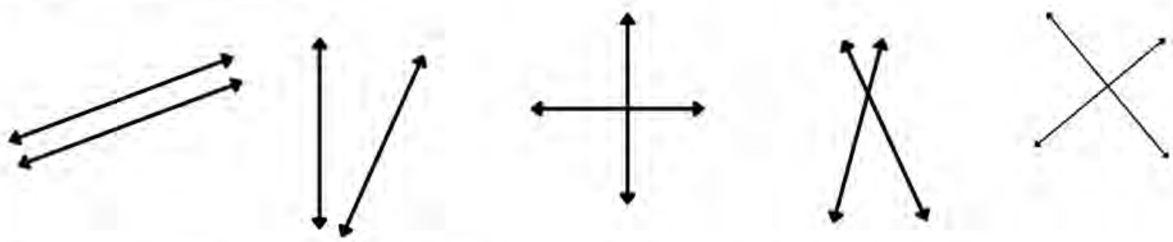
2). ¿Cuál es la medida del ángulo DCE y a qué ángulo es igual. Explica tú razonamiento.

____

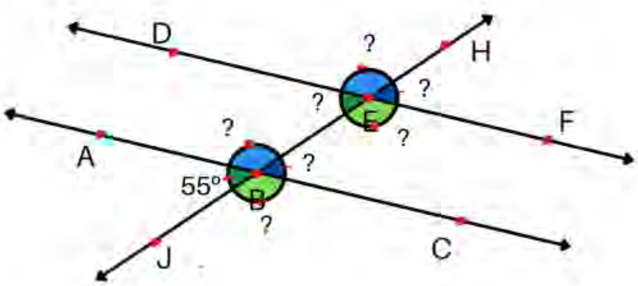
3). ¿Cuál es la medida del ángulo ECA, y a qué ángulo es igual. Explica tú razonamiento.

____

4). Escribe sobre cada par de rectas, qué tipo de rectas son: (paralelas, perpendiculares o secantes)



5). Las rectas AC y DF son paralelas y son cortadas por la transversal HJ

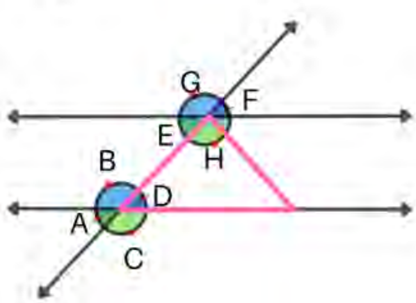


Encuentra las 7 medidas desconocidas de los ángulos en el diagrama. Explica tú razonamiento:

¿Cómo son llamados los ángulos del mismo color?

____

Escanea el código, observa el video, y responde las siguientes preguntas



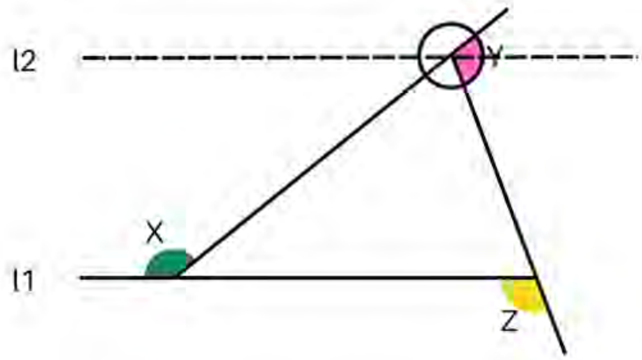
6) Por qué la medida del ángulo A es igual a la medida del ángulo D:__________________________________

____

7) ¿Por qué la suma de la medida de los ángulos internos de un triángulo siempre es 180°?:_____________________________

____

Observa la siguientes gráficas y explica:



1) l1 y l2 son rectas paralelas, encuentra y señala los ángulos que sean **correspondientes** a X y Z sobre la recta l2, con el color verde y amarillo respectivamente.

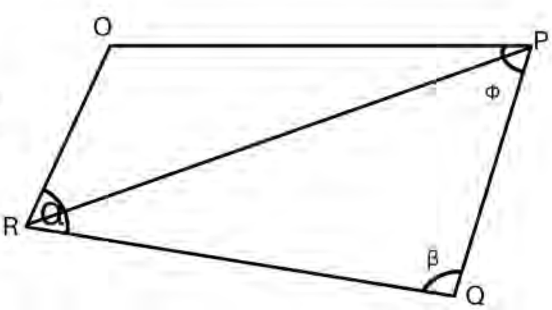
2) ¿Cuál es la suma de la medida de los ángulos correspondiente de X, Z y el ángulo Y?

____

¿MITO O VERDAD?: La suma de los ángulos internos de un triángulo es la misma que la suma de los ángulos externos del triángulo.

6 Se tiene la siguiente información sobre el cuadrilátero OPQR

$m\measuredangle ORQ = \alpha$
$m\measuredangle RQP = \beta$
$m\measuredangle QPR = \Phi$



La medida del ángulo $\measuredangle PRO = y$, en términos de α, β, y Φ es:

A. $y = \alpha + \beta + \Phi$
B. $y = \alpha + \beta + \Phi - 180°$
C. $y = \alpha - \beta - \Phi - 180°$
D. $y = \alpha - \beta - \Phi$

Observa que m∡ORQ = α es el resultado de sumar la medida del ángulo ∡PRO = y con la medida del ángulo m∡PRQ.

1) Señala el ángulo m∡PRQ.

Es decir:

α = y + ∡PRQ. (primera ecuación)

Encontremos la medida del ángulo m∡PRQ:

Tomando en cuenta que la suma de $\beta + \Phi$ + ∡PRQ = _____ (segunda ecuación)

Cuál será la medida de ∡PRQ en terminos de $\beta + \Phi$?:________ (Despejemos m∡PRQ en la segunda ecuación)

____

Reemplacemos el valor encontrado de ∡PRQ en la primera ecuación.

____

como ya sabes el valor de ∡PRQ puedes encontrar el valor de y