

Algoritmo extragradiante aplicado a la resolución del problema de valores propios complementarios

Estudiante:

Dorlan Enrique Rivera Zambrano

Director

Favián Enrique Arenas Aparicio

Universidad del Cauca
Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación
Programa de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
7 de Junio de 2024

Nota de aceptación

Director _____

Mg. Favián Arenas Aparicio

Jurado _____

Dr. Eduard Mauricio Macias Caicedo

Jurado _____

Dr. Hevert Vivas

Fecha de sustentación: 7 de Junio de 2024, Popayán.

Índice general

1. Introducción	4
2. El problema de los valores propios complementarios	7
2.1. El problema de complementariedad no lineal	7
2.2. Reformulación del problema de $VPC(A,B)$ como $PCNL(F)$	9
3. Algoritmo extragradiante	11
3.1. Pruebas de hipótesis	14
4. Pruebas Numéricas	21
4.1. Experimento 1	23
4.2. Experimento 2	27
5. Comentarios finales	31
Referencias	33

Capítulo 1

Introducción

Dada la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y la matriz $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definida positiva (DP), el problema de los valores propios complementarios $VPC(A, B)$, consiste en encontrar un escalar $\lambda > 0$ y un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad (1.1)$$

$$(\lambda B - A)\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{x}^T(\lambda B - A)\mathbf{x} = 0. \quad (1.3)$$

Las desigualdades (1.1) y (1.2) significan que todas las componentes del vector \mathbf{x} son no negativas, esto es, $x_i \geq 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$. De igual forma todas las componentes del vector $(\lambda B - A)\mathbf{x}$ deben ser no negativas. El escalar λ es llamado *valor propio complementario* y el vector \mathbf{x} es llamado *vector propio complementario* asociado a λ . En particular si se consideran las matrices A y B simétricas; entonces este problema se denomina problema de los valores propios complementarios simétrico ($VPC(A, B)$ simétrico). Si, por otra parte, las matrices A o B no son simétricas, es llamado el problema asimétrico de valores propios complementarios ($VPC(A, B)$ asimétrico).

Darle solución al problema anteriormente mencionado, surge como una necesidad que con frecuencia se presenta en la ingeniería y la física donde se requiere el computo de este tipo de valores propios. Tales problemas se pueden observar, por ejemplo, en la frecuencia de resonancia de estructuras, en la estabilidad de sistemas dinámicos, en la mecánica de contacto, en economía entre muchos otros; por tanto, los campos de aplicación pueden ser en diseño de ingeniería, ciencia de transporte, teoría de juegos y equilibrio económico, etc (Pinto da Costa y cols., 2004). Así pues, nace la importancia en la búsqueda de la

solución del problema de los valores propios complementarios.

El problema de $VPC(A,B)$ puede tener solución, inclusive se ha demostrado que puede tener un máximo de $n2^{n-1}$ valores propios complementarios distintos (Queiroz y cols., 2004), ahora la cuestión es: ¿qué métodos se han utilizado para resolverlo?

Se han realizado múltiples estudios para darle solución al problema de $VPC(A,B)$ con matrices simétricas reales como por ejemplo en (Queiroz y cols., 2004) donde se da respuesta mediante la solución de un problema diferenciable de optimización en un conjunto compacto. En las pruebas se muestra que las reformulaciones ahí propuestas mejoran la velocidad de los métodos de solución. Por otra parte en (Júdice y cols., 2007) se propone resolver el problema de valores propios complementarios mediante su reformulación como un problema de complementariedad no lineal, optimización con restricciones de complementariedad o como un problema de optimización global, esto por mencionar algunos.

Otra forma de resolver el problema de $VPC(A,B)$ simétrico es encontrando un punto estacionario de cierta función, lo que implica minimizar dicha función bajo ciertas restricciones (Júdice y cols., 2008). Para resolver este problema los autores proponen el método del gradiente espectral proyectado, que es considerado uno de los métodos más eficientes en cuanto al tiempo de ejecución se refiere.

Para el caso del problema de $VPC(A,B)$ asimétrico aunque el método del gradiente espectral proyectado es una buena alternativa, tiene el problema de que los puntos estacionarios ahora no necesariamente son soluciones como si se garantiza para el caso simétrico y es por ello que conlleva a buscar otro camino en la solución numérica que se logra mediante la reducción del problema de $VPC(A,B)$ a algunos problemas de optimización no lineal, por lo tanto, el camino a seguir es transformar un problema de complementariedad no lineal en un problema de minimización de una función continua pero no diferenciable, (Júdice y cols., 2007; Júdice y cols., 2008) desarrollaron un método numérico para resolver dicho problema de minimización para el que se puede encontrar un valor propio complementario en un intervalo dado, empleando la técnica de *Branch & Bound* (ramificación y acotamiento), el método ajusta dinámicamente los intervalos y garantiza que encontrará todos los valores propios complementarios, aunque en la mayoría de los casos es bastante lento.

Otra forma de abordar el problema de $VPC(A,B)$ es reformularlo inicialmente como un problema de complementariedad no lineal, que posteriormente es reformulado como un problema de minimización. Para resolver este último, se emplea un algoritmo cuasi-Newton, conocido como secante de cambio mínimo (Pérez y cols., 2022).

En este proyecto, queremos resolver el problema de $VPC(A,B)$ empleando uno de los métodos de proyección ortogonal llamado algoritmo extragradiante (Korpelevich, 1976), para ello, inicialmente reformularemos el problema de $VPC(A,B)$ como un problema de complementariedad no lineal ($PCNL(F)$). Lo implementaremos y lo utilizaremos para resolver un conjunto de problemas de $VPC(A,B)$ de diversos tamaños, luego se analizarán los resultados.

Este trabajo se ha organizado de la siguiente forma: en el **capítulo 2**, se presenta el problema de los valores propios complementarios, una parte teórica referente al problema de complementariedad no lineal y para terminar con una reformulación del problema de $VPC(A,B)$ como un problema de complementariedad no lineal. En el **capítulo 3**, se tiene como temática el algoritmo extragradiante en el cual se abordará el aspecto teórico referente a este tipo de método como alternativa de solución del problema de complementariedad no lineal, en este mismo capítulo realizaremos unas pruebas de hipótesis para la convergencia del algoritmo extragradiante, posteriormente en el **capítulo 4** se realizarán pruebas numéricas y en el **capítulo 5**, se presentaran algunos comentarios finales.

Capítulo 2

El problema de los valores propios complementarios

En esta sección presentamos los conceptos y resultados más importantes para abordar el siguiente problema.

Dada la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y la matriz $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definida positiva (DP), el problema de los valores propios complementarios $VPC(A, B)$ consiste en encontrar $\lambda > 0$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \tag{2.1}$$

$$(\lambda B - A)\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \tag{2.2}$$

$$\mathbf{x}^\top (\lambda B - A)\mathbf{x} = 0. \tag{2.3}$$

A este problema lo denotaremos por $VPC(A, B)$, y el par (λ, \mathbf{x}) será la solución de este. Observe que si (λ, \mathbf{x}) es solución, también lo será $(\lambda, \alpha \mathbf{x})$ con $\alpha > 0$.

2.1. El problema de complementariedad no lineal

Dada $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde $F(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \dots, F_n(\mathbf{x}))$ es una función continuamente diferenciable y no lineal, el problema de complementariedad no lineal, denotado

como $PCNL(F)$, consiste en encontrar un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ que cumpla con las siguientes condiciones,

$$\mathbf{x} \geq 0 ; \quad F(\mathbf{x}) \geq 0 ; \quad \mathbf{x}^\top F(\mathbf{x}) = 0. \quad (2.4)$$

- La expresión $\mathbf{x} \geq 0$ para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ significa que $x_i \geq 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$, es decir, cada una de las componentes del vector \mathbf{x} es no negativa
- De la segunda condición de (2.4), se tiene que, $F_i(\mathbf{x}) \geq 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$
- De la tercera condición de (2.4), se cumple que, $x_i F_i(\mathbf{x}) = 0$, para $i = 1, 2, \dots, n$. Por tanto, $x_i = 0$ o $F_i(\mathbf{x}) = 0$. Además esta condición exige que los vectores \mathbf{x} y $F(\mathbf{x})$ sean ortogonales y es por ello que es llamada *condición de complementariedad*.

Cabe aclarar que el vector nulo, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, no siempre es una solución, ya que puede ocurrir que al evaluar la función F en cero no cumpla la condición de no negatividad o puede suceder por ejemplo que $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ y $F(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$ pero no satisfaga la condición de complementariedad, por tanto, para el $PCNL(F)$ se deben verificar las tres condiciones.

El problema de complementariedad no lineal es un tema que se ha venido trabajando desde hace más de cincuenta años y se presenta en campos como la ciencia, ingeniería y economía, el problema de complementariedad es equivalente a un sistema en equilibrio y tiene aplicaciones en la optimización, control óptimo estocástico, teoría de juegos, en particular se puede apreciar en fenómenos como, el equilibrio de tráfico (A. Chen y Recker, 2010), contacto físico de estructuras mecánicas (Arias y Martínez, 2018), (Cottle y cols., 2009), (Ferris y cols., 1997), en el fenómeno de lubricación elasto-electrodinámica (Kostreva, 1984), en economía referente al equilibrio entre oferta y demanda, esta área de las matemáticas también tiene cierta relación con dominios de matemática fundamental, tal es el caso de la teoría de los puntos fijos, análisis no lineal, desigualdades variacionales, modulación matemática y análisis numérico. Para resolver el $PCNL(F)$ se han propuesto diversos métodos de solución, entre ellos, métodos de homotopía (Ding y Yin, 2007), (Kojima y cols., 1993), (Kojima y cols., 1991); método de redes neuronales (Arenas y cols., 2016), (Liao y cols., 2001), (Lillo y cols., 1993), método de Newton y Cuasi-Newton no diferenciable (Arenas y cols., 2015), (Arias y cols., 2017), (De Luca y cols., 1996), (Kanzow y Kleinmichel, 1998), (Iopez y cols., 1999), por último (Zambrano y Arenas, 2023), el método extragradiante ha tenido buenos resultados .

2.2. Reformulación del problema de $VPC(A,B)$ como $PCNL(F)$

En el problema de $VPC(A,B)$ para un valor propio complementario (λ) existen infinitos vectores propios complementarios asociados a ese valor propio como se observó al inicio de este capítulo y es por ello que se debe reescribir el problema para poder lograr implementar un método de solución que nos permita llegar a una sola solución mediante un vector representante. Por lo tanto, con el fin de reducir la búsqueda, podríamos considerar las soluciones que satisfacen la condición, $\|\mathbf{x}\| = p$, con $p > 0$, entonces esta condición garantiza que el vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Ya que en la definición del problema de $VPC(A,B)$ se debe cumplir la no negatividad del vector \mathbf{x} , entonces $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{k=1}^n x_k$ y esta condición puede ser reemplazada por la expresión, $\|\mathbf{x}\|_1 = \mathbf{e}^\top \mathbf{x} = p$, donde $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^n$. Así el problema de $VPC(A,B)$ se transforma en encontrar un $\lambda > 0$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad (2.5)$$

$$(\lambda B - A)\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{x}^\top (\lambda B - A)\mathbf{x} = 0, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{e}^\top \mathbf{x} = p. \quad (2.8)$$

Lo anterior sería una *forma alternativa del problema de $VPC(A,B)$* a la que llamaremos $VPC2(A,B)$, ahora veamos que el problema de $VPC2(A,B)$ puede reformularse como un $PCNL(F)$, haciendo $F: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ con $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tales que,

$$y_i = \begin{cases} x_i, & \text{si } 1 \leq i \leq n \\ \frac{1}{\lambda}, & \text{si } i = n+1, \end{cases} \quad F(\mathbf{y}) = \begin{cases} [B - y_{n+1}A]_i \mathbf{x}, & \text{si } 1 \leq i \leq n \\ \mathbf{e}^\top \mathbf{x} - p, & \text{si } i = n+1. \end{cases} \quad (2.9)$$

Donde deberemos encontrar un vector $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ que satisfaga las siguientes tres condiciones

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \quad F(\mathbf{y}) \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}^\top F(\mathbf{y}) = 0. \quad (2.10)$$

En efecto, consideremos el problema de $VPC2(A,B)$ en el cual debemos encontrar $\lambda > 0$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que satisface (2.5) a (2.8) y definimos a $F(\mathbf{y})$ y \mathbf{y} como en (2.9), entonces por (2.5) se satisface que $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$. Ahora 2.6 se puede reescribir como $(B - \frac{1}{\lambda}A)\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ y

de (2.8), $e^\top \mathbf{x} - p = 0$, luego

$$\begin{aligned} F(\mathbf{y}) &= \begin{cases} [B - y_{n+1}A]_i \mathbf{x}, & \text{si } 1 \leq i \leq n \\ e^\top \mathbf{x} - p, & \text{si } i = n + 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} [B - \frac{1}{\lambda}A]_i \mathbf{x}, & \text{si } 1 \leq i \leq n \\ e^\top \mathbf{x} - p, & \text{si } i = n + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Es decir, $F(\mathbf{y}) \geq 0$ y por último

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^\top F(\mathbf{y}) &= \mathbf{x}^\top \left(B - \frac{1}{\lambda}A \right) \mathbf{x} + \frac{1}{\lambda} (e^\top \mathbf{x} - p) \\ &= 0 + 0 && \text{(por condiciones (2.7) y (2.8)).} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Entonces el problema de $VPC2(A,B)$ es de la forma (2.10); por tanto, es un problema de complementariedad no lineal. En el siguiente capítulo hablaremos acerca del algoritmo extragradiante como técnica de solución para el $PCNL(F)$.

Algoritmo extragradiante

Unos de los métodos que se han empleado para solucionar el $PCNL(F)$ son los denominados, *métodos de proyección ortogonal*, estos presentan la cualidad de no ser complejos en su implementación además de ofrecer buenos resultados en la búsqueda de soluciones a problemas de este tipo (Xiu y Zhang, 2003), (Facchinei y Pang, 2003), estos métodos tienen las siguientes dos características

1. En su implementación se busca calcular de forma eficiente la proyección sobre un conjunto convexo cerrado.
2. No necesita el uso de las derivadas de la función objetivo.

Los métodos de proyección que emplearemos en este trabajo están basados en el *método de proyección del gradiente* propuesto por (Goldstein, 1964) y (Levitin y Polyak, 1966) que fue de gran estudio en la década de lo setenta, el proceso iterativo se describe a continuación

- Para $\mathbf{x}_k \in X$, con X un conjunto no vacío y convexo

$$\mathbf{x}_{k+1} = P_X(\mathbf{x}_k - \alpha F(\mathbf{x}_k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

Donde, $P_X(\mathbf{y})$ es la proyección ortogonal del punto \mathbf{y} sobre X y $\alpha > 0$ es un número fijo. Veamos como se define la proyección.

Definición 3.1. (Facchinei y Pang, 2003). Sea X un conjunto convexo, cerrado y no vacío de \mathbb{R}^n . Para cada vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ existe un vector único $\bar{\mathbf{x}}_k \in X$ que está más cerca de \mathbf{x} en la norma euclidiana. Este vector más cercano $\bar{\mathbf{x}}_k$ se llama la proyección (euclidiana) de \mathbf{x} sobre X y se denota como $P_X(\mathbf{x})$. La función $P_X: \mathbf{x} \mapsto P_X(\mathbf{x})$ se llama el proyector euclidiano sobre X . Por definición, $P_X(\mathbf{x})$ es la solución única del problema de minimización convexo en la variable \mathbf{x} , donde \mathbf{x} se considera fijo: Luego,

$$P_X(\mathbf{x}) = \arg \min \{ \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| : \mathbf{y} \in X \}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Es interesante ver que si el conjunto X es el ortante no negativo del hiperespacio, entonces se simplifican los cálculos de la proyección de forma considerable y es sumamente sencillo; ya que si consideramos $X = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : y_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$, entonces la proyección de un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ sobre X implica encontrar un vector en X tal que minimice la distancia $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$. Como el conjunto X es el ortante no negativo y el vector proyectado debe pertenecer a este conjunto, luego es fácil ver que la distancia mínima se logra por la siguiente elección:

- Si $x_i \geq 0$, entonces la proyección de x_i sobre X es simplemente x_i mismo, ya que x_i ya cumple con la restricción $x_i \geq 0$.
- Si $x_i < 0$, la proyección de x_i sobre X debe ser el valor más cercano a X que es mayor o igual a cero. En este caso, 0 es el valor más cercano a x_i .

Por lo tanto, la proyección de \mathbf{x} sobre X se define componente a componente de la siguiente manera:

$$[P_X(\mathbf{x})]_i = \begin{cases} x_i, & \text{si } x_i \geq 0, \\ 0, & \text{si } x_i < 0. \end{cases}$$

Se ha demostrado que los problemas del tipo (3.1) tienen convergencia lineal (Xiu y Zhang, 2003) y global pero bajo ciertos supuestos, como el de ser la función F fuertemente monótona y Lipschitz continua con α lo suficientemente pequeño.

Es precisamente las condiciones tan fuertes para que el método converja y la elección adecuada de α lo que ha provocado el surgimiento de nuevas variables del método. Una de estas propuestas fue presentada por el matemático ruso G. M. Korpelevich (Korpelevich, 1976) que denominó *algoritmo extragradiante* y que será nuestro método de estudio en este trabajo; en este caso el método ejecuta dos proyecciones por iteración, razón por la cual el método posee en su nombre el prefijo “extra”, además de referirse a la noción de extrapolar o extender la información disponible para mejorar la convergencia del

método. Aunque requiere el doble de cálculos, este ha presentado grandes ventajas. Si bien el método extragradiante no utiliza directamente el gradiente en su forma tradicional, el término “gradiente” se mantiene en su nombre debido a su origen y relación con el método del gradiente clásico. En el contexto de optimización y métodos numéricos, el concepto de gradiente está asociado con la dirección de máximo crecimiento de una función en un punto dado. El algoritmo extragradiante fue un método de solución a los problemas llamados *Problemas de Desigualdades Variacionales (PDV)* que resultan ser un caso especial del PCNL; se han realizado estudios de comparación de métodos tipo Newton con el algoritmo extragradiante, resultando este último, ser más eficaz en el sentido de converger con menor número de iteraciones, por ello el método del algoritmo extragradiante resulta interesante explorarlo (Zambrano y Arenas, 2023). Pero veamos a continuación en que consiste el *PDV* y su relación con el *PCNL(F)*.

Definición 3.2. (Xiu y Zhang, 2003) Sea X un conjunto convexo, cerrado y no vacío de \mathbb{R}^n y sea la función $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciable. El *PDV* consiste en hallar un $\mathbf{x} \in X$ tal que,

$$F(\mathbf{x})^\top (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \geq 0, \quad \text{para todo } \mathbf{y} \in X. \quad (3.2)$$

Este tipo de problema se llama, problema de desigualdad variacional y se denota por $PDV(F, X)$.

El $PCNL(F)$ es un caso particular del $PDV(F, X)$ cuando X es el ortante no negativo; formalmente podemos expresarlo mediante el siguiente teorema.

Teorema 3.1. Sea $X = \mathbb{R}_+^n$, donde \mathbb{R}_+^n es el ortante no negativo de \mathbb{R}^n . \mathbf{x}^* es una solución del $PCNL(F)$ si y solo si \mathbf{x}^* es una solución del $PDV(F, \mathbb{R}_+^n)$.

Demostración. Sea \mathbf{x}_* una solución del $PCNL(F)$ y $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^n$. Entonces

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}_*)^\top (\mathbf{y} - \mathbf{x}_*) &= F(\mathbf{x}_*)^\top \mathbf{y} - F(\mathbf{x}_*)^\top \mathbf{x}_* \\ &= F(\mathbf{x}_*)^\top \mathbf{y}, \quad \text{ya que } F(\mathbf{x}_*)^\top \mathbf{x}_* = 0. \end{aligned}$$

Como $F(\mathbf{x}_*) \geq 0$, pues \mathbf{x}_* es solución del $PCNL(F)$, entonces se concluye que

$$F(\mathbf{x}_*)^\top (\mathbf{y} - \mathbf{x}_*) \geq 0.$$

Debido a que lo anterior es válido para cualquier vector $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^n$ deducimos que \mathbf{x}_* es solución del $PDV(F, \mathbb{R}_+^n)$.

Por otra parte, si \mathbf{x}_* es solución del $PDV(F, \mathbb{R}_+^n)$, entonces $\mathbf{x}_* \geq 0$, además para todo $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^n$ se satisface que:

$$F(\mathbf{x}_*)^\top (\mathbf{y} - \mathbf{x}_*) \geq 0. \quad (3.3)$$

En particular para $\mathbf{y} = 0$ y $\mathbf{y} = 2\mathbf{x}_*$, obtendríamos lo siguiente, $F(\mathbf{x}_*)^\top \mathbf{x}_* \leq 0$ y $F(\mathbf{x}_*)^\top \mathbf{x}_* \geq 0$ respectivamente; por lo tanto, deducimos que $F(\mathbf{x}_*)^\top \mathbf{x}_* = 0$. De forma similar si ahora consideramos a $\mathbf{y} = \mathbf{x}_* + e_i$, donde e_i es el i -ésimo vector canónico de \mathbb{R}^n , entonces la expresión (3.3), se transforma en $F_i(\mathbf{x}_*) \geq 0$. para cada $i = 1, 2, \dots, n$, es decir, $F(\mathbf{x}_*) \geq 0$. y concluimos que \mathbf{x}_* es una solución del $PCNL(F)$. \square

Como vemos el $PCNL(F)$ puede verse como un $PDV(F, X)$, entonces podemos hacer uso del algoritmo extragradiante adaptado al $PCNL(F)$ que se presenta a continuación

Algoritmo 1 Algoritmo extragradiante para $PCNL(F)$

Entrada: $x_0 \in X$ y $\alpha > 0$, donde α es un número fijo.

Salida: solución \mathbf{x}_*

$k \leftarrow 0$

mientras \mathbf{x}_k , no sea solución **hacer**

$\bar{\mathbf{x}}_k \leftarrow P_X(\mathbf{x}_k - \alpha F(\mathbf{x}_k))$

$\mathbf{x}_{k+1} \leftarrow P_X(\mathbf{x}_k - \alpha F(\bar{\mathbf{x}}_k))$

$k \leftarrow k + 1$

fin mientras

3.1. Pruebas de hipótesis

En esta sesión estamos interesados en probar si se satisfacen o no las hipótesis de uno de los teoremas mas importantes en la convergencia del algoritmo extragradiante, para ello presentamos a continuación el lema y teorema correspondiente a ello.

Lema 3.1. *Sea X un conjunto convexo, cerrado y no vacío en \mathbb{R}_+^n , y $F: X \subseteq \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ pseudomonotona y Lipschitz continua en X con constante $L > 0$; además \mathbf{x}_* una solución del $PDV(F, X)$. Entonces para todo $k \in \mathbb{N}$*

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_*\|^2 \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_*\|^2 - (1 - \alpha^2 L^2) \|\bar{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k\|^2. \quad (3.4)$$

El lema anterior permite formular el siguiente teorema

Teorema 3.2. *Sea X un conjunto convexo, cerrado y no vacío en \mathbb{R}^n y $F: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ pseudomonótona en X con respecto a X^* , donde X^* es el conjunto solución del PCNL(F) y Lipschitz continua en X con constante L . Si $\alpha < \frac{1}{L}$ entonces la sucesión $\{\mathbf{x}_k\}$ generada por el algoritmo extragradiante converge y lo hace linealmente.*

como vemos el teorema requiere que la función F sea pseudomonotona y Lipschitz continua en X , entonces definamos esto conceptos.

Definición 3.3. *(Xiu y Zhang, 2003). Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío y F una función dada. Para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, F es pseudomonotona en X si*

$$F(\mathbf{y})^\top (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \geq 0 \quad \text{implica que} \quad F(\mathbf{x})^\top (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \geq 0. \quad (3.5)$$

Definición 3.4. *(Pérez y Díaz, 2010). Una función $F: X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, es Lipschitz continua con constante positiva L , si para cada $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$,*

$$\|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})\| \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

En este caso diremos que $F \in \text{Lip}_L(X)$.

Veamos si nuestra función F satisface las condición de ser pseudomonotona y lipschitz continua en X .

Sea $X = \mathbb{R}_+^{n+1}$, $F: X \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ y $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$ tales que,

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ z_{n+1} \end{bmatrix},$$

donde

$$F(\mathbf{y}) = \begin{cases} [B - y_{n+1}A]_i \mathbf{x}, & \text{si } 1 \leq i \leq n \\ e^\top \mathbf{x} - p, & \text{si } i = n + 1, \end{cases} \quad F(\mathbf{z}) = \begin{cases} [B - z_{n+1}A]_i \mathbf{w}, & \text{si } 1 \leq i \leq n \\ e^\top \mathbf{w} - p, & \text{si } i = n + 1. \end{cases}$$

- F no es pseudomonotona, ya que en X existen

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

con $A = \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = I_2$, y $p = 1$ tal que

$$\begin{aligned}
 F(\mathbf{y})^\top (\mathbf{z} - \mathbf{y}) &= \begin{bmatrix} (B - y_{n+1}A)\mathbf{x} \\ e^\top \mathbf{x} - 1 \end{bmatrix}^\top (\mathbf{z} - \mathbf{y}) \\
 &= \left(\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^\top \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \left(\begin{bmatrix} -17 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^\top \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \\
 &= [0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}
 F(\mathbf{z})^\top (\mathbf{z} - \mathbf{y}) &= \begin{bmatrix} (B - z_{n+1}A) \mathbf{w} \\ e^\top \mathbf{w} - 1 \end{bmatrix}^\top (\mathbf{z} - \mathbf{y}) \\
 &= \left(\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 5 \cdot \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right)^\top \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \left(\begin{bmatrix} -89 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right)^\top \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \\
 &= [0 \quad -8 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \\
 &= -4.
 \end{aligned}$$

- Veamos que F no es Lipschitz en X ; en efecto, si suponemos la matriz $A = B = I_2$, con I_2 como la matriz identidad de orden 2, entonces la función F evaluadas en \mathbf{y} y \mathbf{z} será

$$F(\mathbf{y}) = \begin{cases} [I_2 - y_3 I_2]_i \mathbf{x}, & \text{si } 1 \leq i \leq 2 \\ e^\top \mathbf{x} - 1, & \text{si } i = 3, \end{cases} \quad F(\mathbf{z}) = \begin{cases} [I_2 - z_3 I_2]_i \mathbf{w}, & \text{si } 1 \leq i \leq 2 \\ e^\top \mathbf{w} - 1, & \text{si } i = 3. \end{cases}$$

Ahora, supongamos que la función F es Lipschitz continua en X , luego por la **definición 3.4**, existe $L > 0$ tal que para todo $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$ se cumple que

$$\|F(\mathbf{y}) - F(\mathbf{z})\| \leq L \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|,$$

entonces la desigualdad anterior será válida en particular cuando

$$\mathbf{y} = [0 \quad 0 \quad 0]^\top \quad \text{y} \quad \mathbf{z} = [m \quad m \quad m]^\top$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Así

$$\begin{aligned}
\|F(\mathbf{y}) - F(\mathbf{z})\|_1 &= \left\| \begin{array}{c} [I_2 - y_{n+1}I_2] \mathbf{x} - [I_2 - z_{n+1}I_2] \mathbf{w} \\ e^\top \mathbf{x} - 1 - (e^\top \mathbf{w} - 1) \end{array} \right\|_1 \\
&= \left\| \begin{array}{c} I_2 \mathbf{x} - y_{n+1}I_2 \mathbf{x} - I_2 \mathbf{w} + z_{n+1}I_2 \mathbf{w} \\ e^\top \mathbf{x} - 1 - e^\top \mathbf{w} + 1 \end{array} \right\|_1 \\
&= \left\| \begin{array}{c} I_2 \mathbf{x} - I_2 \mathbf{w} + mI_2 \mathbf{w} \\ e^\top (\mathbf{x} - \mathbf{w}) \end{array} \right\|_1 \quad \text{ya que } y_{n+1} = 0 \text{ y } z_{n+1} = m \\
&= \left\| \begin{array}{c} I_2 \mathbf{x} + (m-1)I_2 \mathbf{w} \\ e^\top (\mathbf{x} - \mathbf{w}) \end{array} \right\|_1 \\
&= \left\| \begin{array}{c} (m-1)I_2 \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix} \\ e^\top \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix} \right) \end{array} \right\|_1, \text{ pues } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{w} = \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix} \\
&= \left\| \begin{array}{c} (m-1) \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix} \\ -[1 \ 1] \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix} \end{array} \right\|_1 \\
&= \left\| \begin{array}{c} (m-1) \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix} \\ -2m \end{array} \right\|_1 \\
&= \left\| (m-1) \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix} \right\|_1 + |-2m| \\
&= |m-1||2m| + |-2m| \\
&= 2m^2, \quad \text{ya que } m \geq 1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\|F(\mathbf{y}) - F(\mathbf{z})\|_1 &= 2m^2 \leq L \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m \\ m \\ m \end{bmatrix} \right\|_1 \\
&= L \left\| \begin{bmatrix} -m \\ -m \\ -m \end{bmatrix} \right\|_1 \\
&= L(|m| + |m| + |m|) \\
&= L(3m), \text{ es decir,} \\
2m^2 &\leq L(3m) \\
2m &\leq L(3) \\
m &\leq \frac{3}{2}L
\end{aligned}$$

como $m \in \mathbb{N}$ y debe ser válido para todo m con L fijo llegamos a una contradicción, pues decir, que $m \leq \frac{3}{2}L$ para todo m implica que los números naturales son acotados; luego concluimos que la función F no es Lipschitz continua en X , sin embargo es localmente Lipschitz; en efecto, si suponemos $\mathbf{g} \in U$, con U un conjunto abierto y convexo de \mathbb{R}^{n+1} , y F definido como

$$F(\mathbf{g}) = \begin{cases} [B - g_{n+1}A]_i \mathbf{h}, & \text{si } 1 \leq i \leq n \\ e^\top \mathbf{h} - p, & \text{si } i = n + 1, \end{cases} \quad \text{con } \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ g_{n+1} \end{bmatrix},$$

entonces la matriz jacobiana de $F(\mathbf{g})$ viene dada por

$$F'(\mathbf{g}) = \begin{bmatrix} B - g_{n+1}A & -A\mathbf{h} \\ e^\top & 0 \end{bmatrix},$$

luego F es continuamente diferenciable en U . Determinemos L_0 definido como

$$L_0 := \sup_U \|F'(\mathbf{g})\|,$$

donde $\|F'(\mathbf{g})\|$ es la norma matricial de la matriz jacobiana de F ; como

$$\begin{aligned}
\|F'(\mathbf{g})\|_\infty &= \left\| \begin{bmatrix} B - g_{n+1}A & -A\mathbf{h} \\ e^\top & 0 \end{bmatrix} \right\|_\infty \\
&= \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left(\sum_{j=1}^n |B_{ij} - g_{n+1}A_{ij}| + |-A_i\mathbf{h}| \right) + \sum_{i=1}^n 1 \right\}, (A_i := i\text{-ésima fila de } A) \\
&\leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left(\sum_{j=1}^n |B_{ij}| + |-g_{n+1}A_{ij}| + |-A_i\mathbf{h}| \right) + \sum_{i=1}^n 1 \right\}, (\text{desigualdad triangular}) \\
&= \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left(\sum_{j=1}^n |B_{ij}| + |g_{n+1}A_{ij}| + |A_i\mathbf{h}| \right) + n \right\} \\
&\leq \|B\|_\infty + g_{n+1}\|A\|_\infty + \|A\|_\infty\|\mathbf{h}\|_\infty + n, \quad (\text{norma matricial inducida}) \\
&= \|B\|_\infty + \|A\|_\infty (g_{n+1} + \|\mathbf{h}\|_\infty) + n.
\end{aligned}$$

Y si hacemos $l := g_{n+1} + \|\mathbf{h}\|_\infty$, entonces

$$\|F'(\mathbf{g})\|_\infty \leq \|B\|_\infty + \|A\|_\infty l + n,$$

es decir, la norma de la matriz jacobiana esta acotada, por consiguiente podemos tomar

$$l_0 = \|B\|_\infty + \|A\|_\infty l + n,$$

por tanto, existe $B_\epsilon(\mathbf{g}) \subset U$ tal que

$$\|F(\mathbf{y}) - F(\mathbf{z})\| \leq l_0\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|,$$

para cualquier par de puntos $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in B_\epsilon(\mathbf{g})$, esto es, F es localmente Lipschitziana en un entorno de \mathbf{g} .

Capítulo 4

Pruebas Numéricas

En este capítulo realizaremos un análisis numérico del desempeño del algoritmo extra-gradiente aplicado a la resolución del problema de $VPC(A,B)$. Este algoritmo se implementará en el sistema de cómputo numérico MATLAB y un computador personal con las siguientes especificaciones:

Edición de Windows: Windows 10 Pro © 2021 Microsoft Corporation.
Todos los derechos reservados.

Especificaciones del dispositivo.

Procesador: Intel(R) Core(TM)2 Duo CPU T5550 @ 1.83GHz.
Memoria instalada (RAM): 4 GB
Tipo de sistema: Sistema operativo de 64bits, procesador x64.

Para mayor facilidad en la lectura incluimos el algoritmo extragradiante detallado.

Algoritmo 2 Algoritmo extragradiante para $PCNL(F)$

Entrada: Vector inicial $\mathbf{y}_0 \in X = \mathbb{R}_+^{n+1}$; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $\varepsilon = 10^{-6}$: tolerancia;
 N : número máximo de iteraciones; $\alpha > 0$, donde α es un número fijo.

Salida: Solución \mathbf{y}_* .

$k \leftarrow 0$

mientras ($\|\mathbf{y}_k^T F(\mathbf{y}_k)\| \geq \varepsilon \circ F(\mathbf{y}_k) < 0$) y $k < N$ **hacer**

$\bar{\mathbf{y}}_k \leftarrow P_X(\mathbf{y}_k - \alpha F(\mathbf{y}_k))$

$\mathbf{y}_{k+1} \leftarrow P_X(\mathbf{y}_k - \alpha F(\bar{\mathbf{y}}_k))$

$k \leftarrow k + 1$

fin mientras

Construcción de los problemas

Para la generación de los problemas de $VPC(A,B)$, hemos optado por clasificarlos en dos categorías: simétricos y no simétricos. En todos los casos, la matriz B se configura como una matriz identidad de dimensiones $n \times n$. La construcción de la matriz A sigue las pautas detalladas en la **Tabla 4.1**, donde el término “Escala” define el valor máximo posible para cada componente de A . La matriz $rand(n)$ corresponde a una matriz aleatoria de tamaño $n \times n$ con entradas de valores comprendidos entre 0 y 1 y la matriz $triu(V)$ corresponde a la construcción de la matriz triangular superior de V . En conjunto, esto da lugar a un total de cuatro posibles problemas.

Tipo de problema	Escala	A	B
Simétrico	1 y 50	$V = Escala \times rand(n)$	I_n
		$U = triu(V)$	
		$A = U + U^T$	
No Simétrico	1 y 50	$A = Escala \times rand(n)$	I_n

Tabla 4.1: Construcción de las matrices A y B para la experimentación.

Uno de los inconvenientes que se debieron resolver para realizar las pruebas del algoritmo extragradiante, es elegir un α adecuado que permita lograr la convergencia. Por algunos experimentos preliminares sospechamos que α depende de la dimensión del problema. Es por ello que diseñamos un experimento el cual llamamos **Experimento 1** con la finalidad de encontrar un α “óptimo” que nos permita la convergencia del algoritmo, con el menor número de iteraciones y para distintos puntos iniciales, elegimos el valor de α en el cual se obtenga el 100% de éxitos. Los resultados de las pruebas numéricas se muestran en tablas, para su lectura considere la siguiente información referente a las variables

- n:** Dimensión del problema. (Orden matrices A o B)
- Éxitos:** Número de ejecuciones exitosas.
- k:** Promedio del número de iteraciones con el **Algoritmo 2**
- α** Tamaño de paso del algoritmo extragradiante con el menor número de iteraciones y el 100% de éxitos.
- Tiempo:** Tiempo (en segundos) promedio de ejecución del **Algoritmo 2**.

4.1. Experimento 1

Tomando valores de α entre 0.001 y 1 con incrementos de 0.001 para cada dimensión n desde 2 hasta $n = 200$. Se utilizaron 100 puntos iniciales para cada valor de α y de n . Nuestro objetivo en esta primera parte es establecer, si existe, una relación matemática entre la dimensión (n) y la variable (α), de esta forma tendremos una ecuación que nos permitirá interpolar el valor de α para cualquier dimensión. En la **Tabla 4.2** y la **Tabla 4.3** presentamos los resultados obtenidos cuando la *escala* es 1 y 50 respectivamente.

En cuanto a los puntos iniciales, estos se eligieron de tal manera que sus elementos fuesen valores aleatorios entre 0 y 1, es decir, su implementación en el software MATLAB fue la siguiente

$$\mathbf{y}_0 = \text{rand}(n + 1, 1).$$

n	α	Éxitos %	k	Tiempo
2	0.534	100	106.31	0.008124
3	0.481	100	98.04	0.006559
5	0.400	100	91.27	0.006353
10	0.305	100	87.77	0.006269
15	0.256	100	87.05	0.007187
20	0.224	100	87.66	0.007503
30	0.198	100	91.57	0.010045
40	0.179	100	96.87	0.010360
45	0.170	100	98.92	0.010652
50	0.165	100	102.96	0.013253
60	0.152	100	109.18	0.015465
70	0.144	100	112.90	0.024289
90	0.133	100	132.94	0.034110
100	0.124	100	126.95	0.037190
130	0.110	100	138.30	0.057610
150	0.104	100	146.53	0.071455
180	0.096	100	157.53	0.094886
200	0.091	100	161.22	0.112544

Tabla 4.2: Resultados numéricos, α “óptimo” para cada n , caso simétrico, $escala = 1$.

En la **Tabla 4.2** se puede apreciar que a medida que se incrementa la dimensión, el valor de α óptimo disminuye, veamos con mayor claridad en la siguiente gráfica como se comporta el valor de α cuando incrementamos el orden n

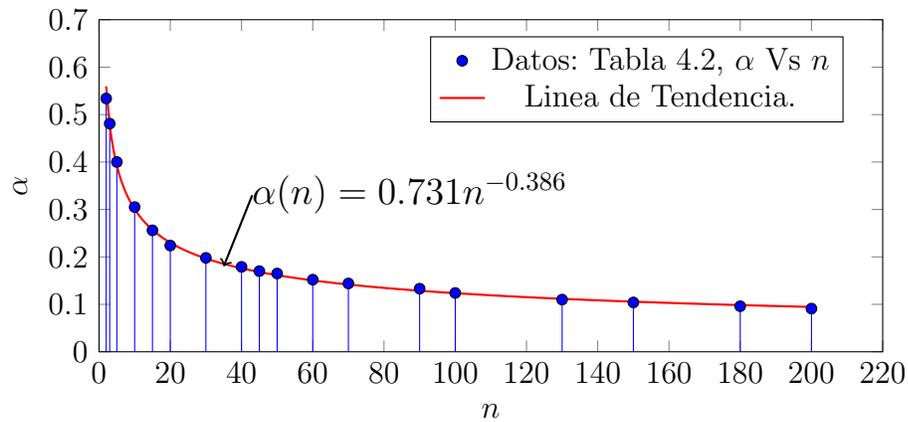


Figura 4.1: Gráfica de α “óptimo” Vs Orden n .

Como podemos notar en la gráfica anterior, los datos experimentales permiten construir una línea de tendencia que se ajusta mejor a una función potencial dada por la relación

$$\alpha(n) = 0.731n^{-0.386}, \quad (4.1)$$

con un coeficiente de determinación¹ de $R^2 = 0.998$ que es próximo a 1, lo que garantiza un buen ajuste.

Por otra parte para matrices con entradas de valores “grandes”, es decir, *escala* de 50, los datos obtenidos fueron los siguientes

n	α	Éxitos %	k	Tiempo
2	0.085	100	525.77	0.028107
3	0.078	100	750.40	0.042329
5	0.065	100	907.25	0.049813
10	0.054	100	915.49	0.055985
15	0.045	100	1025.70	0.076184
20	0.041	100	886.79	0.063604
30	0.033	100	1298.90	0.107010
40	0.029	100	1426.86	0.136762
45	0.028	100	1383.90	0.145275
50	0.027	100	1053.88	0.132230
60	0.025	100	995.81	0.142111
70	0.023	100	1387.33	0.314607
80	0.021	100	1859.55	0.464106
90	0.020	100	1939.40	0.537423
100	0.019	100	2024.70	0.596548

Tabla 4.3: Resultados numéricos, α “óptimo” para cada n , caso simétrico, *escala* = 50.

Observemos de forma gráfica a continuación cómo varía la dimensión del valor de α a medida que incrementamos el orden (n) en la siguiente figura

¹El coeficiente de determinación denotado R^2 representa la variación de la proporción de la variable dependiente que la regresión estimada es capaz de explicar. Si la regresión tiene un ajuste suficientemente bueno, será debido a que la variable independiente explica buena parte de la variación que la variable dependiente experimenta a lo largo de la muestra. Por lo tanto, un coeficiente de determinación cercano a 1 indica que las estimaciones obtenidas para los coeficientes del modelo de regresión permiten que este modelo explique un alto porcentaje de las variaciones de la variable dependiente.

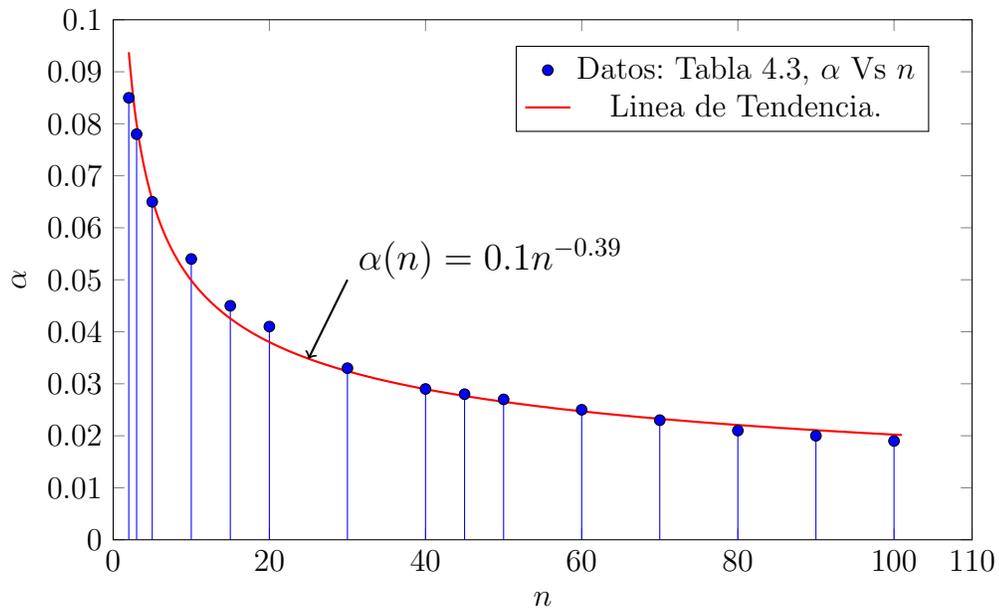


Figura 4.2: Gráfica de α “óptimo” Vs Orden n .

En este caso, los datos empíricos posibilitan la creación de una línea de regresión que se adapta de manera óptima a una función de tipo potencial definida por la relación

$$\alpha(n) = 0.1n^{-0.39}, \quad (4.2)$$

con un coeficiente de determinación de $R^2 = 0.987$.

Teniendo los resultados (4.1) y (4.2) hemos solucionado el inconveniente inicial, por ello podemos comenzar la experimentación principal, el método extragradiante aplicado al problema $VPC(A,B)$.

4.2. Experimento 2

Llevamos a cabo 100 ejecuciones para cada valor de n . En cada ejecución, generamos de manera aleatoria un problema y también creamos el punto inicial \mathbf{y}_0 utilizando el comando $rand(n+1,1)$. Posteriormente, resolvimos cada uno de estos problemas utilizando el **Algoritmo 2**, para determinar el parámetro α adecuado requerido del algoritmo para cualquier dimensión, empleamos la ecuación (4.1) y (4.2) cuando la escala es 1 y 50 respectivamente; este experimento se realizó para dos tipos de problemas de $VPC(A,B)$, para el caso simétrico y para el caso asimétrico, los resultados se presentan a continuación en la **Tabla 4.4** y la **Tabla 4.5**

n	α	Éxitos %	Tipo de problema			
			Caso Simétrico		Caso Asimétrico	
			k	Tiempo	k	Tiempo
2	0.5594	100	111.46	0.007542	130.93	0.007440
25	0.21101	100	89.32	0.008862	88.23	0.007388
50	0.16148	100	118.61	0.014878	102.68	0.013557
75	0.13808	100	137.14	0.032404	134.39	0.033691
100	0.12357	100	126.32	0.037423	125.37	0.035240
125	0.11337	100	140.56	0.047052	136.45	0.047152
150	0.10567	100	156.16	0.077134	153.26	0.071982
175	0.09956	100	177.49	0.096759	171.84	0.093239
200	0.09456	100	206.72	0.135814	200.32	0.137101
225	0.09036	100	249.97	0.199092	236.30	0.178752
250	0.08676	100	322.10	0.329837	297.77	0.306908
275	0.08362	100	464.31	0.694583	420.83	0.638027
300	0.08086	100	944.61	2.243293	752.20	1.713484

Tabla 4.4: Resultados numéricos del problema de $VPC(A,B)$ con **Algoritmo 2**; $escala = 1$

En la tabla anterior podemos apreciar que empleando la ecuación (4.1) nos garantiza una convergencia del método del 100 % de éxitos para cualquier dimensión que deseamos estudiar; obviamente esta ecuación solo será válida para el problema bajo las condiciones ya mencionadas, pero nos dará la confianza de que el método convergerá y lograr así, realizar la experimentación para matrices de orden superior a 100, esta es una de las ventajas a destacar que nos brindó esta experimentación; por otra parte la ecuación (4.1) también asegura la convergencia del algoritmo tanto para el caso simétrico de

$VPC(A,B)$ como para el caso no simétrico; estos dos tipos de problemas presentaron un comportamiento análogo cuando incrementamos el orden n , como se puede observar en las **figuras 4.3** y **4.4**; es decir, el tiempo de ejecución del algoritmo extragradiante y las iteraciones hasta obtener la solución en los dos tipos de problemas tendieron a incrementarse a medida que se aumentaba el orden n , esto era de esperarse pues el punto inicial aleatorio que se elegía se alejaba de la solución a medida que incrementábamos la dimensión y con ello tomaría mas tiempo y mas iteraciones hasta lograr obtener la solución deseada. La tabla también muestra que el número de iteraciones es muy grande, pero el tiempo de ejecución es aceptable en comparación por ejemplo con el método de Newton; cabe destacar que el algoritmo extragradiante logró converger cuando el punto inicial \mathbf{y}_0 esta muy alejado de la solución como se anticipaba y también para matrices de orden grande.

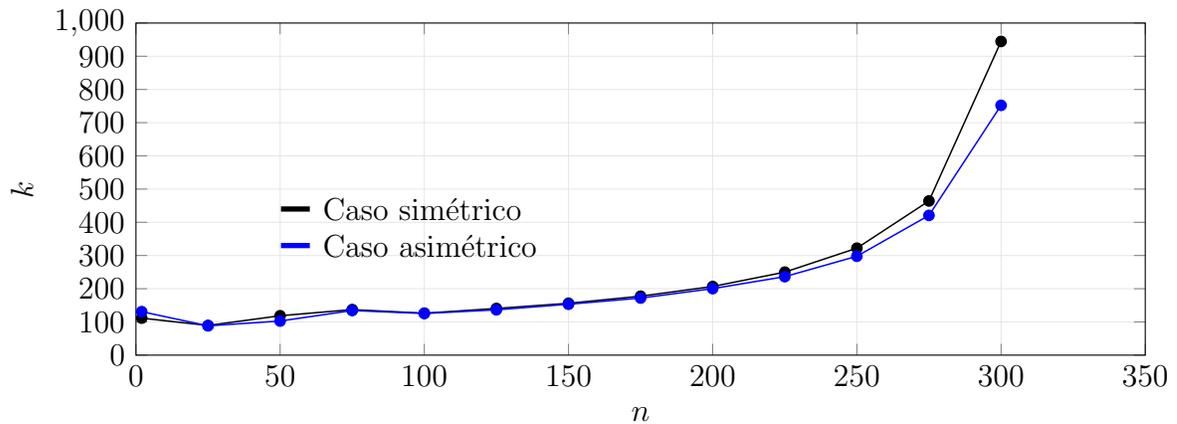


Figura 4.3: Gráfica de k vs Orden n . **Tabla 4.4**

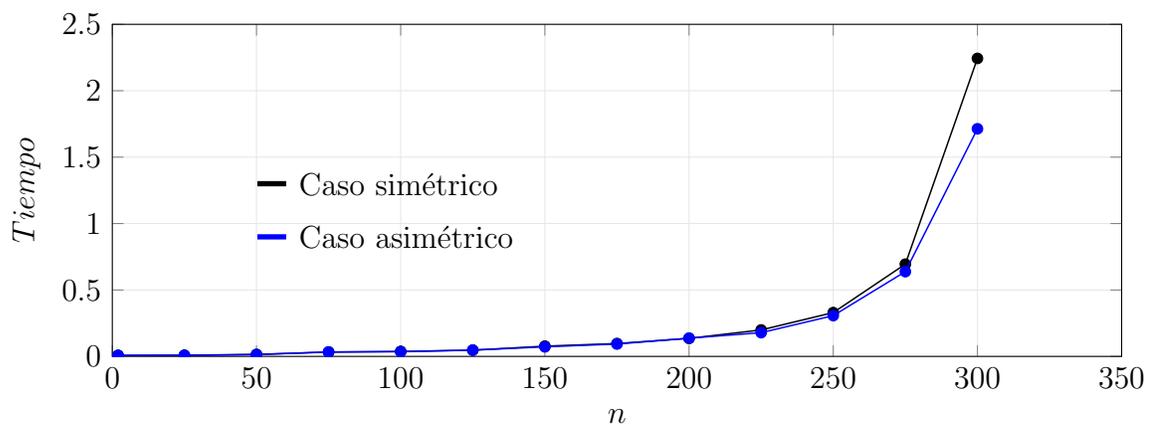


Figura 4.4: Gráfica de $Tiempo$ vs Orden n . **Tabla 4.4**

Ahora veamos en la siguiente tabla como se comporta el algoritmo extragradiante aplicado al problema de $VPC(A,B)$ tanto para el problema simétrico como no simétrico para valores “grandes” en las entradas de la matriz A ; es decir, $escala = 50$

n	α	Tipo de problema					
		Caso Simétrico			Caso Asimétrico		
		Éxitos	k	Tiempo	Éxitos	k	Tiempo
2	0.07631	95	798.76	0.04447	86	432.59	0.02159
25	0.02850	94	1562.82	0.12343	93	1386.46	0.10558
50	0.02175	98	1897.37	0.25041	94	1766.51	0.22812
75	0.01857	98	2160.20	0.48835	100	2050.56	0.52201
100	0.01660	99	2355.69	0.68786	99	2274.11	0.65263
125	0.01521	99	2541.83	0.97347	99	2465.60	0.86150
150	0.01417	100	2708.64	1.48074	100	2636.33	1.44171
175	0.01334	99	2857.36	1.83978	99	2799.40	1.76006
200	0.01266	100	2991.84	2.45218	100	2935.12	2.21554
225	0.01210	100	3124.33	3.00766	99	3065.22	2.83553
250	0.01161	100	3237.62	4.33397	100	3189.40	4.09070
275	0.01119	100	3352.77	6.33483	100	3306.29	6.36265
300	0.01081	100	3458.36	9.76580	100	3419.63	9.46863
325	0.01048	100	3553.37	14.30233	100	3517.10	14.02619
350	0.01018	100	3654.50	18.99688	100	3604.36	18.62455
375	0.00991	100	3735.76	38.13397	100	3712.61	38.26501
400	0.00966	100	3823.31	44.53712	100	3799.16	44.51681
425	0.00944	100	3897.29	50.53082	100	3861.18	50.75459
450	0.00923	100	3985.60	57.92361	100	3935.89	57.50130

Tabla 4.5: Resultados numéricos del problema $VPC(A,B)$ con **Algoritmo 2**, $escala = 50$

En la **Tabla 4.5** podemos ver que el valor de α en comparación con la **Tabla 4.4** es inferior para dimensiones de matrices iguales; lo cual es un indicador de que para valores de entradas grandes en la matriz A el tamaño de paso α disminuye lo que provoca que el algoritmo tome más tiempo y más iteraciones hasta obtener la solución; también se puede apreciar que el algoritmo extragradiante presenta una buena convergencia al mostrar un porcentaje significativamente muy alto de éxitos; de nuevo nos asegura que el algoritmo converja inclusive para matrices de tamaño $n = 450$; por otra parte vemos que tanto el número de iteraciones como el tiempo de ejecución se incrementa cuando aumentamos el orden n como podemos apreciar en la **figura 4.5** y **figura 4.6**. Es importante señalar

que el algoritmo converge inclusive para matrices de tamaño grandes y también tomando puntos iniciales distantes de la solución con un 100% de éxitos lo cual ratifica una de las propiedades importantes del método extragradiante.

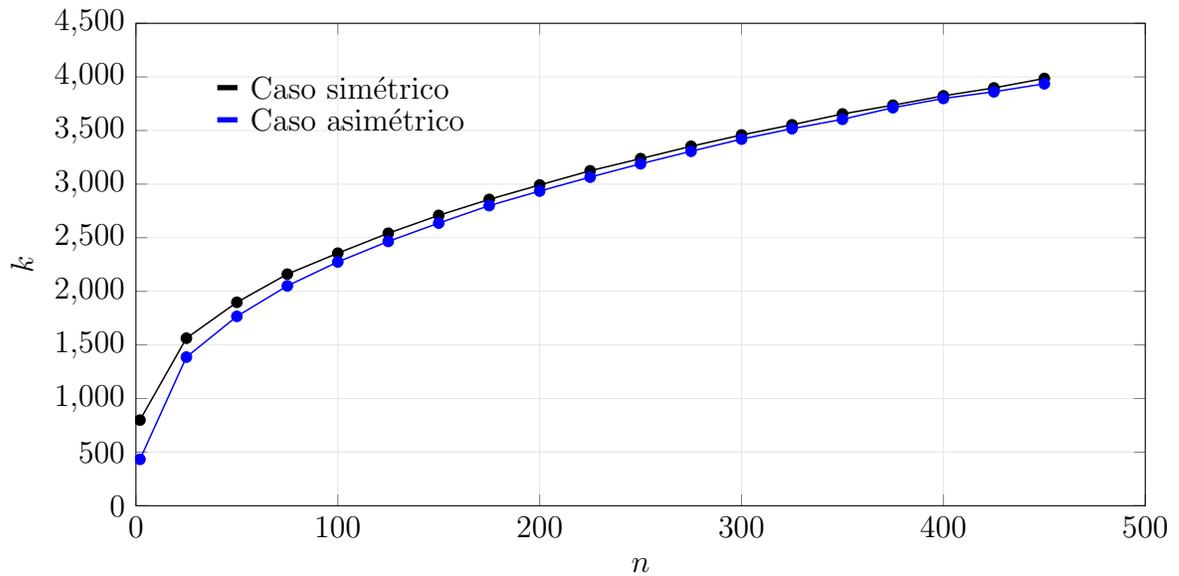


Figura 4.5: Gráfica de k Vs Orden n . Tabla 4.5

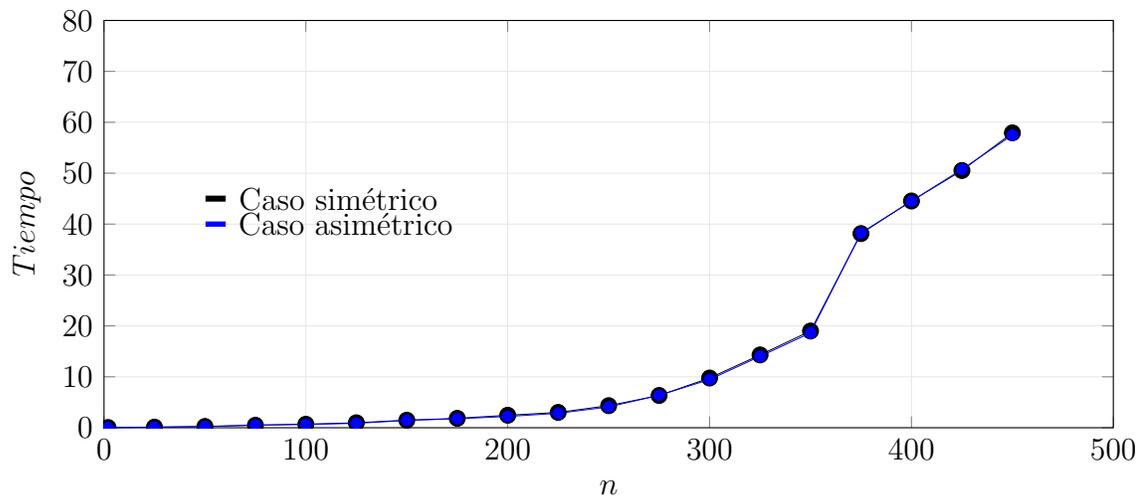


Figura 4.6: Gráfica de $Tiempo$ Vs Orden n . Tabla 4.5

Capítulo 5

Comentarios finales

Como se pudo apreciar hemos logrado implementar el algoritmo extragradiante como técnica de solución del problema de $VPC(A,B)$, en general observamos que el tiempo de ejecución del algoritmo tiene un incremento gradual a medida que se incrementa el orden de la matriz “n”, de igual forma para el número de iteraciones “k”. Una de sus principales ventajas es que el punto inicial puede estar bastante alejado de la solución y aun así se puede lograr la convergencia.

Es importante anotar que aunque en el algoritmo extragradiante, el parámetro α no se define explícitamente, en este trabajo logramos determinar una función que relaciona la dimensión del problema y el tamaño de paso α del algoritmo extragradiante y con ello obtener un valor explícito que garantizó la convergencia en un alto porcentaje de casos exitosos, esta cualidad no siempre se tiene en otras técnicas de solución, como puede ser el método de Newton. Además, el algoritmo extragradiante puede resolver tanto problemas simétricos como asimétricos, lo cual es indiferente al tipo de clasificación del problema. Esta flexibilidad es una ventaja significativa, ya que permite la implementación del método de manera generalizada.

Es crucial seleccionar un valor de α adecuado. Un valor demasiado grande puede afectar negativamente la convergencia, mientras que un valor demasiado pequeño puede ralentizar el proceso. Generalmente, los valores de α en nuestro caso son muy “pequeños”, tomando valores en un intervalo abierto entre 0 y 1.

En conclusión el algoritmo extragradiante como técnica de solución del problema de $VPC(A,B)$ es una técnica efectiva, pues asegura una solución óptima con una alta tasa

de éxito en la convergencia, con problemas inclusive de gran escala y con la elección de puntos alejados de la solución, además de ser un método relativamente simple de implementar computacionalmente.

Referencias

- A. Chen, D. P., J. Oh, y Recker, W. (2010). Solving the bicriteria traffic equilibrium problem with variable demand and nonlinear path costs. *Applied Mathematics and Computation*, 217(7), 3020 - 3031. doi: 10.1016/j.amc.2010.08.035
- Arenas, F. E., Pérez, R., y Martínez, H. J. (2015). Least Change Secant Update Methods for Nonlinear Complementarity Problem. *Ingeniería y Ciencia*, 11(21), 11-36. doi: 10.17230/ingciencia.11.21.1
- Arenas, F. E., Pérez, R., y Vivas, H. (2016). Un modelo de redes neuronales para complementariedad no lineal. *Integración*, 34(2), 169-185. doi: 10.18273/revint.v34n2-2016005
- Arias, C. A., y Martínez, J. M. (2018). Fast convergence of an inexact interior point method for horizontal complementarity problems. *Numerical Algorithms*, 79(4), 1-24. doi: 10.1007/s11075-018-0480-8
- Arias, C. A., Pérez, R., y Martínez, H. J. (2017). A nonsmooth global cuasi-Newton method for nonlinear complementary problems. *Pacific Journal Of Optimization*, 13(1), 1-15. doi: ISSN1349-8169
- Cottle, R. W., Pang, J. S., y Stone, R. (2009). *The lineal complementary problem* (1.^a ed.). Society for Industrial and Applied Mathematics.
- De Luca, T., Facchinei, F., y Kanzow, C. (1996). A semismooth equation approach to the solution of nonlinear complementarity problems. *Mathematical Programming*, 75(1), 407-439. doi: 10.1007/BF02592192
- Ding, J., y Yin, H. (2007). A New Homotopy Method for Nonlinear Complementarity Problems. *Numerical Mathematics*, 16(2), 155-163. doi: 10.1080/02331930802355317
- Facchinei, F., y Pang, J. (2003). Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems. *Springer*, 2. doi: 10.1007/b97544
- Ferris, M. C., Pang, J. S., y Stone, R. (1997). *Complementary and variational problems, state of the art*. SIAM.
- Goldstein, A. A. (1964, 09). Convex programming in hilbert space. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 70, 709-710. doi: 10.1090/S0002-9904-1964-11178-2
- Júdice, J., Raydan, M., Rosa, S., y Santos, S. (2008). On the solution of the symmetric eigenvalue complementarity problem by the spectral projected gradient algorithm. *Numerical Algorithms*, 47(4), 391-407. doi: 10.1007/s11075-008-9194-7
- Júdice, J. J., Serali, H. D., y Ribeiro, I. M. (2007). The eigenvalue complementarity problem. *Computational Optimization and Applications*, 37(2), 139-156. doi: 10.1007/s10589-007-9017-0
- Kanzow, C., y Kleinmichel, H. (1998). A new class of semismooth Newton-type methods for nonlinear complementarity problems. *Computational Optimization and Appli-*

- cations*, 11(3), 227-251. doi: 10.1023/A:1026424918464
- Kojima, M., Megiddo, N., y Mizuno, S. (1993). A General Framework of Continuation Methods for Complementarity Problems. *Mathematics of Operations Research*, 18(4), 945-963. doi: 10.1287/moor.18.4.945
- Kojima, M., Megiddo, N., y Noma, T. (1991). Homotopy Continuation Methods for Non-linear Complementarity Problems. *Mathematics of Operations Research*, 16(4), 754-774. doi: 10.1287/moor.16.4.754
- Korpelevich, G. (1976, 01). The extragradient method for finding saddle points and other problems. *Matecon*, 12, 747-756.
- Kostreva, M. M. (1984). Elasto-Hidrodinamic lubrication: A Non-Linear Complementarity Problem. *International Journal for numerical methods in fluids*, 4(4), 377-397. doi: 10.1002/fld.1650040407
- Levitin, E., y Polyak, B. (1966). Constrained minimization methods. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 6(5), 1 - 50. doi: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(66\)90114-5](https://doi.org/10.1016/0041-5553(66)90114-5)
- Liao, L. Z., Qi, H., y Qi, L. (2001). Solving nonlinear complementarity problems with neural networks: a reformulation method approach. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 131(2), 343-359. doi: 10.18273/revint.v34n2-2016005
- Lillo, W. E., Loh, M. H., y Zak, S. H. (1993). On solving constrained optimization problems with neural networks: a penalty method approach. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 4(6), 931-940. doi: 10.1109/72.286888
- lopez, V., Martínez, J. M., y Perez, R. (1999). On the local convergence of quasi-Newton methods for nonlinear complementarity problems. *Applied Numerical Mathematics*, 30(1), 3-22. doi: 10.1016/S0168-9274(98)00080-4
- Pérez, R., Arenas, F., y Arias, C. A. (2022). Resolviendo el problema de valores propios complementarios mediante un algoritmo cuasi-Newton. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas Físicas y Naturales*, 46(179), 325-338. doi: 10.18257/raccefyn.1623
- Pérez, R., y Díaz, T. (2010). *Minimización sin restricciones* (1.ª ed.). Editorial Universidad del Cauca.
- Pinto da Costa, A., Martins, J. A. C., Figueiredo, I. N., y Júdice, J. (2004). The directional instability problem in systems with frictional contacts. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(3), 357-384. doi: 10.1016/j.cma.2003.09.013
- Queiroz, M., Júdice, J. J., y Humes, C. J. (2004). The symmetric eigenvalue complementarity problem. *Math. Comput.*, 73(1), 1849-1863. doi: 10.1090/S0025-5718-03-01614-4
- Xiu, N., y Zhang, J. (2003). Some recent advances in projection-type methods for variational inequalities. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 152(1), 559 - 585. doi: 10.1016/S0377-0427(02)00730-6

-
- Zambrano, D., y Arenas, F. (2023). Comparación numérica de métodos tipo newton generalizado y el algoritmo extragradiante para el problema de complementariedad no lineal. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 47, 160–171. doi: 10.18257/raccefyn.1623