

**Realidad Aumentada: una Herramienta Tecnológica para el Desarrollo del  
Pensamiento Métrico-Espacial**



Daren Dayanare Guerrero Ordoñez

**Universidad del Cauca**

**Facultad de Ciencias Naturales Exactas y de la Educación**

**Licenciatura en Matemáticas**

**Popayán**

**2023**

**Realidad Aumentada: una Herramienta Tecnológica para el Desarrollo del Pensamiento**

**Métrico-Espacial**

Trabajo de grado para optar al título de **Licenciado en Matemáticas**

Daren Dayanare Guerrero Ordoñez

**Directora:**

Dra. Martha Lucia Bobadilla Alfaro

**Universidad del Cauca**

**Facultad de Ciencias Naturales Exactas y de la Educación**

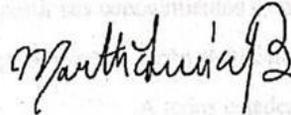
**Licenciatura en Matemáticas**

**Popayán**

**2023**

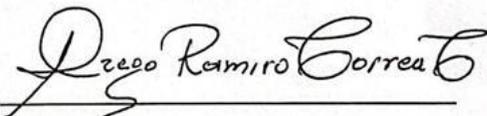
**Nota de aceptación**

El trabajo cumplió con  
los objetivos propuestos  
Calificación 5.0 (Cinco-  
cero)



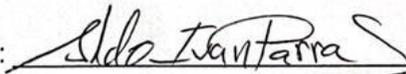
Director: \_\_\_\_\_

Dra. Martha Lucia Bobadilla Alfaro



Jurado: \_\_\_\_\_

Mg. Diego Ramiro Correa Cuene



Coordinador del programa: \_\_\_\_\_

Dr. Aldo Iván Parra Sánchez

Lugar y fecha de sustentación: Popayán, 19 de Diciembre de 2023

## **Agradecimientos**

A mis padres por ser la inspiración de mi educación.

A mi abuela Rosita por su amor inquebrantable, su fortaleza y dedicación.

A mis hermanos por su fraternidad y apoyo incondicional.

A mis amigos y primos por su valiosa ayuda y amistad.

A mis profesoras y profesores por compartir sus conocimientos y enseñanzas.

A todas las personas que ayudaron para que este sueño se hiciera realidad.

A todos ustedes, gracias.

## Tabla de contenido

1. Introducción.....	2
2. Presentación.....	4
2.1 Reconocimiento de la Institución Educativa.....	4
2.1.1 Descripción de la Población.....	4
2.1.2 Inmersión escolar.....	4
3. Descripción de la problemática.....	5
4. Objetivos.....	9
4.1 Objetivo general.....	9
4.2 Objetivos específicos.....	9
5. Justificación.....	10
6. Antecedentes.....	12
7. Marco Teórico.....	14
7.1 Pensamiento Matemático.....	15
7.1.1. La Subdivisión del Pensamiento Matemático.....	15
7.1.3 Pensamiento Espacial.....	16
7.1.4 Pensamiento Métrico.....	17
7.2 Visualización.....	18
7.2.1 Visualización científica.....	19
a) Visualización de Volúmenes.....	19
b) Visualización de Flujos.....	19
7.2.1.1. Visualización Matemática.....	19
7.3 Realidad Aumentada.....	20
7.3.1 Tipos de Realidad Aumentada.....	21
7.3.1.1. Tecnología de AR basada en marcadores:.....	21
7.3.1.1.1 Código QR.....	22
7.3.1.1.2. Tecnología de AR sin marcadores:.....	22
7.3.2. Realidad Aumentada en la Educación.....	22

7.3.2.1 Geometry-AR .....	23
7.3.2.2 GeoGebra AR.....	24
8. Metodología .....	25
10. Reconstrucción Histórica y Análisis.....	28
10.1 Primera fase.....	28
10.1.1 Encuesta a estudiantes .....	28
10.1.2 Resultado y análisis de la guía #1 Introducción a la Realidad Aumentada (AR).....	33
10.1.3 Test de aprendizaje .....	37
10.2 Segunda fase.....	42
10.2.1 Resultados y análisis de la guía #2 poliedros .....	42
10.2.2 Resultados y análisis de la Guía #3: introducción al sistema Sexagesimal, radial y ubicación geográfica .....	54
10.2.3 Resultados y análisis de la Guía #4: Razones Trigonómicas.....	63
11. Conclusiones .....	69
12. Bibliografía .....	72
13. Anexos .....	76
13.1 Encuesta a estudiantes.....	76
13.2 guía #1: Introducción a la Realidad Aumentada .....	79
13.3 Test de aprendizaje.....	88
13.4 Guía #2: Poliedros.....	91
13.5 Guía #3: introducción al sistema Sexagesimal, Cíclico y ubicación geográfica .....	100
13.6 Guía #4: Razones Trigonómicas .....	112

## Índice de imágenes

Ilustración 1. ¿Te gustan las matemáticas?.....	29
Ilustración 2. ¿Cómo te ves en un futuro profesional?.....	30
Ilustración 3. Estilos de aprendizaje .....	33
Ilustración 4. Diferencia entre Realidad Virtual y Aumentada.....	35
Ilustración 5. Construcción del cubo de Merge .....	36
Ilustración 6. Test de aprendizaje .....	39
Ilustración 7. Respuestas del test de aprendizaje .....	40
Ilustración 8. Clasificación de poliedros.....	44
Ilustración 9. Registro escrito de la actividad.....	45
Ilustración 10. Construcción de poliedros en GeoGebra .....	47
Ilustración 11. Clasificación de poliedros.....	48
Ilustración 12. Verificación de la fórmula de Euler con AR.....	50
Ilustración 13. Solidos platónicos con AR.....	51
Ilustración 14. Explorando con Geometry -AR .....	52
Ilustración 15. Suma en el sistema sexagesimal .....	55
Ilustración 16. Errores frecuentes al realizar operaciones en el sistema sexagesimal .....	56
Ilustración 17. Definición grafica de radian.....	57
Ilustración 18. Longitud y latitud.....	59
Ilustración 19. Coordenadas geográficas de la Institución.....	61
Ilustración 20. Construcción de latitud y longitud en GeoGebra 3D .....	62
Ilustración 21. Razones trigonométricas .....	63
Ilustración 22. Verificación de las razones trigonométricas en la calculadora .....	65
Ilustración 23. Construcción visual de las razones trigonométricas por medio de GeoGebra .....	66
Ilustración 24. Morro de Tulcán con AR .....	67

## 1. Introducción

En este documento se presentan los resultados de la sistematización de la Práctica Pedagógica que se realizó alrededor del proceso de enseñanza-aprendizaje de la trigonometría, mediante la implementación de la Tecnología de la Realidad Aumentada (AR); una tecnología que combina elementos del mundo real con elementos generados por computadora, ofreciendo así una experiencia enriquecedora y mejorada. Durante el desarrollo de la Práctica se investigó, aprendió, programó y se utilizó esta tecnología; una tecnología que está cada vez más presente en ámbitos como el entretenimiento y el marketing; por tal razón, se espera que a partir del desarrollo de este documento, surja la necesidad de incluirla para investigaciones futuras en la enseñanza de las matemáticas.

La práctica docente se desarrolló con estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Antonio García Paredes de la ciudad de Popayán. La trigonometría a menudo implica trabajar con triángulos y ángulos en un plano cartesiano; es por eso, que los estudiantes que tienen habilidades visuales y espaciales fuertes, pueden encontrar más fácil visualizar y entender estos conceptos trigonométricos; sin embargo, a la mayoría se les dificulta la visualización de objetos geométricos representados en papel o tablero, más aún cuando son objetos geométricos sólidos. Esta asignatura que a menudo puede parecer abstracta, se volvió tangible y cautivadora a través de la implementación de la tecnología de Realidad Aumentada. Este enfoque no solo permitió una visualización matemática interesante, sino que también abrió las puertas a una comprensión profunda de los conceptos matemáticos abstractos y a la conexión de estos con el mundo real.

La enseñanza de las matemáticas ha venido presentando diferentes cambios; es así, que en esta era lo importante no es la obtención de información, si no como los maestros movilizan esa

información para una mejor comprensión de los conceptos matemáticos. En esta Práctica Pedagógica, se promovió la construcción de conocimiento por medio de la visualización matemática; la visualización matemática implica representar conceptos matemáticos utilizando gráficos, diagramas u otras representaciones visuales para facilitar la comprensión de las ideas matemáticas de las y los estudiantes.

La metodología que se utilizó, contempla la modalidad de solución de problemas mediante herramientas tecnológicas y visualización matemática. Teniendo en cuenta esto, la intervención se realizó en dos fases. La primera fase hace alusión al seguimiento de los saberes previos de los estudiantes mediante una encuesta, una guía introductoria a la tecnología de AR y un test de aprendizaje realizado con esta tecnología. En la segunda fase, se diseñaron y ejecutaron tres guías; poliedros, sistemas de medición de ángulos y razones trigonométricas. La forma de ejecutar las actividades en la primera fase, replanteó la formulación de las guías de la segunda fase, permitiendo incorporar un orden de actividades en dirección a los estilos de aprendizaje de los estudiantes. Gracias a los resultados obtenidos con esta metodología, se logró evidenciar que, aunque existan limitaciones por falta de dispositivos electrónicos, esto no es impedimento para utilizar Realidad Aumentada en el aula, porque no solamente la AR contribuye a una mejor comprensión de los conceptos trigonométricos, sino que genera interés y motivación en los estudiantes, desde un aprendizaje de las matemáticas más emocionante.

## **2. Presentación.**

### **2.1 Reconocimiento de la Institución Educativa**

#### **2.1.1 Descripción de la Población.**

La práctica pedagógica investigativa se llevó a cabo en la Institución Educativa Antonio García Paredes, ubicada en la calle 17 no. 16-0 la Ladera, Cauca, Popayán. Es una Institución oficial de calendario A, de carácter mixto con jornadas mañana y tarde. Los estudiantes son jóvenes procedentes de los barrios de la comuna 6 de la ciudad, pertenecen a los estratos económicos 1, 2 y 3 y sus edades oscilan entre los 15 y 17 años. La práctica docente se realizó con estudiantes del grado decimo 3, en la asignatura de trigonometría, en horarios de clase, con una intervención de dos horas semanales.

#### **2.1.2 Inmersión escolar.**

Dentro de la primera inmersión a la Institución, se realizaron las siguientes actividades: reconocimiento de la planta física, de los horarios y de los profesores de matemáticas correspondientes; seguidamente, se obtuvo información mediante entrevistas a los docentes de matemáticas en bachillerato y por último el practicante participó como oyente y asesor de talleres en clase, desarrollados en los grados noveno uno y décimo uno de la Institución.

El acercamiento a los estudiantes en las dos últimas visitas fue enriquecedor, ya que esto permitió observar el ambiente educativo, como también las relaciones estudiante-maestro, maestro-maestro y estudiante-estudiante, entre otras relaciones que se desarrollan en la Institución. La primera inmersión es un paso importante para el practicante, porque permite conocer algunas situaciones que se presentan en la Institución a nivel general, y en particular se

observó la puesta en escena del pensamiento pedagógico y matemático de los profesores correspondientes a los grados superiores.

### **3. Descripción de la problemática**

Las matemáticas en bachillerato son una asignatura poco atrayente para el estudiante, debido a diversos factores que emergen en los procesos de aprenderlas y la manera en que son enseñadas.

*Así, la concepción social que históricamente se ha tenido de las matemáticas es negativa, con innumerables prejuicios de una asignatura difícil, llena de números y letras que no tienen ningún sentido, esta concepción impacta el aprendizaje de los estudiantes, ya que para ellos las matemáticas no tienen relación alguna con prácticas de la vida real, por este motivo lo que se enseña en matemáticas en las aulas de clase no tiene relevancia para ellos (Maseda, 2011. p. 3)*

De acuerdo con la primera inmersión realizada, se considera que a nivel general la enseñanza en el establecimiento educativo sigue un modelo pedagógico tradicional. Los siguientes indicadores mencionados en (Amador ,2018) corresponden a los indicadores observados en la Institución para identificar el modelo:

- *Un solo profesor dicta clase a muchos estudiantes.*
- *Se busca en cada momento la estandarización de la enseñanza y la evaluación.*

- *La enseñanza en la Institución se basa en la transmisión del conocimiento, desde el profesor (dueño del saber) hacia sus estudiantes (receptores de información).*
- *Se opta por un aprendizaje de memoria, con referencia a pruebas estandarizadas que están acorde a políticas de la industria.*

Adicionalmente, se le suma que los estudiantes no están dispuestos a aprender matemáticas, porque no se sienten identificados con ellas, las razones de la falta de motivación en los estudiantes son diversas. Valencia (2018) menciona que esto se debe a factores como:

- *Ausencia de interés de los estudiantes por aprender.*
- *Falsas creencias sobre las matemáticas.*
- *No hay un interés de seguir estudiando después de terminar la secundaria.*
- *No se encuentra estructurado un currículo de matemáticas, es decir no hay una guía para el profesor.*
- *No hay un profesor que estimule el aprendizaje (p.15).*

De estos factores, en la Institución se pudieron evidenciar los siguientes: la ausencia de interés por aprender matemáticas en los estudiantes, la falta de relación de la matemática con la vida diaria y la enseñanza de la matemática desde una estructura rigurosa. Dávila (2006) menciona que “la generación net (personas que para el año 1999 tenían de cero a 20 años), necesitan aprender de modo diferente, así como también, esta generación ayuda a establecer un nuevo modelo de aprendizaje, basado en el descubrimiento y en la participación” (p.27).

La apreciación de los docentes de la Institución Educativa Antonio García Paredes de la ciudad de Popayán, es que los estudiantes no se encuentran motivados y no quieren desarrollar las actividades propuestas por los docentes. Las razones son variadas, una de ellas son los malos hábitos que se construyeron en tiempos de pandemia COVID 2019 y otra es el hecho de que la asignatura de matemáticas se orienta desde un modelo pedagógico tradicional. Bajo estas consideraciones, lo que exige la enseñanza de las matemáticas es un profesor que transmita en sus estudiantes el entusiasmo y placer por aprender cosas nuevas y no solo el de aprobar la asignatura. ¿Será que las mismas prácticas de enseñanza de hace 50 años, funcionan con las nuevas generaciones? Según el Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006) “la educación matemática debe responder a nuevas demandas globales y nacionales, como las relacionadas con una educación para todos, la atención a la diversidad y a la interculturalidad y la formación de ciudadanos y ciudadanas con las competencias necesarias para el ejercicio de sus derechos y deberes democráticos”. Valencia (2018) afirma que:

*En una clase promedio de trigonometría el docente presenta, la definición de seno, coseno, hipotenusa de un triángulo, circunferencia, radio, diámetro, razón, entre otros. Seguidamente el profesor facilita el proceso aritmético de los cálculos con el uso de tablas o calculadora para encontrar los valores de dichas razones trigonométricas. Esta forma de presentar el concepto no brinda en el estudiante la posibilidad de exploración ni de asimilación del concepto desde lo interdisciplinar<sup>1</sup>, en este sentido, no se revive ningún interés*

---

<sup>1</sup> **Interdisciplinar:** Es un campo de estudio que cruza los límites tradicionales entre varias disciplinas académicas, o entre varias escuelas de pensamiento

*en el estudiante, esto conlleva a perpetuar una actitud pasiva frente a la propuesta del maestro(p.23).*

Los estudiantes realizan sus actividades en un entorno diferente al que se les ha presentado en matemáticas, esta poca correspondencia del espacio no permite que el relacione las fórmulas matemáticas dadas con su espacio real. Así, la forma de medir y concebir los objetos, está demasiado lejos, si solo se considera desde un plano matemático fijo en dos dimensiones (2D).

Los problemas usuales que se presentan en el desarrollo de pensamiento métrico-espacial son:

- Dificultades en los estudiantes al necesitar ubicar objetos y ubicarse en el espacio.
- Escasa visualización de los objetos matemáticos.
- Problemas en la conversión de unidades de medida.
- Dificultades en las relaciones de los objetos con el espacio, simetrías de los objetos, traslaciones, rotaciones, conservación de la medida, entre otras.
- Dificultades sobre el manejo de la noción de distancia y la relación de simetría respecto a un punto de referencia.
- Dificultades en la distinción de los conceptos puntuales como círculo, circunferencia, área esférica, entre otros

Las anteriores son problemáticas que se evidencian de manera implícita, dentro del desarrollo de una asignatura tradicional de trigonometría; la enseñanza desde la ejercitación, memorización y desarrollo de problemas, no considera las capacidades de relación con el espacio como relevantes en el aprendizaje de la trigonometría.

Así, generar nuevos ambientes de aprendizaje se ha convertido en parte fundamental de los procesos de la educación actual, ya que es necesario que los estudiantes encuentren sentido y relación de las actividades escolares con su vida diaria, las herramientas tecnológicas pueden ser una buena opción para lograrlo. Por tales consideraciones surge la siguiente pregunta de investigación.

¿Cómo desarrollar mediante la tecnología de Realidad Aumentada (AR) el pensamiento métrico-espacial, en los estudiantes de décimo grado?

#### **4. Objetivos**

##### **4.1 Objetivo general.**

Desarrollar el pensamiento métrico-espacial de estudiantes de décimo grado, mediante la tecnología de Realidad Aumentada (AR)

##### **4.2 Objetivos específicos.**

- Identificar mediante la tecnología de Realidad Aumentada, las dificultades que enfrentan los estudiantes al describir atributos de las figuras geométricas.
- Potenciar en los estudiantes la capacidad de orientar, medir y visualizar figuras geométricas mediante la tecnología Realidad Aumentada, en el contexto de la trigonometría.
- Resaltar la utilidad de la Realidad Aumentada como una herramienta de motivación, frente al aprendizaje de la trigonometría

## 5. Justificación

La motivación es un factor determinante en el momento de realizar alguna acción, y en particular en el momento de aprender matemáticas, ya que existe variedad de connotaciones sociales negativas sobre las matemáticas. De la misma manera, la forma en que se enseñan ejerce tensiones en las construcciones mentales de los estudiantes. Como afirma Dávila (2006) “los estudiantes aprenden, se comunican, juegan, trabajan y crean su entorno de modos muy distintos de los que utilizaron sus maestros” (p.30). Por esta razón las prácticas educativas deben estar en constante innovación frente a las necesidades de las nuevas generaciones, que son conocedores del mundo digital y están conectados con él. Aunque esto no quiere decir que la responsabilidad es solo del maestro, el alumno “debe llegar a ser un usuario inteligente y crítico de la información, para lo que precisa aprender a buscar, obtener, procesar y comunicar información y convertirla en conocimiento” ( M. Segura. 2007. p. 11).

Generalmente la clase de trigonometría se ha limitado a considerar algunos aspectos no menos importantes como: la ejercitación matemática y el desarrollo de problemas trigonométricos, pero el desarrollo del pensamiento métrico-espacial exige desarrollar diversas capacidades en diferentes etapas cognitivas del estudiante. Por ejemplo: la capacidad de identificar y descubrir atributos de los objetos, como formas y tamaños; la capacidad de orientación de los ejes corporales y la posición de un objeto en el espacio; la capacidad de visualización que relaciona la forma de ver el mundo que nos rodea y la generación de imágenes mentales de los objetos. Seguidamente, para poder entender el mundo que nos rodea se exige el uso razonado de la medida. Aunque cotidianamente se considera que medir es asignarle un número a una determinada magnitud, se debe tener en cuenta que medir exige

otras capacidades que están inmersas en acciones como: comparar, estimar y percibir atributos del objeto que permanecen invariantes, ante los cambios de posición.

Dichas capacidades no se tienen en cuenta en el momento de enseñar trigonometría, ya que se consideran más relevantes los procedimientos algorítmicos, sin tener en cuenta que el desarrollo de estas capacidades pueden tener significancia en la concepción e interpretación de las imágenes mentales del estudiante sobre los objetos matemáticos y no matemáticos con los que interactúa, permitiendo una correspondencia con otras áreas científicas y con su aplicabilidad en la vida diaria.

Es un hecho que existen investigaciones a nivel mundial para vincular herramientas tecnológicas al curso de trigonometría, aunque en la Institución Educativa no se han considerado significativamente, ya que el uso de estos recursos exige mayor compromiso tanto para los estudiantes como para el profesor. La causa principal para no utilizar las herramientas tecnológicas, es la falta de dispositivos electrónicos en las instituciones; pero el desarrollo del pensamiento métrico-espacial exige visualización y manipulación de objetos matemáticos, lo cual se facilita con el uso de las tecnologías. Bajo estas consideraciones se buscó una tecnología emergente que estuviera a disposición de los estudiantes, esta es la Realidad Aumentada AR, que desde hace varios años se ha venido implementando en otros ámbitos como el marketing y el entretenimiento.

La actitud de aprender cosas nuevas, es la que se va a incentivar con este trabajo, aunque el ejercicio del docente sea el de motivar con diferentes actividades desde su pensamiento pedagógico, esto no significa que los contenidos a presentar no tengan el rigor matemático necesario, al contrario, lo que se busca es retar a los estudiantes con actividades y herramientas

tecnológicas, desde sus prácticas cotidianas y que estos se motiven a aprender matemáticas. Análogamente a esta consideración, este trabajo pretende desarrollar el pensamiento métrico-espacial, el cual es útil para todos, no solo para los estudiantes que ejercerán una labor relacionada con las matemáticas, sino para todos los estudiantes del curso correspondiente, de acuerdo con Gonzalo & Godino (2006) las Situaciones de Orientación Espacial podrían ser presentadas no solo en el ámbito matemático, sino también en otras asignaturas, como pueden ser la geografía, el dibujo técnico, el turismo y la educación física.

Finalmente, la razón del por qué se hizo este trabajo de práctica, es porque permitirá reflexionar desde un camino distinto la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas tanto para los estudiantes, como para el practicante.

## **6. Antecedentes**

A continuación, se describen dos investigaciones. Una de ellas se presenta como tesis de maestría y la otra como reporte de investigación. Ambas implementan herramientas tecnológicas, las cuales pretenden renovar las prácticas pedagógicas con el propósito de acercarse y ajustarse a las necesidades e intereses de la nueva generación de estudiantes.

El primer trabajo titulado “Desarrollo del Pensamiento Métrico Espacial a través de la Implementación de un Laboratorio de Geometría Interactivo” elaborado por David Araujo (2020). Plantea como objetivo general el desarrollo del pensamiento métrico-espacial en estudiantes de quinto grado, a través de la implementación de un laboratorio de geometría interactivo para promover un aprendizaje autónomo, participativo y colaborativo. En esta investigación se resalta que la enseñanza actual de la geometría, se basa en la poca utilización de

recursos que permitan una apropiada visualización de los conceptos geométricos. Esta investigación toma en consideración el aprendizaje significativo de Ausubel, teoría que le ofrece las bases para saber cómo se da el proceso de aprendizaje en los estudiantes, qué enseñar en geometría y cómo hacerlo teniendo en cuenta las estructuras cognitivas y niveles de desarrollo de los estudiantes.

La investigación se abordó desde un enfoque mixto teniendo en cuenta que los métodos mixtos representan un conjunto de procesos sistemáticos, empíricos y críticos de investigación e implican la recolección y el análisis de datos cuantitativos y cualitativos como la observación directa, una prueba diagnóstica pre test, una prueba de verificación post test y una encuesta a los docentes. Esto, con el propósito de realizar un mejor análisis respecto al impacto que generó el laboratorio de geometría interactivo en el desarrollo del pensamiento métrico-espacial. Adicionalmente se pudo observar el grado de interés que se despertó en los estudiantes al momento de conectarse y desarrollar las diferentes actividades interactivas propuestas. Sus niveles de motivación y expectativas fueron mayores a las que suelen presentar durante las clases magistrales o tradicionales, dedicando así más tiempo al estudio de la geometría de forma dinámica, atractiva y divertida.

De la misma manera Budiarti (2020) en su trabajo titulado “Estrategia Didáctica Mediada por Realidad Aumentada, para el Fortalecimiento de la Competencia del Pensamiento Métrico-Espacial en estudiantes de grado noveno”, propone como objetivo general Determinar la incidencia de una estrategia didáctica mediada por Realidad Aumentada (AR), para el fortalecimiento de la competencia del pensamiento métrico-espacial en estudiantes de grado noveno. En este trabajo se menciona que las nuevas tecnologías son una herramienta

indispensable en los procesos de enseñanza de la geometría, en particular se evidencia que la Realidad Aumentada es una tecnología que comienza a relacionarse con el aula escolar.

Al igual que el otro artículo, este constituye una investigación aplicada que se fundamentó en un enfoque mixto. La primera fase se desarrolló desde un enfoque cualitativo, consistió en la exploración de los intereses del alumnado y sus estilos de aprendizaje, mediante la aplicación de un test de estilos de aprendizaje, cuyos resultados permitieron contextualizar, precisar y desarrollar la estrategia didáctica mediada por AR.

La segunda fase se realizó para demostrar que la AR fortalece la competencia del pensamiento métrico-espacial en los estudiantes del grado noveno, seguidamente se realizó un post test con mayor dificultad que el anterior, el cual verifica mediante resultados estadísticos, que los estudiantes después de haber desarrollado las dos estrategias didácticas con la tecnología AR, mejoraron considerablemente, ya que la tecnología AR les facilitó el proceso de visualización de objetos tridimensionales y permitió reconocer los elementos constitutivos de los poliedros (caras, aristas y vértices), así como permitió también, interpretar las expresiones algebraicas que representan su volumen y área; además, permite resolver y formular problemas en los que se relacionan magnitudes de figuras planas y poliedros. En los resultados de la fase cualitativa, cuantitativa y el test de estilos de aprendizaje, se determinó que el estilo de aprendizaje predominante es el visual.

## **7. Marco Teórico**

Históricamente el desarrollo de las matemáticas ha estado en correspondencia con el desarrollo tecnológico y este a su vez ha tenido repercusión en la educación, no obstante, para

este trabajo es necesario comprender ciertas aplicaciones y conceptos determinantes entre los cuales se encuentran: el pensamiento métrico, el pensamiento espacial, la visualización matemática y la Realidad Aumentada.

## **7.1 Pensamiento Matemático**

De acuerdo con Ricardo Cantoral y otros (2000) en su libro Desarrollo del Pensamiento Matemático, se habla sobre varios modos de entender el concepto de pensamiento matemático, y por tanto, de analizar el desarrollo del mismo. Por un lado, atribuyen el término de pensamiento matemático a las formas en que piensan las personas que se dedican profesionalmente a las matemáticas. Por otro lado, entienden el pensamiento matemático como parte de un ambiente científico en el cual los conceptos y las técnicas matemáticas surgen y se desarrollan en la resolución de tareas. Por ende, se entiende que el pensamiento matemático incluye: pensamiento sobre tópicos matemáticos y también incluye procesos avanzados del pensamiento como abstracción, justificación, visualización y estimación o razonamiento bajo hipótesis.

### **7.1.1. La Subdivisión del Pensamiento Matemático**

El MEN (2006), en el artículo Lineamientos Curriculares para Matemáticas, menciona que: “históricamente el pensamiento matemático se dividió entre hacer matemáticas con respecto al número; la aritmética, y la manera de hacerlas con respecto al espacio; la geometría” (p.57). Estas dos maneras de hacer matemáticas sugieren una primera subdivisión del pensamiento matemático al menos en dos tipos: el pensamiento numérico y el espacial. Se notó también que las nociones métricas no se aplicaban sólo a lo espacial (como en el caso de longitud, área y volumen) sino también a lo temporal (duración y frecuencia) y a otras muchas disciplinas,

especialmente la física y la química (fuerza, peso, masa, densidad, temperatura, presión, velocidad, aceleración, etc.). Era pues conveniente distinguir también el pensamiento métrico del pensamiento numérico y del espacial. Históricamente a partir del desarrollo del cálculo diferencial y de la teoría de la probabilidad se hizo necesario empezar a distinguir el pensamiento analítico variacional y el pensamiento aleatorio. Así, para el MEN (2006)

*Se puede ver una clara relación con los cinco tipos de pensamiento matemático enunciados en los Lineamientos Curriculares: en la aritmética, el pensamiento numérico; en la geometría, el pensamiento espacial y el métrico; en el álgebra y el cálculo, el pensamiento métrico y el variacional, y en la probabilidad y estadística, el pensamiento aleatorio (p.59).*

### **7.1.3 Pensamiento Espacial**

Según el MEN (2006) el pensamiento espacial “es el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales”. De acuerdo con el MEN (1998) el pensamiento espacial se entiende como un proceso cognitivo de interacciones, que avanza desde un espacio intuitivo o sensorio-motor (que se relaciona con la capacidad práctica de actuar en el espacio, manipulando objetos, localizando situaciones en el entorno y efectuando desplazamientos, medidas, cálculos espaciales, etc.), a un espacio conceptual o abstracto relacionado con la capacidad de representar internamente el espacio, reflexionando y razonando sobre propiedades geométricas abstractas, tomando sistemas de referencia y prediciendo los resultados de manipulaciones mentales.

De la misma manera Gardner (2018) menciona que: “la resolución de problemas espaciales se aplica a la navegación y al uso de mapas en el sistema posicional, la visualización del objeto desde ángulos diferentes y el juego del ajedrez” (p.7). Howard Gardner también considera que la inteligencia espacial es esencial para el pensamiento científico, porque el manejo de información espacial se utiliza para resolver problemas de ubicación, orientación y distribución de espacios; esto es familiar para esas personas que tienen desarrollada su inteligencia espacial. Se estima que la mayoría de las profesiones científicas y técnicas, tales como el dibujo técnico, la arquitectura, las ingenierías, la aviación, y muchas disciplinas científicas como química, física y matemáticas, requieren personas que tengan un alto desarrollo de inteligencia espacial.

#### **7.1.4 Pensamiento Métrico**

De acuerdo con el MEN (2006), el pensamiento métrico “es la comprensión general que tiene una persona sobre las magnitudes y las cantidades, su medición y el uso flexible de los sistemas métricos o de medidas en diferentes situaciones”(p.7). En los Lineamientos Curriculares mencionados en el MEN (1998) se especifican conceptos y procedimientos relacionados con este tipo de pensamiento, como:

- *La construcción de los conceptos de cada magnitud.*
- *La comprensión de los procesos de conservación de magnitudes.*
- *La estimación de la medida de cantidades de distintas magnitudes y los aspectos del proceso de “capturar lo continuo con lo discreto”.*
- *La apreciación del rango de las magnitudes.*

- *La selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos y procesos de medición.*

- *La diferencia entre la unidad y los patrones de medición.*

- *La asignación numérica.*

- *El papel del trasfondo social de la medición (p.42)*

El pensamiento métrico debe de trabajar con sistemas de medidas o sistemas métricos, el más conocido actualmente es el Sistema Internacional de Unidades y Medidas (SI). El pensamiento métrico no solo se limita a unidades de longitud sino también a otras unidades de medida como la velocidad, la temperatura, densidad, entre otras. Bajo esta consideración, son necesarias herramientas de equivalencia entre medidas, para expresarlas en el sistema decimal en sus distintas formas escriturales. Por último, y de acuerdo con el MEN (2006) las magnitudes que tienen estrecha relación con aspectos claves de la vida social, desbordan el campo de las matemáticas y requieren del desarrollo del pensamiento científico y del pensamiento físico. De esta manera, el pensamiento métrico está estrechamente relacionado con las disciplinas científicas, naturales, sociales y con las competencias ciudadanas.

## **7.2 Visualización**

Según Real Academia (RAE) la palabra visualización es la “acción y efecto de visualizar”. De acuerdo con McLuhan (2000), la visualización es transformar la información original en información más significativa, permitiendo así, que el observador obtenga comprensión del objeto. El desarrollo de esta capacidad se ha venido realizando mayormente a través de imágenes; sin embargo, en el universo de las matemáticas no siempre podemos ver el objeto para

estudiarlo, a veces se hace necesario elaborar una imagen mental de ese objeto abstracto; un claro ejemplo de esto lo podemos experimentar en la concepción de un espacio topológico.

También Arcav (2003) menciona que:

*La Visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre figuras, imágenes, diagramas, en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar la comprensión (p.26)*

### **7.2.1 Visualización científica**

De acuerdo con McLuhan (2000) la Visualización Científica se aplica a grandes conjuntos de datos científicos, es decir, datos físicos tales como los relacionados con el cuerpo humano, la tierra, la velocidad de los fluidos, las fuerzas y otros. En esta rama se pueden visualizar abstracciones, pero basadas en el espacio físico. Dentro de este campo de visualización se distinguen lo siguiente:

**a) Visualización de Volúmenes:** Representación, manipulación y representación de datos volumétricos.

**b) Visualización de Flujos:** Representación, manipulación y representación de datos vectoriales y tensoriales.

#### **7.2.1.1. Visualización Matemática**

La visualización pone en juego las estructuras cognitivas sobre las relaciones entre diferentes representaciones de un objeto matemático, referidas a lo numérico, gráfico y verbal. Así, como afirma Legorreta (2012) “la visualización matemática opera con el funcionamiento de las

estructuras cognitivas, las relaciones entre las diversas representaciones de un objeto matemático y además intervienen la concepción y el desarrollo histórico del objeto matemático en una determinada cultura” p.14).

Legorreta afirma también, que las imágenes se pueden tener en presencia o en ausencia de los objetos matemáticos, es por eso que la visualización matemática es un doble proceso, uno ascendente, que va de lo material a lo inmaterial (mental o ideal) y el inverso, descendente, que va de lo inmaterial a lo material. De acuerdo con Herrera y otros (2020) la visualización espacial es una habilidad cognitiva fundamental en el aprendizaje de la matemática. En particular, es requerida para construir modelos mentales a partir de representaciones estáticas dadas mediante dibujos y/o descripciones orales en clases o a través de los libros de textos, el desarrollo de esta habilidad es un proceso dinámico vinculado con la experiencia y la interacción con objetos reales y virtuales. Las habilidades visuales y espaciales comprenden cinco componentes básicos: percepción, visualización, rotaciones mentales, relaciones espaciales y orientación

### **7.3 Realidad Aumentada**

Según X. Basogainy y otros (2016) la Realidad Aumentada es una tecnología que complementa la percepción e interacción con el mundo real y permite al usuario estar en un entorno real aumentado con información adicional generada por el ordenador. Entonces la AR establecerá un puente entre los conceptos teóricos y la realización física de los experimentos con los dispositivos reales. El sistema mediante una cámara captura la imagen del dispositivo real y mostrará al alumno en la pantalla del ordenador el dispositivo real con información adicional. La información virtual añadida a la imagen real estará relacionada con los conceptos teóricos del

dispositivo real y se presentará en un formato de imagen en dos dimensiones (2D), objetos en tres dimensiones (3D), video, audio o texto

Así, de acuerdo con Budiarti (2020), la interacción entre el sujeto y la realidad con objetos virtuales, es lo que otorga a la AR su carácter particular y la convierte en una opción atrayente y de interés para el público joven, lo que se convierte en una ventaja dentro del proceso enseñanza – aprendizaje, en especial en el campo de la Matemática. Seguidamente Budiarti menciona que la captura del escenario es posible a través de cámaras o por vía del sistema de posicionamiento global (GPS) incluido por los dispositivos; especialmente los móviles, así mismo, las cámaras que se emplean pueden ser internas o externas al dispositivo donde se proyecta la realidad aumentada.

### **7.3.1 Tipos de Realidad Aumentada**

De acuerdo con Softtek (2021) existen diferentes tipos de AR, pues cada uno de ellos será más adecuado para un uso en específico, aunque todos comparten rasgos comunes. Así pues, se diferenciará principalmente entre:

**7.3.1.1. Tecnología de AR basada en marcadores:** las aplicaciones de AR basadas en marcadores emplean imágenes (marcadores) de destino para posicionar objetos en un espacio determinado. Estos marcadores determinan en qué lugar la aplicación colocará el contenido digital 3D dentro del campo visual del usuario.

#### **7.3.1.1.1 Código QR**

Como es mencionado en J. A. Segura y otros (2012) “Un código QR es un sistema para almacenar información y ofrecerla, de forma rápida, a las personas que lo visualizan. Las siglas QR responden, precisamente, al acrónimo Quick Response” (p.148). La información que obtenemos con el QR, puede ser una información estática o una información dinámica.

**7.3.1.2. Tecnología de AR sin marcadores:** la tecnología de AR sin marcadores permite posicionar objetos virtuales en 3D en el entorno de la imagen real al examinar las características presentes en los datos en tiempo real. Este tipo de guía se basa en el hardware de cualquier teléfono inteligente, ya sea la cámara, el GPS o el acelerómetro; el software de la realidad aumentada completa el trabajo. Por tanto, esta tecnología es capaz de detectar objetos o puntos característicos de una escena sin conocimiento previo del entorno, por ejemplo, puede identificar paredes o puntos de intersección. Esta es una tecnología que se caracteriza por asociarse con el efecto visual que combina gráficos por ordenador con imágenes del mundo real. Así pues, se distinguen cuatro categorías de AR sin marcadores: AR basado en la ubicación, AR basado en proyección, AR de superposición y AR de contorno.

#### **7.3.2. Realidad Aumentada en la Educación.**

De acuerdo con J. A. Segura y otros (2012) la voluntad de centrar el aprendizaje en la participación activa del estudiante, en sus intereses, en situaciones relevantes y directamente relacionadas con su vida real; supone un cambio en los planteamientos pedagógicos que exigen el diseño de nuevas propuestas metodológicas y el uso de recursos didácticos capaces de facilitar los nuevos procesos. Aunque Reinoso (2012), citado en Prendes (2015.p.191), dice que “aun

reconociendo el enorme potencial de las herramientas que nos proporciona la AR, expresa sus dudas a la hora de implementarlas como herramientas de trabajo en el aula, calificando tal implementación como un desafío”. Esto, porque la tecnología de Realidad Aumentada no es asequible para todos los públicos debido a los altos costos de los dispositivos electrónicos y la poca capacitación de los docentes frente al uso de estas nuevas tecnologías. Es por eso que el principal problema, es la falta de financiación en la educación por parte del estado. Sin embargo, los beneficios son mayores que las limitaciones. Por una parte, promueve la motivación de los estudiantes, ya que permite ganar su atención, además ellos son partícipes de su propio aprendizaje y por último se adquiere un aprendizaje cooperativo, porque permite desarrollar habilidades sociales y personales necesarias, no solo para la vida personal y académica, sino también para el futuro social y laboral.

Se debe considerar que las nuevas generaciones, son generaciones unidas a la tecnología digital, en tal sentido las personas esperan ser capaces de trabajar, aprender y estudiar cuando y donde quieran. Entonces, J. A. Segura y otros (2012) mencionan que:

*Al analizar las posibilidades que brinda la tecnología AR, ejecutada en dispositivos móviles se puede considerar que no solo responden a este tipo de exigencia, sino que la amplían de manera cualitativamente significativa al ofrecer información situada y contextualizada, desde el lugar y en el momento que el consumidor la requiera (p.144).*

### **7.3.2.1 Geometry-AR**

Esta aplicación fue creada por el licenciado en Matemáticas Mario Alberto Bermúdez Martínez, es totalmente gratuita y está disponible en Google play en su versión 1.0.4 para

dispositivos Android (teléfonos y tabletas), tiene acceso a cámara, almacenamiento, fotos/datos, multimedia/archivos; su Interfaz es rápida y no ofrece paquetes de compra, ni es necesario desbloquear áreas de la aplicación para acceder a su uso pleno.

De acuerdo con Bermúdez (2017) la aplicación ofrece un contenido conceptual donde brinda información de cada sólido, fórmulas para el cálculo de áreas, área tanto total como de cada una de los polígonos que conforman las caras del sólido; fórmulas para el cálculo de volúmenes e información sobre el número de caras, vértices y aristas. Los docentes también podrán obtener una herramienta para evaluar a sus estudiantes en el cálculo de área y de volúmenes y en la distinción de los conceptos de arista, vértices y caras; el estudiante de forma inmediata podrá ser retroalimentado por la aplicación al indicarle si ha acertado o no en la respuesta que ha dado. Esto es realmente importante en el aprendizaje de un concepto matemático, porque la evaluación y la retroalimentación se realiza de manera inmediata y el estudiante aprende de manera independiente, involucrándose de manera activa mediante el ensayo y error.

#### **7.3.2.2 GeoGebra AR**

Una nueva aplicación para dispositivos móviles, GeoGebra AR se puede descargar en la App Store o Play Store. Es necesario disponer de las librerías, que son un conjunto de herramientas de software pequeño y autónomo que ofrece una funcionalidad muy específica al usuario de Realidad Aumentada de cada plataforma. En Android el software necesario es ARCore y en IOS es ARKit. Para poder usar la app AR y la calculadora gráfica 3D con AR, es necesario que nuestro dispositivo soporte esas librerías.

Esta combinación de la calculadora de GeoGebra y la tecnología ARCore, proporciona a los estudiantes poderosas herramientas de modelado matemático; GeoGebra 3D con Realidad Aumentada, ayuda a los estudiantes a explorar y meterse dentro de las superficies 3D, ayudando en ocasiones, a comprender más profundamente los conceptos que a menudo se les presentan de forma abstracta.

## **8. Metodología**

La dinámica que guió el desarrollo de esta intervención estuvo acorde a los temas correspondientes al primer periodo del año lectivo 2023: introducción al sistema sexagesimal, sistema radial y razones trigonométricas. La metodología que se utilizó contempla la modalidad de desarrollo de problemas mediante herramientas tecnológicas y visualización matemática.

Las actividades se desarrollaron mediante guías de trabajo (ver Anexos), en las que se consideró la visualización matemática, la clasificación, medición y orientación de objetos matemáticos. Estas capacidades se estimularon con la tecnología de Realidad Aumentada, específicamente los códigos QR, el cubo de Marge y la extensión AR de GeoGebra 3D. Cada sección tuvo un momento de inicio, donde se hizo una presentación del tema a trabajar. En la etapa de desarrollo se presentaron actividades donde los estudiantes de manera grupal desarrollaron lo propuesto. Por último, discutieron y analizaron las dificultades que se presentaron durante el desarrollo de la guía y sus posibles soluciones.

La intervención en el aula se planteó en términos de fases. En la primera fase se desarrolló una encuesta y una guía de introducción a las herramientas tecnológicas; seguidamente se hizo un test con las herramientas de Realidad Aumentada CoSpaces Edu y el cubo de Merge. Esto se

hizo para observar los estilos de aprendizaje de los estudiantes, como también las dificultades que se presentan en los estudiantes al describir atributos de las figuras geométricas. La función principal de la intervención fue la de motivar a los estudiantes con diferentes actividades guiadas con la tecnología AR, fomentando así el gusto por las matemáticas.

Teniendo en cuenta los resultados de la guía, la encuesta y el test de aprendizaje, se optó por rediseñar las siguientes guías, de acuerdo a las dificultades que fueron presentando los estudiantes en el aula de clases. En la segunda fase, se potenció en los estudiantes la capacidad de orientar, medir y visualizar objetos matemáticos mediante la tecnología Realidad Aumentada por medio del desarrollo de las actividades dinámicas secuenciales en las guías (ver anexo 4); estas, permitieron un desarrollo progresivo en el aprendizaje de la trigonometría. Así, se generaron nuevas dinámicas en el aula, las cuales estimularon el desarrollo del pensamiento métrico-espacial en los estudiantes, mediante ejercicios de visualización y manipulación de figuras geométricas virtuales.

Para el diseño de las guías se tuvo presente los resultados obtenidos en la primera fase; así, las actividades de las guías fueron estructuradas de la siguiente manera:

- **Recursos audiovisuales:** son todo tipo de elementos visuales y auditivos que se utilizan para complementar la enseñanza y el aprendizaje. Particularmente en las guías se utilizaron al inicio de cada una de ellas, permitiendo recordar o conocer conceptos de manera rápida.
- **Figuras en dos dimensiones:** son representaciones geométricas que se encuentran en el plano. Es decir, tienen largo y ancho, pero no tienen altura. Estas figuras se

caracterizan por estar formadas por puntos, líneas rectas o curvas, y pueden tener diferentes formas y propiedades. Cabe resaltar que las representaciones en dos dimensiones que se utilizaron fueron representaciones de sólidos como poliedros o esferas que son figuras en tres dimensiones.

- **Figuras en tres dimensiones con AR:** las figuras en tres dimensiones (3D) son representaciones geométricas que tienen largo, ancho y altura, lo que les permite tener una apariencia más realista y tridimensional, pero estas figuras son complicadas de representar en una hoja de papel, incluso solo podemos observar una proyección o pequeña parte de dicha figura. Por tal razón, se realizaron construcciones de figuras geométricas con tecnología de AR.
- **Etapa descriptiva:** en esta etapa el estudiante debía escribir sobre la actividad realizada, describiendo sobre los aspectos específicos del objeto matemático trabajado, como también aspectos históricos e interdisciplinarios.

En las dos fases mencionadas anteriormente, se enfatizó en cada una de las actividades el uso de la tecnología AR, resaltando aquellas características de los objetos matemáticos relacionados con el pensamiento métrico-espacial, en el contexto de la trigonometría.

Finalmente, la intervención se hizo en horario de clases, una sección de dos horas por semana. Aunque contábamos con pocos recursos tecnológicos, esto no fue impedimento para realizar la intervención en el aula. Este es un importante diferencial de esta práctica con otros trabajos relacionados, ya que a pesar de la carencia de dispositivos se pudo lograr algo concreto en el aula a diferencia de otros trabajos que listan aplicaciones con posibles usos en el aula, pero no

intervienen de manera concreta en ella. Así, con los resultados y observaciones en la fase uno y teniendo en cuenta los pocos recursos se pudo diseñar y desarrollar actividades para la enseñanza de la trigonometría con Realidad Aumentada.

## **10. Reconstrucción Histórica y Análisis**

En este capítulo se presenta el análisis de los resultados más relevantes de las intervenciones en el aula de matemáticas, del grado décimo tres de la Institución Educativa Antonio García Paredes.

Para realizar este proceso de manera eficiente, se decidió analizar los diferentes resultados en las dos fases establecidas en la metodología. La primera fase se estructuró de la siguiente manera: encuesta a los estudiantes, guía #1 Introducción a la Realidad Aumentada y el test de aprendizaje (ver anexos). Teniendo en cuenta los resultados de la primera fase, se prosigue a la segunda fase. Esta consta de tres guías: poliedros, sistemas de medición de ángulos y razones trigonométricas

### **10.1 Primera fase**

#### **10.1.1 Encuesta a estudiantes**

Esta encuesta (ver anexo 1) tuvo como objetivo conocer la postura de los estudiantes frente al aprendizaje de las matemáticas; además, conocer factores sociales que intervienen en su formación; esto debido a que es importante para el practicante conocer las concepciones que tienen los estudiantes de las matemáticas. Se realizaron las siete preguntas siguientes:

**¿Te gustan las matemáticas?**

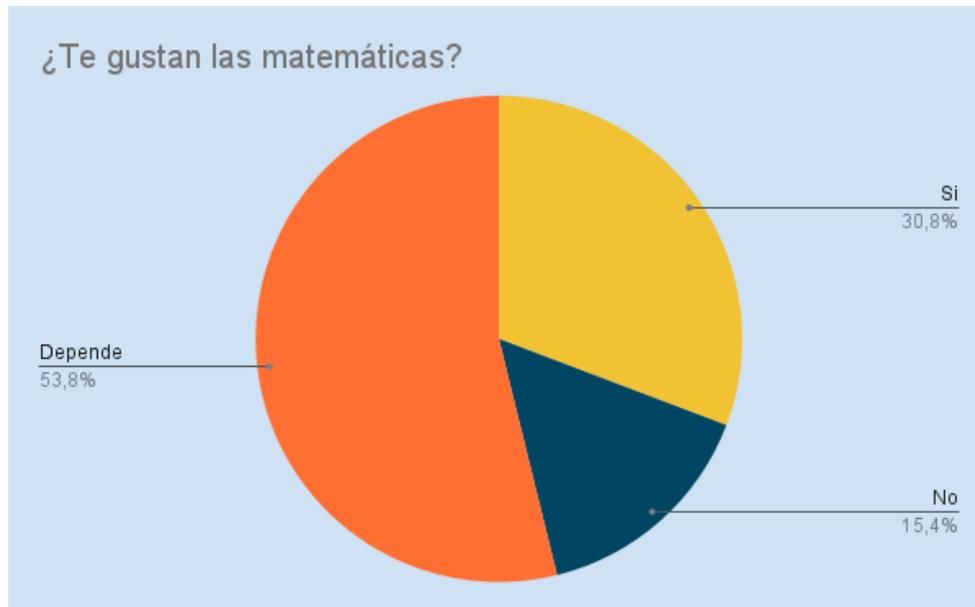


Ilustración 1. ¿Te gustan las matemáticas?

En la Ilustración 1 se puede observar que el 30.8% de los estudiantes si les gusta las matemáticas: porque las matemáticas son útiles para contabilizar en el día a día, porque van a estudiar una carrera universitaria y por el gusto a los números. El 15.4% no les gusta estudiar las matemáticas, debido a que se les dificulta su comprensión y el 53.8% depende, porque a veces si entienden los temas, pero existen ocasiones en no, así que deciden desistir; otra consideración es que tienen que desarrollar los mismos ejercicios muchas veces y eso les causa estrés e igualmente desisten.

### ¿Qué tipo de genero? ¿Edad?

142.31% son hombres y el 57.69% son mujeres, con un intervalo de edad entre los 15 a 17 años; además, las carreras preferidas por los estudiantes no están relacionadas fuertemente con las matemáticas, por esta razón no tenían empeño de aprenderlas.

## ¿Cómo te ves en tu futuro profesional?

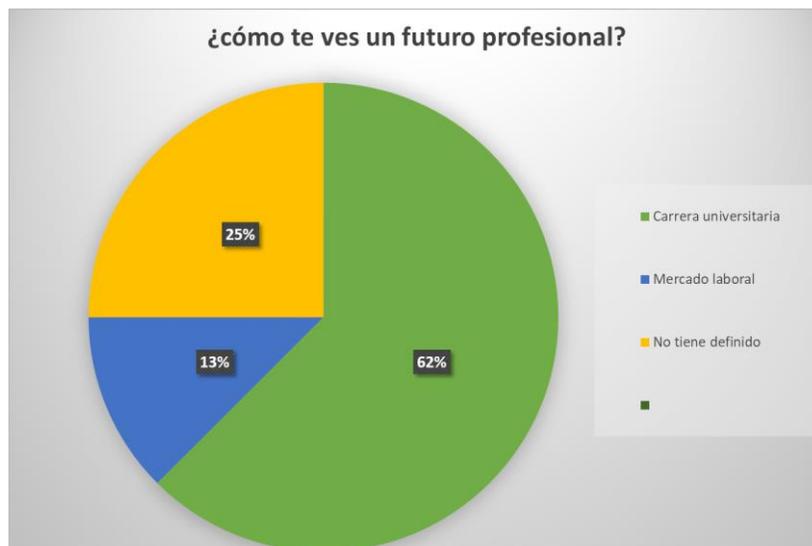


Ilustración 2. ¿Cómo te ves en un futuro profesional?

En los resultados de la Ilustración 2, se puede observar que el 62% de los estudiantes tiene como objetivo estudiar una carrera universitaria; cabe resaltar, que las carreras a estudiar no estuvieron relacionadas con las matemáticas. Un 13% quieren emprender un negocio propio, estos estudiantes durante el desarrollo de las actividades mostraron cualidades de liderazgo y rápida ejecución en las actividades matemáticas propuestas. Por último, se encuentra el 25% de los estudiantes, los cuales no tienen un horizonte claro ni definido.

## ¿Cómo crees que aprendes mejor las matemáticas?

Lo más importante para ellos, es la comunicación estudiante-docente. Además, los estudiantes mencionaron que aprendían mejor con recursos audiovisuales, porque el proceso se daba de forma rápida y dinámica. Otra forma de aprendizaje preferida por los estudiantes era la participación en clase, generando discusiones entre todos los participantes. Por último, prefieren una clase que muestre el carácter interdisciplinar de las matemáticas; no como una

asignatura estática, sino más bien como una herramienta útil, independientemente de su proyecto de vida. De acuerdo con Llano et al (2016), la interdisciplinaridad es un proceso basado en la correlación entre diversas disciplinas que mantienen su independencia, pero estas se vinculan para lograr una interpretación de las nuevas realidades. Así, los retos de la nueva generación de educadores son grandes; aunque la información está de manera instantánea, no significa que esa información sea totalmente procesada por el estudiante.

### **¿Qué piensas de las nuevas tecnologías en el aprendizaje de las matemáticas?**

Para los estudiantes las tecnologías son parte fundamental en su formación, para ellos las matemáticas son difíciles, por esta razón, las herramientas tecnológicas no deberán dificultar más el aprendizaje de los conceptos matemáticos. Estas herramientas deben permitir presentar una matemática visual, la cual le facilitará al docente expresarse mejor. Las respuestas negativas frente al uso de las tecnologías son inevitables, ya que los estudiantes mencionaron que las tecnologías a menudo generaban malos hábitos, si no se tenían restricciones en su uso. Ellos entendieron tecnologías como el conjunto de medios de comunicación, dispositivos electrónicos, calculadoras y herramientas audiovisuales que posiblemente les serían útiles en los procesos de aprendizaje. En este sentido es importante tener en cuenta la postura de Barriga (2008), según la cual las tecnologías deben permitir interpretar y organizar el conocimiento personal, apoyar la representación de lo que se sabe e involucrar el pensamiento crítico acerca del contenido que se está estudiando y permitir la comunicación y colaboración entre estudiantes.

## **¿Qué crees tú que le hace falta al aula para un mejor aprendizaje de las matemáticas?**

Para los estudiantes la comunicación es un factor importante para aprender matemáticas, promover una sana competencia en el aula es necesario, ya que todos no aprenden de manera rápida; entonces, el docente a cargo tiene el deber de fomentar la comunicación y solidaridad entre compañeros. Por otra parte, mencionaron que los juegos matemáticos despertaban el interés por aprender, porque la clase de matemáticas es una clase tediosa, donde se necesitan dinámicas o cambios de actividades constantemente permitiendo interconectar ideas y conceptos. Así, los estudiantes en este grado decimo quieren conocer la utilidad de lo que están aprendiendo en matemáticas.

Los resultados de esta encuesta, permitieron conocer los estilos de aprendizaje de los estudiantes, los cuales en términos de Fantini (2009) “se definen como los rasgos cognitivos, afectivos y fisiológicos, que sirven como indicadores, de cómo los estudiantes perciben, interaccionan y responden en sus ambientes de aprendizaje”. Como se puede ver en la Ilustración 3, el 28% de los estudiantes aprenden mejor si la matemática es presentada de manera visual, ya que para ellos es más fácil procesar la información presentada desde estímulos visuales; como por ejemplo los mapas, videos e imágenes. El 33% prefieren un aprendizaje auditivo, ya que para estos estudiantes es más efectivo retener información que se les presenta de manera verbal, por ejemplo, la comunicación oral, la música y los sonidos son los preferidos por los estudiantes; el 24% de los estudiantes prefiere el aprendizaje kinestésico, donde el estudiante se movilice con los objetos y las situaciones; este aprendizaje se basa en el hacer del estudiante por medio de esfuerzo físico y práctico con los objetos matemáticos. Por último, el 15% de los estudiantes prefieren aprender de manera escrita, porque les ayuda a adquirir comprensión del objeto

matemático mediante la lectura y resolución de problemas matemáticos. De estos estilos de aprendizaje los preferidos por los estudiantes son el visual y el auditivo con un 59%. Por tal razón la tecnología de AR es una buena opción como puente para la comprensión de los objetos matemáticos.

De esta manera se obtuvo un primer insumo para el desarrollo de las guías e intervenciones en el aula de clases. Las respuestas que dieron los estudiantes son sorprendentes en el sentido de que no son respuestas individualistas, sino que son respuestas con valor colectivo; no solamente sobre su aprendizaje y sobre las relaciones comunicativas entre estudiantes y profesor, sino sobre las problemáticas del quehacer del Licenciado en Matemáticas.

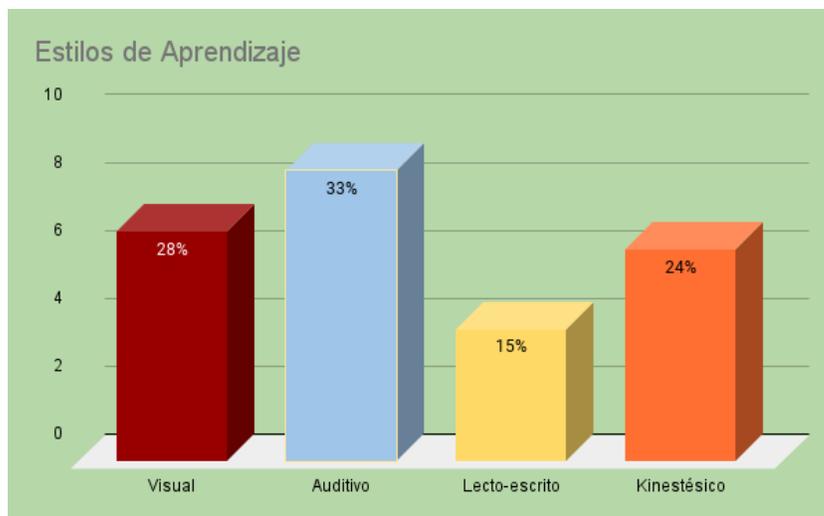


Ilustración 3. Estilos de aprendizaje

### 10.1.2 Resultado y análisis de la guía #1 Introducción a la Realidad Aumentada (AR)

El objetivo de esta guía (ver anexo 2) fue conocer las herramientas tecnológicas con las cuales se trabajó durante la práctica docente, se presentó la tecnología de Realidad Aumentada (AR), la

función de los códigos Quick Response (QR) y la construcción de marcadores como el cubo de Merge.

Los recursos audiovisuales son efectivos, porque con su uso se presentan los temas rápidamente y de manera significativa para los y las estudiantes. Además, los estudiantes no son ajenos a estas tecnologías, en particular los códigos QR son una herramienta indispensable en sus vidas para compartir información. Lo que hasta ese momento no estaba claro era la implementación de AR en el aula, ya que los videos presentados mostraban una tecnología imposible de replicar en el aula de clase. Recordemos que la Realidad Aumentada es una tecnología que complementa la realidad que percibimos con información adicional generada por computador y esto permite al usuario estar en un ambiente real aumentado. Pero los estudiantes al estar constantemente rodeados de tecnología aprenden y la relacionan de manera instantánea, de acuerdo con García et al.(2007), la característica principal de las nuevas generación de jóvenes es sin duda su Tecnofilia, que es la predisposición positiva y entusiasta hacia la tecnología y su adopción. Se refiere a la fascinación, interés y gusto por las nuevas tecnologías, así como la confianza y la creencia en los beneficios y avances que estas pueden aportar a la sociedad y a la vida cotidiana.

Los estudiantes con las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) satisfacen sus necesidades de entretenimiento, diversión, comunicación, información y, tal vez, también de formación. Así, durante el desarrollo de las primeras actividades los estudiantes estuvieron motivados y con toda la disposición frente a la clase; pero no existía claridad entre el concepto realidad aumentada y el concepto de realidad virtual, por esta razón se propuso la siguiente actividad.

Se presentaron 4 imágenes (ver anexo 2), donde los estudiantes tenían que elegir en qué imagen estaba expuesta la tecnología de Realidad Aumentada. Sus respuestas fueron que la imagen 1, 2 y 3 se presentaba realidad aumentada, a lo que se les preguntó ¿por qué?, su respuesta era porque observaban objetos virtuales en cada una de ellas y en la Ilustración 4, se observaron unas gafas inteligentes, por lo cual asumieron que era Realidad Aumentada.



Ilustración 4. Diferencia entre Realidad Virtual y Aumentada

Existen gafas inteligentes para las dos tecnologías, en este caso se trata de realidad virtual porque el usuario está totalmente inmerso en la realidad construida por computadora, esa discusión con los estudiantes aclaró definitivamente las dos definiciones.

Este ejercicio también condujo a conocer los diferentes tipos de AR: AR sin marcadores y AR con marcadores (ver anexo 2); la gran diferencia es el costo en su utilización, porque la AR sin marcadores dispone de sistemas operativos más actuales y esto se resume en dispositivos de mayor costo, por el contrario, el otro tipo de AR dispone de marcadores y es más asequible para los dispositivos con los que contábamos en el salón de clases. Entonces, un marcador lo definimos como un objeto físico como por ejemplo una imagen impresa o un código visual, que

se utiliza como punto de referencia para reconocer y superponer contenido virtual en el entorno real. Después de esas discusiones se construyó el cubo de Merge, el cual es un marcador en tres dimensiones, en la Ilustración 5 se puede ver la construcción de este marcador.



Ilustración 5. Construcción del cubo de Merge

La primera guía tuvo un desarrollo exitoso, porque durante esta se verificó el tipo y cantidad de dispositivos con que contábamos; asimismo, se escogieron las aplicaciones convenientes con base a los recursos existentes. Un reto para esta práctica fue el diseño de las guías, porque se tenía que llevar un material llamativo, pero también un material donde se manipulara el objeto

matemático. Adicionalmente a esto, la otra preocupación fue proponer actividades bajo esas condiciones, actividades que fomentaran el desarrollo del pensamiento métrico-espacial, en un primer momento hubo preocupación porque no se encontraban tales aplicaciones que cumplieran con esas características. Así, se decidió trabajar con Geometry-AR, CoSpaces Edu y GeoGebra 3D. A partir del análisis de las siguientes guías se conocerá la metodología y los resultados que se obtuvieron, en el diseño e implementación de estas herramientas.

La información de la encuesta, más el desarrollo de la primera guía, permitió rediseñar las actividades que se tenían planteadas para la segunda fase. Las guías (ver anexos) tienen las siguientes particularidades: primero se presenta el objeto matemático de manera audiovisual, esto permitió optimizar tiempos; además, como la práctica se realizó simultáneamente con la profesora titular, entonces una parte teórica estuvo en su dirección, por ende, la guía y la implementación debía suplir el desarrollo de otras capacidades que intervienen en la construcción de los conceptos trigonométricos. En este caso las actividades están enfocadas en la visualización matemática, enfatizando en representaciones gráficas, diagramas, gráficos, ilustraciones y otras formas visuales, para comprender y comunicar conceptos matemáticos.

### **10.1.3 Test de aprendizaje**

La aplicación del test de aprendizaje tuvo como objetivo evaluar los conocimientos previos, como también interactuar por primera vez en el aula con la tecnología AR.

Se hizo la explicación del test (ver anexo 3), aclarando cada uno de los ítems propuestos en él, además, se explicó paso a paso en qué consistía, ya que aparte de ser un test de aprendizaje también tiene la característica de juego. Recordemos que los elementos necesarios para realizar

el test de aprendizaje son los siguientes: cubo de Merge, la aplicación Co Spaces Edu y el código QR. Las preguntas que se presentaron son acordes a los temas de refuerzo que el profesor titular estaba dando en ese momento, como por ejemplo conceptos de ángulos y semejanza de triángulos.

Como se puede ver en la Ilustración 6, esta fue una actividad diferente a lo que los estudiantes están acostumbrados en el aula de matemáticas, su motivación se ve reflejada; además, lo que se buscó con esta actividad aparte de evaluar los conocimientos, es disfrutar del proceso, estas componentes las pudimos obtener por medio de los juegos digitales, como afirma Espinosa (2016)

*los juegos, ya sean digitales, híbridos, analógicos virtuales, en línea, de consola, son juegos. Los seres humanos han estado jugando y aprendiendo de los juegos desde el inicio de la humanidad y no podemos olvidar que, en su esencia más básica, nos ayudan a compartir y comunicar lo que somos.*

Así, acercar la matemática mediante juegos potencia la comunicación entre el docente y el estudiante, porque se genera un espacio agradable para el aprendizaje y no un aprendizaje tortuoso donde el docente es el que informa, con el juego los estudiantes están más dispuestos a actuar, refutar y proponer estrategias para la solución de la actividad.



Ilustración 6. Test de aprendizaje

Se pidió que los estudiantes justificaran las respuestas y las entregaran al final de la actividad, esto se hizo para que todo el grupo entendiera sobre los temas abordados; además, como las preguntas estaban programadas por medio de ciclos, ellos podían volver a realizar el ejercicio las veces que fuera necesario, entonces, podían obtener las respuestas por ensayo y error. Esta estructura del test, donde los estudiantes avanzan a través de respuestas correctas y repiten preguntas incorrectas, es un ciclo de retroalimentación continuo, porque fortalece su capacidad de aprender de manera independiente, al recibir información inmediata de cada error, este ciclo de retroalimentación contribuye a la construcción del auto aprendizaje por parte del estudiante. A continuación, se muestran algunas de las respuestas en la Ilustración 7.

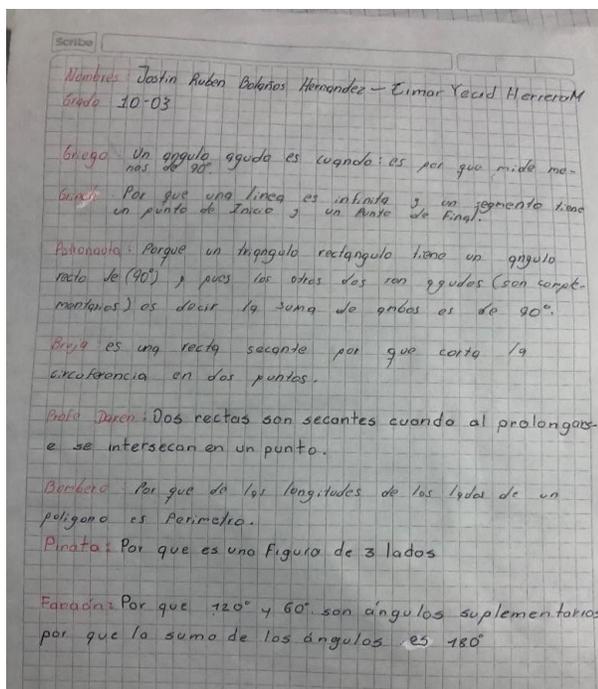


Ilustración 7. Respuestas del test de aprendizaje

Las respuestas fueron diversas, la estrategia de algunos estudiantes, como podemos ver en la anterior ilustración, fue comparar entre las posibles opciones del test, para saber cuál cumplía con las características del enunciado y por qué las otras opciones no. La retroalimentación de las preguntas fue realizada al final de la sección, la pregunta que representó dificultad fue la seis, esto debido al mal uso de las palabras en su formulación, así esta pregunta la resolvimos entre todos por medio de gráficas de triángulos y ejemplos de los teoremas de semejanza y la pregunta 5 fue formulada en inglés, a lo que algunos estudiantes utilizaron el diccionario y otros la realidad aumentada de traductor de Google para traducir por medio de la cámara del dispositivo celular.

La actividad fue enriquecedora para ellos como para el practicante, ya que permitió trabajar de manera grupal y tener entusiasmo frente al reto; aunque esta actividad no tenga el carácter competitivo, ser el primero en encontrar la mejor estrategia para vencer el dragón es muy importante para ellos, por eso cada pareja se esmeró por ser los primeros en hacerlo.

Durante el desarrollo de la actividad, el problema fue el gran tamaño de las gráficas, por este motivo algunas veces la imagen en 3D se salía del campo de visión; recordemos que una de las indicaciones era la siguiente “El espacio de Realidad Aumentada solo aparecerá proyectado en el cubo, por este motivo siempre se debe tener el dispositivo electrónico en dirección al cubo”. Si el gráfico es muy grande al buscar los personajes se desenfoca el cubo y por esa razón las gráficas desaparecen.

Por otro lado, inicialmente se creyó que la conexión de los dispositivos electrónicos se dificultaría, pero no fue así, los equipos funcionaron satisfactoriamente y hubo un desarrollo de la actividad sin truncamientos ni problemas de ese tipo.

El cumplimiento de la primera fase se desarrolló por medio del test de aprendizaje, la guía número uno y la encuesta. Efectivamente los objetivos planteados en cada uno de las actividades fueron alcanzados. Pues se evidenció que, a través de las preguntas y los ejercicios, los y las estudiantes se motivaron durante el desarrollo de las clases. Por último, se destaca las reflexiones mencionadas anteriormente en la encuesta y el test de aprendizaje; por ejemplo; se pudo evidenciar que los estudiantes participaron activamente; además, se generó interés por la relación que tiene la matemática con los recursos tecnológicos. Así, esta primera fase fue el insumo necesario para la realización de la segunda fase.

## **10.2 Segunda fase**

La segunda fase se determinó teniendo en cuenta los dos primeros objetivos específicos de este proyecto “Identificar mediante la tecnología de Realidad Aumentada las dificultades que se presentan en los estudiantes al describir atributos de las figuras geométricas” y “Potenciar en los estudiantes la capacidad de orientar, medir y visualizar figuras geométricas mediante la tecnología Realidad Aumentada”. Esta fase se fundamenta en los resultados obtenidos en la primera fase para la construcción y el desarrollo de las guías y en la visualización matemática; además, los objetivos que se definieron en cada una de las actividades, se orientan a potenciar el pensamiento- métrico espacial, por medio de tecnologías, en específico la AR.

Esta fase tiene dos componentes: desarrollo de problemas implementando AR y manipulación de figuras geométricas. Estas actividades se realizaron de, grupal y dinámica, fomentando la solidaridad y el trabajo colaborativo, porque en algunos casos, algunos grupos de estudiantes tuvieron problemas con sus dispositivos, entonces, había otros grupos que acogían a estos estudiantes. Cabe resaltar de que solo contábamos con dos dispositivos para utilizar GeoGebra 3D que es una tecnología AR sin marcadores, por tal razón se redujo el número de actividades con esta aplicación, y las actividades más significativas de esta tecnología las realizamos de manera grupal, proyectando la construcción de las figuras geométricas por medio del video proyector.

### **10.2.1 Resultados y análisis de la guía #2 poliedros**

Esta guía (ver anexo 4) tuvo como objetivo recordar las propiedades de los polígonos, para luego construir y verificar algunas propiedades de los poliedros por medio de la aplicación Geometry -AR y GeoGebra 3D.

El orden de las actividades en las guías está acorde a la visualización de figuras en dos y tres dimensiones, en específico polígonos y poliedros por medio de AR. El ejercicio en el aula fue enriquecedor porque permitió la manipulación directa de los poliedros utilizando marcadores y la aplicación Geometry -AR.

Para facilitar una buena predisposición del grupo se comenzaba la clase haciendo un pequeño resumen y la correspondiente devolución sobre las dificultades que se presentaban en clases anteriores, para luego utilizar recursos audiovisuales; en este caso se utilizó un video llamado ¿Qué es un polígono? Esto permitió al grupo activar los saberes previos, pues los polígonos son enseñados desde nuestros primeros años de escolaridad, pero, la forma en que se trabajaron estos conceptos dentro de la práctica fue totalmente distinta, ya que nuestro interés fue llevar las nuevas tecnologías al aula de clases para potenciar capacidades de visualización que no se pueden desarrollar sin la ayuda de estas tecnologías. Es por eso que las guías tienen un orden específico en su ejecución.

Después de las actividades de predisposición y la actividad uno donde se clasificaron los poliedros. Según su número de lados, según su número de ángulos y según su número de ángulos y lados de manera efectiva; se prosiguió a la actividad 2 (ver Ilustración 8), esta consistía en verificar cuáles eran poliedros y nombrar las características importantes de los mismos. Durante el desarrollo de este ejercicio se evidenció que los estudiantes descartaban propiedades de algunas figuras, comparándolas con la definición de poliedro. Siendo estos, sólidos geométricos tridimensionales limitados por caras planas que son polígonos. Estas caras están conectadas entre sí por aristas rectas y cada arista une dos vértices. Las consideraciones del estudiante dentro de la ilustración, es que las figuras curvas no cumplen con las características de poliedro.

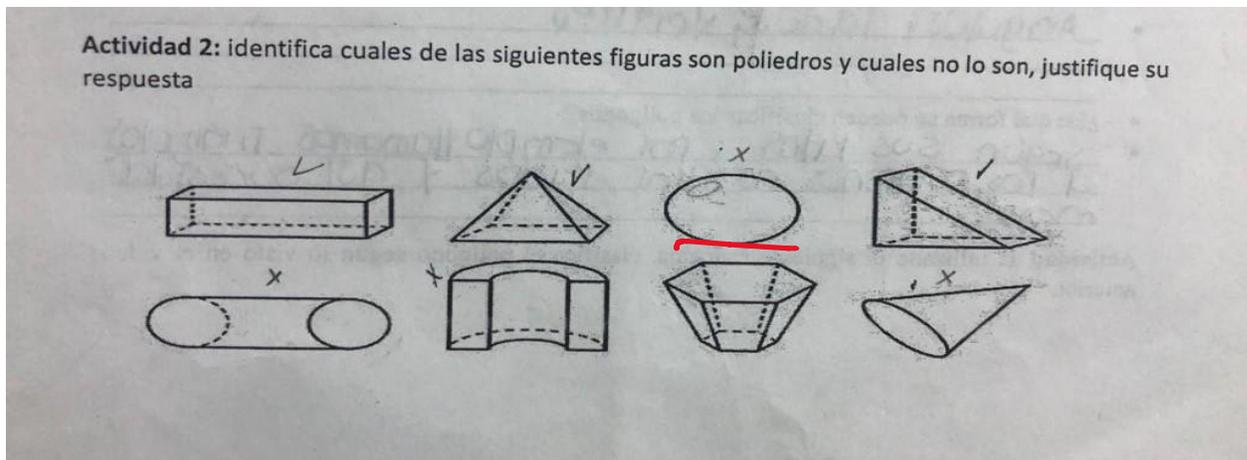


Ilustración 8. Clasificación de poliedros

Se pudo comprobar lo que se planteó en el diseño de la guía, sobre si es posible dibujar todo tipo de figura tridimensional en la hoja de papel. Los estudiantes respondieron que ellos identificaban la representación de los poliedros en una hoja de papel, por medio de las líneas punteadas que para ellos representaban profundidad. Aquí hubo varios problemas en la interpretación de las figuras, como por ejemplo en la figura subrayada de color rojo, los estudiantes visualizaban una figura en 3D, porque observaban un círculo dentro de la figura, por esta razón encontraron similitudes con una “lágrima”. Es imposible tener todo el campo de visión de un poliedro en una hoja de papel, lo que podemos ver son sus proyecciones por medio de perspectivas y en particular las proyecciones isométricas <sup>2</sup>para dibujar poliedros, de acuerdo con Nancy rojas et al, (2021) la perspectiva isométrica, contribuye a tres estándares básicos de competencias en Matemáticas: representar objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas; resolver y formular problemas al usar modelos geométricos e identificar características

<sup>2</sup> **Perspectiva isométrica:** es una de las perspectivas más utilizadas. La razón principal es que la perspectiva isométrica permite representar objetos tridimensionales de manera simplificada pero comprensible, conservando las relaciones de tamaño y proporción entre los elementos del poliedro.

de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica. Estos estándares corresponden al pensamiento espacial y sistemas geométricos.

De lo anterior, se pudo verificar que las representaciones hechas por los docentes generan confusiones en los estudiantes, porque la gran mayoría de los docentes no tiene experiencia con el dibujo técnico. Por esta razón, es necesario la implementación de herramientas tecnológicas; Particularmente si trabajamos con realidad aumentada, esta nos presta beneficios adicionales a los graficadores tradicionales.

Cada actividad realizada colectivamente tiene su respectiva justificación. Esto se planteó así, porque dentro de la primera fase los estudiantes no llevaban registro escrito. Como se puede ver en la Ilustración 9; al estudiante escribir los pasos y procedimientos utilizados para resolver un ejercicio de matemáticas, ellos reflexionan sobre cada etapa del proceso. Esto les ayuda a comprender mejor los conceptos y principios matemáticos involucrados, lo que facilita la consolidación del conocimiento.

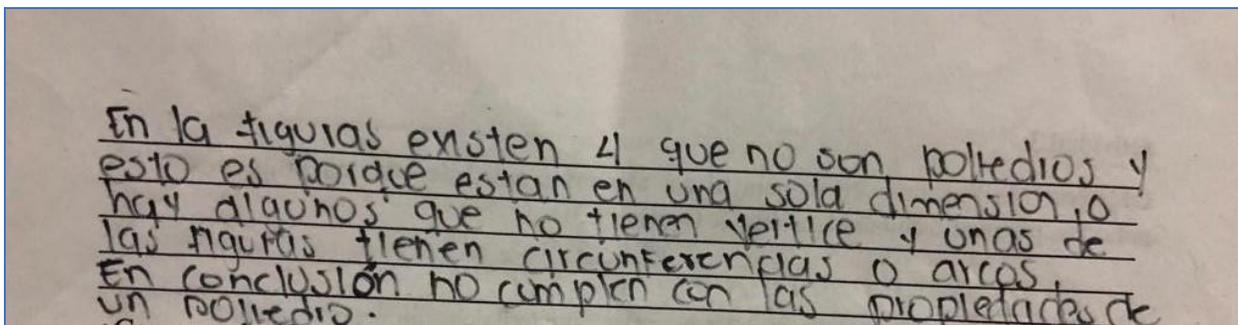


Ilustración 9. Registro escrito de la actividad

En la actividad 3, construimos algunos polígonos y poliedros por medio de GeoGebra 3D. Como se mencionó anteriormente, esta actividad se realizó por medio del video beam. Fue una actividad con excelente participación. Inicialmente se pidió calcular el área superficial del cubo, pero los estudiantes no llegaron a la conclusión, posteriormente se desplegó el desarrollo del poliedro en la aplicación GeoGebra, como se observa en la Ilustración 10; aun así, los estudiantes no lograban encontrar el resultado total. Con ayuda de la profesora titular se encontró el área de un solo cuadrado y después se multiplicó por las 6 caras. Los estudiantes hicieron de manera análoga el proceso para el cálculo del perímetro. A continuación, verificamos el área y el perímetro con la opción de medidas en GeoGebra 3D. Otra consideración adicional de esta actividad, fue que los poliedros aparte de ser figuras tridimensionales se pueden medir y con estas medidas se puede inferir en que clasificación se encuentra dicho poliedro o polígono. Al respecto, en el documento MEN (2006) se afirma que el pensamiento métrico “ es la comprensión general que tiene una persona sobre las magnitudes y las cantidades, su medición y el uso flexible de los sistemas métricos o de medidas en diferentes situaciones”.

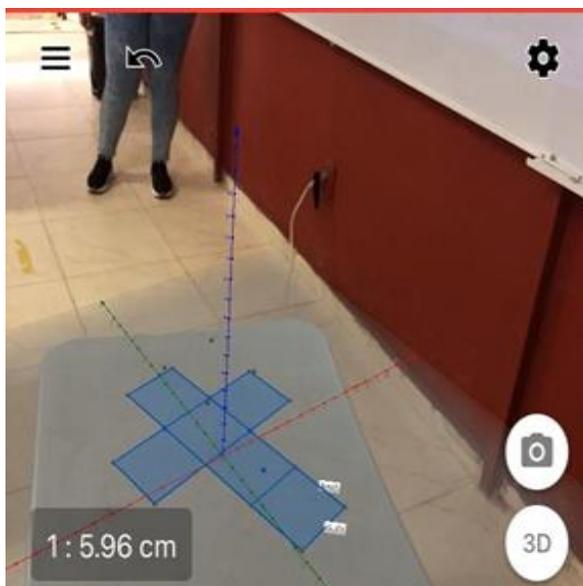


Ilustración 10. Construcción de poliedros en GeoGebra

Verificamos algunas propiedades de los poliedros y los clasificamos, según su número de caras, vértices y aristas por medio de AR de una forma eficiente, a diferencia de las construcciones en la hoja de papel, las cuales demandan tiempo e imaginación. Como afirman Leiva & Moreno (2015) “lo interesante de estas nuevas actividades educativas con AR son la inmediatez, la rápida asimilación de procedimientos de aprendizaje, el incremento de la motivación intrínseca y la búsqueda de respuestas pedagógicas múltiples y creativas”.



Ilustración 11. Clasificación de poliedros

En la Ilustración 11 se puede ver la identificación de un poliedro convexo y otro que no lo es, la verificación se realizó trazando un segmento desde dos vértices no concurrentes. Como se sabe, si el segmento trazado sale por lo menos en un punto del poliedro, decimos que el poliedro es cóncavo y si al hacer este mismo procedimiento, el segmento queda completamente dentro del poliedro, decimos que es un poliedro convexo, de esta manera verificamos que tipo de poliedro era, dependiendo de estas y otras propiedades.

Se quiere resaltar dentro de este proyecto los beneficios de la tecnología de AR, en comparación con las de otros graficadores 3D. La diferencia es sustancial; no solamente podemos rotar y trasladar el objeto matemático teniendo el celular totalmente quieto, sino que el sujeto es el que se mueve utilizando el dispositivo como una “lupa” que le permite visualizar el objeto desde diferentes perspectivas, inclusive poder introducirse dentro de ese objeto matemático. Así, logramos potenciar por medio de la AR el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos

del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales.

Existe una comunidad que está en contra de estas tecnologías y esto se debe a los siguientes cuestionamientos ¿qué tan reales son estos objetos construidos con programas informáticos? y ¿hasta qué punto podemos distinguir la realidad natural con la realidad generada por el computador? Estas preguntas podrían tener diversidad de respuestas, desde casos extremistas a opiniones más sensatas. En gran parte depende de la integración de ese objeto generado por computadora con la realidad natural; además, hasta el momento esta tecnología está en pleno desarrollo, no solamente en matemática si no en diferentes ramas de la ciencia. De acuerdo con Philippe Quéau (1952) citado en Vegas (2018, párr 17) “las realidades virtuales no son irreales en absoluto. Poseen realidad, aunque sólo por medios tecnológicos. Las experiencias virtuales se asimilan en experiencias sensoriales que si son reales y las acumulamos por nuestros sentidos”. En el caso de los poliedros, estos, no están presentes físicamente, pero si podemos hacer uso de sus características, como por ejemplo colores y formas, inclusive podemos comparar estas características con objetos que si los podemos apreciar físicamente.

La actividad 5 tuvo como objetivo, visualizar los diferentes prismas y sólidos platónicos por medio de la aplicación Geometry\_AR, Explorando cada una de los ítems de la aplicación como la exploración y la evaluación, referente a áreas y volúmenes de los poliedros. Como se puede ver en la Ilustración 12 esta actividad permitió a los estudiantes una interacción directa con la tecnología AR, en este caso AR por medio de marcadores. En esta actividad lo que se hizo fue verificar el teorema de Euler para poliedros, su enunciado es el siguiente “dado un poliedro P convexo, se sabe con seguridad que para el número de caras(C), número de vértices (V) y

número de aristas (A) se cumple que  $V + C - A = 2$ ". En la parte derecha de la ilustración se muestra la tabla que los estudiantes llenaron. Esta actividad se realizó en parejas, esto permitió discusión entre los estudiantes. Si el teorema no se cumplía, entonces ellos infirieron que el número de caras o vértices o aristas no era el correcto. El icosaedro fue el poliedro con el cual los estudiantes tuvieron más dificultad, esto debido a su mayor número de caras y aristas.

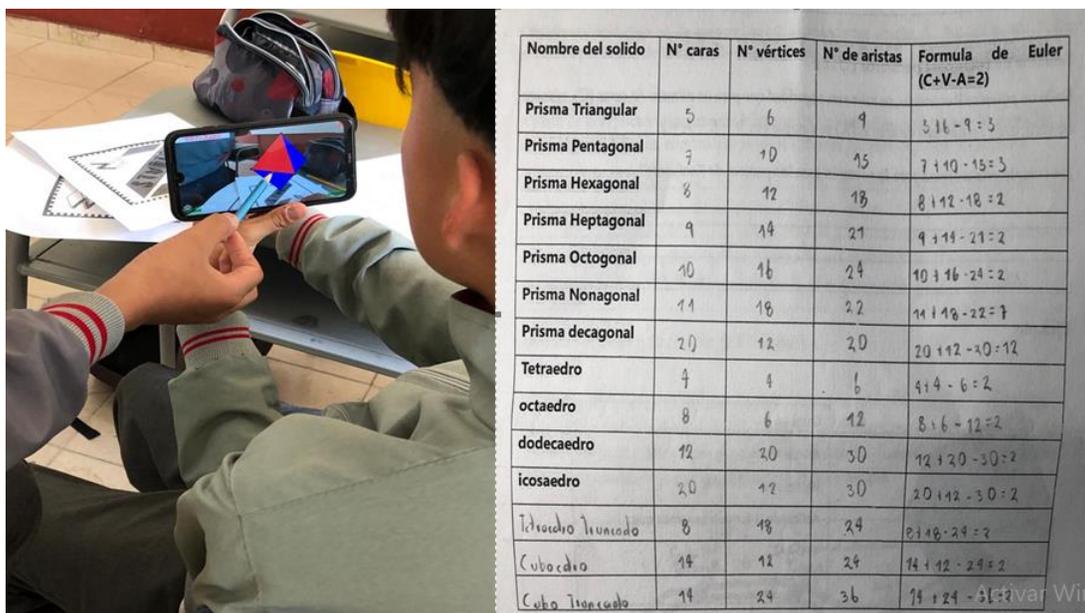


Ilustración 12. Verificación de la fórmula de Euler con AR

En matemáticas es importante conocer el concepto matemático no solamente como un objeto matemático acabado, sino más bien un objeto que históricamente tuvo grandes procesos de conciliación, es por eso que esta guía también contaba con recursos históricos, esto con el fin de ampliar el concepto desde diferentes interpretaciones dependiendo de las características de la época, por ejemplo, la interpretación religiosa sobre los poliedros regulares por parte de la escuela pitagórica. En la Ilustración 13, se puede ver que por medio de GeoGebra 3D pudimos realizar los desarrollos de los sólidos platónicos y verificar las tablas que habíamos hecho con la

aplicación Geometry-AR; además, por qué estos son los únicos 5 sólidos que cumplen con las siguientes propiedades y son conocidos como sólidos regulares:

- Todas las caras son polígonos regulares, lo que significa que tienen lados y ángulos congruentes.
- En cada vértice se encuentran el mismo número de caras y aristas.
- Todas las aristas tienen la misma longitud



Ilustración 13. Sólidos platónicos con AR

Una desventaja de esta aplicación es que aparecen demasiados anuncios publicitarios, ya que su uso es totalmente gratis y no exige ningún costo adicional para acceder a los distintos espacios que ofrece. Pero tiene ventajas porque es una aplicación que funciona desde sistemas operativos Android 6, entonces el 100% de los estudiantes trabajó desde su dispositivo electrónico; además, no es una aplicación que necesite gran consumo de datos.

La actividad 6 fue una actividad que se dejó como ejercicio para que los estudiantes la realizaran en casa, ya que consistía en conocer las fórmulas para encontrar el área superficial y el volumen de los poliedros regulares y los prismas, esto con el fin de avanzar de manera satisfactoria. El objetivo de esta actividad fue conocer cómo se construye cada fórmula y que el estudiante por medio del movimiento del marcador verificara cada paso expresado dentro de la sección “explorar” de la aplicación (ver Ilustración 14). Durante la respectiva devolución se hizo la demostración para el prisma rectangular, elaborando el paso a paso como estaba explicado dentro de la aplicación, esto permitió mejorar la disposición de los estudiantes frente a este ejercicio, entonces los estudiantes por medio de rotaciones del poliedro proyectado en el marcador pudieron observar la lógica que tenía estas fórmulas para el área y volumen.

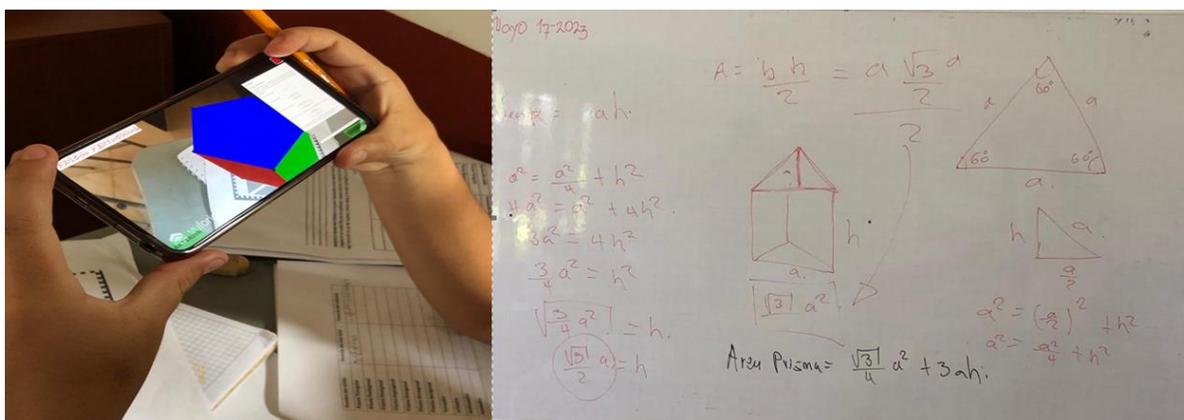


Ilustración 14. Explorando con Geometry -AR

La última actividad de la guía fue la etapa de evaluación, se realizó por medio de la aplicación Geometry-AR. la actividad se ejecutó en parejas y fomentando la sana competencia. Se pidió que realizaran por lo menos dos puntos para el área y dos para el volumen de los poliedros. Esta evaluación tuvo el mismo estilo que el test de aprendizaje, el estudiante podía desarrollar la misma pregunta las veces que fuera necesario. Por esta razón, se les pidió entregar la respectiva

solución de cada pregunta y qué estrategias habían seguido para hallar las respuestas. Si la respuesta fue encontrada por ensayo y error, debían presentar el respectivo procedimiento de cada pregunta desarrollada individualmente por cada estudiante.

La utilización de las aplicaciones al momento de evaluar es de gran utilidad, porque la retroalimentación es inmediata sobre las posibles respuestas que proporciona la aplicación, lo cual permite corregir los errores al instante; durante la ejecución, el seguimiento del progreso de cada estudiante, se ve en registros de puntuación en la aplicación, aunque para el cumplimiento de los objetivos de la guía, lo más importante fue la participación de los estudiantes frente al desarrollo de las actividades de visualización; otro componente es la autoevaluación, porque el estudiante identifica y evalúa su propio progreso y desempeño, por ejemplo, no hubo uso eficiente de la calculadora dentro de cada ejercicio, porque al momento de digitar los valores en la calculadora, los estudiantes no respetaban las jerarquías de las operaciones y los símbolos matemáticos. Estas características mencionadas anteriormente, están dentro de la evaluación formativa, que de acuerdo con Talanquer (2015) “esta evaluación involucra un proceso cíclico en el que los maestros hacen visibles el pensamiento de los estudiantes, realizan inferencias sobre el nivel de comprensión alcanzado y actúan con base en la información disponible con el fin de alcanzar los objetivos de aprendizaje establecidos”

Finalmente, el desarrollo de esta primera guía, verificó la utilidad de la implementación de herramientas tecnológicas y en particular de la AR, para el fortalecimiento del pensamiento métrico-espacial, por medio de actividades de visualización matemática y manipulación concreta de las figuras en 2D y 3D. Otro factor a resaltar fue la motivación de los estudiantes durante el

proceso, donde el cambio constante de actividades con o sin herramientas de AR permitieron la realización de esta guía de forma dinámica y eficaz.

### **10.2.2 Resultados y análisis de la Guía #3: introducción al sistema Sexagesimal, radial y ubicación geográfica**

Esta guía (ver anexo 5) tiene como objetivo la introducción del sistema sexagesimal y del sistema radial, conociendo sus diferentes propiedades y operaciones. Se enfatizó en la conversión de unidades, conversión en el sistema sexagesimal y luego de un sistema a otro, por último, se trabajó el posicionamiento geográfico como una aplicación de dichos sistemas.

Como es habitual en matemáticas, la guía inicialmente hace un recorrido teórico, sobre la introducción del sistema sexagesimal. Se pudo observar que los estudiantes ya estaban familiarizados con el sistema en la medición de tiempos. Por esta razón, se reafirmó la importancia que ha tenido este sistema para la medición de ángulos y tiempos, desde culturas como la Babilonia y Sumeria.

Se compartieron los componentes básicos para la medición de ángulos en el sistema sexagesimal: grados, minutos y segundos y sus respectivas equivalencias, para luego trabajar en la conversión entre unidades del mismo sistema. Se notó que los estudiantes no registraban de manera escrita lo que se estaba compartiendo y desarrollando, de acuerdo con Sánchez (2016, 75) “la escritura ofrece la posibilidad de obtener una retroalimentación inmediata del propio pensamiento escrito, además de la utilidad de posibles relecturas posteriores, que pueden ayudar a la consolidación, pero también a una nueva reflexión y a su posible modificación o evolución”. Es así, que teniendo en cuenta esto y la encuesta realizada en la primera fase, se decidió

comunicar los contenidos de manera dinámica y participativa, con contribuciones en el tablero, proponiendo debates y realizando conversaciones entre todos. La enseñanza de las operaciones básicas de suma y resta en este sistema se realizaron de la siguiente manera: se entregó el material mostrado en la Ilustración 15 a cada uno de los estudiantes, para luego sacar varios de ellos al tablero; como la organización del salón se encontraba por filas, cada fila iba verificando el desarrollo que realizaban sus compañeros.

<p><b>Suma</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>. Colocamos los sumandos agrupados con las mismas unidades, es decir, se van sumando cada una de las columnas empezando por los segundos.</li><li>. Si los segundos sumados superan los 60", se les resta 60" y se suma 1' en la siguiente columna a la izquierda.</li><li>. Si los minutos sumados superan los 60', se les resta 60' y se suma 1° en la siguiente columna a la izquierda.</li></ul>
---

Ilustración 15. Suma en el sistema sexagesimal

Como se puede observar, el desarrollo de esta parte de la guía se realizó desde modelo pedagógico tradicional, ya que durante este momento la profesora titular no permitió desarrollar otras actividades, porque era nueva y estaba adaptándose a la Institución, además necesitaba registro de notas para la finalización del primer periodo académico. Así, se decidió desarrollar un taller, considerando los conceptos teóricos y ejemplos nombrados anteriormente. Uno de los errores más frecuentes se puede observar en la I, los estudiantes no consideraron que el minuendo era menor que el sustraendo, y restaron obteniendo un valor incorrecto; algunos estudiantes recordaban que había que “prestar” una cantidad de una unidad mayor a una menor,

pero como estaban trabajando en base 60, se debía “prestar” 60 unidades a la unidad menor; ellos prestaban 10 unidades lo cual es incorrecto.

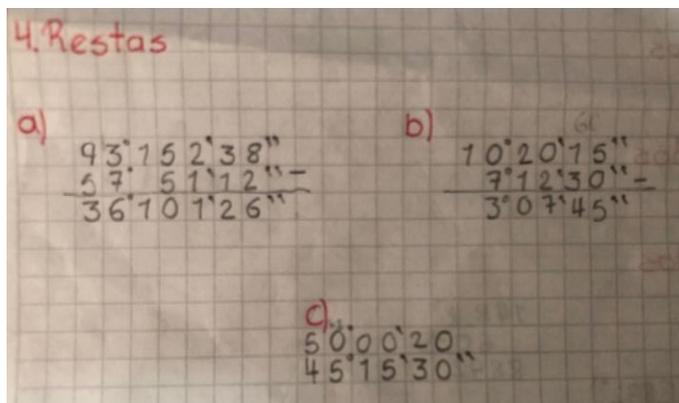


Ilustración 16. Errores frecuentes al realizar operaciones en el sistema sexagesimal

A diferencia de la guía #2; durante este momento se pudo evidenciar que la motivación de los estudiantes fue mínima y por tanto su participación. Es importante señalar que, aunque estas presiones y desafíos pueden ser difíciles, también ofrecen oportunidades valiosas para el crecimiento profesional y la adquisición de habilidades esenciales para el practicante.

Para el caso del sistema radial, se inició recordando el número  $\pi$ , con el video llamado ¿Qué es pi? Este video permitió compartir una perspectiva histórica de  $\pi$  y algunas propiedades interesantes sobre este número. Es importante aclarar que los conceptos teóricos como el de radián y la conversión entre sistemas, los realizó la profesora titular, ya que la intervención por parte del practicante se realizaba de manera asincrónica con los temas y clases de la profesora.

En la Ilustración 17, se trabajó la definición gráfica de radián y la conversión entre ambos sistemas desde una forma gráfica.

**A: RADIÁN: CONCEPTO Y EQUIVALENCIA EN GRADOS SEXAGESIMALES**

Pulsa **Esc** para salir del modo de pantalla completa

$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57.296^\circ$

$1 \text{ rad} = 57^\circ 17' 44.806''$

R = 2

Mostrar Tabla de valores.

Radio	Long Arco	Ángulo	Ángulo
u	u	radianes	grados
2	2	1	57.296

**B. ÁNGULO DE UNA VUELTA Y ÁNGULO LLANO EN RADIANES**

b = 3

Mostrar arcos en radianes.

Mostrar ángulo faltante para 360°.

Mostrar ángulo faltante para 180°.

$180^\circ = \pi \text{ rad} = 3.1416 \text{ rad}$

Reiniciar

Ilustración 17. Definición gráfica de radian

Como se puede observar en la ilustración anterior, una herramienta importante dentro de este arreglo son los deslizadores, los cuales permiten variar parámetros como el radio y el número de radianes que conforman la circunferencia. De acuerdo con Legorreta (2012) “la visualización matemática opera con el funcionamiento de las estructuras cognitivas, las relaciones entre las diversas representaciones de un objeto matemático y además intervienen la concepción y el desarrollo histórico del objeto matemático en una determinada cultura” (p.14). En ese orden de ideas, comparamos la definición teórica de radián con sus componentes correspondientes en las gráficas de GeoGebra. Los estudiantes verificaron los conceptos enseñados por la profesora titular con esta herramienta de visualización matemática, mencionando que no importa que tan

grande sea el radio, si tiene la misma longitud que el arco, la razón corresponde a un radián que es la medida del ángulo.

Es claro que los estudiantes sabían la técnica de conversión entre sistemas, pero no el por qué se debía realizar dicha conversión. Por tal razón este momento fue de vital importancia para la ellos, ya que se trabajó con representaciones visuales y se concluyó, que ambas unidades de medida de ángulos son útiles y se utilizan en contextos específicos, pero los radianes son especialmente eficaces en matemáticas avanzadas y cálculos trigonométricos debido a su relación con la constante  $\pi$ .

Para terminar la guía se realizó una actividad de ubicación geográfica. Esta tuvo como objetivo utilizar las propiedades del sistema sexagesimal y del sistema cíclico; seguidamente, se ubicaron en el espacio terrestre por medio de Google Earth y por último se mostró visualmente la construcción de la latitud y longitud por medio de la aplicación GeoGebra 3D.

La primera parte de la actividad consistió en ubicar un punto en el plano cartesiano, antes de aprender a ubicarse en el espacio terrestre, ya que es fundamental considerar las diferencias de cada geometría; por ejemplo, la geometría euclidiana es excelente para describir situaciones locales y tridimensionales, mientras que la geometría esférica es esencial para modelar fenómenos a gran escala como las coordenadas geográficas.

Después de ver el video llamado latitud y longitud se pidió a los estudiantes que señalaran características importantes en la Ilustración 18.

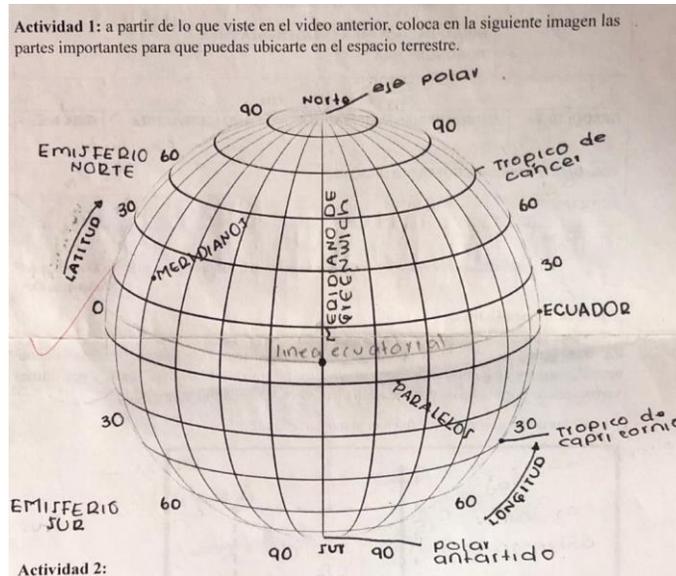


Ilustración 18. Longitud y latitud

Esta actividad permitió que los estudiantes consideraran componentes importantes para ubicarse en el espacio; por ejemplo, la línea del ecuador, los meridianos, paralelos y una primera consideración de la longitud y latitud. Como se puede ver en la Ilustración 18, no es posible visualizar de la mejor manera dichos componentes, ya que la tierra es esférica y su representación en 2D trae consigo inconsistencias y limitaciones para la interpretación de sus componentes. El orden de las actividades en las guías tiene al menos una representación gráfica en 2D de un objeto tridimensional, esto con el fin de observar los problemas que los estudiantes tienen en su interpretación; porque al representar estos objetos tridimensionales se pierden detalles y se generan malinterpretaciones del objeto por su mala representación gráfica. Por esta razón, se pudo observar que es indispensable el uso de tecnologías y en particular de la tecnología de AR, las cuales facilitan la manipulación y la visualización detallada de objetos tridimensionales.

En la Ilustración 19 se muestra la actividad 1.1. El objetivo de esta actividad fue conocer de manera visual por medio de la herramienta Google Earth las coordenadas geográficas dadas en el sistema sexagesimal del salón de clases del grado décimo tres. Esta actividad se realizó por medio de video proyector, logrando que los estudiantes estuvieron motivados y con mayor disposición para el desarrollo de la guía. Google Earth permite explorar el mundo a través de imágenes satelitales y cómo se puede observar en la ilustración, se ubicó el salón de clases por medio de esta herramienta. Es así, que se relacionaron los sistemas de medición de ángulos y la geografía. Claramente esta aplicación permitió generar un espacio de discusión, como también mover y observar las características del planeta desde diferentes perspectivas.

De acuerdo con Yurixander et al (2014,p133) “es necesario lograr las relaciones interdisciplinarias en la escuela. Esto significa preparar a las nuevas generaciones, creando en ellos posibilidades para enfrentarse a los procesos cada vez más complejos del mundo actual”. Esta consideración se tuvo presente durante el desarrollo de la práctica docente; porque el mundo exige estudiantes integrales, estudiantes que no se limiten a buscar solamente el éxito académico, sino que también adquieran un desarrollo personal con habilidades sociales y que contribuyan positivamente a su entorno, pero las matemáticas que se enseñan se han fragmentado, se encuentran aisladas en campos dentro de las mismas matemáticas sin ninguna relación con otras disciplinas.

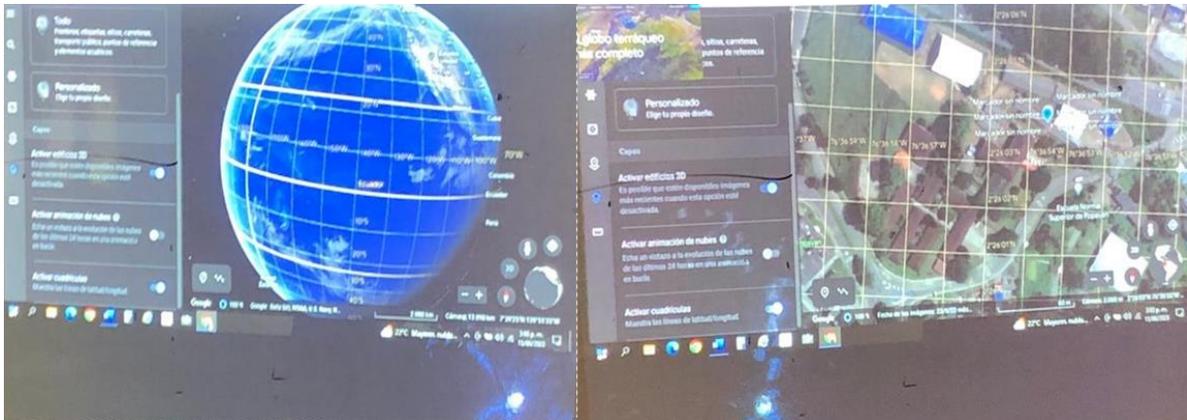


Ilustración 19. Coordenadas geográficas de la Institución

Como actividad final de la guía, se realizó la construcción visual del concepto de latitud y longitud por medio de la extensión AR de GeoGebra 3D, esta se realizó por medio del video proyector, porque la extensión AR de GeoGebra 3D no está disponible para cualquier celular. Cómo se puede observar en la Ilustración 20, se ubicó un punto en la superficie esférica, luego se trazó las circunferencias máximas, en su defecto el meridiano de Greenwich y el Paralelo del Ecuador. Seguidamente, se construyó los ángulos correspondientes a la latitud, que es una medida angular que indica la posición de un punto en la superficie terrestre en relación con el Ecuador, se mide en grados y va desde  $0^{\circ}$  en el ecuador hasta  $90^{\circ}$  en los polos norte y sur. De igual manera se construyó la medida correspondiente a la longitud que es una medida angular que indica la posición de dicho punto en la superficie terrestre en relación con el meridiano de Greenwich; esta, se mide en grados y va desde  $0^{\circ}$  hasta  $180^{\circ}$  hacia el este o hacia el oeste.

La transición que se hizo, desde considerar la latitud y longitud en la hoja de papel con la representación de la tierra en 2D, a una mejor visualización del concepto desde diferentes perspectivas con Google Earth y por último la construcción visual del concepto con AR de

GeoGebra 3D. Lo anterior, Permitió movilizar los sistemas de medición de ángulos, no como un objeto matemático sin aparente uso, si no como una herramienta útil para ubicarse en el espacio terrestre. Adicionalmente, se destaca de esta actividad y de la tecnología AR, que, aunque los estudiantes no entiendan las ecuaciones que representan la gráfica; ellos están relacionando visualmente conceptos más avanzados y construyendo el concepto de latitud y longitud como una medida de angular.

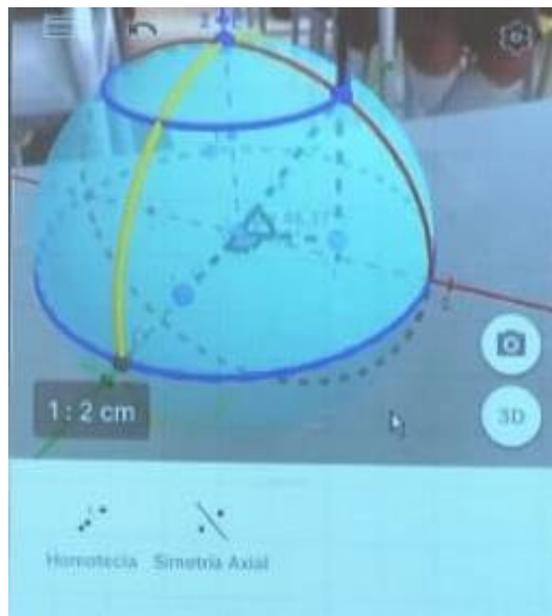


Ilustración 20. Construcción de latitud y longitud en GeoGebra 3D

Por último, se resalta que durante el desarrollo de esta guía se movilizan los tres objetivos específicos de esta práctica. Se pudieron evidenciar dificultades en la abstracción de características de una figura en 3D representada en una hoja de papel, los estudiantes al visualizar el objeto matemático con tecnología AR, pueden explorar propiedades métricas y

espaciales de estos objetos. Además, se pudo evidenciar que el uso alternado de estas tecnologías despierta la motivación en los estudiantes y por ende un mejor ambiente en el aula de clases.

### 10.2.3 Resultados y análisis de la Guía #4: Razones Trigonométricas

Esta guía (ver anexo 6) tuvo como objetivo conocer el concepto de razón trigonométrica de un triángulo rectángulo. Se construyeron visualmente las razones por medio de GeoGebra; por último, se desarrollaron problemas de aplicación de razones trigonométricas en relación a la historia alrededor de la ciudad de Popayán con la aplicación CoSpaces Edu.

Como fue habitual en la organización de las guías, se verificó los saberes previos de los estudiantes. Como se puede observar en la Ilustración 21, los estudiantes debían encontrar las razones trigonométricas correspondientes a cada triángulo rectángulo dado. Esta actividad se realizó para recordar y conocer la técnica que los estudiantes habían aprendido con la profesora titular.

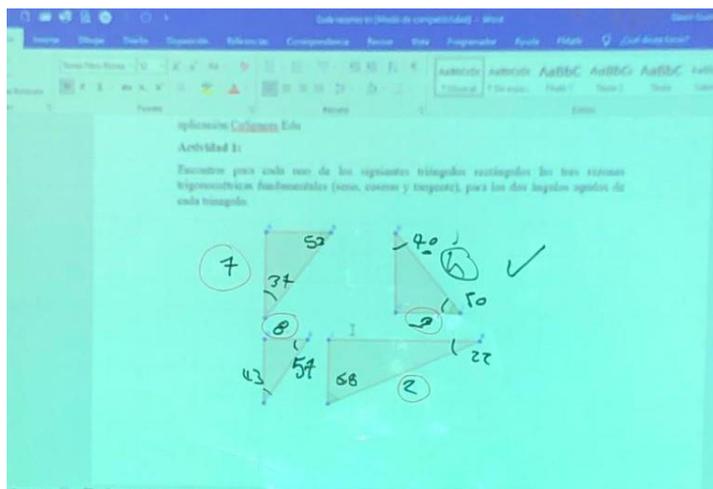


Ilustración 21. Razones trigonométricas

Se pudo observar que los estudiantes tienen dificultad para visualizar y comprender las relaciones de las razones trigonométricas y los triángulos rectángulos, se sabe que las razones son definidas en términos de los lados del triángulo rectángulo y sus ángulos; como se puede ver en la ilustración anterior, se hizo la respectiva devolución de esta actividad. Una actividad similar la había realizado la profesora titular con anterioridad, por eso, se pensó que los estudiantes iban a encontrar las razones para cada triángulo con efectividad, pero no fue correcta esa inferencia. Los estudiantes confundían la razón trigonométrica correspondiente con la relación entre los lados del triángulo rectángulo; por ejemplo, se referían al seno ( $\alpha$ ) como lado adyacente sobre hipotenusa. Además de eso, ellos en ese momento no estaban interesados sobre el tema; decían: qué necesidad tienen los profesores de colocar tantos ejercicios, si estas razones las puede encontrar la calculadora fácilmente.

Así, se decidió pasar a la actividad 3 la cual consistía en encontrar en la calculadora el seno, coseno y la tangente para los siguientes ángulos  $91^\circ$ ,  $273^\circ$ ,  $300^\circ$ ,  $-60^\circ$ . Como se puede notar, son ángulos mayores a  $90^\circ$ , entonces los valores arrojados por la calculadora para seno, coseno y tangente, dependen de la posición del ángulo en el círculo trigonométrico. En la Ilustración 22 se puede observar que los estudiantes mencionaban y escribían en la guía lo que les arrojaba la calculadora, mas no por qué algunos resultados eran negativos o positivos.

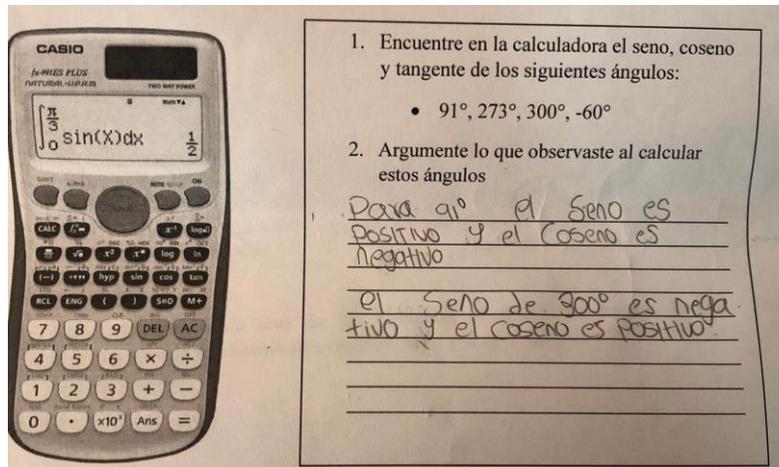


Ilustración 22. Verificación de las razones trigonométricas en la calculadora

Por esa razón se presentó de manera visual por medio de GeoGebra el círculo unitario de radio uno. Se presentó la definición de ángulo en posición normal; el cual es un ángulo que cuyo lado inicial coincide con el semi eje positivo de las abscisas y su vértice se ubica en el origen de coordenadas rectangulares. Los estudiantes pudieron visualizar que existen ángulos positivos y negativos dependiendo si el ángulo en posición normal es medido a favor o en contra de las manecillas del reloj.

En la Ilustración 23 se observa la construcción visual del seno, coseno y la tangente en GeoGebra; se corroboró con los estudiantes las respectivas razones trigonométricas en la calculadora y visualmente se iba verificando en GeoGebra. Nuevamente se observó el interés de los estudiantes frente a lo que se estaba observando por medio del video proyector, esto porque GeoGebra permitió ver como cambian las razones en función de los ángulos dependiendo el cuadrante donde se encuentre en el círculo unitario.

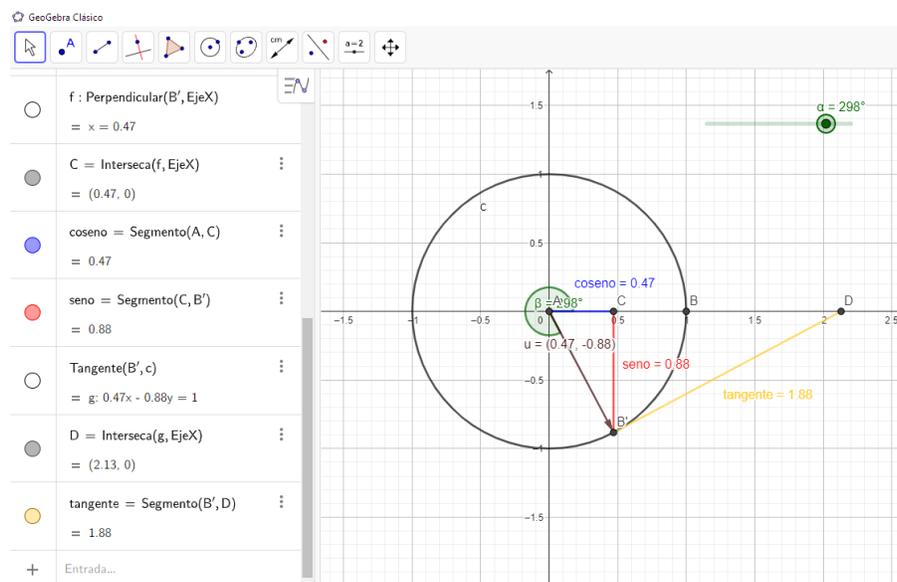


Ilustración 23. Construcción visual de las razones trigonométricas por medio de GeoGebra

La construcción visual en GeoGebra involucra el pensamiento espacial, ya que los estudiantes no solo están trabajando con números, sino que también están relacionando estos números con posiciones y longitudes de segmentos en un plano. Entender cómo se mueven y cambian las razones en el eje de coordenadas contribuye a una comprensión más profunda de la trigonometría. De igual manera al verificar las razones trigonométricas en la calculadora y visualmente con GeoGebra, los estudiantes están desarrollando pensamiento métrico. Porque permite a los estudiantes corroborar las fórmulas que representan las gráficas detrás de ellas.

Como actividad final se planteó un problema; este se presentó por medio de la aplicación Co Espaces Edu. El problema hace alusión a un monumento arqueológico de la ciudad de Popayán conocido como el morro de Tulcán. Como se puede observar en la Ilustración 24, al escanear un código QR los estudiantes encontraban un espacio interactivo alusivo a este sitio arqueológico.

La tecnología de AR es una herramienta eficaz, que permite visualizar el problema desde diferentes perspectivas y así, visualizar el triángulo rectángulo necesario para el desarrollo del problema, adicionalmente la AR agrega un elemento interactivo al problema, ya que los estudiantes están visualizando la información en tiempo real, y los elementos del problema son más atractivos y estimulantes para los estudiantes, lo que un problema de ese tipo planteado a lápiz y papel no pueden lograr.

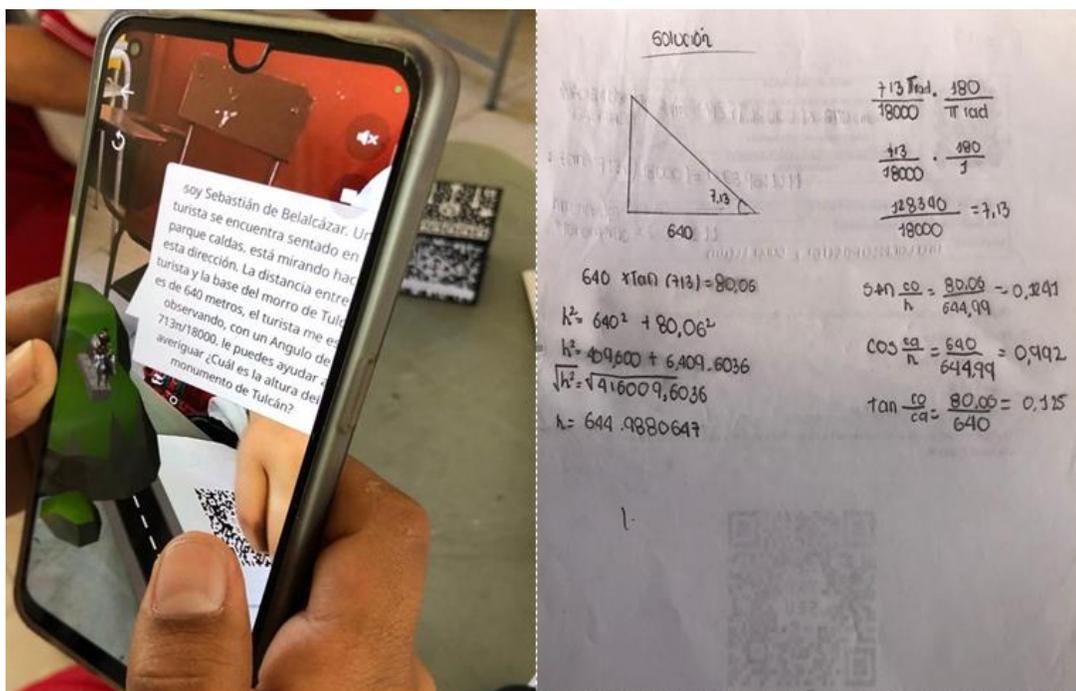


Ilustración 24. Morro de Tulcán con AR

En la parte derecha de la ilustración anterior podemos ver una de las soluciones al problema. Los estudiantes después de visualizarlo, abstraieron la información presentada con la tecnología AR al triángulo rectángulo dibujado en la hoja de papel, como se puede observar, ya no necesitan adicionarle los personajes del entorno en 3D al dibujo en 2D, porque la información necesaria para resolver el problema ya fue discernida por ellos al visualizar el problema en el entorno AR.

Otra observación, durante el desarrollo fue que los estudiantes al utilizar la calculadora configurada en grados les arrojaban una altura inferior a 5 metros, lo cual era incorrecto, por eso algunos de ellos optaron por la conversión de unidades entre el sistema radial al sistema sexagesimal y otros resolvieron cambiando de configuración la calculadora.

Se puede afirmar que el problema implica una relación espacial entre el turista y el morro de Tulcán; entonces, la Realidad Aumentada refuerza el pensamiento espacial al permitir a los estudiantes visualizar y comprender estas relaciones en un entorno tridimensional. De la misma manera, los estudiantes al trabajar con situaciones del mundo real refuerzan la comprensión de la medida y la relación entre diferentes magnitudes. Adicionalmente, se consideró a las matemáticas como un puente para conocer la historia de Popayán, por esa razón la clase se prestó para una discusión motivadora que integró diferentes componentes matemáticos y sociales.

Finalmente; las guías de la segunda fase cumplieron con los objetivos de la práctica. Además, se articularon los resultados de la primera fase y se adicionó componentes sociales e históricos para el desarrollo de las intervenciones en el aula, estos resultaron eficaces para lograr mayor motivación e interés en los estudiantes frente al desarrollo de las actividades planteadas.

## 11. Conclusiones

A continuación, se presentan las conclusiones en relación al diseño y el desarrollo de actividades con la tecnología de Realidad Aumentada, una tecnología que contribuyó al desarrollo del pensamiento métrico-espacial por medio de la visualización matemática.

- Los resultados de esta sistematización ponen en evidencia que la Tecnología de Realidad Aumentada bajo un uso responsable, es una herramienta valiosa para potenciar la comprensión de los conceptos trigonométricos; porque esta tecnología permite adicionar un componente interactivo y envolvente, al considerar las relaciones espaciales y métricas de los conceptos trigonométricos.
- Con la implementación y el desarrollo de las dos fases mencionadas en la metodología, se pudo evidenciar la dificultad que enfrentan los estudiantes al ubicar, describir y visualizar características geométricas de las figuras en 2D y 3D. Cabe resaltar que la visualización matemática se ve significativamente mejorada gracias a la Realidad Aumentada; los estudiantes pueden ver directamente cómo los conceptos abstractos se relacionan con el entorno físico, lo que les permite realizar el proceso de abstracción requerido para construir los conceptos matemáticos y así obtener la información necesaria para la solución de problemas.
- El uso de la Realidad Aumentada para abordar problemas trigonométricos potencia el pensamiento espacial en los estudiantes, proporcionándoles la

capacidad de visualizar y comprender las relaciones entre objetos matemáticos y objetos del mundo real. Asimismo, las representaciones visuales creadas con AR estimulan el pensamiento métrico-espacial, ya que los estudiantes no se limitan a manipular números, sino que también establecen conexiones entre estos números y las dimensiones de los objetos en el espacio; por ejemplo, al verificar las razones trigonométricas tanto en la calculadora como visualmente mediante GeoGebra, los estudiantes están desarrollando el pensamiento métrico. Este proceso les permite confirmar las fórmulas que representan las gráficas, contribuyendo así a una comprensión más completa de los conceptos matemáticos en juego.

- Teniendo en cuenta los estilos de aprendizaje de los estudiantes, el contexto y los recursos, se logró una buena transposición didáctica, al incluir componentes históricos e interdisciplinarios, en conjunto con la tecnología AR. Así, se alcanzó que cada una de las actividades cumplieran con los objetivos propuestos. Como causa del arduo trabajo por parte del practicante; al apropiarse, diseñar y ejecutar las actividades con Realidad Aumentada, se evidenció en los estudiantes el interés y la motivación como un indicativo de aprendizaje genuino y auténtico.
- Aunque sean muchos los beneficios que presentan la implementación de la tecnología AR para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, también presenta limitaciones. Una de las mayores limitaciones es la falta de dispositivos electrónicos con tecnologías avanzadas, como por ejemplo AR-Core; por esta

razón la falta de dispositivos puede ser desafiante para el docente, especialmente en entornos educativos con recursos limitados.

- En este trabajo se evidenció la necesidad que tiene el educador actual, este debe estar al tanto de las nuevas tecnologías y debe adaptarse a ellas. Un docente al diseñar actividades para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, con el uso de tecnologías y en particular con la tecnología de AR, debe estar en constante capacitación. Además, al integrar las actividades educativas que el docente hace por placer al diseño de actividades académicas; enseñar, no es un trabajo para el docente sino una oportunidad de aprender y compartir el conocimiento. Es por eso que el ejercicio investigativo en esta línea queda abierto y se espera que este trabajo sirva de insumo para investigaciones futuras.

## 12. Bibliografía

- Amador, Y. (2018). El Modelo Pedagógico Tradicional. ¿Arquetipo de la Educación en el Siglo XXI? Su Influencia en la Enseñanza del Derecho. Algunas Reflexiones Sobre el Tema. *III Congreso Internacional Virtual Sobre La Educación En El Siglo XXI, marzo*, 791–802.  
<https://www.eumed.net/actas/18/educacion/67-el-modelo-pedagogico-tradicional-arquetipo.pdf>
- Araujo, D. (2020). Desarrollo del Pensamiento Métrico Espacial a Través de la Implementación de un laboratorio de geometría interactivo. *Espacios*, 41(35), 0–174.
- Arcav, A. (2003). El Papel de las Representaciones Visuales en el Aprendizaje de las Matemáticas. *Entomologia Experimentalis et Applicata*, 103(3), 26–41.  
<https://doi.org/10.1023/A>
- Barriga, F. D. (2008). Educación y nuevas tecnologías de la información: ¿hacia un paradigma Educativo innovador? *I, I*, 1–15. <https://www.redalyc.org/pdf/998/99819167004.pdf>
- Budiarti, Novi yulia. (2020). Estrategia Didáctica Mediada por Realidad Aumentada, para el Fortalecimiento de la Competencia del Pensamiento Métrico – Espacial en Estudiantes de Grado Noveno Lorena. *Sustainability (Switzerland)*, 4(1), 1–9.  
<https://pesquisa.bvsalud.org/portal/resource/en/mdl-20203177951%0Ahttp://dx.doi.org/10.1038/s41562-020-0887-9%0Ahttp://dx.doi.org/10.1038/s41562-020-0884-z%0Ahttps://doi.org/10.1080/13669877.2020.1758193%0Ahttp://serisc.org/journals/index.php/IJAST/article>

- Espinosa, R. S. C. (2016). Juegos digitales y gamificación aplicados en el ámbito de la educación. *RIED. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia*, 19(192), 27–33.
- Fantini, A. C. (2009). Los Estilos de Aprendizaje en un Ambiente Mediado por TICs . Herramienta para un Mejor Rendimiento Académico . *Core*, 1, 1–6.  
<https://rieoei.org/historico/deloslectores/127Aedo.PDF>
- García, F., Portillo, J., Romo, J., & Benito, M. (2007). Nativos digitales y modelos de aprendizaje. *CEUR Workshop Proceedings*, 318.
- Gardner, H. (2018). Inteligencias Múltiples La Teoría en la Práctica. *Paidós*, 1–14.  
<https://doi.org/10.1016/j.quaint.2017.09.030>
- Gonzato, M., & Godino, J. (2006). Habilidades de Orientación Espacial: de la Cartografía al GPS. *Universidad de Granada (España)*, 1–11.
- Herrera, M., Guzmán, J. I., & Rodríguez, C. (2020). Desarrollando Habilidades de Visualización Espacial a Través de la Realidad Aumentada en el Aprendizaje del Cálculo en Varias Variables. July, 1–4.
- Legorreta, C. O. (2012). La visualización como Estrategia de Estudio en el Concepto de Dependencia e Independencia Lineal. 13–25.
- Llano, L., Gutiérrez, M., Núñez, M., Masó, R., Rojas, B., & Stable, A. (2016). La Interdisciplinariedad: una Necesidad Contemporánea para Favorecer el Proceso de Enseñanza Aprendizaje. *Medisur*, 14(3), 320–327.  
[http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1727-897X2016000300015](http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1727-897X2016000300015)

- Maseda, M. del C. (2011). Trabajo Fin de Máster Propuesta de Talleres Aplicados a la Vida Real. *ReUNIR*, 1–48.
- [https://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/2173/45430689P\\_CaminoMaseda\\_TFM\\_Censurado.pdf?sequence=1](https://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/2173/45430689P_CaminoMaseda_TFM_Censurado.pdf?sequence=1)
- McLuhan, S. (2000). Visualización. 150–153.
- MEN. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. *Cooperativa Editorial Magisterio*, 103.
- MEN. (2006). Lineamientos Curriculares para Matemáticas. *Magisterio*, 47–95.
- [https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042\\_archivo\\_pdf2.pdf+-](https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf+-)
- Prendes, C. (2015). Realidad Aumentada y Educación: Análisis De Experiencias Prácticas Augmented Reality and Education: Analysis of Practical Experiencies. *Pixel - Bit. Revista de Medios y Educación.*, 46, 187–203.
- Ricardo Cantoral, Rosa María Farfán, Francisco Cordero Juan Antonio Alanís, Rosa Amelia Rodríguez, A. G. (2005). Desarrollo Del Pensamiento Matemático. In *Construyendo juntos una escuela para la vida*. (Issue January). <https://doi.org/10.2307/j.ctv2gz3vwp.206>
- Sánchez, M. A. (2016). Análisis de los Cuadernos de Matemáticas de los Alumnos de Bachillerato: Percepciones, Perfiles de Elaboración y Utilización y Rendimiento Académico.
- Sandra Davila. (2006). Generación Net: Visiones para su Educación. *ORBIS*, 24\_48.
- Segura, J. A., Jordi, María Begoña Alfageme González, Cristina Alonso Cano, Manuel Area

- Moreira, E. B. F., & Eloi. (2012). Tendencias Emergentes en Educación con TIC. In *Tendencias Emergentes En Educación Con Tic* (Issue ISBN: 978-84-616-0431-9).
- Segura, M. (2007). Las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en la Educación: Retos y Posibilidades.
- Talanquer, V. (2015). La Importancia de la Evaluación Formativa. *Educacion Quimica*, 26(3), 177–179. file:///C:/Users/Paulina/Desktop/bibliografia seminario/0187-893X-eq-26-03-00177.pdf
- Valencia, J. A. V. (2018). El Camino Hacia la Motivación Académica, en el Estudio de las Funciones Trigonométricas con Estudiantes de Grado Décimo de la Institución Educativa la Depresión.
- X. Basogain, M. Olabe, K. Espinosa, C. R., & Olabe, y J. C. (2016). Realidad Aumentada en la Educación: una tecnología emergente. *Academia*, 61, 1–9. <https://doi.org/10.5377/entorno.v0i61.6129>
- Yurixander, A., Rojas, C., Enrique, M., & Graus, G. (2014). Relaciones Interdisciplinarias de las Ciencias a Partir de la Matemática en la Educación Preuniversitaria. *Didascalía: Didáctica y Educación*, VII, 131–154.

## 13.Anexos

### 13.1 Encuesta a estudiantes

	<b>MUNICIPIO DE POPAYÁN</b> SECRETARIA DE EDUCACIÓN MUNICIPAL <b>INSTITUCIÓN EDUCATIVA ANTONIO GARCÍA PAREDES</b> DANE 119001002195 - NIT 800247992-4	
	<b>GUÍA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA TRIGONOMETRIA</b>	

<b>GRADO:</b> 10_3	<b>ASIGNATURA(S):</b> MATEMATICAS	<b>AÑO</b> LECTIVO:2023	<b>FECHA:</b>
<b>POR: DAREN DAYANARE GUERRERO ORDOÑEZ</b>			
<b>ESTUDIANTE:</b>			

¡apreciados estudiantes ;

La presente encuesta tiene el objetivo de conocer su postura frente al aprendizaje de las matemáticas. La información obtenida se utilizará exclusivamente para fines académicos. Por tal motivo te invito a que contestes con sinceridad.

¿Cuál es tu género?

- ❖ Hombre
- ❖ Mujer
- ❖ Prefiero no decir

**¿Qué edad tienes?**

- ❖ Menos de 15 años
- ❖ Entre 15 y 17 años
- ❖ Entre 18 y 20 años

**¿Cómo te ves en tu futuro profesional?**

Estudiar una carrera universitaria.

---

Entrar al mercado laboral:

---

Aun no tengo definido:

---

**¿Te gustan las matemáticas?**

Si ¿Por qué? \_\_\_\_\_

---

No ¿Por qué? \_\_\_\_\_

---

Depende ¿Por qué? \_\_\_\_\_

---

**¿Crees que las matemáticas son importantes para tu formación académica?**

a) Si ¿Por qué? \_\_\_\_\_

---

b) No ¿por qué? \_\_\_\_\_

---

**¿Cómo crees que aprendes mejor las matemáticas?**

---

**¿Qué piensas de las nuevas tecnologías en el aprendizaje de las matemáticas?**

---

**¿Prefieres aprender a través de actividades prácticas o teóricas?**

---

**¿Qué crees tú que hace falta en el aula para mejorar la clase de matemáticas?**

---

### 13.2 guía #1: Introducción a la Realidad Aumentada

	<b>MUNICIPIO DE POPAYÁN</b>  SECRETARIA DE EDUCACIÓN MUNICIPAL  <b>INSTITUCIÓN EDUCATIVA ANTONIO GARCÍA PAREDES</b>  DANE 119001002195 - NIT 800247992-4	
	<b>GUÍA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA TRIGONOMETRIA</b>	

<b>GRADO: 10</b>	<b>ASIGNATURA(S): MATEMATICAS</b>	<b>AÑO LECTIVO:2022</b>	<b>GUIA No: 1</b>
<b>POR: DAREN DAYANARE GUERRERO ORDOÑEZ</b>			

*La esencia de las matemáticas reside en su libertad.”*

Georg Cantor

**¡Apreciados estudiantes!**

En esta guía conoceremos los instrumentos que vamos a utilizar durante la práctica, como por ejemplo la Realidad Aumentada RA y los códigos QR.

**Actividad 1.**

**Objetivo:** conocer el código Quick Reading (QR)

**Origen del código QR.**

Miremos el siguiente video

<https://www.youtube.com/watch?v=LXyX6JwYw2o&t=8s>

A partir del video anterior responde las siguientes preguntas

¿En qué lugares usualmente utilizas el código QR?

---

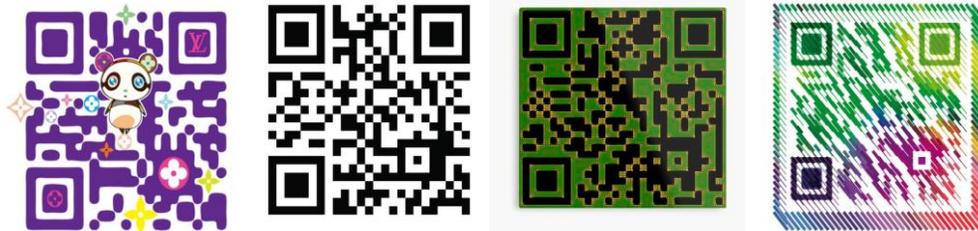
¿Por lo general cómo compartes tu red wifi?

---

¿Cuál crees que es la función principal del código QR?

---

### Ejemplos de códigos QR



¿Qué diferencias encuentras en los QR anteriores?

---

¿Existe alguna característica común entre los códigos QR?

---

### Historia de los códigos QR

El código QR es una evolución del código de barras. La imagen que se lee en el dispositivo móvil por un lector específico, y de forma inmediata nos lleva a una aplicación en Internet, un mapa de localización, un correo electrónico, una página web o un perfil en una red social. Fue creado en 1994 por la compañía japonesa Denso Wave, subsidiaria de Toyota.



### Tipos de códigos QR.

**Código QR Estático:** los datos detrás de un código QR estático solo lo llevarán a una dirección permanente y no se pueden cambiar la información.

**Por ejemplo:** para realizar una invitación de grados los códigos estáticos serán una buena opción.



**Código QR Dinámico:** el código QR dinámico, puede actualizar los datos detrás de su código QR incluso cuando se haya impreso o implementado. Los códigos QR dinámicos, en lugar de codificar el contenido como los estáticos, codifican una URL corta que se vincula a dicho contenido. Esto es lo que hace que los códigos QR dinámicos tengan algunas restricciones para generarlos.

**Por ejemplo:** el menú de un restaurante necesita que su carta semanal esté en constante actualización, pero sería desfavorable estar imprimiendo semanalmente códigos QR en las cartas, es por eso que el código dinámico es de gran ayuda, ya que con el mismo código se puede actualizar la página o redireccionarla a otro sitio web.



**Seguridad:** Evite el escaneo de códigos QR desde orígenes dudosos. Utilice aplicaciones de escaneo de códigos QR que pidan confirmación sobre si desean realizar la acción.

### **Realidad Aumentada**

**Observemos el siguiente video**

**<https://www.youtube.com/watch?v=-zfyblMlbVQ>**

¿Qué has observado en el video?

---

¿En qué lugares has visto algo parecido?

**Definición:**

La Realidad Aumentada es un recurso tecnológico que ofrece experiencias interactivas al usuario a partir de la combinación entre la dimensión virtual y la física, con la utilización de dispositivos digitales.

**Observaciones:**

- ❖ La Realidad Aumentada hace una superposición del mundo real y digital
- ❖ La Realidad Aumentada se da en tiempo real
- ❖ La Realidad Aumentada, es una combinación e interacción de elementos 3D de objetos virtuales y reales.

**Actividad 1**

¿En cuáles de las siguientes 4 imágenes crees que se está utilizando realidad aumentada?

Justifique su respuesta



### Actividad 3.

**Objetivo:** Construir el cubo de Merge

**Definición.**

**Cubo Merge:** Es una herramienta física (cubo) a través de la cual y, con la descarga de aplicaciones de pago o gratuitas, podemos ver objetos usando la cámara de nuestro dispositivo y

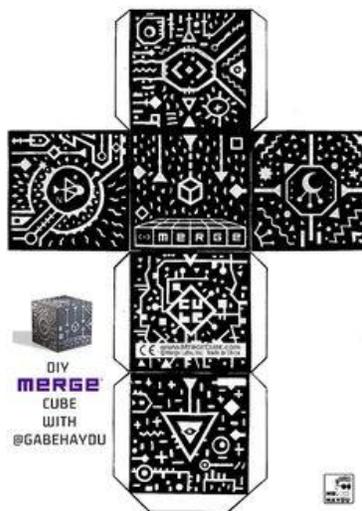
dicho cubo. El cubo de Merge permite sostener objetos digitales en 3D, lo que permite una forma completamente nueva de aprender e interactuar con el mundo digital.

### **Construyamos el cubo de Merge**

Los materiales que se van a utilizar en esta actividad son los siguientes: plantilla del cubo de Merge (ver figura 1), cartulina, colbón y tijeras. Esta actividad permitirá obtener un objeto físico que servirá de marcador para superponer objetos virtuales mediante la tecnología RA.

Figura 1

*Plantilla del cubo de Merge*



Nota: tomado de (pinterest)

### **Construyamos el cubo de Merge**

- Pegar la plantilla del cubo de Merge en la cartulina.

- Recortar por el contorno señalado y doblar todos los bordes de la plantilla del cubo de Merge.
- Pegar cada uno de los bordes señalados, hasta obtener la figura del cubo.

Así obtenemos el cubo de Merge mostrado en la siguiente figura



### Realiza lo siguiente

1. ¿Qué tipos de ángulos hay en el cubo de Merge?
2. ¿Cuál es el área de cualquiera de las caras del cubo de Merge?
3. ¿Cuál es el volumen del cubo de Merge?

**Ejemplo:** a continuación, se presenta una proyección de un elemento virtual, sobre un objeto físico (cubo de Merge) en el mundo real.



### 13.3 Test de aprendizaje

	<b>MUNICIPIO DE POPAYÁN</b> SECRETARIA DE EDUCACIÓN MUNICIPAL <b>INSTITUCIÓN EDUCATIVA ANTONIO GARCÍA PAREDES</b> DANE 119001002195 - NIT 800247992-4	
	<b>GUÍA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA TRIGONOMETRIA</b>	

<b>GRADO: 10</b>	<b>ASIGNATURA(S): MATEMATICAS</b>	<b>AÑO LECTIVO:2022</b>	<b>GUIA No: 1</b>
<b>POR: DAREN DAYANARE GUERRERO ORDOÑEZ</b>			

*Aprende todo lo necesario para que tu vida sea más feliz*

*Pitágoras*

**¡Apreciados estudiantes!**

Realizaremos el siguiente test de aprendizaje, para luego hacer una generalización de todas las dificultades obtenidas en el desarrollo del test.

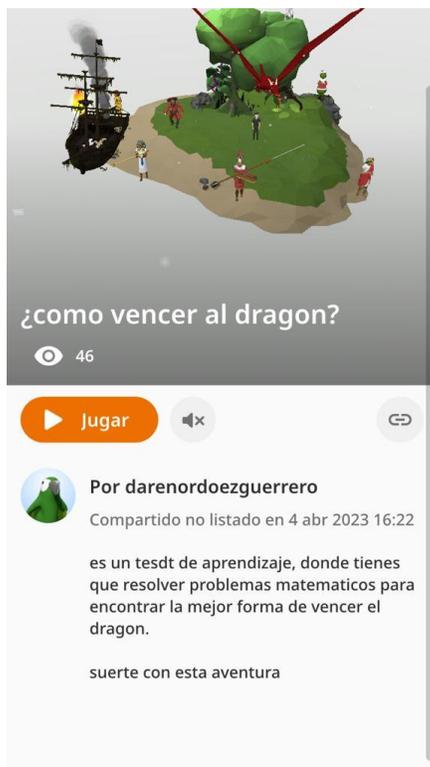
Seguir los siguientes pasos

1)Descargar de Play Store o App Store la aplica CoSpaces Edu.

2)Escanear el siguiente código QR



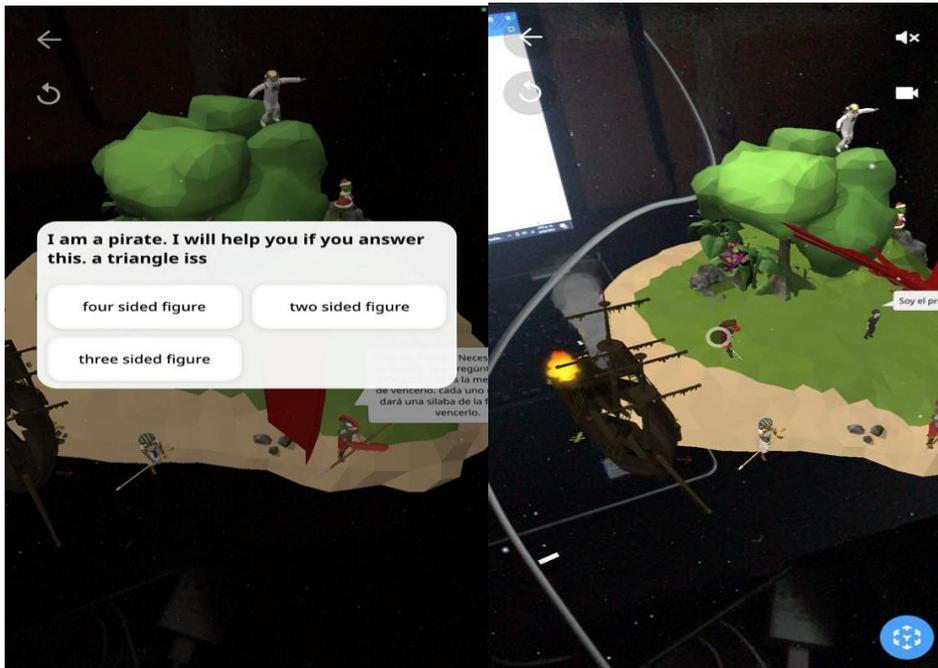
3) El código QR lo direccionara al siguiente apartado de la aplicación cospaces



4) El espacio de Realidad Aumentada solo aparecerá proyectado en el cubo. Por este motivo siempre se debe tener el dispositivo electrónico en dirección al cubo.

5) Debes responder, ¿cuál es la mejor forma de vencer el dragón?, para ello debes preguntarle a cada uno de los aldeanos. Ellos te darán silabas de la frase para derrotar el dragón.

6) Para que las preguntas aparezcan se debe apuntar el cursor en cada uno de los personajes como se muestra en las siguientes imágenes.



**Nota:** después de realizar el test de aprendizaje cada estudiante deberá escribir el porqué de esa respuesta seleccionada y compararla con las otras opciones en el test.

### 13.4 Guía #2: Poliedros

	<b>MUNICIPIO DE POPAYÁN</b> SECRETARIA DE EDUCACIÓN MUNICIPAL <b>INSTITUCIÓN EDUCATIVA ANTONIO GARCÍA PAREDES</b> DANE 119001002195 - NIT 800247992-4	
	<b>GUÍA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA TRIGONOMETRIA</b>	

<b>GRADO:</b> 10-3	<b>ASIGNATURA(S):</b> MATEMATICAS	<b>AÑO</b> <b>LECTIVO:2023</b>	<b>GUIA</b> No: 2
<b>POR: DAREN DAYANARE GUERRERO ORDOÑEZ</b>			
<b>ESTUDIANTE:</b>			

“Si la gente no piensa que las matemáticas son simples, es solo porque no se dan cuenta de lo complicada que es la vida”.

Jonhn Louis Von Neuman

**¡Apreciados estudiantes!**

En esta guía recordaremos las propiedades de los polígonos, posteriormente estudiaremos los poliedros como formas geométricas que nos permite entender conceptos fundamentales de la

geometría y trigonometría y finalmente visualizaremos estas figuras geométricas por medio de la app Geometry AR

¿Qué sabes de polígonos?

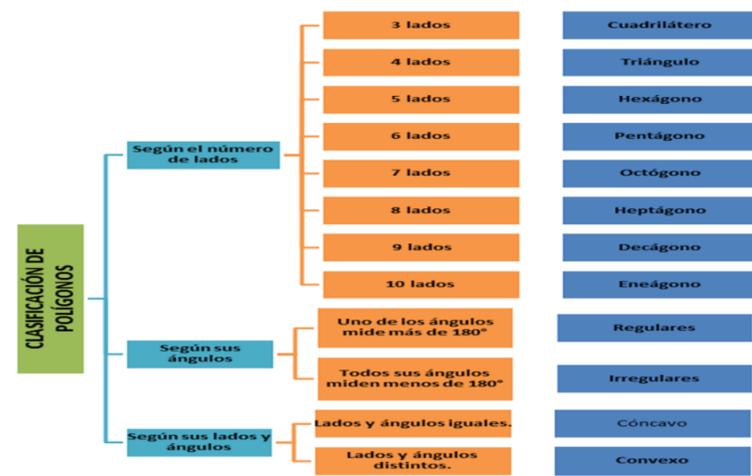
[https://www.youtube.com/watch?v=MCImW\\_hQR9g&ab\\_channel=Pi-ensaMatematik](https://www.youtube.com/watch?v=MCImW_hQR9g&ab_channel=Pi-ensaMatematik)

[https://www.youtube.com/watch?v=u5VSroLVMm4&ab\\_channel=Pi-ensaMatematik](https://www.youtube.com/watch?v=u5VSroLVMm4&ab_channel=Pi-ensaMatematik)

¿Cuáles son los elementos de un polígono?

¿De qué forma se pueden clasificar los polígonos?

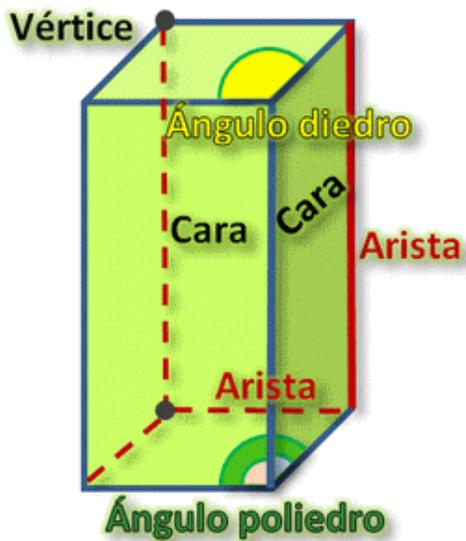
**Actividad 1:** utilizando el siguiente esquema, clasifica el polígono según lo visto en el video anterior.



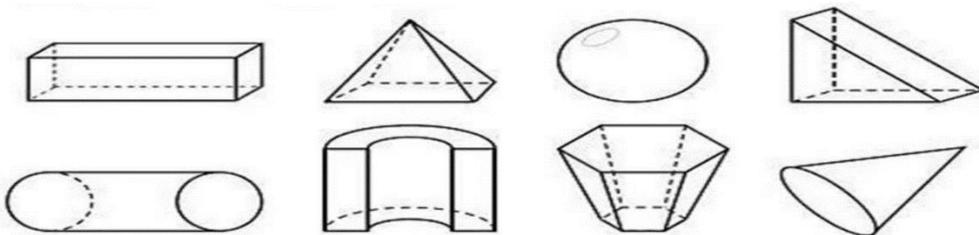
¿Qué es un poliedro?

[https://www.youtube.com/watch?v=UBrE8Dwc5XY&ab\\_channel=MClases](https://www.youtube.com/watch?v=UBrE8Dwc5XY&ab_channel=MClases)

Elementos más importantes de un poliedro



**Actividad 2:** identifica cuales de las siguientes figuras son poliedros y cuales no lo son, justifique su respuesta



---

---

## ¿Cómo se clasifican los poliedros?

### Según sus caras

- ❖ *Poliedros regulares*: todos sus lados y ángulos son iguales. Ejemplos: tetraedro, hexaedro o cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro (sólidos platónicos).
- ❖ *Poliedros irregulares*: sus caras no son todas iguales. Ejemplos: pirámides, prismas y troncos.

### Según sus aristas:

- ❖ *Poliedros convexos*: todos sus ángulos son menores a  $180^\circ$ , es decir, las caras "se curvan" hacia adentro. Ejemplos: tetraedro, hexaedro o cubo, octaedro, dodecaedro icosaedro.
- ❖ *Poliedros cóncavos*: tienen al menos un ángulo mayor a  $180^\circ$ , es decir, algunas de sus caras "se curvan" hacia afuera.

### Según la cantidad de caras que convergen a un vértice:

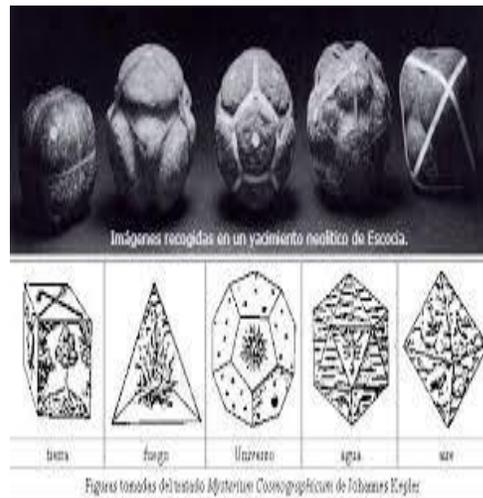
- ❖ *Poliedros regulares*: el mismo número de caras convergen en cada vértice. Ejemplos: tetraedro, hexaedro o cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.
- ❖ *Poliedros irregulares*: diferentes números de caras convergen en cada vértice. Ejemplos: pirámides, prismas y troncos.

### Aspectos históricos sobre los sólidos platónicos

La primera noticia que se conoce sobre estos poliedros, procede de un yacimiento neolítico en Escocia, donde se encontraron figuras de barro de aproximadamente 2000 a.C. Se cree que se trataba de elementos decorativos o, tal vez, de algún tipo de juego.

Platón, en su obra *Timaeus*, asoció cada uno de los cuatro elementos que según los griegos formaban el Universo, fuego, aire, agua y tierra a un poliedro:

1. fuego al Tetraedro
2. aire al Octaedro
3. agua al Icosaedro
4. tierra al Hexaedro o cubo
5. universo el Dodecaedro



### Actividad 3:

Objetivo: Verifiquemos de manera visual algunas propiedades de los polígonos y los poliedros por medio de la extensión AR GeoGebra 3D.

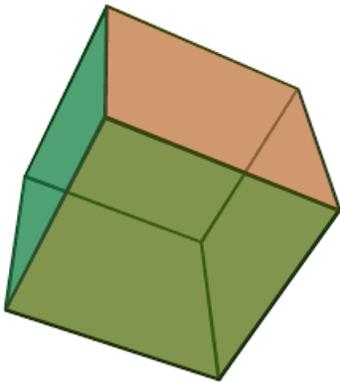
A partir de lo construido anteriormente con la herramienta AR GeoGebra 3D. Nombrar las características importantes de lo explicado anteriormente y que propiedades cumplen los poliedros.

---

---

**Teorema de Euler para poliedros (1750):** Dado un poliedro  $P$  convexo, se sabe con seguridad que para un número de caras (C), número de vértices (V) y número de aristas (A) se cumple que  $V + C - A = 2$

**Ejemplo:**



Caras =6

Aristas =12

Vértices= 8

Aplicando la formula tenemos que:

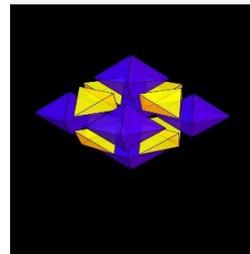
$V+C-A=2$

$8+6-12=2$

**Actividad 5:**

**Objetivo:** visualizar los diferentes prismas y solidos platónicos por medio de la aplicación Geometry\_AR, Explorando cada una de los ítems de la aplicación, como la exploración, y la evaluación referente a áreas y volúmenes de los poliedros.

- .1 Escanear el código QR, para descargar la aplicación.
- .2 Abra la aplicación y mantenga en dirección al marcador.
- .3 Diríjase a la pestaña *explorar* y verifique el teorema de Euler para los prismas y los sólidos platónicos



<b>Nombre del solido</b>	<b>N° caras</b>	<b>N° vértices</b>	<b>N° de aristas</b>	<b>Fórmula de Euler (C+V-A=2)</b>
<b>Prisma Triangular</b>				
<b>Prisma Pentagonal</b>				
<b>Prisma Hexagonal</b>				
<b>Prisma Heptagonal</b>				
<b>Prisma Octogonal</b>				
<b>Prisma Nonagonal</b>				
<b>Prisma decagonal</b>				
<b>Tetraedro</b>				
<b>octaedro</b>				
<b>dodecaedro</b>				
<b>icosaedro</b>				

**Nota:** elige tres poliedros explorando en la aplicación y mira si se cumple el teorema de Euler.

¿Cómo hallar el área y el volumen de un poliedro?

**Actividad 6:** completar el siguiente cuadro con las fórmulas del área y el volumen de cada poliedro convexo, Para ello, dentro de la aplicación debes pulsar el botón consultar prismas y solidos platónicos.

Nombre del solido	Fórmula del área total	Fórmula del volumen
Prisma Triangular		
Prisma Pentagonal		
Prisma Hexagonal		
Prisma Heptagonal		
Prisma Octogonal		
Prisma Nonagonal		
Prisma decagonal		
Tetraedro		
octaedro		
dodecaedro		
icosaedro		

**Actividad 7:**

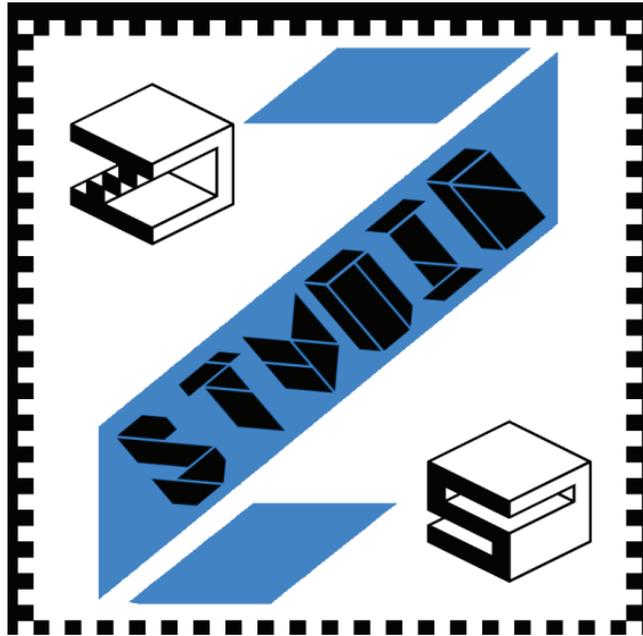
- ❖ Dentro de la aplicación pulsa en el botón evaluar y resuelve dos de los ejercicios planteados para área y dos para volumen. (entregarlos en una hoja aparte con tu nombre).
- ❖ Responde ¿cuál fue tu estrategia para abordar el problema?

---

---

---

**Nota:** este es el marcador con el cual puedes visualizar los poliedros dentro de la aplicación.



### 13.5 Guía #3: introducción al sistema Sexagesimal, Cíclico y ubicación geográfica

	<b>MUNICIPIO DE POPAYÁN</b>  SECRETARIA DE EDUCACIÓN MUNICIPAL  <b>INSTITUCIÓN EDUCATIVA ANTONIO GARCÍA PAREDES</b>  DANE 119001002195 - NIT 800247992-4	
	<b>GUÍA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA TRIGONOMETRIA</b>	

<b>GRADO: 10</b>	<b>ASIGNATURA(S): MATEMATICAS</b>	<b>AÑO LECTIVO:2022</b>	<b>GUIA No: 2</b>
<b>POR: DAREN DAYANARE GUERRERO ORDÓÑEZ</b>			

*“Las matemáticas no conocen razas o límites geográficos. Para las matemáticas, el mundo cultural es un país”*

*David Hilbert*

#### **¡Apreciados estudiantes!**

En esta guía haremos una introducción del sistema sexagesimal y cíclico, conociendo sus diferentes propiedades y por último enfatizaremos en la conversión de unidades, (grados, minutos y segundos), desde ambos sistemas de medición de ángulos; por último, aprenderemos la importancia de estos sistemas para la ubicación geográfica.

#### **preguntas para interesar**

¿Como crees que nuestros antepasados contaban?

¿Por qué el tiempo se divide en horas, minutos y segundos?

¿Ha escuchado hablar del sistema numérico decimal?

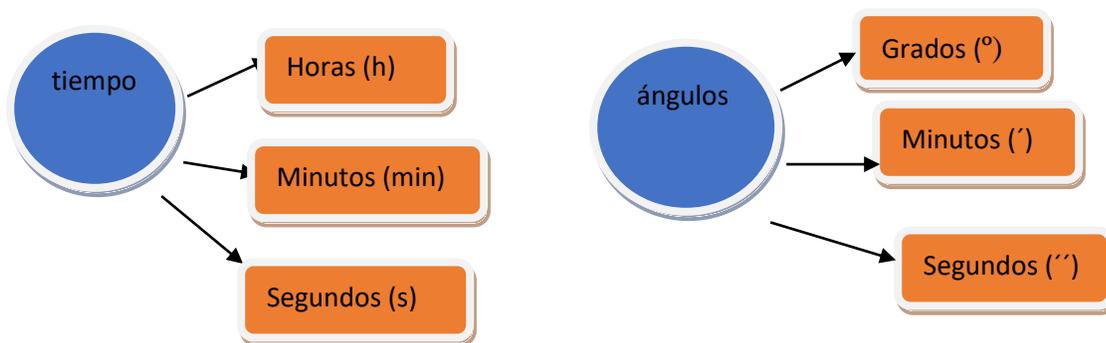
---

---

### Definición

**Sexagésimo:** hace referencia a cada una de las 60 partes en las que se divide una unidad.

**Sexagesimal:** es un término que se aplica al sistema de contar o de subdividir de 60 en 60. En el sistema sexagesimal, 60 unidades de un orden forman una unidad de orden superior. Este sistema sirve para medir los ángulos y tiempos.



### Medida de ángulos

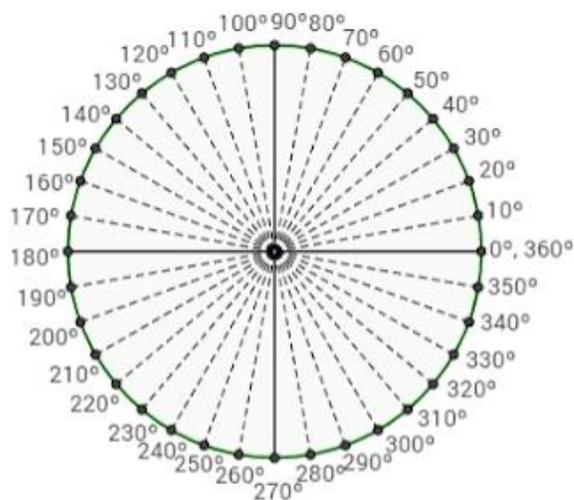
El grado es la unidad principal para medir ángulos. Para medir ángulos con más precisión, se utilizan, junto con los grados, el minuto y el segundo.

- Un grado se escribe  $1^\circ$ .  $1^\circ = 60'$

- Un minuto se escribe  $1'$ .  $1' = 60''$
- Un segundo se escribe  $1''$ .  $1^\circ = 3.600''$  ( $60 \cdot 60$ )

**Figura 2**

*División de grados*



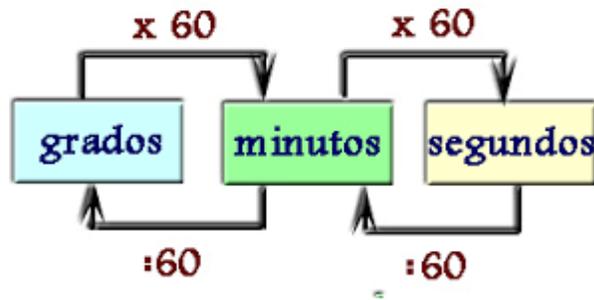
**Nota:** tomado de (Xunta de Galicia)

En esta imagen podemos visualizar la circunferencia. Inicialmente se divide en 360 partes, denominadas grados, y cada grado se subdivide en 60 partes, que denominamos minutos y los minutos se subdividen nuevamente en 60 partes que denominamos segundos.

### ¿Cómo paso de segundos a minutos?

Para pasar los segundos a minutos, hay que dividir los segundos entre 60, porque estoy pasando a una unidad más grande. El resultado de la división estará en minutos.

La forma generalizada de este enunciado se muestra en la siguiente figura



**Ejemplo:** Convertir  $32.72^\circ$

Las unidades enteras de los grados se quedarán como están, multiplicamos los decimales por 60 se convierte en minutos.

$$0.72 \times 60 = 43.2$$

De la misma manera se toma el decimal restante y se multiplica por 60.

$$0.2 \times 60 = 12$$

Tomando los tres conjuntos de números enteros y combinándolos, además utilizando los símbolos de grados ( $^\circ$ ), minutos ( $'$ ) y segundos ( $''$ ).

$$32^\circ 43' 12''$$

**Ejercicio:** realizar los siguientes ítems. Pasar de grados a minutos y segundos

**1. Pasar a minutos las siguientes medidas de ángulos.**

$$15^\circ =$$

$$34^\circ =$$

$54^\circ =$

$37^\circ =$

## 2. Pasar a segundos las siguientes medidas de ángulos

$6^\circ 9' 52'' =$

$18^\circ 20' 41'' =$

$27^\circ 30' 4'' =$

### Operaciones en el sistema sexagesimal:

#### Suma

❖ Colocamos los sumandos agrupados con las mismas unidades, es decir, se van sumando cada una de las columnas empezando por los segundos.

❖ Si los segundos sumados superan los 60", se les resta 60" y se suma 1' en la siguiente columna a la izquierda.

❖ Si los minutos sumados superan los 60', se les resta 60' y se suma 1° en la siguiente columna a la izquierda.

$$\begin{array}{r} 24^\circ \quad 35' \quad 40'' \\ + 12^\circ \quad 21' \quad 36'' \\ \hline 36^\circ \quad 62' \quad 84'' \\ \hline \phantom{36^\circ} +1' \quad -60'' \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 36^{\circ} \quad 63' \quad 24'' \\
 +1^{\circ} \quad -60' \\
 \hline
 37^{\circ} \quad 3' \quad 24''
 \end{array}$$

### Resta

Para restar se procede igual.

- ❖ Se escriben las medidas de manera que coincidan en columnas, las unidades del mismo orden y se restan.
- ❖ Si al restar los segundos es menor el minuendo, convertimos un minuto del minuendo en segundos y sumamos 60" al orden de los segundos.
- ❖ Se hace lo mismo con los minutos.

$$\begin{array}{r}
 160^{\circ} \quad 23' \quad 59'' \\
 - \quad 99^{\circ} \quad 37' \quad 49'' \\
 \hline
 61^{\circ} \quad -14' \quad 10''
 \end{array}$$

**Actividad:** resolver las siguientes sumas y restas

$$(23^{\circ} \quad 15' \quad 38'') + (57^{\circ} \quad 51' \quad 12'')$$

$$(83^{\circ} \quad 45' \quad 35'') + (17^{\circ} \quad 21' \quad 42'')$$

$$(93^{\circ} \quad 152' \quad 38'') - (57^{\circ} \quad 51' \quad 12'')$$

$$(103^{\circ} \quad 35' \quad 18'') - (11^{\circ} \quad 43' \quad 42'')$$

### Taller

Resuelve los siguientes ejercicios

1 convertir cada ejercicio a las tres unidades. Grados, minutos y segundos

$$45^{\circ}13'30''$$

$$3.5^{\circ}17.3'22''$$

2 convertir a la forma compleja (grados minutos y segundos) las siguientes cantidades

$$78.8319^{\circ}$$

$$55.0431^{\circ}$$

$$320''$$

$$5000''$$

$$148.2'$$

3 realice las siguientes sumas

$$23^{\circ}15'38'' + 57^{\circ}51'12''$$

$$45^{\circ}30'20'' + 50^{\circ}45'' + 13^{\circ}55''$$

$$83^{\circ}45'35'' + 17^{\circ}21'12''$$

$$-32^{\circ}15'' - 50^{\circ}25'48''$$

4 realice las siguientes restas

$$93^{\circ}152'38'' - 57^{\circ}51'12''$$

$$10^{\circ}20'15'' - 7^{\circ}12'30''$$

$$59^{\circ}20'' - 45^{\circ}15'30''$$

### **Sistema Cíclico**

¿Qué es el número  $\pi$  ?

<https://www.youtube.com/watch?v=NMjWyyB3mpA&t=7s>

a partir del video anterior menciona aspectos relevantes sobre el número  $\pi$

---

---

¿Qué es un radian?

¿Qué relación tienen los grados y radianes?

Estas y otras preguntas más, vamos a poder responder luego de las siguientes actividades

### **Actividad 1:**

**Objetivo:** verificar visualmente que es un radian y que propiedades de conservación y relación se presenta entre sistemas de medición de ángulos.

Con el siguiente link podrás interactuar con un espacio grafico interactivo de GeoGebra

<https://www.geogebra.org/m/W8rChZGs>

a partir de la actividad anterior realizada en conjunto, menciona que se considera como radian, que características tiene y mencionar las equivalencias con el sistema sexagesimal.

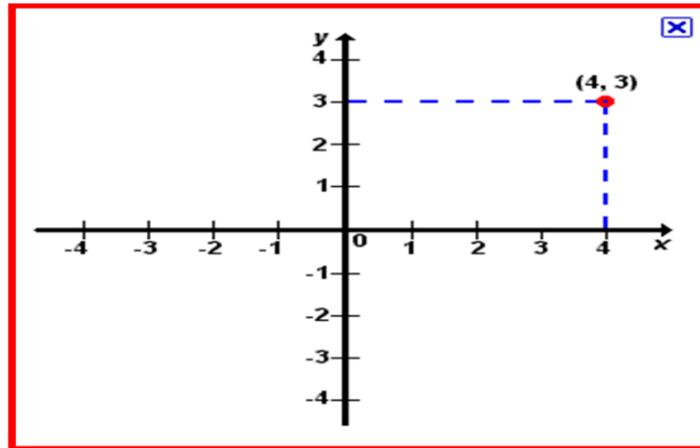
---

---

### **Actividad 1:**

Objetivo: recordar las propiedades del sistema sexagesimal, seguidamente aprenderemos a ubicarnos en el espacio terrestre por medio de Google Earth y por último verificaremos por medio de la aplicación GeoGebra 3D la latitud y longitud.

¿Recuerdas como ubicas un punto en el plano cartesiano?

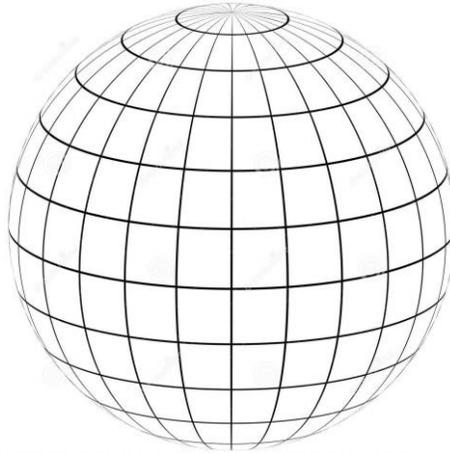


Sucede algo similar si nos queremos ubicar en el espacio terrestre. En el transcurso de las siguientes actividades contestaremos a la siguiente pregunta.

¿Cómo podemos ubicarnos en la superficie de la tierra?

[https://www.youtube.com/watch?v=YBwt9izKoJ8&ab\\_channel=MARIOCARRE%C3%93N](https://www.youtube.com/watch?v=YBwt9izKoJ8&ab_channel=MARIOCARRE%C3%93N)

**Actividad 1.1:** a partir de lo que viste en el video anterior, coloca en la siguiente imagen las partes importantes para que puedas ubicarte en el espacio terrestre.



**Actividad 1.2:**

**Objetivo:** conocer de manera visual por medio de la herramienta Google Earth las coordenadas geográficas dadas en el sistema sexagesimal del salón de clases del grado décimo tres.

A partir de lo explicado anteriormente, menciona que otras características se deben tener en cuenta para localizarnos en la superficie terrestre. Y nombra la coordenada geográfica del salón de clases.

---

---

**Actividad 1.3:**

**Objetivo:** construir visualmente el concepto de latitud y longitud por medio de la extensión AR de GeoGebra 3D.

A partir de lo expuesto anteriormente, escribe lo que consideres como latitud y longitud.

---

---

#### Actividad 1.4

**Objetivo:** localizar puntos geográficos en el planisferio

Escribe la coordenada geográfica para los siguientes puntos y nombra en que continente se encuentra cada uno.

A. \_\_\_\_\_

K. \_\_\_\_\_

J. \_\_\_\_\_

C. \_\_\_\_\_

E. \_\_\_\_\_

G. \_\_\_\_\_

L. \_\_\_\_\_

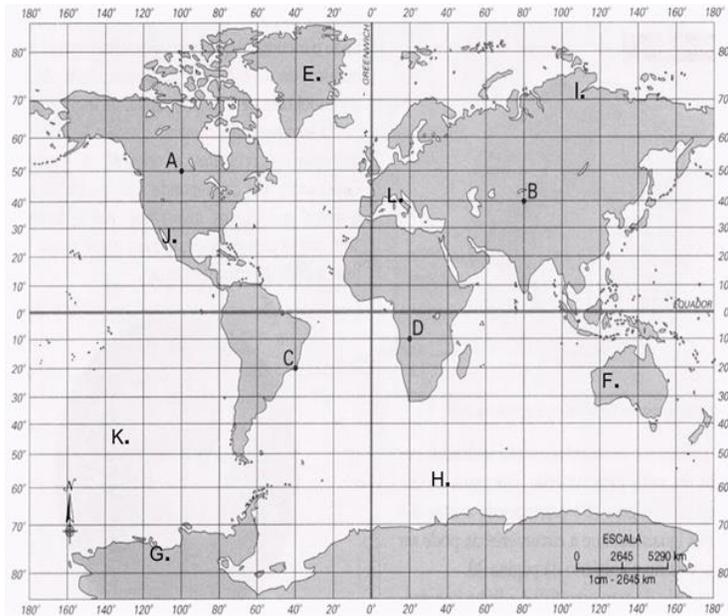
D. \_\_\_\_\_

B. \_\_\_\_\_

H. \_\_\_\_\_

I. \_\_\_\_\_

F. \_\_\_\_\_



**Ejercicio:** apreciados estudiantes; cabe resaltar, que las coordenadas geográficas están dadas en grados. Un buen ejercicio que podrían hacer, es convertirlas al sistema Cíclico. También relacionar la posición geográfica con la longitud de arco de una circunferencia (concepto aprendido con el profesor titular). por ejemplo, podrían encontrar el arco de circunferencia comprendido por la latitud encontrada del salón de clases. (recuerda que el radio de la tierra es de 6,371 kilómetros).

### 13.6 Guía #4: Razones Trigonómicas

	<b>MUNICIPIO DE POPAYÁN</b>  SECRETARIA DE EDUCACIÓN MUNICIPAL  <b>INSTITUCIÓN EDUCATIVA ANTONIO GARCÍA PAREDES</b>  DANE 119001002195 - NIT 800247992-4	
	<b>GUÍA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA TRIGONOMETRIA</b>	

<b>GRADO:</b> 10-3	<b>ASIGNATURA(S):</b> MATEMATICAS	<b>AÑO</b> LECTIVO:2023	<b>GUIA</b> No: 4
<b>POR: DAREN DAYANARE GUERRERO ORDOÑEZ</b>			
<b>ESTUDIANTE:</b>			

*“Las matemáticas son la música de la razón”*

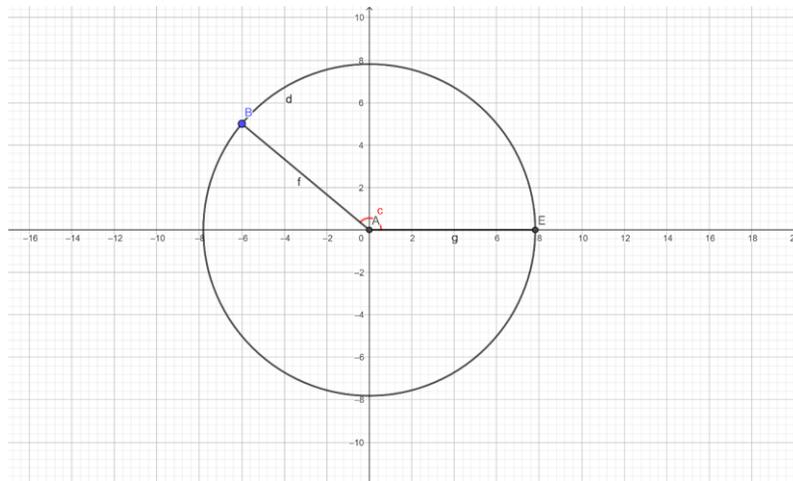
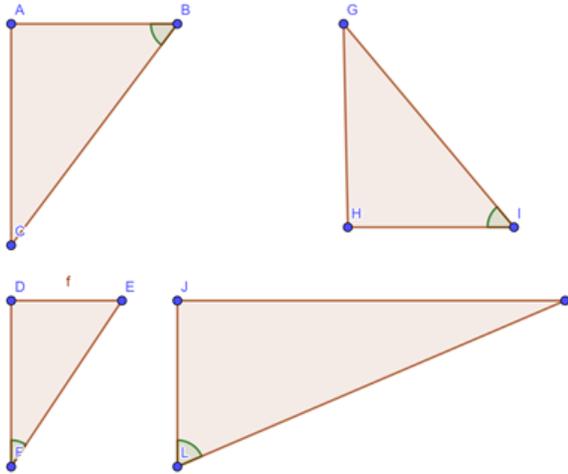
James Joseph Sylvester

#### ¡Apreciados estudiantes!

En esta guía aprenderemos el concepto de razón trigonométrica de triángulos rectángulos, posteriormente estudiaremos la circunferencia unitaria trigonométrica por medio del simulador PHET. Por último, desarrollaremos problemas de aplicación de razones trigonométricas en relación a la historia alrededor de la ciudad de Popayán con la aplicación CoSpaces Edu

#### Actividad 1:

Encontrar para cada uno de los siguientes triángulos rectángulos las tres razones trigonométricas fundamentales (seno, coseno y tangente), para los dos ángulos agudos de cada triángulo.



Del gráfico anterior, calcule las razones trigonométricas fundamentales para el ángulo  $\angle BAE$  de color rojo. Justifique su respuesta

---

---

**Actividad 2:**

**Objetivo:** Conocer visualmente el seno, coseno y tangente del triángulo rectángulo circunscrito en la circunferencia unitaria trigonométrica, por medio de GeoGebra clásico.

De lo visto en el graficador, escriba las características de los triángulos y sus respectivas relaciones gráficas. Por ejemplo: ¿qué es gráficamente la tangente?, ¿por qué el radio es de longitud 1?, etc.

---

---

**Actividad 3:**

**Objetivo:** Representar las razones trigonométricas fundamentales para ángulos no agudos en la circunferencia unitaria por medio del simulador PHET.

1)

1. Encuentre en la calculadora el seno, coseno y tangente de los siguientes ángulos:

- $91^\circ, 273^\circ, 300^\circ, -60^\circ$

2. Argumente lo que observaste al calcular estos ángulos

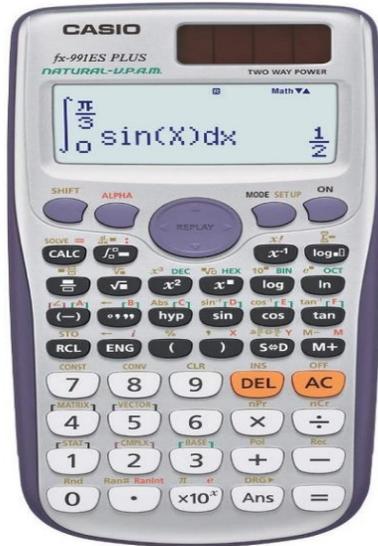
---

---

---

---

---



2) En el siguiente link podrás interactuar con el simulador de PHET:

[https://phet.colorado.edu/sims/html/trig-tour/latest/trig-tour\\_all.html?locale=es](https://phet.colorado.edu/sims/html/trig-tour/latest/trig-tour_all.html?locale=es)

A partir de lo observado en 1) y 2); argumente sobre el comportamiento de las razones trigonométricas y sobre las curvas que se generan al variar el ángulo dentro de la circunferencia unitaria.

**Nota:** Justifique su respuesta utilizando gráficos, escrito o como creas más conveniente

#### **Actividad 4:**

**Objetivo:** Utilizar las razones trigonométricas en el desarrollo de problemas cotidianos.

Materiales a utilizar:

1. Cubo de Merge
2. Celular
3. La aplicación CoSpaces Edu

El código QR te redireccionará a un problema alusivo a sitios turísticos de la ciudad de Popayán.

