Conocimiento especializado de profesores de educación básica primaria en relación con el pensamiento algebraico temprano

Sandra Yolima Ruiz Yacumal

Universidad del Cauca

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación

Doctorado en Ciencias de la Educación

Popayán

2026

Conocimiento especializado de profesores de educación básica primaria en relación con el pensamiento algebraico temprano

Informe final presentado como requisito para optar al título de Doctora en Ciencias de la Educación

Línea de Investigación – Sujeto, Saber Pedagógico y Ciencias

Sandra Yolima Ruiz Yacumal

Directora:

Dra. Jenny Patricia Acevedo-Rincón[1]

Universidad del Cauca

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación

Doctorado en Ciencias de la Educación

Popayán

2026

[1] Escuela de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander.

Nota de aceptación

_____

_____

_____

_____

Directora: _____

Dra. Jenny Patricia Acevedo-Rincón

Jurado: _____

Dra. Samin Ingrith Cerón Bravo

Jurado: _____

Dra. Elisabeth Ramos Rodríguez

Jurado: _____

Dr. Campo Elías Flórez Pabón

Lugar y fecha de sustentación: *Popayán, 28 de Agosto de 2026*

Dedicatoria

A Dios y a la Virgen María, por las bendiciones recibidas y por iluminar cada paso de este camino.

A mis amados hijos, Carlos Alberto y Miguel Ángel, cuyo amor inmenso, comprensión y apoyo incondicional hicieron posible la culminación de este sueño.

A mi esposo, Fernando, por su paciencia infinita, por cada taza de café compartida y por sus incontables horas de escucha, compañía y aliento en los momentos más exigentes de este recorrido.

A mi hermana Ximena y a mis hermanos Álvaro y John; especialmente, a quien hoy ya no me acompaña físicamente, pero permanece vivo en mi memoria y en mi corazón. Estoy segura de que compartiría profundamente la alegría de este logro.

A mis padres, Luisa y Edgar, así como a mis sobrinos y cuñados, por su cariño, apoyo constante y presencia incondicional a lo largo de este proceso.

Agradecimientos

A la Universidad del Cauca y al programa de Doctorado en Ciencias de la Educación, por brindarme un espacio académico de excelencia que fortaleció profundamente mi formación intelectual, investigativa y humana. En este recorrido encontré el respaldo institucional necesario para crecer, cuestionar, aprender y avanzar.

A los coordinadores del programa, doctor Luis Evelio Álvarez, doctora Luz Adriana Rengifo y doctora Ángela Yicely Castro, por su orientación y acompañamiento permanente durante este proceso formativo. Asimismo, expreso mi gratitud a los docentes responsables de los distintos seminarios, quienes, con generosidad y compromiso, compartieron sus saberes, experiencias investigativas y su pasión por la educación.

Un agradecimiento especial a Jobhana Andrea Muñoz Meneses, por su valiosa colaboración en las gestiones académicas y administrativas, y por convertirse en un apoyo fundamental a lo largo de este camino doctoral.

Mi más profundo y eterno agradecimiento a mis directoras de investigación, las doctoras Yuly Vanegas, Marisol Santacruz y Jenny Patricia Acevedo, por aceptar acompañar y orientar este proceso investigativo. Su experiencia, rigurosidad y conocimiento iluminaron las decisiones que dieron sentido y dirección a este trabajo. Gracias por su confianza, por su apoyo incansable y por enseñarme, a través de su ejemplo, el valor de la disciplina, la constancia, el rigor académico y el amor por la educación y la investigación.

Un reconocimiento profundamente sentido a los profesores participantes de esta investigación, su disposición, disponibilidad, apertura y compromiso hicieron posible el desarrollo de este trabajo. A ustedes, mi gratitud por abrir espacios, compartir experiencias y

convertir este proceso investigativo en una construcción colectiva.

A los revisores externos, doctora Samin Ingrith Cerón Bravo, doctora Elisabeth Ramos Rodríguez y doctor Campo Elías Flórez Pabón, por su tiempo, disposición y lectura crítica de este trabajo. Sus observaciones y comentarios enriquecieron significativamente este documento y contribuyeron a fortalecer su calidad académica.

A la doctora Dinazar, quien acompañó mi proceso de pasantía académica, así como a los profesores de la Facultad de Educación y del Departamento de Matemáticas de la Universidad Complutense, por abrirme las puertas de ese espacio académico y permitirme vivir una experiencia profundamente enriquecedora para mi formación investigativa.

A quienes fueron compañeras de este trayecto doctoral y que, aun en la distancia y en la intermitencia de los encuentros, dejaron una huella invaluable en este proceso y en mi vida: Teresita de Jesús y Sandra Patricia. Gracias por las conversaciones compartidas, por el apoyo mutuo y por hacer más humano este camino.

Un agradecimiento especial al profesor Guillermo Rojas Quiceno, por su valiosa amistad, sus consejos y sus generosas recomendaciones, que constituyeron un apoyo significativo durante este camino académico y personal.

Finalmente, gracias a todas las personas que, de una u otra manera, hicieron parte de este recorrido. Llegué aquí con temores, incertidumbres y múltiples preguntas; con mucho por aprender y descubrir. Hoy culmino esta etapa con la convicción de que cada desafío, cada encuentro y cada experiencia transformaron mi formación académica y mi manera de comprender la educación, la investigación y la vida.

Tabla de Contenido

RESUMEN 1

ABSTRACT 3

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y JUSTIFICACIÓN 5

1.1 MOTIVACIÓN 5

1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 8

1.3 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN 13

1.4 OBJETIVO GENERAL 13

1.5 OBJETIVOS ESPECÍFICOS 13

1.6 JUSTIFICACIÓN 13

CAPÍTULO 2. ESTADO DEL ARTE 17

2.1 CATEGORÍAS DE ANÁLISIS EMERGENTES EN EL ANÁLISIS DOCUMENTAL 19

2.2 PERSPECTIVAS TEÓRICAS SOBRE EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS 25

2.3 ESTUDIOS SOBRE EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS 30

2.4 ESTUDIOS SOBRE CONOCIMIENTO DE LOS PROFESORES PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS 32

2.5 ESTUDIOS SOBRE EL CONOCIMIENTO CURRICULAR DE LOS PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA PRIMARIA 35

2.6 ESTUDIOS SOBRE PENSAMIENTO ALGEBRAICO TEMPRANO EN EDUCACIÓN BÁSICA PRIMARIA 37

CAPÍTULO 3. MARCO TEÓRICO 42

3.1 CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS (MODELO MTSK) 43

3.1.1 CONOCIMIENTO MATEMÁTICO (MK) 45

3.1.2 CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO (PCK) 46

3.1.3 CONOCIMIENTO DE LOS TEMAS (KOT) 47

3.1.4 Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT) 52

3.1.5 Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS) 53

3.2 Pensamiento Algebraico Temprano 55

3.3 Generalización de Patrones 59

3.4 Conocimiento de Profesores de Matemáticas en Educación de Primaria 64

CAPÍTULO 4. METODOLOGÍA Y DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN 67

4.1 Diseño de Investigación: Estudio de Caso Instrumental 69

4.2 Selección de los Participantes 74

4.2.1 Sara 77

4.2.2 Orlando 78

4.2.3 Cristóbal 79

4.3 Instrumentos de Recolección de Datos 80

4.3.1 Cuestionarios KoT, KMT y KMLS 88

4.3.2 Entrevista semiestructurada 100

4.4 Procedimiento de Análisis de la Información 103

4.5 Aspectos Éticos 119

CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DE RESULTADOS 121

5.1 Resultados del Subdominio Conocimiento de los Temas (KoT) 122

5.1.1 Procedimientos del Desarrollo del Pensamiento Algebraico Asociados a la Enseñanza de la Generalización de Patrones 122

5.1.2 Definiciones, Propiedades y Fundamentos 128

5.1.3 Registros de Representación 133

5.1.4 Fenomenología y aplicaciones en la generalización de patrones 140

5.2 Resultados del Subdominio Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT) 154

5.2.1 Teorías de la Enseñanza de las Matemáticas 157

5.2.2 Recursos Didácticos (Físicos y Digitales) 163

5.2.3 Estrategias, Tareas y Ejemplos en la Enseñanza del Patrón 172

5.2.4 Articulaciones Transversales del KMT 175

5.3 Resultados del Subdominio Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje en Matemáticas (KMLS) 179

5.3.1 Resultados de Aprendizaje Esperados 181

5.3.2 Nivel Esperado de Desarrollo Conceptual o Procedimental 185

5.3.3 Secuenciación de Temas 191

5.4 Discusión de Resultados 197

5.4.1 Conexión entre el Conocimiento Matemático y la Práctica 198

5.4.2 La Gestión de los Registros de Representación 201

5.4.3 El papel de los Estándares Curriculares (KMLS) vs. Realidad 204

5.4.4 Implicaciones para la Formación del Profesor 206

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES 209

6.1 Aportes de la Investigación 224

REFERENCIAS 233

APÉNDICES 251

1. **Apéndice A. Base de datos** 251
2. **Apéndice B. Caracterización** 251
3. **Apéndice C. Perfiles académicos de los jueces expertos** 251
4. **Apéndice D. Transcripciones Cuestionario KoT** 252
5. **Apéndice E. Transcripciones Cuestionario KMT** 252
6. **Apéndice F. Transcripciones Cuestionario KMLS** 252
7. **Apéndice G. Transcripciones de entrevista semiestructurada** 253
8. **Apéndice H. Matrices** 253

ANEXOS **255**

1. ANEXO A. CONSENTIMIENTO DE PARTICIPANTES **255**

2. ANEXO B. OBSERVACIONES DE JURADOS **255**

Lista de Tablas

Tabla 1..... **19**

Tabla 2..... **20**

Tabla 3..... **27**

Tabla 4..... **82**

Tabla 5..... **84**

Tabla 6..... **93**

Tabla 7..... **101**

Tabla 8..... **105**

Tabla 9..... **111**

Tabla 10..... **116**

Tabla 11..... **152**

Tabla 12..... **178**

Tabla 13..... **195**

Tabla 14..... **218**

Lista de Figuras

Figura 1 21

Figura 2 24

Figura 3 45

Figura 4 58

Figura 5 60

Figura 6 63

Figura 7 65

Figura 8 71

Figura 9 108

Figura 10 125

Figura 11 126

Figura 12 127

Figura 13 149

Figura 14 151

Figura 15 156

Figura 16 180

Figura 17 212

Figura 18 213

Figura 19 221

Figura 20. 229

Resumen

La presente investigación tiene como objetivo caracterizar el conocimiento especializado de profesores de Educación Básica Primaria en relación con el pensamiento algebraico temprano, específicamente en el dominio de la generalización de patrones. El estudio se fundamenta teóricamente en el modelo *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (*MTSK*), centrando el análisis en los subdominios del Conocimiento Matemático (MK) particularmente, el Conocimiento de los Temas (*KoT*) y el Conocimiento Didáctico del Contenido (*PCK*), que abarca el Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (*KMT*) y el Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje Matemático (*KMLS*). Metodológicamente, el trabajo se inscribe en el paradigma cualitativo-interpretativo, empleando un diseño de estudio de caso múltiple con tres docentes de Educación Básica Primaria. La recolección de información se realizó a través de cuestionarios de situaciones, entrevistas semiestructuradas y registros de observación de aula. El análisis de los datos se hizo mediante una triangulación de fuentes, utilizando categorías a priori derivadas del modelo *MTSK* y categorías emergentes vinculadas a la práctica pedagógica. Los hallazgos revelan que los docentes cuentan con un conocimiento sólido en los procedimientos aritméticos, pero presentan limitaciones en la movilización del conocimiento especializado para promover la generalización funcional. Se identifica una tendencia a priorizar el pensamiento recursivo sobre el funcional y una escasa profundización en la fenomenología y en los diversos registros de representación semiótica del álgebra temprana. Asimismo, se evidencia que, aunque los docentes reconocen los estándares curriculares (*KMLS*), existe una desconexión entre el conocimiento teórico de la norma y su implementación práctica para fomentar niveles superiores de abstracción en los estudiantes. Se concluye que es imperativo fortalecer la formación continua

en el modelo *MTSK* para facilitar la transición efectiva de una aritmética computacional a un pensamiento algebraico relacional en los primeros años de escolaridad.

Palabras clave: Conocimiento especializado, Profesor de primaria, Pensamiento algebraico temprano, Generalización de patrones, Modelo *MTSK*.

Abstract

This research aims to characterize the specialized knowledge of primary school teachers regarding early algebraic thinking, specifically within the domain of pattern generalization. The study is theoretically grounded in the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) model, focusing the analysis on the subdomains of Mathematical Knowledge (MK) particularly Knowledge of Topics (KoT) and Pedagogical Content Knowledge (PCK), which encompasses Knowledge of Mathematics Teaching (KMT) and Knowledge of Mathematics Learning Standards (KMLS). Methodologically, the study follows a qualitative-interpretative paradigm, employing a multiple case study design with three elementary school teachers from public institutions. Data collection was conducted through situation-based questionnaires, semi-structured interviews, and classroom observations. Data analysis was performed using source triangulation, utilizing a priori categories derived from the MTSK model alongside emerging categories linked to pedagogical practice. The findings reveal that while teachers have a solid knowledge of arithmetical procedures, they face limitations in mobilizing specialized knowledge to promote functional generalization. A tendency to prioritize recursive over functional thinking is identified, along with a lack of depth regarding phenomenology and the various registers of semiotic representation in early algebra. Furthermore, evidence suggests that although teachers recognize learning standards (KMLS), there is a disconnect between theoretical knowledge of the regulations and their practical implementation to foster higher levels of abstraction in students. The study concludes that it is imperative to strengthen continuous professional development within the MTSK framework to facilitate an effective transition from computational arithmetic to relational algebraic thinking in the early years of schooling.

Keywords: *Specialized knowledge, Elementary teacher, Early algebraic thinking, Pattern generalization*, *MTSK model.*

Capítulo 1. Planteamiento del Problema y Justificación

Este apartado presenta un panorama de las motivaciones que impulsaron el estudio del conocimiento especializado en relación con el pensamiento algebraico temprano, sustentado en tres ejes: la experiencia profesional, una revisión de la literatura sobre conocimiento especializado y el contexto de investigación en Educación Matemática. Dado el carácter personal de esta motivación, su exposición se presentará en primera persona, a diferencia de la forma en que se redactará el resto del informe. A continuación, se presenta el planteamiento del problema, la pregunta de investigación y los objetivos que plantea el presente estudio. Finalmente, la justificación argumenta la pertinencia y urgencia de replantear la enseñanza del álgebra en la Educación Básica Primaria a partir de evidencias teórico-empíricas que respaldan el desarrollo del pensamiento algebraico desde edades tempranas.

1.1 Motivación

El estudio del conocimiento especializado del profesorado de primaria se ha consolidado como un campo importante en la investigación en Educación Matemática (Pincheira y Alsina, 2021). Mi interés por esta investigación surgió a partir de mi trayectoria profesional de más de veinte años como profesora en Educación Básica Primaria, Básica Secundaria y Educación Media, así como la experiencia en formación de profesores de Educación Básica Primaria, especialmente en el Programa Todos a Aprender (PTA) del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN)[2].

[2] El Programa Todos a Aprender (PTA) es una iniciativa del Ministerio de Educación Nacional (MEN) de Colombia, implementada desde 2012 con el objetivo de mejorar la calidad de la educación en las instituciones oficiales del país. Su enfoque principal es fortalecer los aprendizajes de los estudiantes de transición a quinto grado de básica primaria, especialmente en las áreas de Lenguaje y Matemáticas.

En mi rol como tutora del PTA, desde 2015 hasta 2023, tuve la oportunidad de acompañar a profesores de primaria en zonas urbanas y rurales en su formación para la cualificación de sus prácticas de enseñanza en Educación Básica Primaria. Esta experiencia me llevó a reconocer tensiones persistentes entre las expectativas establecidas por las orientaciones curriculares en torno al desarrollo del pensamiento variacional desde los primeros grados (MEN, 1998, 2006) y las prácticas cotidianas en el aula las cuales que, con frecuencia, se reducen a actividades mecánicas o centradas exclusivamente en lo numérico que dificultan el desarrollo del pensamiento algebraico (Aké et al., 2013; Pincheira y Alsina, 2021; Zapatera, 2018). Dado que algunos de los profesores de Educación Básica Primaria presentan limitaciones para comprender y promover el pensamiento algebraico temprano en sus estudiantes, particularmente en relación con la generalización de patrones durante los primeros años de escolarización. Por ello, resulta fundamental que el profesor de primaria sea consciente de esta definición de *generalización de patrones* como un conocimiento que resulta crucial para gestionar la transición del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico.

Según Radford (2008) y Vergel (2010) la importancia se manifiesta en varios aspectos clave de la práctica profesoral: i) Distinción entre generalización algebraica y aritmética: la generalización aritmética (o recursiva) solo implica percibir una propiedad común y extenderla para encontrar el siguiente término de la secuencia. La generalización algebraica (o funcional) exige el tercer paso: utilizar la propiedad común (o comunalidad) para deducir una expresión directa (una regla) que permita calcular *cualquier* término de la secuencia. La consciencia de este marco permite al profesor estar "alerta" y emplear estrategias pertinentes "en un sentido algebraico". ii) Desarrollo del pensamiento algebraico temprano: el propósito es introducir modos de pensamiento algebraico desde los primeros años de escolarización. En ese sentido, la

generalización de patrones se reconoce como una de las vías más relevantes para promover dicho pensamiento. Bajo este marco, la enseñanza debe desplazarse de la mera obtención de respuestas particulares hacia la identificación y el análisis de relaciones, estructuras y regularidades. iii) La generalización consiste en convertir una comunalidad inicialmente conjetural en una hipótesis que se emplea de manera analítica, característica central del pensamiento algebraico. Este tipo de pensamiento se distingue por el tratamiento de cantidades indeterminadas como si fueran conocidas, aún en ausencia de notación simbólica formal.

En resumen, la conciencia del proceso de generalización de patrones permite al profesor a reconocer y valorar manifestaciones tempranas del pensamiento algebraico en los estudiantes, expresadas mediante medios semióticos de objetivación (lenguaje natural, gestos o recursos contextuales) (Vergel, 2019; Zapatera, 2022).

Así pues, la formación académica y la experiencia son determinantes en la configuración de este interés investigativo, al evidenciar las inquietudes y necesidades asociadas con el conocimiento especializado del profesor de Educación Básica Primaria (Zapata, 2019). Y el enfoque del pensamiento algebraico temprano (PAT) busca cultivar este pensamiento a partir de la observación de patrones, relaciones y estructuras matemáticas, orientado a una enseñanza basada en la comprensión y el significado (Vergel y Rojas, 2018). En este marco, la identificación del problema central se concentra en la generalización de patrones, pues se consideran una vía privilegiada para promover la emergencia y el desarrollo del pensamiento algebraico en la Educación Básica Primaria; en efecto, la generalización constituye un proceso cognitivo central en la actividad matemática (Radford, 2022; Vergel, 2015; Zapatera, 2022).

Por otra parte, la dimensión ética de la investigación adquiere relevancia cuando la experiencia profesional revela que la enseñanza tradicional, frecuentemente centrada en la

mecanización de procedimientos y en el uso exclusivo de notaciones simbólicas, resulta poco propicia para el desarrollo del pensamiento algebraico (Radford, 2015; Vergel, 2015; Zapatera, 2018).

En consecuencia, investigar la enseñanza del PAT se configura como un acto ético orientado a caracterizar los conocimientos especializados de los profesores de Educación Básica Primaria. Puesto que, tradicionalmente, el álgebra ha sido relegada y pospuesta a niveles educativos posteriores Educación Básica Secundaria (Alsina, 2019; Kaput et al., 2017; Kieran et al., 2016), esta estructura curricular se implementó históricamente con un largo ciclo centrado en la aritmética, retrasando la introducción del álgebra por concepciones erróneas sobre la naturaleza de la aritmética y del álgebra y por la falta de capacidad de los niños (Zapatera, 2018). Así pues, mi formación académica y experiencia han sido determinantes en la configuración de este interés investigativo, el cual trasciende lo meramente académico para convertirse en un acto ético que implica caracterizar los conocimientos especializados en este campo.

1.2 Planteamiento del Problema

Carrillo-Yañez et al. (2018) y Neubrand (2018) destacan preocupaciones centrales en la investigación sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas consisten en estudiar el tipo de conocimiento necesario para enseñar matemáticas. En la literatura, este conocimiento se ha organizado en los dominios del conocimiento matemático y del conocimiento pedagógico con la intención de facilitar su estudio analítico. Sin embargo, Montes y Carrillo (2017) y Rojas et al. (2015) advierten que tal segmentación resulta parcial, pues en la práctica profesoral estos componentes interactúan de forma dinámica e interdependiente. Esta constatación pone de relieve la necesidad de abordajes más holísticos de la compleja articulación de conocimientos que ocurre en el aula (Reyes et al., 2024). En consecuencia, enseñar sin una

comprensión articulada de los fundamentos teóricos y metodológicos del contenido matemático compromete la coherencia, la solidez y la continuidad del proceso de enseñanza, como lo señalan Ribeiro et al. (2023), reafirmando la necesidad de investigar cómo se articulan los conocimientos que requieren los profesores para su enseñanza de las matemáticas.

Es necesario, entonces, resaltar que el conocimiento disciplinar constituye el cimiento de la enseñanza matemática que exige la capacidad de tomar decisiones fundamentadas en conocimientos vinculados con las prácticas propias del quehacer del profesor en esta disciplina (Llinares et al., 2022). En particular, este tipo de conocimiento resulta relevante para comprender y promover el pensamiento algebraico desde los primeros grados de escolaridad, en la medida en que no se limita a un dominio instrumental de los contenidos. Por el contrario, debe habilitar al profesor para identificar estructuras matemáticas, establecer relaciones con sentido y anticipar procesos de generalización (Alsina y Acosta, 2018; Vergel, 2019; Pincheira y Alsina, 2022; Pincheira, 2023).

En esta misma línea, se proponen investigaciones en educación matemática orientadas al estudio del álgebra temprana[3] (Pincheira et al., 2023; Pincheira y Alsina, 2024; Ribeiro et al., 2024), las cuales han señalado desafíos para el desarrollo del pensamiento algebraico. Entre ellos, se destaca la transición del pensamiento aritmético al algebraico, así como la dificultad para incorporar tareas que promuevan dicho tipo de pensamiento (Pincheira et al., 2023). Estos retos se profundizan al constatar que profesores de educación primaria carecen del conocimiento especializado necesario para abordar dichos contenidos, lo que resalta la necesidad de investigar

[3] Según Radford (2022), el pensamiento algebraico temprano implica la capacidad de abstraer y generalizar relaciones matemáticas a partir de diversas representaciones, de modo que no se reduzca la comprensión del álgebra únicamente al uso de letras o a operaciones aritméticas mecánicas.

los conocimientos requeridos para promover el desarrollo del pensamiento algebraico (Pincheira y Alsina, 2024).

En consonancia, la literatura señala que el álgebra se ha concebido tradicionalmente como un conjunto de contenidos matemáticos destinados a niveles educativos superiores, particularmente, a partir de la educación secundaria (Adamuz et al., 2021; Alsina, 2019). Asimismo, se muestra que Colombia aún carece de producción investigativa acerca del conocimiento especializado de los profesores de Educación Básica Primaria, especialmente en lo que respecta al desarrollo del pensamiento algebraico temprano (Vergel, 2019; Vergel et al., 2022).

Considerando lo anterior, este estudio se inscribe en dos líneas de investigación en educación matemática: el pensamiento algebraico temprano y el conocimiento especializado de los profesores de primaria. A pesar de que existen múltiples modelos para analizar la especialización del conocimiento, la presente investigación prioriza el modelo analítico del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas *(MTSK* por sus siglas en inglés) propuesto por Carrillo-Yañez et al. (2018) debido a su estructura, basada en dominios y subdominios, permite analizar la enseñanza del profesor a partir de su conocimiento especializado[4] (Fuentes, 2020). Cabe señalar que dicha división se emplea con fines analíticos, para facilitar el estudio del conocimiento, sin perder de vista su carácter integrado a lo específico del pensamiento algebraico. Por tal razón, esta perspectiva permite profundizar en cada subdominio y, al mismo tiempo, establecer relaciones significativas entre ellos (Zakaryan y Sosa, 2021). Dada la complejidad de dicho modelo, el análisis profundiza en el estudio del conocimiento de los temas (*KoT*, por sus siglas en inglés), el conocimiento de la enseñanza

[4] En el modelo MTSK, considera "especializado" al tipo de reflexiones que el profesor establece sobre el conocimiento matemático que necesita para desempeñar su labor profesional (Escudero-Ávila et al., 2015).

(*KMT*, por sus siglas en inglés) y el conocimiento de los estándares de aprendizaje de matemáticas (*KMLS*, por sus siglas en inglés).

Inicialmente, el subdominio *KoT* se centra en analizar el conocimiento que el profesor posee sobre los contenidos matemáticos que imparte y su aplicación en el aula. En particular, dentro del contexto del álgebra temprana, este conocimiento implica identificar la estructura de la generalización de patrones, generalizar la propiedad identificada a todos los términos y aplicar dicha propiedad en diferentes casos (Neubrand, 2018; Zapata, 2019; Vergel et al., 2022).

Por su parte, el subdominio *KMT* (Conocimientos de la enseñanza de las Matemáticas) se refiere al conocimiento necesario para enseñar matemáticas, estrechamente vinculado con el contenido matemático del estudio, esto es, al pensamiento algebraico temprano, el cual desempeña un papel crucial, dado que los profesores requieren conocimiento en cuatro actividades esenciales para enseñar la generalización de patrones: i) descomponer conceptos y procedimientos matemáticos, ii) seleccionar representaciones adecuadas para ilustrar ideas, iii) evaluar métodos y soluciones alternativos, y iv) inferir el nivel de comprensión de sus estudiantes (Mochón y Morales-Flores, 2010).

Esta mirada implica que los profesores asuman desafíos profesionales en respuesta a innovaciones curriculares derivadas de investigaciones académicas. Tal es el caso del profesor de primaria que está familiarizado, por ejemplo, con tres tipos de estrategias para resolver problemas relacionados con la generalización de patrones: a) aproximación recursiva se emplea un método de conteo que puede ser más o menos complejo, b) aproximación funcional, en la que se relacionan dos variables, la posición de la figura y el número de elementos de ésta, mediante una expresión matemática en forma de función afín de la forma $f\,(n) = an + b\,(b \neq 0)$, donde a es la diferencia entre términos consecutivos y b se mantiene constante en toda la

sucesión; y c) razonamiento proporcional incorrecto, usando la relación $f\ (n)\ =\ an$ en lugar de la relación $f\ (n)\ =\ an\ +\ b\ (b\ \neq\ 0)$ (Zapatera, 2018).

Finalmente, el subdominio *KMLS* Jungbluth et al. (2022) destacan la importancia de que los profesores cuenten con un conocimiento del currículo no solo para organizar la enseñanza de forma lógica como a favorecer que los aprendizajes sean significativos y transferibles a lo largo de los diferentes niveles educativos (Jungbluth et al., 2022). Además, la falta de coherencia curricular puede ocasionar vacíos conceptuales o redundancias innecesarias, afectando el desarrollo progresivo de los conocimientos de sus estudiantes (Jungbluth et al., 2022; Otten et al., 2019).

Para caracterizar el conocimiento especializado del profesor al enseñar generalización de patrones, esta investigación adopta como diseño metodológico el estudio de caso, tal como lo evidencian investigaciones realizadas en el modelo *MTSK*. Este enfoque permite captar la riqueza, complejidad y especificidad del conocimiento del profesor en contextos reales de aula, mostrando cómo se movilizan los subdominios *KoT, KMT y KMLS* en relación con el álgebra temprana.

En consecuencia, este proyecto de tesis apunta a caracterizar los conocimientos de los profesores de matemáticas de Educación Básica Primaria en el contexto del desarrollo del pensamiento algebraico temprano, con especial atención en la generalización de patrones. Esto puede ofrecer una visión específica de “qué conocimiento poseen y cómo lo ponen en práctica” los profesores, y sirve de base para diseñar futuras formaciones y herramientas que vayan más allá de enseñar solo procedimientos (Pincheira y Alsina, 2024).

1.3 Pregunta de Investigación

Tomando en cuenta las consideraciones anteriores, se propone la siguiente pregunta de investigación: *¿Qué caracteriza el conocimiento especializado manifestado por los profesores de Educación Básica Primaria sobre la generalización de patrones en el contexto del pensamiento algebraico temprano?*

1.4 Objetivo General

Caracterizar el conocimiento especializado de los profesores de Educación Básica Primaria al enseñar la generalización de patrones como base para promover el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

1.5 Objetivos Específicos

OE1: Analizar las evidencias del conocimiento especializado de profesores de primaria en los subdominios *KoT, KMT y KMLS* en la enseñanza de la generalización de patrones

OE2: Identificar criterios conceptuales y empíricos que permitan diferenciar los subdominios *KoT, KMT y KMLS* del modelo *MTSK* en la enseñanza de la generalización de patrones

OE3: Analizar interrelaciones entre los subdominios *KoT, KMT y KMLS* evidenciadas por los profesores de primaria en la enseñanza de la generalización de patrones.

1.6 Justificación

El desarrollo del pensamiento algebraico temprano constituye un ámbito relevante para el desarrollo de la actividad matemática desde los primeros años de escolaridad. En esta línea, es esencial que el profesor de matemáticas en Educación Básica Primaria tenga un conocimiento especializado de las ideas matemáticas (Muñoz-Catalán et al., 2022). Esto implica, por ejemplo,

que el concepto de patrón cobre sentido en el aula cuando los profesores sitúan esta noción en contextos significativos, como el crecimiento de figuras geométricas, secuencias numéricas, disposiciones regulares de objetos o fenómenos cotidianos que involucran repetición o cambio progresivo (Liñán et al., 2016). Así mismo, el profesor debe comprender que la enseñanza del álgebra en Educación Básica Primaria no implica incorporar una asignatura nueva denominada "Álgebra", implica promover la integración progresiva de conceptos algebraicos en los distintos niveles de la Educación Básica Primaria (Kaput et al., 2017; Wettergren, 2022).

De este modo, la introducción del álgebra temprana debe facilitar la observación de patrones, la construcción de relaciones y la comprensión de propiedades, permitiendo a los estudiantes familiarizarse progresivamente con las estructuras matemáticas (Molina, 2006). No obstante, la enseñanza del álgebra temprana plantea desafíos significativos para los profesores de Educación Básica Primaria, entre ellos, dificultades conceptuales para identificar las relaciones implícitas en las expresiones algebraicas y diferenciar de manera precisa entre los conceptos de incógnita y variable (Hohensee, 2017).

Asimismo, la incorporación del álgebra temprana en el currículo de Educación Básica Primaria requiere adoptar una visión amplia del pensamiento algebraico elemental, reconociendo que este se manifiesta en actividades vinculadas a la aritmética, la medida, la geometría o el análisis de datos (Zapata, 2019). En esta línea, el desarrollo del pensamiento algebraico no puede considerarse un resultado espontáneo de la ontogenia ni una consecuencia directa de la maduración cognitiva; por el contrario, su emergencia y accesibilidad para los estudiantes dependen de la creación intencional de condiciones didácticas específicas que favorezcan su construcción (Radford, 2011).

Por otra parte, en Colombia, los lineamientos curriculares (MEN, 1998) y los estándares básicos de competencias (MEN, 2006) han promovido la incorporación del pensamiento variacional como base para la algebrización en el currículo de Educación Básica Primaria. Estas directrices destacan la relevancia de transformar las prácticas de enseñanza e implementar nuevas orientaciones desde los primeros grados. Es importante resaltar que este marco implica una responsabilidad significativa debido a la complejidad de introducir el pensamiento algebraico desde edades tempranas, un proceso que Kaput et al. (2017) denominan la "algebrización del currículo".

A pesar de la creciente atención al desarrollo del pensamiento algebraico, persisten vacíos importantes en la investigación en el contexto colombiano (Rojas y Vergel, 2018). Si bien diversos estudios han abordado aspectos del conocimiento especializado del profesorado (Carrillo-Yañez et al., 2018; Climent et al., 2014), aún existe una escasa profundización sobre el conocimiento que tienen los profesores de Educación Básica Primaria en lo concerniente a la enseñanza del pensamiento algebraico temprano (Pincheira, 2023). Por tanto, es imperativo caracterizar el conocimiento especializado frente al pensamiento algebraico de los profesores de Educación Básica Primaria desde la perspectiva del modelo *MTSK*.

Este modelo permite estudiar de manera analítica el conocimiento del profesor que enseña matemáticas, lo que facilita una aproximación a la complejidad inherente del conocimiento (Maturana, 2023). Además, ofrece una estructura que permite plantear preguntas sobre cómo el profesor articula su conocimiento matemático con su práctica de aula. Esta mirada posibilita detectar fortalezas y vacíos en la práctica profesoral a partir del conocimiento especializado evidenciado en las decisiones didácticas y en las formas de abordar el contenido. Asimismo, ayuda a comprender el sentido otorgado a su enseñanza y las formas de fortalecerla

para responder de manera pertinente a las necesidades de los estudiantes (Carrillo-Yañez et al., 2018). En consecuencia, se destaca la importancia de continuar cualificando el conocimiento profesoral (Kieran et al., 2016; Aké y Godino, 2018; Pincheira y Alsina, 2021).

Capítulo 2. Estado del Arte

La enseñanza de las matemáticas en Educación Básica Primaria requiere que los profesores cuenten con un conocimiento articulado en dominios como el contenido, la didáctica del contenido y el currículo. Dado que esta investigación apunta a caracterizar el conocimiento especializado de los profesores de primaria en la enseñanza de la generalización de patrones y el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, resulta necesario detallar la revisión de la literatura que identifique los enfoques, tendencias y retos actuales en Educación Matemática relacionados con esta problemática. Esta revisión permitió precisar el problema de investigación y sirvió de base para la elaboración del marco teórico presentado más adelante.

La revisión documental[5] emplea técnicas de análisis de contenido que se corresponden con procedimientos orientados a centrar la atención en conceptos relevantes relacionados con las categorías *conocimiento especializado* y *pensamiento algebraico temprano*. La metodología implementada posibilita examinar el vocabulario utilizado en artículos, identificar las interrelaciones establecidas entre los términos y representar la estructura configura da por estas en cada uno de los documentos elegidos. Según Montoya (2005) la estrategia metodológica de la revisión documental considera tres etapas:

Contextualización: se contemplan elementos como la formulación de la problemática, su delimitación, el material documental que será utilizado en la investigación y determinados criterios para la ubicación contextual.

Clasificación: se definen los parámetros a considerar para la sistematización de los datos, el tipo de documentos a examinar, así como aspectos cronológicos y propósitos de las

[5] La base de datos completa se encuentra contenida en el apéndice A.

investigaciones. La información es susceptible de categorizarse de diversas formas de acuerdo con el tipo de datos objeto de análisis.

Categorización: se considera la jerarquización y generación de clases para el tratamiento de los datos, fase que garantiza la recuperación relevante de la información y facilita el estudio esencial del fenómeno investigado.

La recolección del material empírico se centró en artículos, tesis de maestría y doctorales, publicadas entre los años 2010 - 2024. La búsqueda documental se realizó en diferentes fuentes especializadas del campo de la Educación matemática. En primer lugar, se consultaron bases de datos e índices bibliográficos como *ERIC, Scopus, Web of Science y ProQuest*. De igual manera, se revisaron redes de revistas científicas, particularmente la Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal (Redalyc). Finalmente, para la consulta de tesis doctorales y trabajos de maestría, se exploraron repositorios institucionales de universidades como la Universidad del Cauca, la Universidad de los Andes y la Universidad de Antioquia.

Los términos clave empleados fueron: *"**Early Algebraic** Thinking", "Algebraic Reasoning in Early Childhood", "**Early Algebra**", "Elementary Algebraic Concepts", "Pattern Generalization in Primary Education", "Foundational Algebra Skills", "Early Mathematical Thinking", "Introduction to Algebra in Elementary School", "Algebraic Patterns in Young Learners", "Algebra Readiness in Primary Grades", "Development of Algebraic Thinking in Children", "Early Math Education and Algebra", "Teaching Algebra in Elementary School", "Digital Tools for **Early Algebra**", "Technology Integration in **Early Algebra** Education", "Conceptual Understanding of Algebra in Young Students", "**Early Algebraic** Problem Solving" y "Mathematical Representations in **Early Algebra**",* así como sus respectivas

traducciones al español y portugués. Posteriormente, se exploró el tesauro de la UNESCO mediante el uso de operadores booleanos *AND, OR* y *NOT*.

En total se encontraron 120 documentos, distribuidos de la siguiente manera: 76 artículos de investigación; 26 capítulos de libros; 07 tesis doctorales, actas de congresos 09 y documentos institucionales 02 tal como se observa en la Tabla 1.

Tabla 1

Masa Documental

Tipo de publicación	Cantidad
Artículos de investigación	76
Capítulos de libros	27
Tesis doctorales	07
Actas de congresos	09
Documentos institucionales	02
Total	121

Fuente: elaboración propia.

Para construir una imagen clara del estado de la investigación en Educación Matemática, se empleó una plataforma digital en el análisis de artículos, tesis y capítulos de libros. Mediante el software Atlas Ti. 9, se realizó un análisis textual automatizado de los resúmenes, lo que reveló los tipos de variación presentes en el corpus de estudios.

2.1 Categorías de Análisis Emergentes en el Análisis Documental

Tras la recolección de la información, el proceso continuó con su clasificación, utilizando un sistema de clasificación y análisis por medio de un proceso de codificación abierta y de comparación constante de las unidades de información correspondientes a los distintos apartados

de los materiales que pertenecen a cada una de las dimensiones emergentes de la Tabla 2, que surgen después de recoger la información y clasificarla.

Tabla 2.

Categorías emergentes en el proceso de codificación abierta

Categorías Emergentes
Conocimiento didáctico
Conocimiento pedagógico
Dominio matemático
Conocimiento del contexto escolar
Desarrollo profesional del profesor de primaria
Pensamiento algebraico temprano
Generalización de patrones
Diseño de tareas para promover el pensamiento algebraico
Uso pedagógico en las tecnologías digitales
Importancia de fundamentar pensamiento algebraico
Reflexiones sobre la práctica

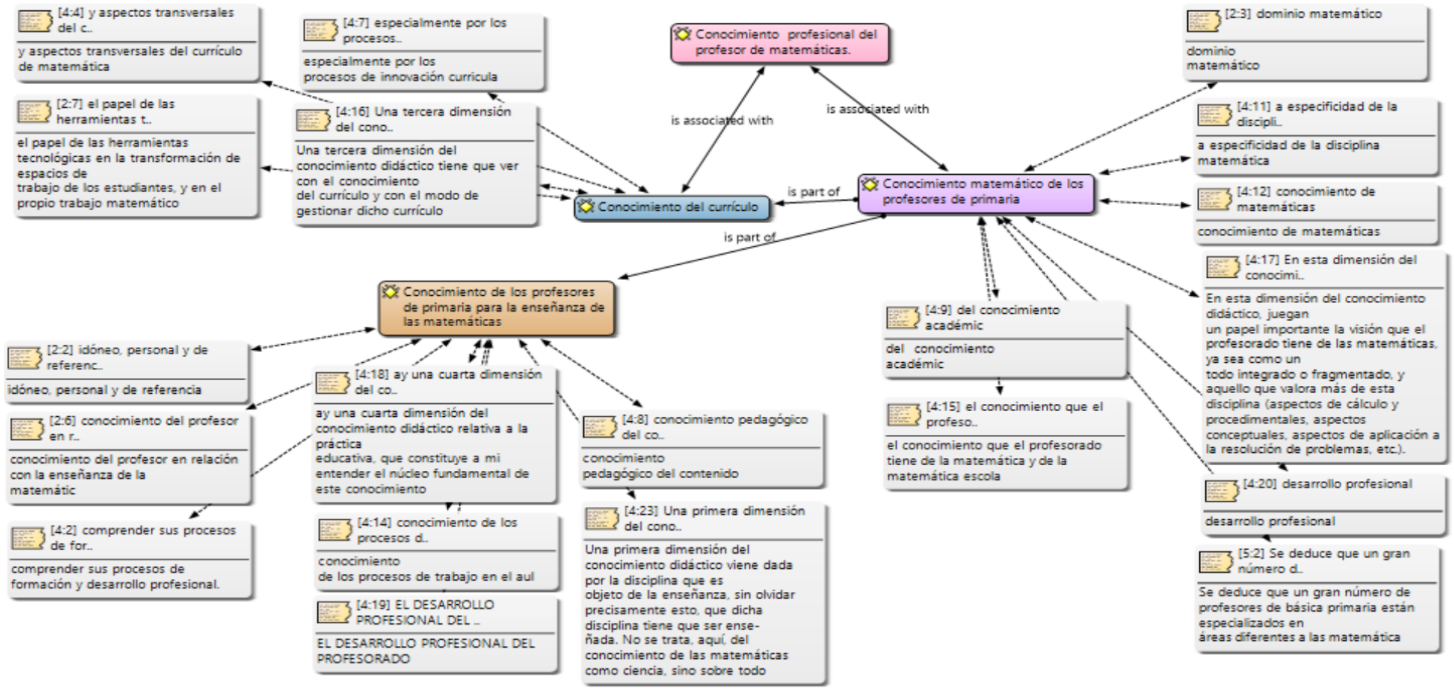
Fuente: elaboración propia.

Finalmente, las categorías emergentes se organizaron en cuatro grandes subcategorías. A continuación, se presenta un ejemplo de la primera red semántica en el campo del conocimiento profesional de los profesores de Educación Básica Primaria que enseñan matemáticas.

A continuación, en la Figura 1, la red semántica permitirá analizar y visualizar las relaciones entre los conceptos clave discutidos en los documentos, facilitando una mejor comprensión de cómo se estructuran y se relacionan los conocimientos: el conocimiento matemático de los profesores, el conocimiento de los profesores para la enseñanza de las matemáticas y el conocimiento del currículo.

Figura 1

Categorías emergentes de la revisión de la literatura



Fuente: elaboración propia.

De esta forma, se van configurando las redes semánticas que caracterizan cada subcategoría conceptual en los campos de conocimiento matemático de los profesores de primaria, conocimiento de los profesores de primaria de la enseñanza de las matemáticas y conocimiento del currículo.

La primera red semántica, centrada en el conocimiento matemático de los profesores de primaria, describe un docente que no es un mero "transmisor", es un especialista profesional. Por tanto, es esencial que los profesores posean conocimiento de los contenidos matemáticos y este conocimiento debe estar cimentado en un dominio disciplinar, que abarque una comprensión académica de los conceptos matemáticos y estrategias adecuadas para su enseñanza. La importancia de este aspecto se acentúa ante el hecho de que muchos profesores de primaria provienen de especializaciones en áreas diferentes a las matemáticas (Adame-Esparza y de Lira-Lozano, 2019).

De la segunda red semántica, titulada el conocimiento de los profesores de primaria en la enseñanza de las matemáticas, se desprenden tres ramas; la primera, el desarrollo profesional del profesor representa un movimiento "desde dentro hacia fuera", donde el profesor es el sujeto protagonista que decide sobre sus proyectos y metas (Llinares et al., 2022; Ponte, 2012). La segunda, el conocimiento curricular, según Meléndez-Cruz et al. (2023) quienes resaltan el cumplimiento de los objetivos definidos en las orientaciones curriculares en relación con el objeto de estudio. Por su parte, Vasco (2015) afirma que este subdominio abarca la comprensión de los planes de estudio, los recursos educativos relacionados y las pautas para su aplicación contextual que, a su vez, se estructura en dos dimensiones interrelacionadas: el conocimiento curricular longitudinal y el transversal. Mientras el primero implica entender la progresión de temas a lo largo de los años escolares, el segundo se refiere a la capacidad del profesor para

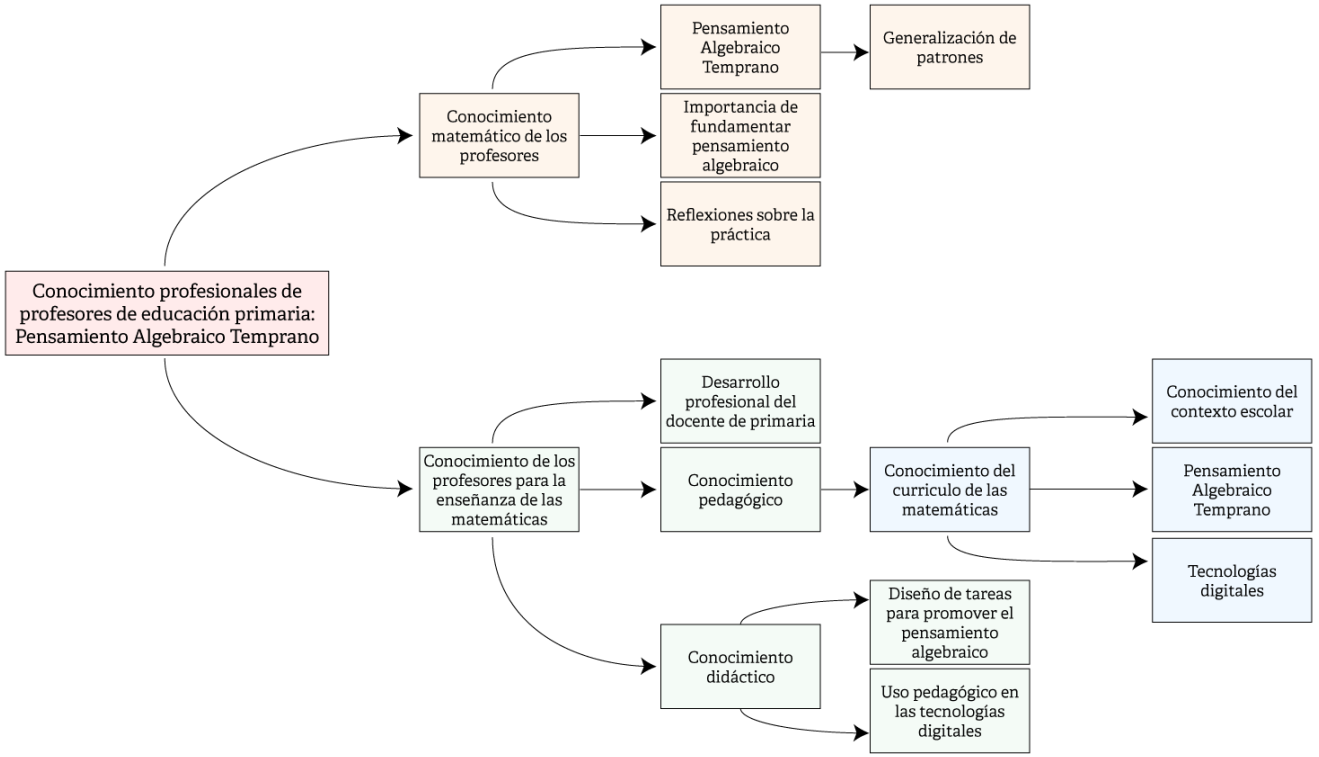
establecer conexiones entre el contenido de su curso y los temas abordados simultáneamente en otras materias. Adicionalmente, este subdominio engloba los contenidos matemáticos a enseñar, el nivel esperado de desarrollo conceptual y procedimental, así como la secuenciación de los diversos temas. Todos estos elementos se integran para constituir un componente crucial en la estructuración del currículo matemático, facilitando una enseñanza coherente y progresiva de las matemáticas (Vasco, 2015).

La tercera rama corresponde al conocimiento didáctico, que se orienta hacia la dimensión más específica de la enseñanza del contenido matemático. De este nodo, se desprenden dos componentes: el diseño de tareas para promover el pensamiento algebraico y el uso pedagógico de tecnologías digitales. El diseño de tareas constituye un elemento central dentro de la didáctica del pensamiento algebraico temprano, dado que las actividades propuestas en el aula son el principal medio a través del cual los estudiantes pueden identificar regularidades, comparar estructuras y formular generalizaciones (Aké y Godino, 2018). Este tipo de tareas requiere que el profesorado seleccione situaciones que favorezcan la exploración de patrones, el establecimiento de relaciones entre términos y la expresión de reglas generales (Aké y Godino, 2018). Por otra parte, el uso pedagógico de tecnologías digitales indica que las herramientas tecnológicas pueden desempeñar un papel relevante en la enseñanza, al facilitar la visualización de patrones, la manipulación de representaciones y la exploración dinámica de relaciones matemáticas (Gafanhoto y Canavarro, 2012).

Finalmente, tras la revisión documental, surgen categorías que se definirán y ajustarán conforme avance el desarrollo del estudio (Figura 2).

Figura 2

Categorías emergentes en los tres campos de conocimiento



Fuente: elaboración propia.

Las categorías emergentes se organizan en tres campos del conocimiento profesional del profesor, el conocimiento matemático de los profesores, conocimiento de los profesores de la enseñanza de las matemáticas y conocimiento del currículo de las matemáticas, en relación con la enseñanza del pensamiento algebraico temprano.

2.2 Perspectivas teóricas sobre el conocimiento del profesor de matemáticas

Durante las últimas décadas, el conocimiento profesional del profesor ha sido abordado desde diversas perspectivas teóricas. Uno de los referentes fundamentales corresponde a los trabajos de Shulman (1986, 1987), quien identificó distintas categorías de conocimiento base para la enseñanza, entre ellas el conocimiento del contenido, el conocimiento pedagógico general, el conocimiento curricular y el conocimiento didáctico del contenido, estableciendo una base conceptual para posteriores investigaciones sobre el conocimiento profesoral. A partir de estos aportes surgieron modelos específicos para la enseñanza de las matemáticas, entre ellos el *Mathematical Knowledge for Teaching* (*MKT*) (Ball et al., 2008), el *Knowledge Quartet* que se organiza en cuatro categorías, también denominadas "unidades" o dimensiones amplias y superordinadas. Estas unidades son: base, transformación, conexión y contingencia (Rowland et al., 2003) y el *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (*MTSK*) (Carrillo et al., 2018; Escudero-Ávila y Carrillo Yáñez, 2020), orientado a estudiar el conocimiento especializado del profesorado de matemáticas desde distintas perspectivas analíticas, incluye las categorías de conocimiento matemático (*MK*), conocimiento del contenido pedagógico (*PCK*), así como las concepciones y creencias.

En el contexto de esta investigación, se realiza un análisis comparativo de diversos estudios relacionados con el conocimiento del profesor, con el propósito de identificar elementos

comunes y variaciones conceptuales vinculadas al desarrollo del pensamiento algebraico temprano. La Tabla 3 presenta algunos de los documentos revisados.

Tabla 3.

Comparación de modelos sobre el conocimiento del profesor

Modelo	Autor(es)	Características Principales	Similitudes	Distancias
Conocimiento Base para la Enseñanza	Lee S. Shulman	Propone siete categorías de conocimiento base para la enseñanza: conocimiento del contenido, conocimientos pedagógicos generales, conocimiento curricular, conocimiento didáctico del contenido, conocimiento de los alumnos y sus características, conocimiento de los contextos educativos, y conocimiento de los fines.	Es el punto de partida para todos los modelos posteriores; comparte con ellos el interés en identificar las categorías necesarias para la enseñanza.	No está enfocado específicamente en matemáticas, se orienta hacia un enfoque transversal y generalizado para todas las disciplinas.
Conocimiento Base Ampliado	Pamela L. Grossman (con colaboración de Shulman)	Redefine las categorías de Shulman en cuatro grupos generales: conocimiento didáctico general, conocimiento del contenido, conocimiento didáctico del contenido, y conocimiento del contexto. Busca capturar la complejidad del conocimiento profesional profesor.	Conserva el enfoque transversal de Shulman y redefine las categorías, incluyendo el conocimiento del contexto como una dimensión general.	Reduce las categorías de siete a cuatro, simplificando y agrupando conceptos que Shulman había considerado por separado, como el conocimiento de los

Tabla 3.

Comparación de modelos sobre el conocimiento del profesor

Modelo	Autor(es)	Características Principales	Similitudes	Distancias
				alumnos y los fines educativos.
Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)	Deborah Loewenberg Ball, Mark Hoover Thames and Geoffrey Phelps	Se enfoca en el conocimiento especializado que los profesores necesitan para enseñar matemáticas, dividido en dos componentes principales: conocimiento del contenido (*Common Content Knowledge y Specialized Content Knowledge*) y conocimiento pedagógico del contenido. Promueve la comprensión profunda y flexible del contenido matemático.	Retoma la categoría de conocimiento didáctico del contenido (de Shulman y Grossman) y la aplica específicamente al contexto de la enseñanza de matemáticas.	Profundiza exclusivamente en el contexto de las matemáticas, dejando de lado otros conocimientos del contexto educativo, como la gestión o los fines educativos.
Knowledge Quartet	Tim Rowland, Peter Huckstep y Anne Thwaites	Organiza el conocimiento del profesor en cuatro dimensiones: Fundación (conocimientos previos y creencias), Transformación (cómo se presenta el contenido), Conexión (relación entre ideas matemáticas), y Contingencia	Similar al MKT en su enfoque matemático, comparte con Shulman la importancia del conocimiento previo	Introduce la dimensión de Contingencia, que no se considera explícitamente en los modelos previos.

Tabla 3.

Comparación de modelos sobre el conocimiento del profesor

Modelo	Autor(es)	Características Principales	Similitudes	Distancias
		(respuestas en tiempo real a eventos imprevistos en la enseñanza).	y la reflexión sobre la práctica educativa.	
Conocimientos especializados del profesor de matemáticas (*MTSK*)	José Carrillo-Yañez, Nuria Climent, Miguel Montes, Luis C. Contreras, Eric Flores-Medrano, Dinazar Escudero-Ávila, Diana Vasco, Nielka Rojas, Pablo Flores, Álvaro Aguilar-González, Miguel Ribeiro y M. Cinta Muñoz-Catalán	Propone categorías para analizar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas: Conocimiento Matemático (MK), Conocimiento del Contenido Pedagógico (*PCK*), y concepciones y creencias. Este modelo tiene un enfoque especial en los profesores de primaria y su conocimiento profesional en matemáticas.	Similar al MKT, se centra en las matemáticas y retoma el *PCK* como categoría central; comparte con Shulman y Grossman la importancia de las creencias y concepciones profesores.	A diferencia de otros modelos, incluye explícitamente las concepciones y creencias como categoría de análisis. También se especializa más en el nivel educativo primario.

Fuente: Elaboración propia con fuente de los autores citados.

En este apartado se revisan los estudios previos acerca del conocimiento del profesor, relacionados con la enseñanza y el aprendizaje. Estos aspectos han sido estudiados por investigadores durante décadas y actualmente siguen siendo objeto de estudio. Los modelos analizados en esta investigación parten de las ideas de Shulman (1986, 1987) sobre la categorización del conocimiento profesoral, ya sea adaptándolas o profundizando en aspectos específicos. Una similitud destacada es el énfasis compartido en el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico, dimensiones consideradas fundamentales para la enseñanza, aunque su aplicación varía según el modelo.

Además, los modelos coinciden en resaltar la importancia de la reflexión y el análisis de la práctica educativa como elementos esenciales del conocimiento profesional. Sin embargo, existen distancias significativas entre los modelos. Mientras los de Shulman y Grossman adoptan un enfoque general aplicable a todas las disciplinas, *MKT, Knowledge Quartet* y *MTSK* se enfocan exclusivamente en las matemáticas. Asimismo, modelos como *MTSK* incluyen dimensiones adicionales, como las creencias y concepciones, ausentes en los enfoques más generales. Finalmente, el *Knowledge Quartet* introduce una dimensión única, denominada contingencia, que se refiere a la capacidad de los profesores para responder a eventos imprevistos durante la enseñanza.

2.3 Estudios sobre el Conocimiento del Profesor de Matemáticas

Este apartado permite situar teórica y empíricamente la importancia de los conocimientos de los profesores de matemáticas en Educación Básica Primaria en torno al desarrollo del pensamiento algebraico desde los primeros años de escolaridad. En este sentido, se examinan investigaciones relacionadas con el estudio de los conocimientos matemáticos que deben tener los profesores para gestionar los procesos de enseñanza y aprendizaje (Escudero-Ávila y

Carrillo-Yáñez, 2020; Zapata, 2019). Dado que, existen diversas perspectivas y marcos teóricos que abordan el conocimiento especializado de los profesores de matemáticas, las cuales dan lugar a diferentes marcos teóricos acerca del conocimiento del profesor de matemáticas, entre ellos se encuentran "Mirar profesionalmente la enseñanza de las matemáticas" (Llinares y Fernández, 2021), "La competencia profesional" (Font, 2011), "La formación del profesor de matemáticas" (Llinares, 2018), "El enfoque Onto-semiótico" (Godino et al., 2017) y "El análisis de la práctica profesional" (Vanegas et al., 2019).

Cabe destacar que las investigaciones sobre el conocimiento del profesor y la tarea de enseñanza de las matemáticas han alcanzado una madurez considerable, que ha permitido identificar elementos clave que conforman el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Godino et al., 2017). Además, estas investigaciones han contribuido significativamente a la identificación de los conocimientos y competencias específicas que los profesores de matemáticas deben poseer. La complejidad inherente a este campo se refleja en la diversidad de modelos propuestos, los cuales buscan comprender y caracterizar de manera detallada el conocimiento del profesor, tales como:

El análisis didáctico, este enfoque pone el foco de estudio en la planificación, en la reflexión curricular y sus dimensiones; concretamente, en el análisis del contenido, el análisis cognitivo, el análisis de la instrucción y el análisis de la actuación (Gómez y Rico, 2002).

La mirada profesional, el foco de estudio se sitúa en interpretar la comprensión de los futuros profesores, es decir, en interpretar la comprensión de los estudiantes en el aula y el desarrollo de entornos y trayectorias de aprendizaje (Llinares y Fernández, 2021).

Las competencias y conocimiento didáctico matemático (CCDM), el foco de investigación está dado en el rediseño de la propia práctica, el desarrollo de las competencias, el

análisis e interpretación didáctica, y el análisis y valoración de la idoneidad didáctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje en matemáticas (Godino et al., 2017).

El conocimiento especializado del profesor de matemáticas *(MTSK)*, este enfoque se centra en qué tipo de conocimiento manifiestan los profesores de matemáticas en la enseñanza y aprendizaje de esta materia; así como en la noción de especialización del conocimiento requiere y utiliza el profesor para su práctica (Carrillo-Yañez et al., 2018; Montes y Carrillo, 2017).

La diversidad de enfoques teóricos y metodológicos en el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas abre nuevas líneas de investigación que enriquecen la praxis educativa y el diseño de estrategias, dado que todos ellos se centran en el conocimiento del profesor para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Montes y Carrillo, 2017).

2.4 Estudios sobre Conocimiento de los Profesores para la Enseñanza de las Matemáticas

En la literatura de investigación, han surgido diversas propuestas para caracterizar la naturaleza del conocimiento profesional, abarcando aspectos como su definición, origen, fuentes y componentes (Mochón y Morales-Flores, 2010). Estas aproximaciones también consideran los fundamentos relacionados con su naturaleza (es decir, en qué consiste, cómo se origina y cuáles son sus fundamentos), así como sus formas de desarrollo (cómo se produce, cuáles son sus bases y a qué estrategias formativas está asociado) (English y Kirshner, 2015).

Tal como lo evidencian los trabajos de Montes y Carrillo (2017) y Vásquez et al. (2022), el análisis del conocimiento especializado del profesorado ha sido un eje central en las investigaciones sobre la enseñanza de las matemáticas. En este sentido, el conocimiento que un profesor manifiesta para la enseñanza de las matemáticas implica establecer conexiones entre

conceptos y desarrollar estrategias para facilitar el aprendizaje. Además, se resalta que dicho conocimiento es uno de los factores más influyentes de en desarrollo de una clase (Flores-Medrano et al., 2014).

Ball et al. (2008) plantean que la enseñanza de las matemáticas demanda formas de conocimiento matemático especializadas para la práctica del profesor, entre ellas el *Specialized Content Knowledge* (*SCK*), la cual permite analizar procedimientos, interpretar errores, utilizar representaciones y explicar conceptos matemáticos de maneras comprensibles para los estudiantes. La enseñanza idónea también implica crear un ambiente de aula donde los estudiantes se sientan seguros para explorar, hacer preguntas y cometer errores como parte del proceso de aprendizaje.

Siguiendo a Badillo (2019) la enseñanza de las matemáticas por parte de los profesores de Educación Básica Primaria requiere una comprensión profunda de los modelos teóricos, tanto durante su formación inicial como en su ejercicio profesional. Estos modelos son fundamentales para orientar tanto la preparación inicial como el desarrollo profesional continuo, puesto que garantizan que los profesores cuenten con las herramientas necesarias para una enseñanza adecuada.

En consonancia con lo anteriormente expuesto, es primordial que el profesor de primaria demuestre conocimientos en asuntos tales como i) Los contenidos matemáticos y su aplicación a diferentes contextos (sobre todo extra-matemáticos) correspondientes al currículum de la educación secundaria, ii) La planificación y diseño de secuencias didácticas, iii) La gestión de las secuencias didácticas en el aula, iv) El análisis, interpretación y evaluación de los conocimientos matemáticos de los alumnos a través de sus actuaciones y producciones matemáticas (Font, 2011).

El argumento central sostiene que el conocimiento de quienes ejercen como profesores de matemáticas en Educación Básica Primaria es tanto situado como contextualizado, ya que surge de ámbitos profesionales específicos. Este conocimiento se desarrolla dentro de un entorno social en el cual el profesor interactúa, lo que le permite comprender mejor las situaciones que enfrenta y adquirir herramientas para abordarlas. Además, Climent et al. (2014) señala que dicho conocimiento es práctico y personal, lo que significa que es propio de cada individuo y puede variar entre profesores según sus concepciones, valores y actitudes.

En la misma línea, Carrillo-Yañez et al. (2018) a través del modelo el conocimiento especializado del profesor de matemáticas *(MTSK)*, parten de la premisa que dicha especialización deriva directamente de su profesión. En otras palabras, el conocimiento que el profesor posee se considera especializado para desarrollar su labor como profesor de matemáticas (Montes y Carrillo, 2017). Por otra parte, el profesor de matemáticas de enseñanza primaria también debe responder a los cambios conceptuales que la sociedad demanda a la escuela como institución; en otras palabras, se busca potenciar el conocimiento matemático no simplemente para que el estudiante dé cuenta de componente temático, es cómo lo relaciona en su entorno, con la vida y/o con problemáticas reales (Niss, 2003). Si bien cada aspecto del conocimiento especializado del profesor de matemáticas es fundamental para una enseñanza apropiada, resulta importante alcanzar un equilibrio entre los diversos componentes y dedicar esfuerzos a fomentar una comprensión y una aplicación práctica de los conocimientos matemáticos. De este modo, los estudiantes pueden alcanzar un aprendizaje de las matemáticas, que les permita aplicar dichos conocimientos en contextos cotidianos con destreza y pertinencia (Ponte, 2012).

2.5 Estudios sobre el Conocimiento Curricular de los Profesores de Educación Básica Primaria

La investigación sobre el conocimiento curricular de los profesores que enseñan matemáticas ha identificado su influencia directa en su práctica, al centrarse tanto en el contenido de la disciplina como en su desarrollo, tal como afirman Litke et al. (2023). Este conocimiento está vinculado con las finalidades y objetivos de la enseñanza de las matemáticas (Zapata, 2019). Para comprender el currículo matemático escolar, el profesor necesita del dominio del conocimiento matemático, el cual se divide en conocimiento curricular vertical y conocimiento curricular lateral (Vasco, 2015). El primero, abarca el conocimiento de los contenidos que han sido y serán impartidos en la escuela en la misma asignatura durante los años anteriores y los que se enseñarán en los años siguientes (Jungbluth et al., 2022; Vasco, 2015), mientras que el segundo, comprende el conocimiento del profesor de acuerdo con el grado escolar en el que imparte sus clases (Flores-Medrano et al., 2014; Vasco, 2015).

Por otra parte, en el contexto colombiano, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) en sus directrices curriculares, por ejemplo, los estándares básicos de competencias para el área de matemáticas, enfatiza la importancia de abordar diversos tipos de pensamiento matemático, tales como el métrico, espacial, numérico, aleatorio y variacional. Además, destaca la necesidad de impartir las matemáticas de manera integral desde los primeros grados escolares, con el fin de desarrollar en los estudiantes la capacidad y las habilidades necesarias para plantear, razonar, analizar, comunicar y modelar problemas.

Según Flores y García (2022), el currículum colombiano se caracteriza por su flexibilidad, lo que brinda a los profesores y a las instituciones educativas ajustar el contenido curricular en función de las particularidades de su entorno. Esto implica que, aunque el MEN

establece directrices generales, los profesores tienen la responsabilidad de adecuar estos contenidos a las necesidades específicas de su contexto, lo que les otorga una mayor autonomía profesional. Dicha flexibilidad es crucial para el desarrollo del conocimiento de la generalización de patrones y la introducción de nociones algebraicas básicas. En este contexto, el conocimiento del profesor y la capacidad de adaptar el currículo a las condiciones reales del aula son fundamentales para promover el desarrollo del pensamiento algebraico desde edades tempranas.

En la misma línea, en el campo de la educación matemática también se ha puesto un creciente interés por el conocimiento del profesor en una disciplina específica. En particular la idea de "algebrizar el currículo", sugerida por Kaput et al. (2017), es decir, la introducción del álgebra en los primeros años de escolaridad (Molina, 2006), se considera una reconstrucción curricular que debe incidir en el perfeccionamiento de los aprendizajes de los estudiantes en Educación Básica Primaria (Vergel, 2010).

Los profesores de la Educación Básica Primaria pueden fomentar el pensamiento algebraico temprano entre sus estudiantes por medio de la observación de patrones, secuencias figurales y numéricas lineales (Molina, 2006; Vergel, 2015). Al mismo tiempo, esto responde a la necesidad si los profesores requieren apoyo adicional para crear entornos en sus estudiantes al abordar tareas sobre generalización de patrones (Jungbluth et al., 2022).

Esta visión requiere que se preste especial atención al profesorado de primaria que enseña matemáticas, para que pueda abordar de manera adecuada los aspectos disciplinarios, metodológicos y prácticos (Zapata, 2019). Ahora, puesto que el pensamiento algebraico temprano se encuentra estrechamente vinculado a otras formas de pensamiento matemático, este proceso se manifiesta especialmente en la modelación de procesos y situaciones naturales y sociales mediante la utilización de modelos matemáticos (Zapata, 2019). No obstante, este

conjunto de conocimientos debe ser amplio y adaptable con el fin de fomentar la comprensión de los estudiantes, permitir al profesor comprender la esencia de la disciplina y facilitar la generación de nuevos saberes influenciados por la experiencia y el intercambio con sus pares. De esta manera, estos aspectos pueden propiciar ajustes y mejoras en el currículo (Zapata, 2019).

2.6 Estudios sobre Pensamiento Algebraico Temprano en Educación Básica Primaria

La introducción del álgebra temprana en el currículo de matemáticas en la enseñanza primaria ha emergido en los últimos años como un área de investigación relevante dentro de la Educación Matemática. Numerosos estudios han explorado estrategias para promover el desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros años escolares (Chimoni et al., 2021; Somasundram, 2021; Wettergren, 2022). En este orden de ideas, se observa un consenso sobre la importancia de comenzar a desarrollar el pensamiento algebraico desde edades tempranas, superando la visión tradicional que postergaba la introducción formal del álgebra a la educación secundaria (Kaput et al., 2017). Este fenómeno surge de la convergencia de dos fuerzas: a) en respuesta a la demanda social de una mayor alfabetización matemática, ahora se espera que todos los estudiantes aprendan álgebra bajo la consigna de "álgebra para todos", y b) esta expectativa se ha plasmado en medidas de rendición de cuentas de alto impacto que definen el éxito académico en términos del desempeño en álgebra. A este respecto, Kaput et al. (2017), plantean que más allá de las agendas políticas, existen razones válidas para replantear y reformular la enseñanza del álgebra en los primeros grados de matemáticas. Abordar el desafío del álgebra en estos niveles busca alcanzar cuatro objetivos principales:

> 1. Ampliar un grado de coherencia, profundidad y poder que generalmente falta en las matemáticas de K-8[6]. 2. Fortalecer el elemento curricular de las matemáticas escolares actuales. 3. Transformar el álgebra de un motor inadvertido de desigualdad en un motor deliberado de poder matemático. 4. Desarrollar capacidades tanto conceptuales como institucionales, creando espacio en el currículo para nuevas matemáticas del siglo XXI (p. 6).

Ahora bien, de acuerdo con Radford (2011) la generalización de patrones es esencial para el pensamiento algebraico, desde edades tempranas y proporcionan una base importante para el aprendizaje del álgebra en niveles posteriores. Mason (2018), por su parte, sostiene que las actividades relacionadas con patrones repetitivos favorecen el reconocimiento de regularidades y la construcción progresiva de estructuras matemáticas complejos. La clave está en ofrecer los desafíos adecuados para que los niños conozcan y generen patrones. En este sentido, para Carraher y Schliemann (2019) el pensamiento algebraico a través de la generalización de patrones está vinculado a diversos contextos, como la música, la danza, las huellas dactilares y las matemáticas. Sin embargo, aunque los patrones son esenciales en la enseñanza del álgebra en los primeros grados, no tienen una definición precisa en matemáticas. A veces, un patrón describe una característica específica, como una función que siempre aumenta, pero también existen patrones que, junto con ciertas suposiciones, pueden caracterizar propiedades de secuencias o funciones.

Aunque otros autores Alsina y Acosta (2018); Vergel (2015) y Zapata (2019) están de acuerdo en introducir el álgebra en la escuela primaria, las perspectivas sobre el tipo de generalización que ocurre varían. Algunos autores, como Kaput et al. (2017) citando a Mason et

[6] la expresión K-8 utilizada por James Kaput se refiere al tramo educativo que abarca desde el Kindergarten (jardín de infancia o preescolar) hasta el octavo grado (estudiantes de aproximadamente 13 a 14 años).

al. (1985), se enfocan principalmente en el papel inductivo de los patrones en el proceso de generalización. Esta perspectiva pone énfasis en la observación de regularidades y la formulación de posibles conjeturas, sin profundizar en la distinción entre generalización algebraica y aritmética.

De otro lado, Kieran et al. (2016) se enfocan más en la conexión entre los patrones y la representación algebraica formal. Aunque comparten la visión de que los patrones son esenciales para el desarrollo del pensamiento algebraico, no establecen una distinción clara entre los tipos de generalización, como lo hace (Radford, 2010). La generalización en este caso parece ser vista como una transición de lo concreto a lo abstracto, en la que los estudiantes comienzan a utilizar representaciones algebraicas para describir patrones. Este enfoque, aunque válido, tiende a omitir las sutilezas de cómo los estudiantes pueden operar en un nivel más concreto antes de llegar a la generalización algebraica completa.

Por otra parte, en el contexto de la educación infantil y primaria, la práctica educativa se enfoca en reconocer e identificar elementos u objetos, con énfasis en la observación de atributos específicos para establecer relaciones significativas entre ellos. Esta práctica incluye la creación de seriaciones basadas en patrones de repetición, que abarcan su identificación, construcción y representación, así como la descripción de cambios cualitativos y cuantitativos (Zapata, 2019). Y es que en Educación Básica Primaria se resalta una comprensión de diversos tipos de relaciones y patrones, el uso de símbolos algebraicos y modelos matemáticos para representar situaciones matemáticas, así como la habilidad para entender el cambio y utilizar variables para determinar una constante o incógnita. Se concluye que es esencial que los programas de formación del profesor incorporen estos conocimientos para su adecuada articulación en Educación Básica Primaria (Pincheira y Alsina, 2021).

Diversas investigaciones han propuesto un modelo basado en el reconocimiento de distintos niveles de algebrización. En este sentido, Godino et al. (2014) plantean una diferenciación en cuatro niveles, que representan etapas en el proceso de aplicar el conocimiento matemático para resolver problemas. Los niveles representan etapas en el proceso de aplicar el conocimiento matemático para resolver problemas (Godino et al., 2014); así, para fomentar el avance del pensamiento algebraico, los profesores deben establecer entornos propicios para que los alumnos adquieran competencias como el pensamiento algebraico, la realización de generalizaciones algebraicas y el empleo de representaciones algebraicas, en lugar de simplemente impartir múltiples procedimientos (Molina, 2006, p. 165). En el Nivel cero se trabaja con objetos particulares representados mediante lenguajes diversos (natural, numérico, icónico, gestual). Pueden usarse símbolos para valores desconocidos, pero se obtienen mediante operaciones sobre esos objetos. No se identifican propiedades estructurales y las reglas funcionales son recursivas.

El Nivel uno introduce objetos generales reconocidos explícitamente y representados con diversos lenguajes. Se identifican propiedades, equivalencias y relaciones, pero no se operan los objetos generales. Las reglas funcionales se expresan de manera general. En el Nivel dos se incluyen variables o cantidades indeterminadas, vinculadas al contexto, expresadas con lenguaje simbólico o literal. Se resuelven ecuaciones simples y se formulan reglas generales relacionadas con funciones. Y en el Nivel tres se utilizan objetos generales completamente simbólicos, con los que se opera y se realizan transformaciones simbólicas equivalentes, se resuelven ecuaciones más complejas y se formulan reglas canónicas descontextualizadas (Aké y Godino, 2018).

Entonces, los niveles de algebrización permiten comprender cómo se desarrolla el pensamiento algebraico y cómo aplican el conocimiento matemático en diferentes contextos.

Esta identificación ayuda a los profesores a diagnosticar el nivel de comprensión de sus alumnos, diseñar actividades educativas adecuadas y seleccionar estrategias que faciliten el tránsito entre niveles, desde el manejo de objetos particulares hasta la abstracción de conceptos generales en álgebra temprana (Ferreira et al., 2022). En este sentido, analizar los niveles de algebrización enriquece el proceso de enseñanza, y fortalece el aprendizaje progresivo de los estudiantes, preparándose para abordar conceptos matemáticos más complejos (Godino et al., 2014).

Finalmente, la generalización de patrones incluye la referencia a conceptos como lo indeterminado y las formas de abordar la incógnita o variable, que pueden manifestarse tanto a través del lenguaje como de expresiones corporales (Vergel, 2014; Zapata, 2019).

Uno de los aspectos clave para la implementación del álgebra temprana es el conocimiento y la experiencia del profesorado, precisamente su papel es determinante en la articulación de estos conceptos en las aulas (Ramírez, 2023, p. 32). Esta situación pone de manifiesto varios desafíos significativos, como identificar las relaciones implícitas en las expresiones algebraicas, reconocer indicadores en la actividad matemática que permitan clasificarla como aritmética o algebraica, y la capacidad de analizar aspectos más específicos que faciliten la diferenciación entre distintos niveles de algebrización (Godino et al., 2014; Hohensee, 2017).

Capítulo 3. Marco teórico

Las consideraciones teóricas expuestas en este apartado emergen de la revisión literaria que se realizó en el estado del arte sobre estudios de los conocimientos de los profesores en Educación Básica Primaria que son objeto de análisis en este trabajo doctoral; estas, constituyen un punto de partida para la investigación y aportan ideas teóricas que podrían permitir la interpretación de cómo el profesor de matemáticas de primaria desarrolla el pensamiento algebraico y aportes teóricos al respecto, en el contexto del pensamiento algebraico temprano. Por lo tanto, cabe mencionar que el interés investigativo por elaborar una postura o aproximación interpretativa, para referir a los conocimientos profesorales.

Adicionalmente, para el desarrollo de la presente investigación, resulta necesario asumir una postura teórica con relación al conocimiento del profesor de matemáticas, dado que este constructo ha sido ampliamente reconocido en el campo de la Educación Matemática y se ha consolidado como objeto de análisis en diversos estudios (Ball et al. 2008; Carrillo-Yañez et al., 2018; Grossman et al., 2005; Rowland et al., 2003; Shulman, 1986), debido a que este constituye un contexto pertinente para evidenciar aspectos relevantes relacionados con la pregunta de investigación. En esta línea, Flores-Medrano et al. (2014) consideran distintos niveles de concreción epistemológica que permiten analizar el conocimiento del profesor en diversos subdominios y facilita la comprensión de sus interacciones. De este modo, el modelo se aleja de una visión rígida de la enseñanza de las matemáticas y se presenta como una herramienta analítica que concibe el conocimiento profesoral como un fenómeno situado, dinámico y en continua evolución (Flores-Medrano et al., 2014).

A continuación, se presentan algunos componentes relacionados con los referentes teóricos de la investigación, en las líneas del conocimiento profesoral y el pensamiento algebraico temprano.

3.1 Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Modelo MTSK)

Este modelo de conocimiento surge como un avance de los estudios planteados por Ball et al. (2008) y Shulman (1986) anteriormente descritos. En educación matemática ha crecido el interés por el estudio del conocimiento del profesor como una disciplina específica. En ese sentido, tal conocimiento puede entenderse como aquellas conexiones entre saberes y experiencias relacionadas con un concepto determinado, lo que permite a este conocimiento ser aplicado a una situación específica, es decir, el conocimiento se puede concebir como un conjunto de aprendizajes y vivencias que interactúan y se complementan (Mochón y Morales-Flores, 2010). Así pues, el conocimiento no se limita a lo consciente de manera inmediata, ya que es un acto de conciencia sobre ciertos conocimientos. Esta conexión entre el ser y el mundo que se habita es esencial (Cadrecha, 1990; Gómez, 2007; Vasco, 2015).

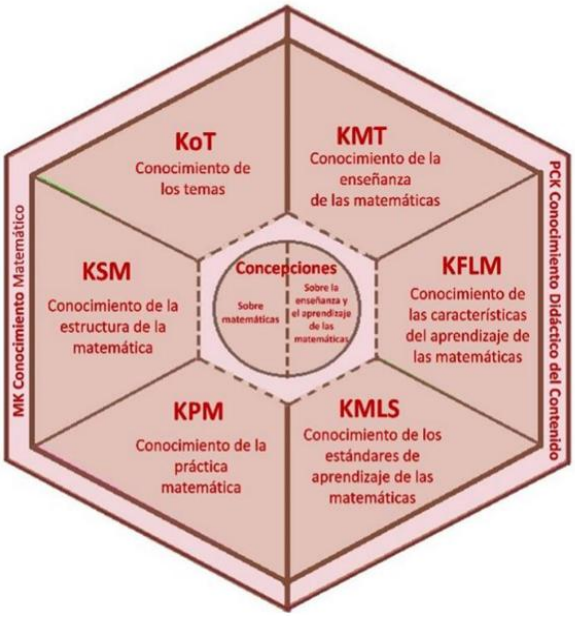
De acuerdo con Carrillo-Yañez et al. (2018) este modelo se centra en los conocimientos específicos del profesor de matemáticas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de esta disciplina, excluyendo aquellos ámbitos de conocimiento profesional compartidos con profesores de otras áreas. Cada dominio de conocimiento se descompone en tres subdominios específicos, que abarcan aspectos de las matemáticas y de la enseñanza y aprendizaje: dentro del *MK*, se incluyen el conocimiento de los temas (*KoT*), el conocimiento de la estructura matemática (*KSM*) y el conocimiento de la práctica matemática (*KPM*). Por su parte, el *PCK* incorpora el conocimiento sobre las características del aprendizaje de las matemáticas (*KFLM*), el conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas (*KMT*) y el conocimiento sobre los

estándares de aprendizaje en matemáticas (*KMLS*) (Carrillo-Yañez et al., 2018). En cuanto a las concepciones y creencias del profesor, se tratan de manera indistinta en este modelo; las creencias se refieren a las ideas o juicios personales que se aceptan como verdades inmutables, basadas en la experiencia y en factores emocionales y culturales, y que rara vez se cuestionan. En contraste, las concepciones actúan como estructuras organizadoras subyacentes que dan forma y significado al conocimiento y constituyen el andamiaje cognitivo esencial para comprender y expandir el conocimiento matemático (Flores-Medrano et al., 2014).

Este modelo se ha consolidado como una herramienta clave para la sistematización del conocimiento especializado del profesor, ya que los seis subdominios que lo componen permiten caracterizar de manera detallada dichos conocimientos, particularmente en el caso de los profesores de primaria. Además, facilita el estudio de posibles relaciones e impactos entre los distintos subdominios del conocimiento especializado (Escudero et al., 2021). La Figura 3 presenta la estructura de los dominios y subdominios del modelo *MTSK*.

Figura 3

Dominios y Subdominios del modelo MTSK



Fuente: Carrillo-Yañez et al. (2018).

3.1.1 Conocimiento Matemático (MK)

Este dominio comprende conocimientos relacionados directamente con la disciplina matemática que se enseña, y se divide en tres subdominios específicos, según Carrillo-Yañez et al. (2018) el conocimiento de los temas (*KoT*): hace referencia al saber del profesor de matemáticas sobre los temas que enseña. Este conocimiento abarca una comprensión profunda del contenido matemático, incluyendo conceptos, procedimientos, reglas, hechos y teoremas, junto con sus significados asociados. El conocimiento de la estructura matemática (*KSM*): hace referencia a la capacidad del profesor para comprender las relaciones existentes entre distintos elementos matemáticos. Estas conexiones surgen de dos tipos de consideraciones: las temporales, que se enfocan en la secuenciación de conceptos (aunque no necesariamente desde

un enfoque curricular, pero sí relacionado con las matemáticas), lo que permite establecer vínculos asociados al incremento de la complejidad o la simplificación; y las relacionadas con la delimitación de objetos matemáticos, las cuales generan interconexiones entre conceptos. El conocimiento de la práctica matemática (*KPM*): implica el modo de proceder en matemáticas. Incluye el conocimiento de las formas de conocer y crear o producir en matemáticas (conocimiento sintáctico sobre la lógica en matemáticas), el razonamiento y la prueba, saber definir y usar definiciones, elegir representaciones, argumentar, generalizar o explorar, aspectos de la comunicación matemática.

3.1.2 Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)

Este dominio describe el conocimiento especializado en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, subdividido también en tres subdominios específicos, como afirman Carrillo-Yañez et al. (2018) el conocimiento de las características del aprendizaje de los estudiantes (*KFLM*): este conocimiento implica que el profesor reconozca cómo los estudiantes piensan y desarrollan su comprensión al enfrentarse a actividades y tareas matemáticas; incorpora conocimientos sobre estilos de aprendizaje y diferentes formas de percibir fisonomías inherentes a determinados contenidos.

Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (*KMT*): se trata de reconocer el potencial que poseen actividades, estrategias y técnicas para facilitar la enseñanza de conceptos matemáticos concretos, así como identificar las posibles limitaciones y desafíos que puedan presentarse durante su implementación.

Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (*KMLS*): este subdominio abarca propuestas curriculares, estándares establecidos por grupos de investigación o asociaciones profesionales, y los objetivos de aprendizaje previstos para cada nivel educativo. A

continuación, se describen los dominios, subdominios y categorías que se estudiarán en esta investigación (Carrillo-Yañez et al., 2018).

3.1.3 Conocimiento de los Temas (KoT)

El Conocimiento de los Temas (*KoT*) se refiere a lo que el profesor de matemáticas sabe y cómo lo sabe sobre los temas que enseña. Este subdominio implica un conocimiento del contenido matemático, abarcando conceptos, procedimientos, hechos, reglas y teoremas, junto con sus significados. Además, contempla las conexiones entre diferentes elementos del mismo tema y las formas de representar dichos contenidos. Dentro de este subdominio se incluyen aspectos como Definiciones, Fenomenología y aplicaciones, Registros de representación, Propiedades y sus fundamentos y Procedimientos ¿Cómo se hace? ¿Cuándo se puede hacer? ¿Por qué se hace así? y Características del resultado? (Liñán et al., 2016).

Ahora, las definiciones en matemáticas hacen referencia al conocimiento que un profesor tiene sobre la naturaleza de un objeto matemático[7], considerando tanto su caracterización principal como posibles formulaciones alternativas y sus propiedades distintivas. La definición de generalización algebraica de patrones incluye dos tipos de generalizaciones: factuales y contextuales. Generalizaciones factuales: estas se basan en la evidencia de acciones generalizadas a través de un esquema operacional, que permanece conectado al uso concreto de símbolos numéricos, términos deícticos, gestos y actividades perceptuales. En este nivel, lo general o indeterminado no se nombra. Las generalizaciones contextuales representan un nivel más avanzado, aunque no alcanzan las generalizaciones simbólicas algebraicas. En este caso, se

[7] El objeto matemático representa una funcionalidad en un contexto, debe existir un signo que lo represente y manifieste su existencia (Pecharromán Gómez, 2013).

generalizan tanto las acciones numéricas como los objetos de esas acciones, abarcando objetos genéricos que no son perceptibles a través de los sentidos (Vergel, 2014).

Este conocimiento es esencial para dotar de sentido y significado a los conceptos matemáticos. Asimismo, implica la capacidad de reconocer y emplear distintas formas de expresar una definición, ya sea a través del lenguaje oral, escrito en términos cotidianos o mediante notación matemática formal (Pecharromán, 2013). Por ejemplo, el conocimiento de un profesor de primaria sobre un patrón de crecimiento como una secuencia construida con cuadros (término 1: 3 cuadros, término 2: 5 cuadros, término 3: 7 cuadros), el profesor debe reconocer que la diferencia entre términos consecutivos es constante (+2). Esto le permite derivar una fórmula general, como $f\ (n)\ =\ 2n\ +\ 1,$ que describe el número de cuadros en función de la figura (Vergel, 2015).

Fenomenología y Aplicaciones hace referencia al conocimiento que un profesor posee sobre la manera en que un objeto matemático puede aplicarse en contextos diferentes de las matemáticas. Este conocimiento abarca los modelos asociados a un concepto matemático, considerados como fenómenos que pueden contribuir a la construcción y comprensión del conocimiento matemático, incluyendo aquellos que emergen en el proceso de formulación del propio concepto (Climent et al., 2014).

Dentro de esta categoría, se incluyen el conocimiento del profesor sobre aspectos fenomenológicos (Gómez y Rico, 2002) como su comprensión sobre los usos y aplicaciones del concepto en distintos ámbitos. Además, considera la identificación de modelos matemáticos asociados (Vasco, 2015).

Esta categoría abarca diversos aspectos importantes: en primer lugar, el conocimiento fenomenológico, entendido como la compresión de cómo los conceptos matemáticos se

manifiestan en situaciones del mundo real y cómo estos pueden ser utilizados para resolver problemas prácticos (Gómez y Rico, 2002). Asimismo, contempla los usos y aplicaciones de los contenidos matemáticos en diferentes contextos, lo que contribuye a otorgar significado a los conceptos construidos durante el proceso de aprendizaje (Gómez y Rico, 2002).

De igual manera, este conocimiento comprende la articulación de modelos que relacionan la matemática con fenómenos del entorno, lo que favorece la modelización como una herramienta para la construcción de conocimiento (Escudero-Ávila & Carrillo Yáñez, 2020). En el análisis de patrones lineales, por ejemplo, el propósito consiste en reconocer la regularidad que subyace a la secuencia y extenderla a cualquier término mediante un proceso de abducción analítica (Radford, 2010). Dicho proceso resulta fundamental para el desarrollo del pensamiento algebraico, pues favorece la designación y el tratamiento de la indeterminación mediante diversos registros de representación y a través de la contracción semiótica del lenguaje (Radford, 2022).

Registros de Representación se refiere al conocimiento sobre las diversas formas en que un objeto matemático puede ser expresado y comunicado. Estas representaciones incluyen registros numéricos, gráficos, verbales, analíticos y materiales, así como el uso de notaciones, simbologías y vocabulario, tanto convencionales como alternativos, empleados para describir el concepto matemático. Además, esta categoría abarca la comprensión de las interrelaciones entre las distintas representaciones y su impacto en la construcción del conocimiento matemático (Radford, 2010). Estos registros facilitan la comprensión y la generalización de patrones en situaciones matemáticas.

A continuación, se detallan algunos de los tipos de registros de representación relevantes, representaciones numéricas, incluyen el uso de números y operaciones para mostrar relaciones y

patrones. Pueden utilizar secuencias numéricas para identificar regularidades y generalizar reglas (Vergel, 2014). Representaciones Gráficas: implican el uso de gráficos y diagramas para visualizar patrones. Estas representaciones ayudan a los estudiantes a comprender relaciones entre variables y a identificar tendencias (Pincheira, 2023). Representaciones Verbales: consisten en descripciones orales o escritas que explican los patrones observados. Los estudiantes pueden verbalizar sus razonamientos, lo que les permite clarificar su pensamiento y compartirlo con otros (Radford, 2010). Representaciones Semióticas: se refieren al uso de símbolos y notaciones matemáticas que permiten expresar ideas complejas de manera concisa. Estas representaciones son esenciales para el desarrollo del pensamiento algebraico, ya que facilitan la comunicación de conceptos (Radford, 2022). El conocimiento sobre estos registros es crucial para que los profesores puedan ver las conexiones entre diferentes formas de representación (Radford, 2022).

Propiedades y fundamentos hacen referencia al conocimiento que posee un profesor sobre las características esenciales de un objeto o procedimiento matemático, las cuales le confieren significado y contexto. Este conocimiento comprende las propiedades que definen al objeto y aquellas que surgen de sus interrelaciones con otros conceptos y su justificación dentro del marco matemático (Espinoza, 2020).

Las propiedades y fundamentos de la generalización de patrones en el pensamiento algebraico temprano se centran en varios aspectos clave. Los profesores deben ser capaces de reconocer características comunes entre los elementos de una secuencia, lo que les permite establecer patrones y relaciones. Esta identificación es fundamental para avanzar hacia la generalización (Radford, 2010, 2022). A partir de esta propiedad común, se extiende el razonamiento inductivo que conecta lo específico con lo general, permitiendo extender la comprensión a un conjunto más amplio de casos (Sosa-Moguel et al., 2020). Este proceso lleva a

la construcción de expresiones algebraicas que permiten calcular el término dentro de la secuencia, lo que es esencial; esto, requiere el uso del simbolismo algebraico y el conocimiento para expresar matemáticamente las observaciones realizadas (Kieran et al., 2016). Para desarrollar el pensamiento algebraico, no solo es necesario ver lo general en lo particular, pues se requiere la capacidad de expresarlo mediante notación algebraica. Sin embargo, existe una dificultad común entre los estudiantes para hacer esta transición del lenguaje verbal al simbólico (English y Kirshner, 2015). Estos fundamentos son cruciales para introducir el pensamiento algebraico desde los primeros años de educación, promoviendo un aprendizaje continuo y sin rupturas entre la aritmética y el álgebra (Knuth et al., 2011).

En la categoría Procedimientos se consideran las siguientes preguntas a) referido al conocimiento del profesor de primaria; b) ¿cuándo se puede hacer?, las condiciones para proceder; c) ¿por qué se hace?, los fundamentos de la generalización de patrones; y d) las características que tendría el objeto resultante asociado al tema en cuestión. A este propósito Radford (2015) señala que la principal diferencia entre el pensamiento aritmético y el algebraico radica en que este último aborda cantidades indeterminadas de manera analítica. En otras palabras, se consideran cantidades indeterminadas (como incógnitas o variables) como si fueran conocidas y se realizan cálculos con ellas de la misma forma que se haría con números conocidos. Por ejemplo, al trabajar con la secuencia 3, 6, 9, 12, …, el profesor debe poseer un conocimiento sobre: el procedimiento (¿cómo se hace?): saber cómo guiar la identificación del patrón de crecimiento. Las condiciones (¿cuándo se puede hacer?): reconocer en qué contextos es válido aplicar la generalización, como en secuencias con una relación de adición constante. Los fundamentos (¿por qué se hace?): comprender la relación de la secuencia con la multiplicación, la estructura de las progresiones aritméticas y la noción de función lineal en

niveles más avanzados. Las características del objeto matemático resultante: ser capaz de analizar la regularidad del patrón, prever su comportamiento a largo plazo y establecer conexiones con otros conceptos.

Desde esta perspectiva, la generalización de patrones es el puente epistémico donde el profesor deja de ver los temas como "nodos aislados" y comienza a gestionarlos como una red sistémica interconectada (Carrillo-Yañez et al., 2018; Flores-Medrano, 2022). El diálogo con el subdominio *KSM* puede facilitar una transición hacia el *Early Algebra* se configure como una práctica de articulación progresiva entre contenido, superando una aproximación centrada exclusivamente en la instrucción técnica (González y Eudave, 2018).

3.1.4 Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT)

Este subdominio integra el conocimiento matemático y su enseñanza, lo que permite al profesor seleccionar representaciones específicas o materiales para facilitar el aprendizaje de un concepto o procedimiento matemático, así como elegir libros, una tarea o herramientas digitales (Rojas et al., 2015). Aunque este conocimiento no se considera matemático en sí mismo, es fundamental para que los profesores puedan desarrollar el contenido (Escudero-Ávila et al., 2016).

Es importante destacar que este conocimiento trasciende el uso instrumental de los recursos, dado que implica una valoración crítica de su potencial para favorecer la enseñanza de contenidos matemáticos específicos, así como de las limitaciones que pueden presentar en contextos de aplicación matemática (Carrillo-Yañez et al., 2018).

Las categorías consideradas en este subdominio son: teorías personales o institucionalizadas de enseñanza, recursos materiales y virtuales, y ejemplos y actividades para la

enseñanza. Teorías personales o institucionalizadas de enseñanza: se refiere al conocimiento sobre teorías específicas de la Educación Matemática, así como estrategias o técnicas didácticas asociadas a un tema matemático y sus implicaciones, por ejemplo, el conocimiento sobre la estructura general propuesta en la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (Flores-Medrano et al., 2014). Recursos materiales y virtuales: incluye el conocimiento sobre herramientas como libros de texto, pizarras tradicionales y electrónicas, software educativo como Cabri o GeoGebra, que se utilizan para enseñar matemáticas (Escudero-Ávila et al., 2016). Ejemplos y actividades para la enseñanza: se refiere al conocimiento del profesor sobre ejemplos y la potencialidad de ciertas actividades en función del tema que se está abordando (Escudero-Ávila et al., 2016).

3.1.5 Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS)

Este subdominio integra el conocimiento de los contenidos prescritos por las normativas curriculares, su organización a través de los diferentes niveles educativos y las condiciones que orientan su desarrollo (Rojas et al., 2015). Además, comprende el conocimiento de las expectativas de aprendizaje, de la progresión del desarrollo conceptual y procedimental de los estudiantes y de la secuencia en que dichos contenidos se incorporan a lo largo de la escolaridad. En consecuencia, este conocimiento especializado permite interpretar críticamente las demandas curriculares y valorar la correspondencia entre los aprendizajes esperados y el nivel de desarrollo que se prevé alcancen los estudiantes en cada etapa educativa (Sosa-Guerrero, 2024).

Por otra parte, para este subdominio es relevante la cuestión del estándar de aprendizaje que se considera como un indicador del nivel de capacidad que se espera que los estudiantes alcancen en un momento determinado del ciclo escolar, en relación con el aprendizaje, la construcción y el dominio de las matemáticas (Flores-Medrano et al., 2014). Las categorías de

este subdominio son: resultados de aprendizaje esperados, nivel esperado de desarrollo conceptual o procedimental y secuenciación de temas.

La primera, que actualmente se denomina resultados de aprendizaje esperados, consiste en el conocimiento que manifiesta el profesor acerca de lo que está determinado que aprenda un estudiante a nivel de Educación Básica Primaria, al igual que el nivel conceptual con el que se espera aprenda (Adame-Esparza y de Lira Lozano, 2019). En la segunda categoría se considera el conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado y se refiere, de manera general, al nivel de profundización (y extensión) que se puede alcanzar en un tema específico en un momento determinado del nivel escolar. Por ejemplo, entender que no se espera que un estudiante de segundo nivel de primaria logre un nivel de deducción formal o rigor, según el modelo de Van Hiele, forma parte de esta categoría (Codes y Contreras, 2022).

La tercera categoría se entiende como la secuenciación de temas que el profesor llevará a cabo dentro del mismo curso, considerando también los cursos anteriores (conocimiento que debe tener el profesor sobre lo que un estudiante de un determinado nivel necesita para abordar nuevas tareas) o los cursos posteriores (conocimiento de las potencialidades que el trabajo actual tendrá para desarrollar un tema específico en el futuro). Por ejemplo, el reconocimiento del signo igual como una equivalencia entre expresiones que incluyen sumas y restas suele introducirse en el primer nivel de Educación Básica Primaria. A lo largo de los niveles siguientes, estos conceptos se refuerzan mediante actividades que implican operar con secuencias numéricas para identificar números u operaciones faltantes, así como aplicar las propiedades de las operaciones en contextos tanto escolares como extraescolares, especialmente en el segundo nivel (Codes y Contreras, 2022).

3.2 Pensamiento Algebraico Temprano

En el mundo de la Educación Matemática ha surgido el interés por el conocimiento del profesor de primaria en una disciplina específica, particularmente en relación con el pensamiento algebraico temprano (Kaput et al., 2017). Este enfoque promueve el desarrollo del pensamiento algebraico desde las primeras etapas de la educación básica primaria, como una propuesta de cambio curricular que emerge a partir de diversos estudios (Radford, 2022; Schliemann et al., 2006).

El pensamiento algebraico temprano busca fortalecer la exploración y comprensión de patrones, relaciones y estructuras matemáticas desde los primeros grados escolares (Pincheira, 2023). De acuerdo con Aké (2021) el objetivo es fomentar un desarrollo progresivo del pensamiento algebraico, que se desarrolle desde la educación inicial hasta la secundaria, sin que ello implique la implementación de un "curso de álgebra" en la Educación Básica Primaria. Para comprender mejor lo anterior, esto ocurre porque los estudiantes de secundaria presentan una comprensión limitada de la sintaxis algebraica, lo que les dificulta interpretar correctamente los símbolos algebraicos. Esta situación motiva a estudiar si ciertas actividades algebraicas pueden implementarse en la Educación Básica Primaria, enfocándose en un abordaje temprano del desarrollo del pensamiento algebraico para prevenir dificultades en la comprensión de conceptos más complejos (Kaput et al., 2017). Cabe señalar que, a diferencia de la enseñanza tradicional del álgebra, que se enfoca en la manipulación de expresiones y ecuaciones, el pensamiento algebraico temprano pone énfasis en la capacidad de identificar regularidades, secuencias o patrones, sentando las bases para el aprendizaje del álgebra formal en etapas posteriores (Zapatera, 2018). Por tanto, diversos currículos de Educación Infantil y Primaria han comenzado a integrar explícitamente contenidos destinados a fomentar el pensamiento algebraico desde las

primeras edades como en Estados Unidos, Australia, Singapur y Chile (Pincheira y Alsina, 2021b).

A pesar de la creciente importancia del álgebra temprana, sigue existiendo un desacuerdo en la literatura acerca de cómo definir los conocimientos específicos que engloba el concepto de "álgebra temprana" (Radford, 2022). Además, Nobrega et al. (2021) señalan que la mayoría de los estudios internacionales se centran en el aprendizaje de los alumnos, mientras que pocos abordan específicamente los conocimientos de los profesores, particularmente en la Educación Básica Primaria, para trabajar con el pensamiento algebraico.

Este enfoque demanda una perspectiva más amplia sobre la naturaleza del álgebra escolar, que tenga en cuenta la interacción entre los diferentes tipos de pensamiento algebraico y los procesos de generalización de patrones (Vergel, 2015). Para caracterizar el pensamiento algebraico, Radford (2022) distinguen tres tipos: indeterminación de las magnitudes, el pensamiento algebraico se caracteriza por trabajar con magnitudes que no están determinadas, como incógnitas, variables o parámetros. Denotación, es fundamental asignar nombres o símbolos a las magnitudes o cantidades indeterminadas involucradas. Este proceso de simbolización puede realizarse de diferentes maneras, utilizando signos alfanuméricos o incluso empleando lenguaje natural, gestos, signos no convencionales o una combinación de ellos. Analiticidad, el pensamiento algebraico permite calcular u operar con magnitudes o cantidades indeterminadas como si fueran conocidas, y aborda relaciones matemáticas que incluyen magnitudes determinadas e indeterminadas como ecuaciones, fórmulas o expresiones de manera deductiva.

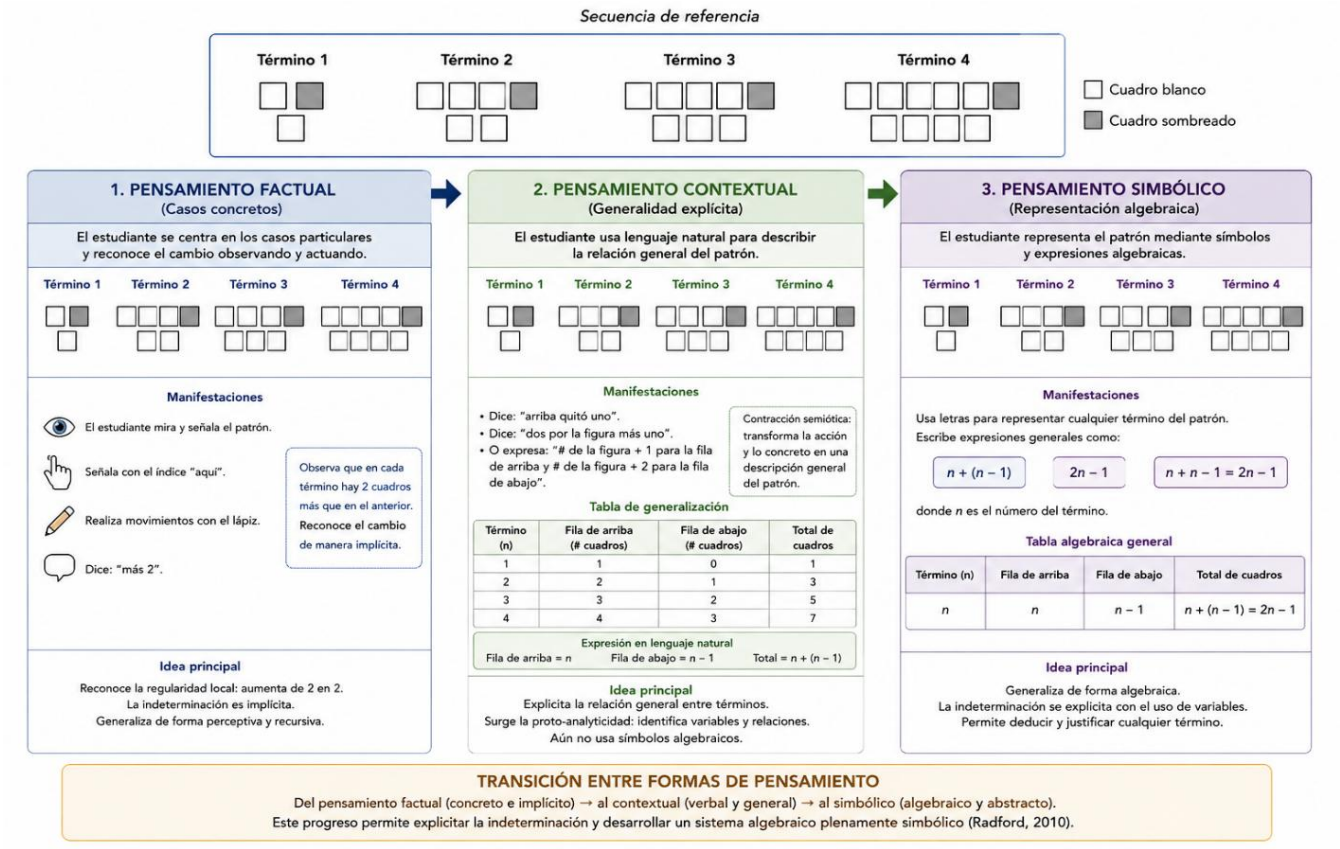
En coherencia con las ideas hasta ahora expuestas, el pensamiento algebraico se caracteriza por elementos analíticos como la indeterminación, la analiticidad y la expresión

simbólica, los cuales están vinculados a las formas de pensamiento propuestas por Vergel et al. (2022). En este marco, el pensamiento factual se centra en casos concretos o números específicos, donde la indeterminación es implícita y se manifiesta mediante medios semióticos como gestos, palabras o acciones. Por ejemplo, el alumno señala con la mirada, con su índice, realiza movimientos con un lápiz, dice "aquí", señala con la mirada, con su índice, realiza movimientos con un lápiz, dice "aquí", señala y dice "más 2" (Vergel, 2014, p. 227). El pensamiento contextual, avanza hacia la generalidad explícita, utilizando frases clave para describir patrones generales. Este nivel implica una contracción semiótica que transforma expresiones concretas en generalizaciones más abstractas. Por ejemplo, el estudiante dice "arriba quitó uno" o "dos por la figura más uno", o "# de la figura + 1 para la fila de arriba y # de la figura + 2 para la de abajo (Vergel, 2014. p. 227). Finalmente, el pensamiento simbólico, introduce representaciones algebraicas abstractas mediante símbolos alfanuméricos y expresiones generales como $n + (n - 1)$, permitiendo explicitar relaciones funcionales y formas más avanzadas de generalización (Vergel, 2014, p. 227).

La transición entre estas formas destaca el tránsito desde lo concreto hacia lo abstracto, lo cual plantea retos didácticos relacionados con asignar significados abstractos a las representaciones algebraicas. Este progreso permite explicitar la indeterminación y desarrollar un sistema algebraico plenamente simbólico (Radford, 2010).

Figura 4

Progresión del pensamiento algebraico temprano en la generalización de patrones



Fuente: Adaptado de Radford (2010, 2013, 2018), Vergel (2015) y Vergel et al. (2022).

3.3 Generalización de Patrones

Radford (2010) sostiene que la generalización de patrones constituye un proceso esencial para el pensamiento algebraico desde edades tempranas. Además, esta habilidad temprana establece una base para el aprendizaje de conceptos y expresiones algebraicas en niveles educativos posteriores.

En este sentido, los patrones ofrecen una vía de acceso a la abstracción matemática, permitiendo a los estudiantes observar regularidades y utilizar estas observaciones para formular hipótesis. De acuerdo con Radford (2013), la generalización de patrones no solo implica reconocer una regularidad; también requiere la capacidad de expresar dicha regularidad mediante una fórmula algebraica que permita calcular cualquier término de una secuencia. Esta capacidad de generalización es esencial en el proceso de transición de lo concreto a lo abstracto en el aprendizaje de las matemáticas.

Por otro lado, Radford (2013) establece una diferencia crucial entre lo que él denomina generalización aritmética y algebraica. La generalización aritmética se refiere a un tipo de generalización que se queda en el nivel de la observación de patrones sin llegar a la deducción formal de una fórmula que permita calcular términos generales. En esta situación, los estudiantes pueden reconocer el patrón que subyace en los términos de una secuencia, pero no siempre logran deducir una fórmula que les permita calcular cualquier término posterior. Este tipo de generalización es considerado un proceso preliminar que puede evolucionar hacia la generalización algebraica que se caracteriza por una mayor abstracción y la formulación de expresiones que explican la secuencia en su totalidad. Por tanto, esto implica identificar una característica común entre ciertos elementos de una secuencia mediante la observación, extender

esta propiedad a todos los términos de la secuencia y utilizarla para deducir una fórmula que permita calcular cualquier término.

Para Radford (2013) este proceso requiere: i) la toma de conciencia de una propiedad común que se nota a partir de un trabajo en el terreno fenomenológico de observación sobre ciertos términos particulares (por ejemplo, p_1, p_2, p_3…, p_k), ii) la generalización de dicha propiedad a todos los términos subsecuentes de la secuencia (P_{k+1}, P_{k+2}, P_{k+3}…) y iii) la capacidad de usar esa propiedad común a fin de deducir una expresión directa que permite calcular el valor de cualquier término de la secuencia (p. 6). Este tercer paso adquiere un carácter fundamental, en la medida en que la propiedad común, inicialmente planteada como una abducción o predicción plausible (Radford, 2008, 2015), se convierte en una suposición que hace posible la elaboración de una regla o esquema basado en cantidades indeterminadas (variables), lo cual permite deducir expresiones correspondientes a términos que se sitúan más allá del campo perceptivo (Vergel, 2014, 2015). En este sentido, la capacidad de formular una regla o expresión directa constituye el rasgo distintivo de la generalización algebraica (Figura 5) frente a las generalizaciones (Zapatera, 2022).

Figura 5

Estructura de la generalización algebraica de secuencias figurales



Fuente: Radford (2013, p. 7).

Para comprender cómo opera este proceso de generalización, puede considerarse el siguiente ejemplo asociado a un patrón figural creciente. Supóngase una secuencia de figuras construidas con fichas cuadradas, donde el término 1 tiene 3 fichas, el término 2 tiene 5 y el término 3 tiene 7. A partir de los términos dados (3, 5 y 7) el estudiante identifica una característica común: “cada figura aumenta dos fichas”.

En un primer momento emerge un pensamiento factual, ya que la regularidad se expresa mediante acciones concretas y referencias ostensivas. El estudiante señala las figuras, cuenta fichas y afirma “aquí hay dos más” mientras utiliza gestos o movimientos para indicar el crecimiento del patrón. La indeterminación aún permanece implícita y depende del contexto perceptivo inmediato (Radford, 2010).

Posteriormente, el estudiante avanza hacia un pensamiento contextual cuando verbaliza la regularidad de manera más general: “siempre se agregan dos cuadros” o “cada figura tiene dos más que la anterior”. Aquí aparece una contracción semiótica que permite desprenderse parcialmente del caso particular y formular relaciones generales mediante lenguaje natural (Vergel, 2014).

Finalmente, el pensamiento simbólico se manifiesta cuando el estudiante representa algebraicamente la regularidad mediante una expresión como:

$$a_n = 2n + 1$$

En este nivel, la indeterminación se explicita mediante el uso de variables y notación algebraica, permitiendo deducir términos no observados directamente, por ejemplo, calcular el término 5 sin necesidad de construir toda la secuencia.

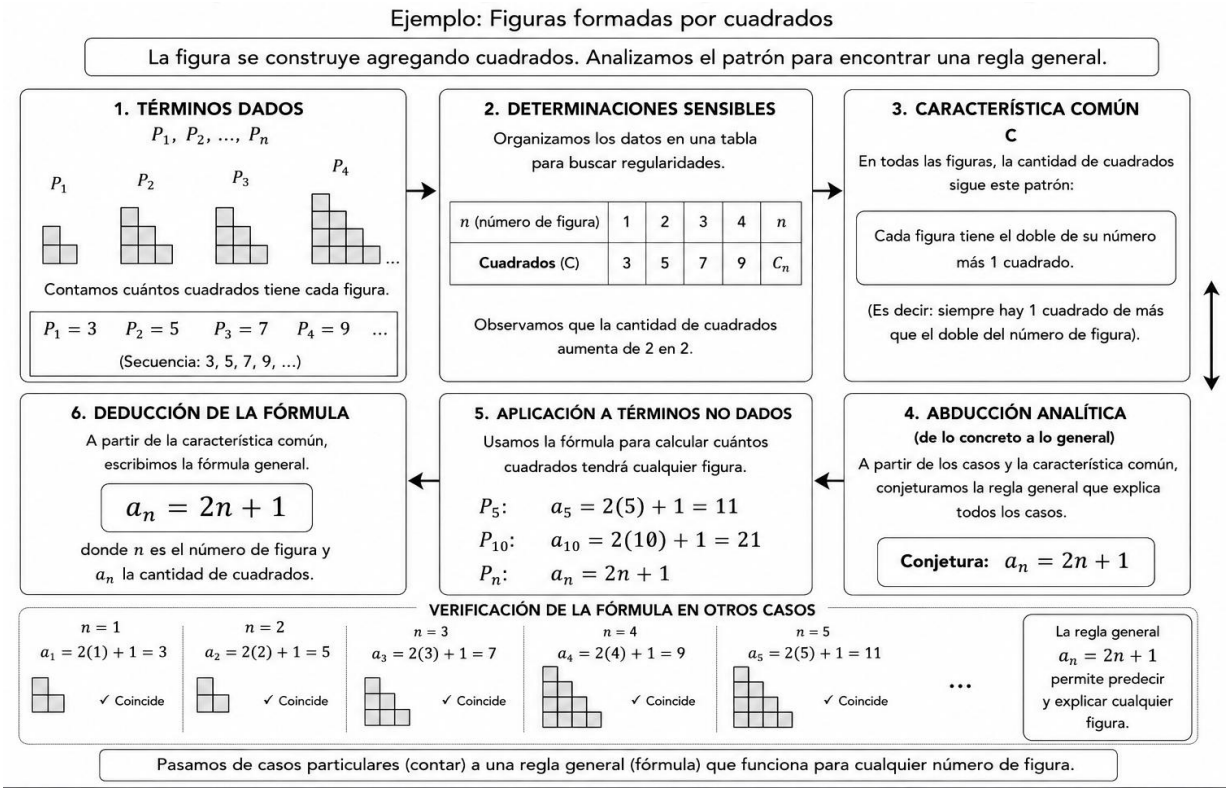
En relación con la Figura 5, el proceso abductivo se evidencia cuando, a partir de algunos casos particulares, el estudiante infiere una hipótesis general sobre el comportamiento del patrón (“la regla es sumar dos”). Posteriormente, dicha hipótesis se valida al aplicarla a términos no dados, lo que conduce a la deducción de una fórmula general. De esta manera, el tránsito desde lo factual hacia lo simbólico no constituye únicamente un cambio de representación, implica una transformación progresiva de las formas de generalización algebraica y de explicitación de la indeterminación (Radford, 2010; Vergel, 2014).

En la estructura de la Figura 5, la generalización consiste en identificar una característica común a partir de un conjunto limitado de términos, lo que implica elegir entre diversas posibilidades sensibles. Posteriormente, esta característica se extiende a otros términos de la secuencia a través de un proceso de abducción que, según Radford (2013) constituye una inferencia razonablemente plausible que permite formular una posible regla general a partir de las regularidades observadas. Cuando este razonamiento únicamente permite avanzar de un término al siguiente, se produce una generalización aritmética, que da lugar a un procedimiento, pero no a una fórmula explícita. De igual manera, cuando los estudiantes proponen una fórmula basada en casos limitados, aun cuando esta resulte plausible, la generalización permanece en un nivel inductivo inicial y no alcanza una deducción algebraica propiamente dicha. Para que la generalización sea verdaderamente algebraica, la abducción debe emplearse de manera analítica, transformándose en un principio fundamentado que permita deducir con rigor una fórmula general aplicable a cualquier término. La clave está en la característica común, que pasa de ser una idea plausible para convertirse en una hipótesis formal, subrayando su importancia epistemológica (Radford, 2013).

El pensamiento algebraico temprano y la estructura de generalización de patrones aportan elementos teóricos que posibilitan un reconocimiento del tipo de pensamiento algebraico manifiesto por los profesores de primaria; adicionalmente, sustentan analíticamente datos obtenidos en la investigación, para la definición de una postura descriptiva - interpretativa en relación con los posibles cambios del conocimiento especializado de los profesores, en el contexto del pensamiento algebraico temprano.

Figura 6

Estructura analítica del proceso de generalización de patrones en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano



Fuente: elaboración propia

3.4 Conocimiento de Profesores de Matemáticas en Educación de Primaria

Existen diversas perspectivas sobre el conocimiento de los profesores, las cuales han dado origen a distintos marcos teóricos en torno al conocimiento del profesor de matemáticas, entre ellos se encuentran, la competencia profesional (Font, 2011), la formación del profesor de matemáticas (Llinares, 2018), el enfoque Onto-semiótico (Godino et al., 2017), el análisis de la práctica profesional (Vanegas y Pino-Fan, 2019). Todos ellos se preocupan acerca de *qué es lo que el profesor de matemáticas debería saber* para enfrentar diferentes problemas profesionales, ya que se cuestionan cómo lograr que el profesor de matemáticas identifique y/ o clasifique cuáles son las mejores herramientas para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Así mismo, el conocimiento del profesor no se reduce exclusivamente al trabajo específico en el aula, puesto que se estarían desestimando otros aspectos, algunos sustanciales y otros intangibles como: el conocimiento del profesor, el desarrollo de competencias del profesor, el desarrollo profesional o el dominio afectivo, entre otros, cuya existencia se hace evidente en los modelos teóricos o en las competencias del profesor de matemáticas en ejercicio y en formación (Badillo, 2019).

El conocimiento del profesor, y en especial del profesor de matemáticas, trasciende más allá de una transmisión disciplinar, tomado lo disciplinar en el sentido de llevar al aula un contenido, un objeto matemático. Por ejemplo, una proposición lógica es un objeto matemático que requiere de conceptos básicos de las matemáticas, de conocimientos conceptuales y procedimentales, también de situaciones en contexto (Gorgorió y Albarracín, 2019). La profesión profesoral comparte elementos comunes, como la planificación de clases, el diseño de tareas y la creación de evaluaciones.

En ese sentido, un aspecto crítico es la capacidad de los profesores para diseñar tareas que trasciendan los ejercicios rutinarios y favorezcan el desarrollo del pensamiento algebraico. Esta condición convoca a poner el foco de atención en el conocimiento de los profesores, pues siguiendo a Somasundram (2021) y Vergel (2015) el pensamiento algebraico emerge en el aula como resultado de las tareas propuestas y la naturaleza de la actividad desarrollada. En el marco de la propuesta curricular nacional y su implementación en el aula, se presenta una tarea del portal de Colombia Aprende, diseñada específicamente para el segundo grado, según el currículo colombiano. Esta tarea ejemplifica la propuesta curricular nacional y también sirve como modelo del tratamiento escolar recomendado a los profesores de primaria para abordar la generalización de patrones en dicho grado (Figura 7). La tarea espera que el estudiante diseñe una secuencia numérica, cree formas geométricas y desarrolle figuras de dos patrones, interpretando y argumentando los cambios y variaciones en la secuencia. Desde esta perspectiva, el estudio del pensamiento algebraico temprano direcciona el conocimiento del profesor (de Sousa et al., 2020; Zapata, 2019).

Figura 7

Secuencias y patrones para estudiantes de segundo grado

Observa con atención cada secuencia y luego responde las preguntas:



¿Cuántos elementos componen cada figura de la secuencia?

¿Qué elemento se mantiene constante en la secuencia?

¿Qué elemento varía en la secuencia?

¿Cómo cambia el elemento en la secuencia?

Describe el patrón que encontraste.

Dibuja la secuencia completa.

Nota: Actividad de interpretación de secuencias y patrones, para estudiantes de segundo grado.
Fuente: DBA 13[8].

La tarea presentada en la Figura 7, está concebida para determinar el o los elementos desconocidos de una secuencia numérica y geométrica, además demandando que los estudiantes identifiquen el patrón y reconozcan la unidad de repetición; para ello, deben considerar los giros, los elementos ausentes y subsecuentes en la secuencia, que se presentan de manera estática. Se espera que el estudiante construya entonces la secuencia completa considerando la generalización a la posición n-ésima; sin embargo, no se le brinda oportunidad de cerciorarse si su generalización es adecuada.

[8] https://contenidosparaaprender.colombiaaprende.edu.co/G_2/M/SM/SM_M_G02_U05_L03.pdf

CAPÍTULO 4. Metodología y Diseño de la Investigación

En consonancia, con el modelo *MTSK* centrado en el estudio del conocimiento especializado que movilizan los profesores durante la enseñanza, particularmente en contextos reales de aula, se recurre con frecuencia a la metodología de estudio de caso (Carrillo-Yañez et al., 2018). Y en coherencia con el paradigma cualitativo adoptado en esta investigación, se opta la metodología de estudio de caso tal como lo definen Stake (2015) y Stott y Ramil (2014). Esta estrategia permite caracterizar el conocimiento especializado que ponen en evidencia los profesores de Educación Básica Primaria al enseñar la generalización de patrones como base para promover el desarrollo del pensamiento algebraico temprano (Merriam, 2009; Stake, 2015).

Según Yin (2014), la cualidad naturalista y analítica del estudio de caso lo convierte en una herramienta adecuada para estudiar el conocimiento especializado del profesorado, considerado aquí como un constructo “relacional” porque se construye en interacción con otros. Para ello, Radford (2010, 2013) propone una visión sociocultural del pensamiento algebraico en la que la generalización no es una actividad meramente cognitiva. En este marco, el pensamiento algebraico temprano adquiere un carácter dinámico y evolutivo, dado que su desarrollo no corresponde a una estructura estática o acabada; se configura como una construcción progresiva que se consolida desde la Educación Básica Primaria mediante experiencias asociadas a la búsqueda de regularidades, la abstracción gradual y la elaboración de generalizaciones (Kaput et al., 2017; Kieran et al., 2016); y "contextualmente mediado" porque está influenciado por el entorno específico en el que se desarrolla, como la cultura escolar, los estudiantes y los recursos disponibles (Yin, 2014).

Este diseño combina un carácter descriptivo e interpretativo Bisquerra (2019), sustentado en la premisa que los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se desarrollan en

entornos esencialmente interpretativos, en los cuales estudiantes y profesorado actúan como intérpretes de actividades matemáticas, tanto propias como ajenas, enmarcadas en un contexto social y cultural *perspectiva ontológica* (Romero y Batallanos, 2016).

En este marco, se prioriza el uso de instrumento de caracterización, cuestionarios y entrevista semiestructurada[9], los cuales permiten acceder a las interpretaciones y valoraciones de los participantes y captar la complejidad del caso en su contexto natural, aportando información contextual y evidencias complementarias (Simons, 2011). En consonancia con ello, Stake, (2015) subraya que la riqueza del estudio de caso no radica en la aplicación estandarizada de un único instrumento; se encuentra en la combinación flexible y coherente de diversos instrumentos que posibiliten una comprensión holística y profunda del caso estudiado.

Este diseño metodológico reside en la convergencia entre una perspectiva epistemológica constructivista y la naturaleza del conocimiento especializado como una construcción personal y social arraigada en la experiencia (Simons, 2011). Al alinear la caracterización, los cuestionarios *MTSK* y la entrevista semiestructurada con este marco, la investigación prioriza la particularización, buscando comprender la dimensión intrínseca y la complejidad del "sistema delimitado" que representa cada profesor (Simons, 2011).

Este enfoque instrumental permite que los perfiles de Cristóbal, Orlando y Sara profesores participantes de educación básica primaria seleccionados para el estudio, funcionen como unidades analíticas que posibilitan profundizar en el conocimiento especializado del profesorado como una práctica situada y dinámica. A través de sus discursos, decisiones didácticas y formas de interpretar la generalización de patrones, fue posible documentar

[9] Los documentos se encuentran disponibles en los apartados titulados apéndices y anexos al final del documento, seguidamente de las referencias bibliográficas. Al hacer clic en el enlace correspondiente, podrá acceder y consultar cada uno de ellos.

experiencias reales de enseñanza en contextos donde las fronteras entre el fenómeno estudiado y las condiciones de su práctica cotidiana no aparecen claramente delimitadas (Simons, 2011).

4.1 Diseño de Investigación: Estudio de Caso Instrumental

Esta investigación se constituye en un estudio de caso instrumental, en la medida en que posibilita el análisis de un fenómeno en su contexto natural, identificar patrones comunes y contrastar diferencias entre los casos seleccionados. Además, cada caso constituye una unidad de análisis que enriquece la comprensión integral del fenómeno estudiado Bisquerra (2019) y Yacuzzi (2005).

La perspectiva metodológica que se expone a continuación sustenta las decisiones adoptadas en relación con las estrategias y procedimientos empleados para dar respuesta a la pregunta de investigación y alcanzar los objetivos propuestos. Por consiguiente, el instrumento de caracterización[10] permitió delimitar, contextualizar y dotar de sentido analítico a los casos estudiados por Simons (2011). Su aplicación posibilitó comprender el fenómeno objeto de estudio *el conocimiento especializado de los profesores de Educación Básica Primaria en relación con el pensamiento algebraico temprano*, en condiciones reales y situadas, coherentes con el enfoque cualitativo del estudio (Yin,2014).

Los cuestionarios ayudaron a caracterizar el conocimiento especializado de los profesores de Educación Básica Primaria en relación con el pensamiento algebraico temprano y la generalización de patrones, desde los subdominios del modelo *MTSK* (Carrillo-Yañez et al., 2018). En particular, el cuestionario *KoT* permite caracterizar cómo los profesores comprenden, aplican y enseñan el objeto matemático de los patrones, atendiendo a definiciones, registros de representación, fenomenología y procedimientos, así como a su capacidad para identificar

[10] La caracterización completa se encuentra en el apéndice C.

propiedades y formular generalizaciones algebraicas (Adame-Esparza y de Lira Lozano, 2019; Climent et al., 2014). Por su parte, el cuestionario *KMLS* vincula la práctica profesoral con el marco curricular, al indagar las expectativas de aprendizaje y la progresión del pensamiento algebraico temprano a lo largo de la Educación Básica Primaria (Codes y Contreras, 2022). El cuestionario *KMT* se orienta a la dimensión didáctica, al explorar la selección de recursos y estrategias, y las intervenciones didácticas que favorecen el tránsito desde la observación de regularidades hacia la formulación de reglas generales (Climent et al., 2014).

Finalmente, la entrevista permitió acceder a la experiencia situada de los profesores en sus contextos de actuación, haciendo visibles matices, significados y detalles que difícilmente se capturan mediante cuestionarios escritos (Creswell y Creswell, 2022; Yin, 2014). Asimismo, constituyó un recurso importante para explicitar de forma indirecta las teorías personales y concepciones que orientan la enseñanza del pensamiento algebraico temprano, en especial en profesores sin formación inicial específica en matemáticas, al indagar cómo interpretan los procesos de aprendizaje vinculados a la generalización de patrones y cómo fundamentan sus decisiones en la práctica (Radford, 2022; Stake, 2015).

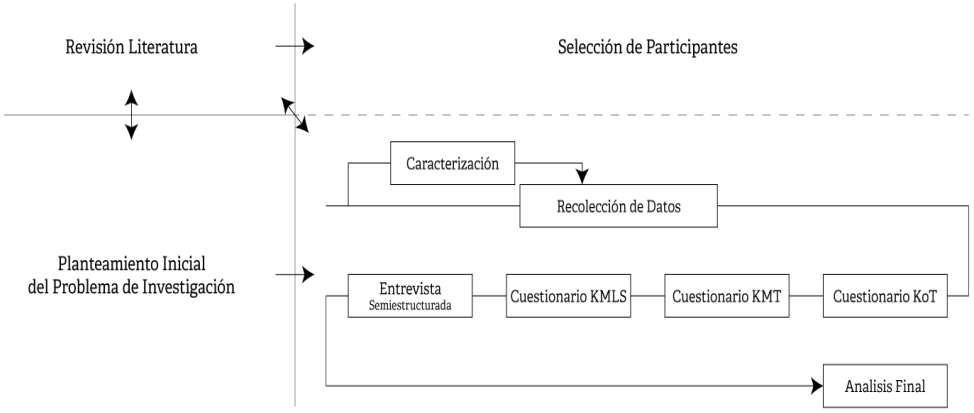
La Figura 8 presenta el diseño metodológico del estudio y el proceso seguido para la recolección y el análisis de la información. El procedimiento se inició con la revisión de la literatura, la cual contribuyó al planteamiento inicial del problema de investigación y orienta la selección de los participantes. En una fase posterior, se realizó la caracterización de los profesores, con el fin de contextualizar los casos estudiados.

Seguidamente, la recolección de datos se llevó a cabo mediante cuatro instrumentos: los cuestionarios *KoT, KMT y KMLS,* considerados de manera independiente, y la entrevista

semiestructurada. Finalmente, la información obtenida convergió en el análisis final, en el que se integran e interpretan los datos de forma coherente con el enfoque cualitativo del estudio.

Figura 8

Diseño metodológico de la investigación



Fuente: Adaptado de McMillan y Schumacher (2005).

Otro elemento importante para la investigación fue el uso de la estrategia *top-down* (“de arriba hacia abajo”) y *bottom-up* (“de abajo hacia arriba”). Este enfoque metodológico se incorporó al diseño de la investigación en la medida en que posibilitó un doble acercamiento a los datos, para generar miradas complementarias y enriquecidas sobre el proceso de análisis (Grbich, 2011).

Acercamiento a *Top–down* - *Bottom–Up* que se corresponde al PAT con el *MTSK*

La fase deductiva (*Top–Down*) del análisis tiene como propósito establecer un marco conceptual previo a la lectura empírica, que permita diferenciar analíticamente los subdominios *KoT, KMT y KMLS* del modelo *MTSK* (Carrillo-Yañez et al., 2018) en el contexto del desarrollo

del pensamiento algebraico temprano (PAT), específicamente la generalización de patrones (Vergel, 2015).

Desde una perspectiva metodológica cualitativa interpretativa, esta fase se orientó a la construcción de las lentes analíticas que guiarán el análisis inductivo posterior (Fuentes-Leal, 2020b). En este marco, el modelo *MTSK* se constituye como lupa teórica que permite avanzar en la comprensión de la realidad profesional del profesor (Sosa-Guerrero, 2024b). En consecuencia, la diferenciación establecida en esta etapa identificada como el método deductivo o *Top-Down* transita de la teoría a los datos (Niss, 2003). Bajo esta premisa, la validez empírica de dichas categorías será examinada, tensionada o ajustada en las fases *Bottom–Up* e integrativa, así permitir que la estructura del modelo se refine y complete mediante una interacción constante entre el análisis y la reflexión teórica (Carrillo-Yañez et al., 2018; Strauss y Corbin, 1994).

En este sentido, la función principal del procedimiento *Bottom–Up* (de los datos a la teoría) es reguladora y densificadora, permitiendo que la estructura y funcionalidad del modelo original sean escrutadas desde la teoría del modelo *MTSK* (Carrillo-Yañez et al., 2018; Kim et al., 2015). Este proceso posibilitó que los datos empíricos modulen la asignación de niveles ordinales y revelen matices intra e intercasos dentro de cada categoría analítica, refinando y completando las definiciones de los subdominios en una interacción constante entre análisis y reflexión teórica (Carrillo-Yañez et al., 2018; Escudero-Ávila y Carrillo Yáñez, 2020).

El punto de partida es la identificación de fragmentos empíricos significativos en las respuestas de los profesores, denominados unidades de información (Rojas et al., 2015). Estos fragmentos constituyen la base empírica obligatoria para toda asignación de códigos y niveles, entendiéndose como episodios que poseen una secuencia de acciones con un principio y un fin reconocibles (Rojas et al., 2015). Bajo este rigor metodológico, la codificación se realizó con

respaldo textual explícito derivado del análisis de contenido de la producción del profesor (Escudero-Ávila y Carrillo-Yáñez, 2020).

El análisis de datos se llevó a cabo a través de una codificación *Top-Down-Bottom-Up* (de la teoría a los datos, de los datos a la teoría), la cual implica que se establecen de antemano unas categorías o códigos que sirven para estudiar la información. Estas categorías predeterminadas se dividen en subcategorías más específicas, lo que permitió un análisis estructurado y ordenado *KoT, KMT y KMLS*. La información recolectada a través de los cuestionarios y la entrevista semiestructurada fue analizada a la luz de estas categorías, permitiendo contrastar los referentes teóricos con las evidencias empíricas obtenidas (Fuentes, 2020).

Se adoptó la codificación *Top-Down–Bottom-Up* con el fin de integrar estrategias metodológicas usadas previamente en investigaciones que usan el modelo *MTSK*. Luego, se combinó una aproximación deductiva que aplica las categorías teóricas de los subdominios *KoT, KMT y KMLS* con una estrategia deductiva *(top-down)* que permite emerger nuevos códigos a partir de los datos, después de la dispersión de un análisis exclusivamente análisis inductiva (*bottom-up)* (Reyes-Bravo et al., 2024). Esta estrategia de análisis de los datos favoreció un diálogo entre la teoría y la evidencia empírica, preservando la voz de Cristóbal, Orlando y Sara y garantiza la congruencia conceptual. Asimismo, se ajusta al paradigma cualitativo interpretativo (Reyes-Bravo et al., 2024), al permitir caracterizar cómo se configura y se manifiesta el conocimiento especializado en los contextos reales de enseñanza de la generalización de patrones.

4.2 Selección de los Participantes

En el marco del estudio de caso propuesto en esta investigación, la selección intencionada de los profesores participantes responde a los criterios propios del estudio de caso instrumental. Al respecto, (Simons, 2011) señala que, en este tipo de estudios, los casos no se eligen por su carácter representativo, se seleccionan por su potencial para aportar comprensión al fenómeno objeto de análisis. En coherencia con este enfoque, los tres profesores fueron seleccionados por su disposición y motivación para colaborar en la investigación, lo que permitió acceder a información rica y situada, orientada a captar la complejidad y diversidad del fenómeno investigado. Como señalan Stake (2015) y Yin (2014) los casos deben elegirse por su accesibilidad y por el valor teórico y empírico que aportan al análisis.

Los casos seleccionados corresponden a tres profesores, identificados mediante los pseudónimos Cristóbal, Orlando y Sara, quienes se desempeñan como profesores de matemáticas en Educación Básica Primaria en Instituciones Educativas Oficiales (IEO) ubicadas en las ciudades de Popayán, Bogotá y Pasto. La elección de estos casos se fundamenta en las características singulares de sus trayectorias y prácticas pedagógicas, las cuales posibilitan explorar distintos modos de construcción y manifestación del conocimiento especializado del profesorado.

En coherencia con el diseño del estudio, cada profesor constituye una unidad de análisis, entendida como un sistema delimitado que integra su formación, experiencia, contexto institucional y prácticas de enseñanza. Esta delimitación permitió analizar el fenómeno de manera situada, preservando la especificidad de cada caso, al tiempo que posibilitó la identificación de patrones comunes y contrastes significativos entre ellos, propios de los estudios de caso instrumentales (Yin, 2014).

Los criterios que orientaron la selección de los participantes fueron los siguientes: i) contar con al menos entre dos y tres años de experiencia en la enseñanza de las matemáticas en Educación Básica Primaria, con el propósito de asegurar un conocimiento previo de las dinámicas y desafíos propios de este nivel educativo; ii) manifestar disposición y compromiso para participar activamente en todas las fases del proceso investigativo; y iii) presentar diversidad en cuanto a contextos institucionales y trayectorias profesorales, lo que permite enriquecer el análisis desde múltiples escenarios de enseñanza.

De este modo, la selección de los participantes y la definición de la unidad de análisis se articulan directamente con el enfoque cualitativo del estudio, el cual posibilitó una caracterización situada y teóricamente informada del conocimiento especializado que los profesores movilizan al enseñar la generalización de patrones en Educación Básica Primaria.

El caso de Sara adquiere singularidad a partir de la convergencia de condiciones profesorales y contextuales que configuran su práctica profesoral (Simons, 2011). Su desempeño en modalidad multigrado, atendiendo de manera simultánea los grados cuarto y quinto en un contexto rural, da lugar a una situación particular en la planificación: la enseñanza y la evaluación de las matemáticas requieren ajustes permanentes para responder a niveles de aprendizaje diversos dentro de un mismo espacio escolar (McMillan y Schumacher, 2005; Simons, 2011).

Respecto a los procesos institucionales relacionados con la planeación curricular en matemáticas, señala que estos se desarrollan colectivamente desde el área de matemáticas, involucrando profesores de diferentes grados. Las reuniones del área se realizan principalmente durante las semanas de desarrollo institucional y tienen como propósitos fundamentales la planeación, seguimiento y evaluación del currículo de matemáticas, así como la formulación de

planes de mejoramiento orientados a atender las dificultades de aprendizaje identificadas en los estudiantes.

En cuanto al uso de materiales y recursos didácticos en las clases de matemáticas, manifiesta que estos se utilizan principalmente para explorar saberes previos, motivar a los estudiantes mediante estrategias más dinámicas y responder a directrices institucionales establecidas. Frente a las dificultades asociadas al uso de recursos, identifica como principal limitación el reconocimiento del propósito específico de los materiales y recursos dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

El caso de Cristóbal se distingue, en particular, por su participación en procesos colectivos de planeación y seguimiento del currículo de matemáticas, mediante reuniones periódicas orientadas tanto a la renovación curricular como al intercambio sistemático de experiencias pedagógica (Yin, 2014). Dicha implicación permite caracterizar el conocimiento del profesor como un atributo individual y un conocimiento que se construye y negocia en interacción con otros profesores (Stake, 2015).

Orlando se configura como un caso singular en el marco de esta investigación al desempeñarse como profesor de Educación Básica Primaria que enseña matemáticas sin contar con formación titulada específica en esta área, a pesar de poseer una trayectoria académica avanzada en el campo de la educación (Stake, 2015). Esta combinación entre una formación posgraduada y la ausencia de estudios formales en matemáticas sitúa su práctica profesoral en una condición particular, en la que el conocimiento matemático se construye y se moviliza principalmente desde la experiencia profesional, la planeación institucional compartida y las exigencias propias del contexto escolar (McMillan y Schumacher, 2005). Desde esta perspectiva, su participación en el estudio aportó un referente pertinente para examinar el fenómeno

investigado en un escenario educativo concreto, permitiendo aproximarse a la comprensión del conocimiento especializado del profesorado tal como se manifiesta en la práctica cotidiana de la Educación Básica Primaria (Yin, 2014).

Por tanto, Cristóbal, Orlando y Sara no responden a criterios de representatividad estadística, pues su selección se fundamenta en la relevancia analítica de sus trayectorias profesorales y contextos de actuación, los cuales ofrecen condiciones propicias para explorar el fenómeno de interés la *generalización de patrones* (Simons, 2011; Stake, 2015). Cada uno de los profesores aportó una configuración particular que enriquece la caracterización del conocimiento especializado desde distintas perspectivas (McMillan y Schumacher, 2005). Cristóbal contribuyó con un alto grado de contextualización institucional, derivado de su participación en procesos colectivos de planeación y renovación curricular, a pesar de contar con una formación inicial distinta a las matemáticas. Orlando representa un perfil singular al combinar una formación posgraduada con la ausencia de titulación específica en matemáticas. Por su parte, Sara ofrece un escenario de especial complejidad al desempeñarse en un contexto rural y multigrado, donde la enseñanza de las matemáticas exige adaptaciones permanentes sin el respaldo de una formación disciplinar específica. Esta diversidad fortalece el carácter instrumental del estudio, al permitir que los casos funcionen como medios analíticos para profundizar en la comprensión del pensamiento algebraico.

4.2.1 Sara

Sara es profesora de Educación Básica Primaria y se desempeña en una Institución Educativa Oficial del municipio de Pasto, en un contexto rural, durante la jornada de la mañana. Su labor profesoral se desarrolla en modalidad multigrado, atendiendo simultáneamente los

grados cuarto y quinto, y se encuentra vinculada a la enseñanza del área de matemáticas. En este momento se encuentra como docente tutora del Programa Todos a Aprender (PTA)[11].

En cuanto a su formación académica, cuenta con una maestría en educación lograda en 2018, una licenciatura en Educación Básica con énfasis en Ciencias Naturales y Educación Ambiental finalizada en 2014, así como formación normalista concluida en 2010. Además, posee título de bachiller académico. Respecto a la planeación del área de matemáticas, esta se realiza de manera colectiva con la participación de los profesores de los distintos grados. Dichos procesos se desarrollan principalmente durante las semanas de desarrollo institucional y están orientados a la planeación, el seguimiento y la evaluación del currículo, así como a la formulación de planes de mejoramiento para atender las dificultades identificadas en el aprendizaje de los estudiantes. En relación con el uso de recursos y materiales didácticos, Sara señala que estos se emplean con el propósito de explorar los conocimientos previos de los estudiantes, favorecer la motivación y dinamizar el desarrollo de las clases, en consonancia con las orientaciones institucionales. En el registro analizado, no se reportan limitaciones significativas asociadas a la disponibilidad, el acceso o el manejo de dichos recursos; se evidencia un énfasis en la definición de un propósito pedagógico claro para su utilización en la enseñanza de las matemáticas.

4.2.2 Orlando

Orlando es profesor de Educación Básica Primaria y se desempeña en la jornada de la mañana en una Institución Educativa Oficial (IEO) de Bogotá, D. C. Su plaza corresponde al escalafón 3D. Actualmente cursa un doctorado en Educación con proyección al año 2025; además, es magíster en Educación (2016), especialista en Docencia Universitaria (2013) y

[11] En la actualidad el programa todos a aprender es renombrado PTAFI 3.0.

profesional en Psicología (2006). No registra formación normalista ni estudios específicos en el área de matemáticas. En su institución, la planeación del área de matemáticas se desarrolla de manera integrada con las demás áreas del currículo, principalmente durante las semanas de desarrollo institucional. En estos espacios, los profesores realizan procesos de planificación, seguimiento y evaluación por grado, y se asigna a uno de ellos la coordinación de las acciones en matemáticas, aunque dicha responsabilidad no siempre se corresponde con la formación disciplinar de quien la asume.

En relación con el uso de recursos y materiales didácticos, Orlando señala que estos se emplean principalmente como apoyo a la motivación de los estudiantes y al desarrollo de los contenidos matemáticos. Sin embargo, identifica limitaciones vinculadas a la escasez de materiales disponibles, al tiempo requerido para su elaboración y a su formación en el área, factores que, junto con la atención simultánea de múltiples áreas del currículo, restringen la implementación sostenida de estrategias didácticas basadas en el uso de materiales.

4.2.3 Cristóbal

Cristóbal es un profesor que trabaja en el área de Matemáticas en los grados 5° de la Educación Básica Primaria, en el municipio de Popayán. Actualmente, se encuentra en el grado 2BM del escalafón profesor. Su formación académica incluye una licenciatura en Educación con especialidad en Biología, obtenida en 1997, así como una especialización en Agroecología, completada en 2001. Recientemente, ha culminado una Maestría en Innovación Educativa en 2024. Además, es normalista desde 1990.

En cuanto a la planeación del área de matemáticas en su institución educativa, forma parte del grupo de trabajo que incluye a los profesores de todos los grados, participando activamente en la planeación y seguimiento del currículo de matemáticas. Las reuniones del área

se realizan cada dos años, con el propósito de renovar el currículo, intercambiar materiales y experiencias, y mejorar el enfoque de enseñanza en matemáticas. Respecto al uso de materiales y recursos en el aula los emplea principalmente para explorar los conocimientos previos de los estudiantes y apoyar los ejes conceptuales en matemáticas. Sin embargo, ha experimentado dificultades debido a la falta de conocimiento sobre cómo utilizar algunos de los materiales disponibles. Posteriormente, se hizo la aplicación de cuestionarios y la entrevista semiestructurada. Como paso inicial, se considera fundamental estudiar el conocimiento de los temas, la enseñanza de las matemáticas y los estándares de aprendizaje asociados a esta área.

4.3 Instrumentos de Recolección de Datos

Los elementos fundamentales de la investigación son los datos; el primer paso es recolectar y codificar utilizando matrices[12]. Estás matrices se diseñaron a partir de las categorías de cada subdominio *KoT*, *KMT* y *KMLS*, con el propósito de caracterizar el conocimiento de los profesores en el desarrollo del pensamiento algebraico especialmente la enseñanza de la generalización de patrones. En este caso, se utilizó la herramienta Excel para analizar e interpretar los resultados del estudio. En el caso de los datos, de acuerdo con McMillan y Schumacher (2005), estos deben guardar relación con aquello que se desea investigar, es decir, con la pregunta y el objetivo de la investigación, y ser recolectados intencionalmente en sus contextos naturales cuando corresponda.

Para iniciar el proceso de recolección de datos se solicitó las autorizaciones correspondientes[13] a cada profesor, (véase anexo A). En estas autorizaciones se estipula el acuerdo de confidencialidad sobre los datos, lo que compromete a utilizar las videograbaciones,

[12] El apéndice G contiene las matrices completas.

[13] El consentimiento se encuentra en el anexo A.

audios y fotografías sólo para fines de investigación sin revelar los nombres reales de los profesores ni del establecimiento en el cual se registran los datos. Por esta razón, se anexan sólo las transcripciones de las sesiones y entrevistas, quedando archivados los videos, audios y fotografías donde pudiesen ser reconocidas las personas involucradas.

La recolección de datos en este estudio se realiza mediante un enfoque multi método escuchar y documentar (Simons, 2011) que combina la caracterización de los participantes, cuestionarios y entrevista semiestructurada, bajo la estructura de un estudio de caso instrumental. Desde esta perspectiva, los instrumentos seleccionados para esta investigación fueron cuestionarios y una entrevista semiestructurada que se emplearon para captar significados y perspectivas en el campo del pensamiento algebraico temprano del profesor en el contexto escolar (Stake, 2015).

En la misma línea, McMillan y Schumacher (2005) y Yin (2014) enfatizan en el uso de múltiples fuentes de evidencia y la sistematicidad del procedimiento; la recolección requirió un protocolo como el diseño de los instrumentos y validación de estos por expertos hasta llegar a la aplicación para así obtener evidencia comparable entre casos, y su triangulación para responder preguntas de “cómo” y “por qué” (Carrillo-Yañez et al.,2018).

Una vez obtenidas las autorizaciones pertinentes, se implementó el primer instrumento i) Llamado caracterización a cada profesor para definir límites del caso (contexto escolar, niveles, jornadas, formación). Esta etapa fija las condiciones sociales y profesorales que orientan la interpretación de los datos subsiguientes (véase Apéndice A). ii) En el marco de un estudio de caso instrumental, los cuestionarios (KoT, KMT, KMLS) buscan obtener información sistemática para caracterizar cómo el profesor otorga sentido a la enseñanza y al aprendizaje de temas específicos, como la generalización de patrones.

Dichos cuestionarios presentan las categorías y subcategorías correspondientes a cada subdominio, las cuales fueron detalladas en el marco teórico y se muestran a continuación, en la Tabla 4. De manera complementaria, la entrevista semiestructurada se desarrolla desde el marco analítico del modelo MTSK, lo que permite acceder a las perspectivas de los participantes y a los significados que atribuyen a su práctica profesoral. Este instrumento también posibilita profundizar en los "cómo" y los "por qué" implicados en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano y en la enseñanza de la generalización de patrones *(véase Apéndice G).*

Tabla 4.

Dominios, subdominios y categorías del KoT, KMT y KMLS

Dominio	**Subdominio**	**Categoría y subcategoría**	
MK	*KoT*	Definiciones	
		Fenomenología y aplicaciones	
		Registros de representación	
		Propiedades y sus fundamentos	
		Procedimientos:	¿Cómo se hace?
			¿Cuándo se puede hacer?
			¿Por qué se hace así?
			Características del resultado
PCK	*KMT*	Teorías de la enseñanza de las matemáticas	
		Recursos materiales y virtuales	
		Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	
	KMLS	Resultados de aprendizaje esperados	
		Nivel esperado de desarrollo conceptual o procedimental	
		Secuenciación de temas	

Fuente: Carrillo-Yañez et al. (2018).

Con el propósito de explicitar cómo los subdominios del modelo MTSK, estos fueron operacionalizados en relación con el pensamiento algebraico temprano y la generalización de patrones, para construir la siguiente matriz analítica. Esta permitió establecer referentes matemáticos y didácticos para interpretar las evidencias producidas en los cuestionarios y la entrevista semiestructurada aplicados a los profesores participantes. La operacionalización se fundamentó en los aportes teóricos de Radford (2010), Vergel (2014, 2015), Vergel et al. (2022), Blanton y Kaput (2011), Zapatera (2018) y Carrillo-Yañez et al. (2018).

Tabla 5

Operativización de los subdominios KoT, KMT y KMLS para el análisis del pensamiento algebraico temprano y la generalización de patrones

Subdominio *MTSK*	**Categoría**	**Operativización en el estudio sobre generalización de patrones.**	**Referente matemático esperado.**	**Evidencia de conocimiento especializado.**	**Fundamentación teórica.**
KoT	Definiciones	Comprensión del patrón como regularidad matemática susceptible de generalización.	Reconocimiento de regularidad, covariación y relación funcional entre términos.	El profesor identifica estructuras de crecimiento, reconoce regularidades y diferencia patrones recursivos y funcionales.	Radford (2010); Vergel (2014, 2015); Vergel et al. (2022).
KoT	Fenomenología y aplicaciones	Relación de los patrones con contextos cotidianos y fenómenos de cambio.	Uso de situaciones de crecimiento, secuencias y variación en contextos reales.	El profesor contextualiza patrones en fenómenos naturales, escolares o sociales.	Vergel (2014); Blanton y Kaput (2011).
KoT	Registros de representación	Uso y articulación de representaciones verbales, tabulares,	Traducción entre registros y explicitación de	El profesor utiliza tablas, gráficos, secuencias figurales,	Radford (2010); Duval (2006); Vergel et al.

		gráficas, concretas y algebraica.	relaciones matemáticas.	lenguaje verbal y expresiones algebraicas para representar patrones.	(2022).
KoT	Propiedades y fundamentos	Identificación de invariantes, relaciones estructurales y propiedades de crecimiento.	Comprensión de diferencia constante, regularidad y estructura funcional.	El profesor reconoce qué cambia y qué permanece constante dentro del patrón.	Vergel (2015); Radford (2010).
KoT	Procedimientos: ¿Cómo se hace?	Construcción de términos lejanos y formulación de reglas generales.	Uso de procedimientos recursivos, funcionales y algebraicos.	El profesor utiliza conteo, relaciones funcionales o expresiones generales para determinar términos no visibles.	Zapatera (2018); Blanton y Kaput (2011).
KoT	Procedimientos: ¿Cuándo se puede hacer?	Reconocimiento de condiciones para aplicar expresiones generales.	Comprensión de cuándo una regularidad permite generalización algebraica.	El profesor diferencia situaciones que admiten formulación algebraica de aquellas que no.	Radford (2010); Vergel et al. (2022).
KoT	Procedimientos:	Justificación	Explicación de	El profesor justifica el	Vergel (2014);

	¿Por qué se hace así?	matemática de estrategias de generalización.	relaciones funcionales y argumentación algebraica.	crecimiento del patrón y explica las relaciones entre términos.	Mason (1996).
KoT	Características del resultado	Interpretación matemática de expresiones y resultados obtenidos.	Comprensión del significado estructural de la regla general.	El profesor interpreta la fórmula en relación con la estructura del patrón.	Radford (2010); Vergel (2015).
KMT	Teorías de enseñanza de las matemáticas	Estrategias para promover el tránsito desde lo concreto hacia la generalización.	Uso progresivo de razonamientos factual, contextual y simbólico.	El profesor propone actividades de observación, comparación y formulación de reglas.	Radford (2010); Vergel et al. (2022).
KMT	Recursos materiales y virtuales	Uso de materiales concretos, representaciones visuales y recursos digitales.	Mediación semiótica y multimodalidad.	El profesor utiliza bloques, tablas, secuencias figurales, aplicaciones o material manipulativo.	Radford (2010); Vergel (2014).
KMT	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos.	Diseño de tareas para promover generalización y pensamiento	Uso de términos lejanos, predicción y formulación de reglas.	El profesor plantea actividades que favorecen anticipación,	Zapatera (2018); Blanton y Kaput (2011).

		funcional.		simbolización y argumentación.	
KMLS	Resultados de aprendizaje esperados.	Desarrollo progresivo de capacidades de identificación, descripción y generalización de patrones.	Reconocimiento de regularidades y formulación de reglas generales.	El profesor espera que los estudiantes completen secuencias, predigan términos y generalicen patrones.	MEN (2006); Carrillo-Yañez et al. (2018).
KMLS	Nivel esperado de desarrollo conceptual o procedimental.	Transición desde estrategias recursivas hacia generalización funcional y simbólica.	Desarrollo progresivo del pensamiento algebraico temprano.	El profesor reconoce niveles de complejidad y progresión conceptual.	Vergel (2014); Zapatera (2018).
KMLS	Secuenciación de temas.	Articulación curricular entre pensamiento numérico, variacional y algebraico.	Relación aritmética–álgebra y progresión entre grados escolares.	El profesor establece conexiones entre secuencias, variación y álgebra temprana.	Blanton y Kaput (2011); Radford (2010).

Fuente: Elaboración propia.

4.3.1 Cuestionarios KoT, KMT y KMLS

Los cuestionarios son una herramienta escrita que puede ser respondida de forma directa o mediante una entrevista y cuyo objetivo principal es recolectar datos para analizar una realidad particular (Vargas, 2011). Esta suele incluir preguntas cerradas y específicas que requieren respuestas claras y concretas; sin embargo, en algunos casos, puede incorporar preguntas abiertas de manera moderada (Franco-Seguí y Alsina, 2023). En el ámbito de esta investigación, los cuestionarios fueron fundamentales para analizar el conocimiento matemático de los profesores, específicamente sobre el pensamiento algebraico temprano.

El cuestionario[14] que se presenta a continuación tiene como propósito caracterizar el conocimiento especializado de tres profesores de Educación Básica Primaria en relación con la generalización de patrones, a partir del subdominio *KoT,* específicamente en lo referente a la identificación, descripción y análisis de patrones de crecimiento mediante una secuencia matemática. A través de preguntas específicas, se busca identificar las características clave de los patrones, como su habilidad para representarlos mediante diferentes registros de representación, identificar sus propiedades fundamentales y aplicar procedimientos matemáticos adecuados. Además, se pretende explorar la relación entre teoría y práctica, al analizar situaciones cotidianas en las que estos patrones puedan ser aplicados, así como las justificaciones matemáticas que respaldan las decisiones tomadas en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Este cuestionario, es adaptado del trabajo investigativo sobre las formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria de 9 a 10 años (Vergel, 2014).

En el mismo sentido, cada pregunta *(ítems)* se encuentra estructurada de acuerdo con las categorías de subdominio *KoT*: definiciones, fenomenología, aplicaciones, registros de

[14] Transcripción del cuestionario KoT, véase en el apéndice D.

representación, propiedades y fundamentos, procedimientos, y preguntas que invitan a reflexionar sobre la enseñanza matemática de patrones, proporcionando una visión integral del conocimiento matemático necesario para guiar el aprendizaje de los estudiantes (Liñán et al., 2016).

Observa detenidamente la siguiente secuencia:



Término 1 Término 2 Término 3 Término 4

Fuente: adaptado de Vergel (2014).

Parte 1: Preguntas según las categorías del subdominio KoT

Categoría: definiciones. Las definiciones matemáticas son esenciales para establecer una base conceptual sólida que permita comprender y construir otros conceptos.

1. Describe qué observas en el patrón de crecimiento entre cada término.

En este caso, la pregunta busca determinar si los profesores son capaces de identificar y describir de manera precisa las características esenciales de un patrón de crecimiento, particularmente la existencia de una regularidad basada en un incremento constante entre términos consecutivos. Este conocimiento implica el uso de un lenguaje matemático claro, con términos como "diferencia constante" o "crecimiento lineal", “relación entre posición y cantidad”, “regla general” o “covariación”. Además, permite identificar si los profesores evidencian el conocimiento necesario para guiar a los estudiantes en la observación y análisis de patrones, lo cual es crucial para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano (Carrillo-Yañez et al., 2018).

Asimismo, se consideró relevante caracterizar si los profesores reconocían qué elementos permanecen invariantes y cuáles cambian dentro de la secuencia, además de su capacidad para establecer conexiones entre representaciones verbales, tabulares, gráficas y algebraicas (Girit-Yildiz, 2023). Desde esta perspectiva, el conocimiento especializado no se limitó únicamente a describir que un patrón "aumenta", también a justificar matemáticamente cómo se organiza su estructura y cómo puede generalizarse hacia términos no visibles (Jungbluth et al., 2022).

Por ejemplo, evidencias de conocimiento especializado se observaron cuando los profesores expresaban ideas como: *"cada término aumenta dos unidades respecto al anterior", "la cantidad de cuadros depende del número de la figura" o "la regla general puede representarse mediante una expresión algebraica como* $2n + 1$*"* (Zaldívar et al., 2017).

Estas consideraciones permitieron interpretar el conocimiento de los profesores desde el subdominio *KoT* del modelo *MTSK*, particularmente en relación con la generalización de patrones y el desarrollo del pensamiento algebraico temprano (Carrillo-Yañez et al., 2018; Vergel et al., 2022).

Categoría: fenomenología y Aplicaciones. La fenomenología se refiere al estudio de cómo se manifiestan los fenómenos matemáticos en diferentes contextos, permitiendo a los profesores identificarlos y describirlos. Las aplicaciones, por su parte, se centran en el uso práctico de los conceptos matemáticos en situaciones reales, ayudando a contextualizar el conocimiento y a desarrollar habilidades para resolver problemas. Este enfoque explora la capacidad del profesor para identificar patrones en situaciones reales y relacionarlos con conceptos matemáticos, favoreciendo una enseñanza que articula la comprensión conceptual con su aplicación en contextos diversos. De este modo, se fortalecen formas de razonamiento analítico esenciales para el aprendizaje matemático (Liñán et al., 2016).

2. Piensa en una situación cotidiana en la que podrías observar un patrón similar. Describe cómo este patrón puede ser útil para resolver problemas del mundo real.

Categoría: registros de representación. Los registros de representación son herramientas esenciales para enseñar y aprender matemáticas, ya que permiten expresar y visualizar conceptos de diversas maneras. Estos registros incluyen representaciones gráficas, simbólicas, numéricas y verbales, cada una de las cuales ofrece una perspectiva única sobre los conceptos matemáticos. Las representaciones gráficas ayudan a visualizar patrones y relaciones, las simbólicas utilizan fórmulas y expresiones algebraicas para condensar información, las numéricas emplean números y tablas para representar datos, y las verbales explican los conceptos de manera descriptiva (Fuentes, 2020).

3. Representa el patrón utilizando: Una tabla que relacione el número del término (*n*) con el número de cuadrados. Una expresión algebraica que generalice el patrón para cualquier término.

Categoría: propiedades y sus fundamentos. Las propiedades representan características inherentes de los conceptos matemáticos, mientras que los fundamentos se refieren a los principios teóricos que las sustentan. Esta pregunta permite caracterizar el conocimiento especializado que evidencian los profesores al reconocer e identificar la propiedad esencial que describe la naturaleza del patrón, como el crecimiento lineal en una secuencia de términos con una diferencia constante. Además, permite evidenciar cómo el profesor justifica esta propiedad basándose en principios matemáticos, como la estructura de las progresiones aritméticas, y establecer conexiones con su representación algebraica.

Los datos esperados incluyen una descripción precisa de la propiedad del patrón (por ejemplo, "El patrón crece de manera lineal, con una diferencia constante de 2 entre términos

consecutivos") y una justificación clara que integre fundamentos matemáticos (como la representación algebraica $f\ (n)\ =\ 2n\ +1$, que muestra la relación lineal). La capacidad del profesor para articular estas ideas es crucial para enseñar a los estudiantes no solo a identificar patrones, también a comprender las razones detrás de su comportamiento (Vergel, 2015).

4. Identifica la propiedad principal que rige el crecimiento del patrón. Por ejemplo: ¿El patrón crece de forma lineal? Justifica tu respuesta.

Categoría: procedimientos. Los procedimientos no solo implican la ejecución de cálculos, también la comprensión profunda de los pasos y estrategias involucradas en el proceso matemático. Al abordar la pregunta, se puede aplicar un procedimiento sistemático que permita identificar patrones en la secuencia de cuadrados. En este caso, se observa que cada término se compone de un número creciente de cuadrados negros (■) y cuadrados blancos **(□).** Específicamente, para el término *n*, hay *n* cuadrados negros y $n\ +1$ cuadrados blancos, lo que lleva a una fórmula general para calcular el total de cuadros: $n\ +\ (n\ +1)\ =\ 2n\ +\ 1$ (Vergel, 2015).

5. Calcula el número de cuadrados para: El término 5. El término 9. El término 100.

Subcategoría: ¿Cómo se hace?

6. Describe paso a paso el procedimiento que seguiste para encontrar el número de cuadros totales en los términos solicitados. Asegúrate de explicar cómo aplicas la fórmula algebraica

Subcategoría: ¿Cuándo se puede hacer?

7. ¿Siempre se pueden resolver patrones con una expresión algebraica? Proporcione ejemplos de situaciones en las que consideren que sí aplica y en las que no aplica. Justifiquen por qué.

Subcategoría: ¿Por qué se hace así?

8. Explique las razones matemáticas detrás de las estrategias que utiliza para enseñar la generalización de patrones.

Características del resultado

¿Qué observas en los números que obtienes? Justifica.

A continuación, en la Tabla 6 se presentan las bases del diseño del cuestionario *KoT*.

Tabla 6

Categorías de conocimiento para el diseño del Cuestionario *KoT*

Dominio	**Subdominio**	**Categoría y subcategoría**		**Ítem del cuestionario**
MK	*KoT*	Definiciones		1
		Fenomenología y aplicaciones		2
		Registros de representación		3
		Propiedades y sus fundamentos		4
		Procedimientos	¿Cómo se hace?	5
			¿Cuándo se puede	6

	hacer?	
	¿Por qué se hace así?	7
	Características del resultado	8

Fuente: (Carrillo-Yañez et al., 2018).

El cuestionario *KoT* fue sometido al método de juicio experto[15], lo que permitió su validación y refinamiento. Este aspecto consiste en solicitar la evaluación de un experto, quien garantiza la fiabilidad del instrumento al proporcionar su valoración sobre aspectos específicos, lo cual es particularmente útil para la investigación. El experto fue elegido por su trayectoria relevante y pertinente en el rol de juez, debido a su experiencia y/o formación en educación básica (Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez, 2008).

El experto retroalimenta el cuestionario bajo tres aspectos de cada ítem: 1) correspondencia, evaluando si cada ítem se ajusta, genera incertidumbre o no se vincula con la categoría; 2) redacción, relacionada con la claridad y el uso del lenguaje en cada ítem, clasificándolos como apropiados, susceptibles de mejora o inadecuados; y 3) relevancia, en función de la categoría del conocimiento evaluado, clasificándolos como relevantes, inciertos o irrelevantes. Además, se incorporó una sección para comentarios o sugerencias con el fin de indicar razones o proponer mejoras en cada ítem. Los ítems fueron reformulados según las recomendaciones recibidas en la sección "observaciones o sugerencias" (Véase Anexo B).

[15] El anexo A presenta los perfiles académicos de los jueces expertos que participaron en la validación de contenido del instrumento.

El segundo cuestionario[16], correspondiente al subdominio *KMT*, aborda el conocimiento del profesor sobre teorías de enseñanza, recursos didácticos, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos que facilitan la comprensión de contenidos matemáticos. Su objetivo es caracterizar el conocimiento especializado de los profesores de Educación Básica Primaria en relación con la enseñanza de la generalización de patrones. Para tal fin se utilizó la tarea de la secuencia de cuadrados, adaptada de los trabajos de Vergel (2014) y Zapatera (2018); y se fundamenta teóricamente en la Teoría de los Campos Conceptuales (Vergnaud, 1990). Este subdominio se estructura de la siguiente manera:

Categoría: teorías de enseñanza de las matemáticas. El propósito de las siguientes preguntas es caracterizar, de manera indirecta, el conocimiento de los profesores de primaria respecto a las teorías formales y personales que orientan la enseñanza de la generalización de patrones. Dado que no cuentan con una formación específica en educación matemática, se busca reconocer cómo se aproximan a estas teorías, cómo las interpretan y de qué manera inciden en sus prácticas y en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

1. ¿Cómo cree que sus estudiantes aprenden a generalizar patrones?
2. Cuando sus estudiantes explican cómo continúa un patrón, ¿en qué aspectos se fija usted para comprender su forma de pensar y decidir cómo acompañarlos? Puede mencionar ejemplos de lo que observa, escucha o interpreta en ese momento.
3. ¿Cómo le explicaría a un colega novel el significado de pensar algebraicamente en primaria?

Categoría: Recursos didácticos (físicos y digitales). Esta categoría se centra en el conocimiento específico que tiene el profesor sobre los recursos (físicos y digitales) que pueden

[16] Transcripción del cuestionario *KMT*, véase en el apéndice E.

utilizarse en el desarrollo del pensamiento algebraico, en particular con la generalización de patrones. Implica, además, que el profesor comprenda las posibilidades y limitaciones que dichos recursos presentan en relación con los contenidos matemáticos a desarrollar.

4. Cuando planea actividades sobre patrones, ¿qué criterios tiene en cuenta para elegir los recursos (manipulativos, figuras, software, videos, etc.)? ¿Por qué considera que esos recursos favorecen el aprendizaje?
5. Si tuvieras que enseñar un mismo patrón usando dos recursos diferentes (por ejemplo, fichas y papel cuadriculado, o manipulativos y una app digital), ¿qué cree que cambiaría en la forma de pensar el patrón por parte de los estudiantes? Explique por qué.
6. ¿Qué características te hacen considerar que un recurso *no* es adecuado para trabajar la generalización de patrones, aun si es atractivo o fácil de usar?

***Categoría. estrategias, técnicas, tareas y ejemplos*.** Esta categoría se centra menos en los recursos en sí mismos (como objetos, materiales o herramientas digitales) y más en la intencionalidad que el profesor manifiesta al seleccionar, usar y secuenciar esos recursos dentro del desarrollo del pensamiento algebraico. Lo esencial no es tener el recurso, depende del conocimiento sobre cómo, cuándo y por qué emplearlo para apoyar la enseñanza y el aprendizaje de la generalización de patrones.

7. Cuando trabajas con tus estudiantes una secuencia como esta ¿cómo decide orientar a los



Término1 Término 2 Término 3 Término 4

Fuente: Adaptado (Vergel, 2014)

estudiantes en el comienzo de la actividad?

8. ¿Cómo decide usted qué tipo de tarea o ejemplo proponer para que sus estudiantes pasen de observar regularidades en una secuencia a formular una regla general que exprese esa regularidad?

9. ¿Qué tipo de preguntas o intervenciones realiza para que los estudiantes expliciten su manera de pensar o justificar una regla general? Escríbala

10. ¿De qué manera promueve que los estudiantes usen diferentes representaciones: como gestos, lenguaje natural, tablas o expresiones simbólicas o para expresar la regla general en una tarea de patrones?

El cuestionario *KMLS*[17] también fue sometido al método de juicio experto[18], lo que permitió su validación y refinamiento. Este aspecto consiste en solicitar la evaluación de un experto, quien garantiza la fiabilidad del instrumento al proporcionar su valoración sobre aspectos específicos, lo cual es particularmente útil para la investigación. El experto retroalimenta el cuestionario bajo los tres aspectos enunciados para el anterior experto: 1) correspondencia, 2) redacción y 3) relevancia (Véase Anexo B).

El tercer cuestionario tiene como propósito caracterizar el conocimiento especializado del profesor de Educación Básica Primaria en relación con el pensamiento algebraico temprano, a partir de la manera en que concibe los aprendizajes esperados, los niveles de comprensión conceptual y procedimental, y la organización secuencial de los contenidos.

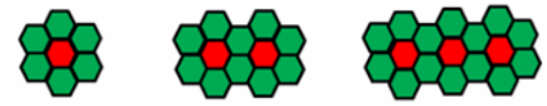
[17] Transcripción del cuestionario KMLS, véase en el apéndice F.
[18] El anexo A presenta los perfiles académicos de los jueces expertos que participaron en la validación de contenido del instrumento.

Categoría: resultados de aprendizaje esperados. Permiten establecer la dirección del trabajo en aula, favoreciendo que el profesorado priorice tanto la identificación de patrones como la capacidad de generalizar y simbolizar.

1. ¿Qué tipo de razonamiento considera fundamental fomentar en los estudiantes para que logren generalizar patrones? Explique cómo lo aplicaría en una actividad de aula.

2.

Observe la siguiente serie:

Patrón geométrico	**Patrón numérico**	**Regla general**
	**6, 10, 14,…(verde)** **7, 12, 17,…(total)**	**f(n) = 2 + 4n** **f(n) = 3 + 4n**

Fuente: (Zapatera, 2018).

¿Qué resultados de aprendizaje espera que los estudiantes logren al trabajar con patrones en Educación Básica Primaria?

Categoría: nivel esperado de desarrollo conceptual o procedimental. Ayuda a evidenciar cómo los profesores reconocen la progresión de razonamientos (de lo concreto a lo simbólico) y qué énfasis ponen en el razonamiento algebraico (recursivo, funcional, covariacional).

Enunciado:

Usted presenta a la clase la secuencia numérica: 2, 5, 8, 11, … y pide a los estudiantes que predigan el término 10 y justifiquen su respuesta.

3. ¿Qué procedimiento espera que utilice la mayoría de los estudiantes para encontrar el término 10?

4. ¿Qué instrucción daría usted para mover a los estudiantes desde el procedimiento recursivo hacia una generalización?

5. ¿Cuál sería la evidencia mínima (producto observable) que le indicaría que el estudiante ha generalizado correctamente?

6. Describa unas estrategias didácticas concretas que utiliza (o implementaría) para enseñar a los estudiantes de 4.º–5.º a predecir la evolución de patrones, asegurando que cada estrategia se vincule a un registro distinto (numérico, geométrico, gráfico). Para cada estrategia indique, de forma breve: (i) objetivo de aprendizaje, (ii) actividad propuesta (1–2 frases), (iii) evidencia observable en el aula que documentaría el logro y (iv) criterio para retirar el andamiaje.

Categoría: secuenciación de temas. Refleja la visión del profesor sobre cómo organizar la enseñanza de los patrones en un marco curricular coherente, lo cual es clave según los estándares *KMLS*, pues vincula el desarrollo de la aritmética temprana con la iniciación al álgebra.

7. Desde su experiencia en la enseñanza de matemáticas en 1° a 3°, ¿qué ajustes o modificaciones propondría al estándar “¿Construyo secuencias numéricas y geométricas

utilizando propiedades de los números y de las figuras geométricas", para que responda mejor a las necesidades de aprendizaje de los estudiantes y a los objetivos generales de estos grados?

8. ¿Cómo describe usted el vínculo entre la identificación de patrones en la Educación Básica Primaria y la construcción posterior de ideas algebraicas más avanzadas?

El cuestionario *KMLS* fue igualmente sometido al método de juicio experto[19], lo que permitió su validación y refinamiento. Este aspecto consiste en solicitar la evaluación de un experto, quien garantiza la fiabilidad del instrumento al proporcionar su valoración sobre aspectos específicos, lo cual es particularmente útil para la investigación. El experto retroalimenta el cuestionario bajo los tres aspectos enunciados para los expertos anteriores experto: 1) correspondencia, 2) redacción y 3) relevancia (Véase Anexo B).

4.3.2 Entrevista semiestructurada

La entrevista se considera una de las fuentes más relevantes para obtener información en el contexto del estudio de caso (Simons, 2014); es una herramienta clave para explorar el conocimiento que poseen los profesores de primaria sobre la generalización de patrones, en relación con los subdominios *KoT, KMT y KMLS* del modelo *MTSK*. Este método permite la obtención directa de datos a través de una interacción personal entre el investigador y el profesor (Bisquerra, 2019) lo que posibilita un análisis detallado del conocimiento matemático especializado en la enseñanza.

[19] El anexo A presenta los perfiles académicos de los jueces expertos que participaron en la validación de contenido del instrumento.

En este contexto, la entrevista facilita la recolección de información sobre cómo los profesores comprenden y manejan conceptos específicos de los patrones, como definiciones, propiedades y procedimientos asociados al *KoT*; así como las estrategias y recursos que emplean en su práctica pedagógica, abarcando el subdominio *KMT*. Asimismo, este método permite indagar los conocimientos que los profesores tienen sobre especificaciones curriculares vinculadas al subdominio *KMLS*.

Para garantizar la relevancia y la confiabilidad de los datos, resulta fundamental que el entrevistador establezca una relación interpersonal adecuada durante el proceso (Simons, 2011). Esta relación favorece la construcción de un clima de confianza que promueve respuestas abiertas y reflexivas, lo cual permite al investigador identificar cómo los profesores articulan su conocimiento especializado con la enseñanza de la generalización de patrones (véase Apéndice G). En coherencia con este propósito, la entrevista semiestructurada se diseña a partir de la actividad denominada "Adivina mi regla" (Tabla 7).

Tabla 7

Fragmento de la entrevista semiestructurada "Adivina mi regla"

Fase	Descripción (acciones observables)	Pregunta(s) o desafío	Categorías *KoT* observadas
1. Exploración inicial	El investigador presenta el reto: *"Pienso un número, lo multiplico por 2 y le sumo 3. Me da 9."* Los docentes prueban valores, construyen una tabla y formulan conjeturas sobre la regla. **Acciones observables:**	¿Qué hiciste para encontrar el número? ¿Por qué elegiste esa estrategia?	**Trámites (procedimientos / estrategias)**

	aplicar procedimientos, probar casos, anticipar resultados, verbalizar estrategias.		
2. Construcción y definición	El docente **crea su propia regla secreta**, escribe tres pares (entrada → salida) y la describe con sus palabras. Luego explica por qué esa relación se mantiene. **Acciones observables:** definir la idea de "regla", usar propiedades numéricas (proporcionalidad, constancia, diferencia), justificar el funcionamiento, refinar el enunciado verbal.	¿Qué significa que algo "siga una regla"? ¿Por qué tu regla funciona siempre? ¿Qué modelo que generaliza la situación?	**Definiciones, propiedades y fundamentos**

Fuente: elaboración propia.

La entrevista fue sometida al método de juicio experto[20], lo que permitió su validación y refinamiento. Este aspecto consiste en solicitar la evaluación de un experto, quien garantiza la fiabilidad del instrumento al proporcionar su valoración sobre aspectos específicos, lo cual es particularmente útil para la investigación. El experto retroalimenta el cuestionario bajo tres aspectos de cada ítem: 1) correspondencia, evaluando si cada ítem se ajusta, genera incertidumbre o no se vincula con la categoría; 2) redacción, relacionada con la claridad y el uso del lenguaje en cada ítem, clasificándolos como apropiados, susceptibles de mejora o inadecuados; y 3) relevancia, en función de la categoría del conocimiento evaluado,

[20] El anexo A presenta los perfiles académicos de los jueces expertos que participaron en la validación de contenido del instrumento.

clasificándolos como relevantes, inciertos o irrelevantes. Además, se incorporó una sección para comentarios o sugerencias con el fin de indicar razones o proponer mejoras en cada ítem. Los ítems fueron reformulados según las recomendaciones recibidas en la sección "observaciones o sugerencias" (anexo B).

4.4 Procedimiento de Análisis de la Información

En esta etapa, se utilizó el enfoque *top down - bottom up*[21]. En un primer momento, *top-down* (de arriba hacia abajo), la investigación se apoyó en las definiciones y categorizaciones de los subdominios *KoT, KMT y KMLS* del modelo *MTSK*, desarrolladas a partir de la revisión teórica presentada en el marco teórico. Con base en ello se construyó un sistema de matrices: matriz analítica, matriz de criterios de evidencia empírica y matriz de fronteras analíticas, descritas como punto de partida. Este marco teórico orienta el análisis inicial del conocimiento especializado del contenido matemático y permite su contraste sistemático con la evidencia empírica. Dichas matrices funcionan como guía de decisión para el análisis de los cuestionarios y la entrevista semiestructurada, al evitar solapamientos conceptuales y ambigüedades categoriales. Asimismo, posibilitan una codificación inicial (análisis *top–down*), y garantizan la coherencia analítica al delimitar con claridad: el conocimiento sobre qué contenido matemático se enseña, cómo se justifica, cómo puede representarse, cómo y por qué se desarrollan determinados procedimientos, y cuáles son las propiedades y características que le otorgan significado (*KoT*), el conocimiento sobre cómo enseñar ese contenido matemático, qué estrategias, tareas, recursos y mediaciones favorecen su aprendizaje, y cuáles son las potencialidades y desafíos asociados a su (*KMT*) y conocimiento sobre lo que se espera que los

[21] *Top-Down* (de arriba hacia abajo): Se inicia con marcos teóricos y conceptos generales sobre la enseñanza de las matemáticas. *Bottom-Up* (de abajo hacia arriba): Este enfoque construye la interpretación a partir de la información tangible, permitiendo que las evidencias concretas modifiquen o enriquezcan los marcos teóricos iniciales (Sosa et al., 2016).

estudiantes aprendan, el nivel de desarrollo esperado y cuándo dichos aprendizajes deben promoverse (*KMLS*).

La matriz analítica (Tabla 8) operacionaliza el marco teórico, estableciendo criterios explícitos y compartidos que permitan decidir de manera consistente y justificada qué cuenta como evidencia de cada subdominio analítico durante el análisis cualitativo (Escudero- Avila et al. 2015). Este procedimiento metodológico busca mitigar ambigüedades y prevenir solape conceptuales entre las dimensiones analíticas del modelo (Climent et al., 2014; Escudero-Ávila y Carrillo Yáñez, 2020).

Tabla 8

Matriz analítica

Subdominio	Definición analítica	Objeto de conocimiento	Relación específica con PAT (generalización de patrones)
KoT (Knowledge of Topics)	Se define analíticamente como el conocimiento del contenido matemático en sí mismo: sus estructuras internas, relaciones constitutivas, representaciones legítimas y fundamentos epistemológicos, independientemente de su enseñanza o secuenciación curricular.	El tema matemático (patrón, regla general, variable, expresión algebraica) como objeto disciplinar con propiedades, procedimientos, representaciones y fenomenología propios.	Conocimiento de: qué es una generalización (proceso algebraico de abstracción), cómo se expresa (verbal, simbólica, numérica), por qué funciona (fundamento de la regularidad), qué relaciones intra conceptuales existen (entre término, posición, regla general, variable), qué fenómenos modela (crecimiento, iteración, covariación).
KMT (Knowledge of Mathematics Teaching)	Se define como la amalgama entre el contenido matemático y el conocimiento didáctico, centrada en cómo determinados temas se organizan, representan y adaptan a los medios, recursos, estrategias y decisiones didácticas específicas para hacer comprensible, accesible y significativo un contenido matemático particular durante el acto de enseñanza.	Las formas de enseñar generalización de patrones: tareas diseñadas, ejemplos escogidos, representaciones didácticas, secuencias de actividades, uso de materiales, analogías, preguntas orientadoras, teorías personales o institucionalizadas sobre cómo enseñar PAT.	Conocimiento de: qué tareas promueven la generalización, qué ejemplos (patrones lineales vs. cuadráticos) son más transparentes, qué representaciones (tabla, figura, expresión) facilitan la transición aritmética-algebraica, qué recursos (fichas, software) potencian/limitan el razonamiento algebraico, qué estrategias (manipulación, verbalización, simbolización) favorecen la construcción de reglas generales.

KMLS (Knowledge of Mathematics Learning Standards)	Conocimiento de las expectativas institucionales, curriculares y evolutivas sobre qué contenidos del pensamiento algebraico temprano para enseñarse, en qué nivel educativo, con qué nivel de desarrollo conceptual esperado, y cómo se secuencian temporal y conceptualmente	Los estándares de aprendizaje (oficiales y experienciales): prescripciones curriculares, objetivos de aprendizaje, secuenciación vertical (qué va antes/después), nivel de complejidad apropiado por edad/grado, ámbito de generalización esperado	Conocimiento de: cuándo se introduce la generalización de patrones en el currículo, qué nivel de simbolización se espera en 3° vs. 6° básico, qué contenidos previos (conteo, operaciones, secuencias) son requisito, qué contenidos posteriores (función lineal, ecuaciones) se construyen sobre PAT, qué complejidad de patrones (numéricos, geométricos, recursivos, funcionales) corresponde a cada etapa.

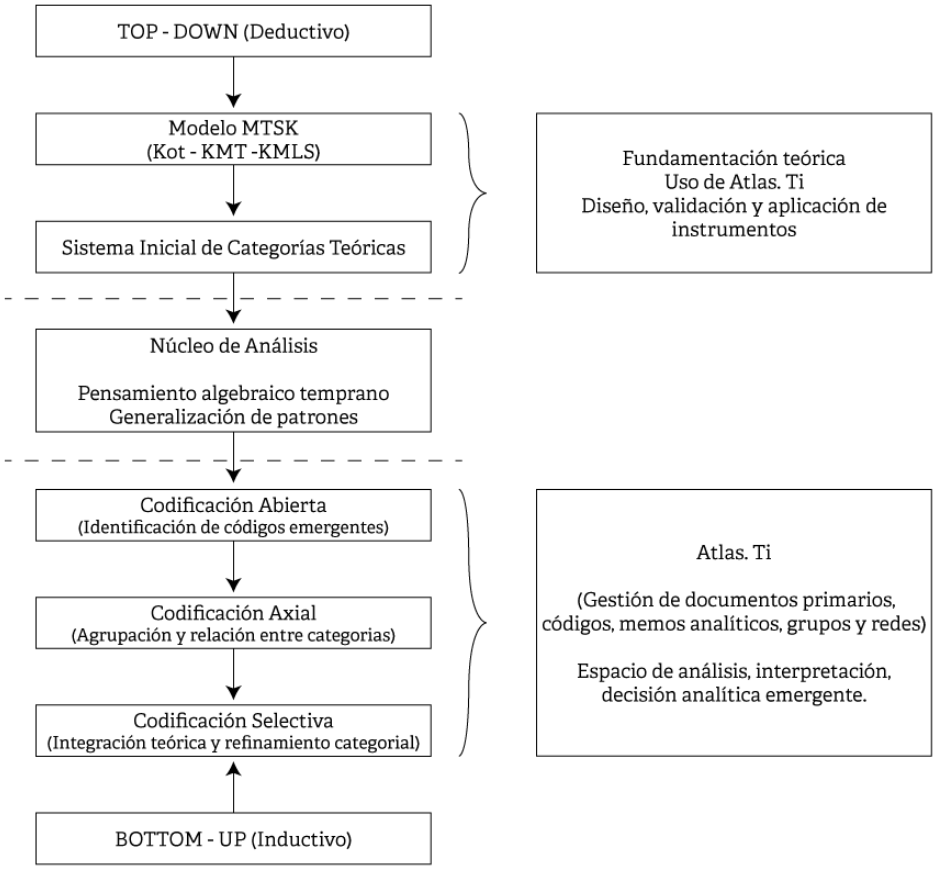
Fuente*:* Baldan da Silva et al. (2023), Cayo Maturana y Contreras González (2020), Chimoni et al. (2021), de Souza Barboza et al. (2020), Escudero-Ávila et al. (2016); Pincheira y Alsina (2021), Radford (2022), Ribeiro et al. (2018) y, Schliemann et al. (2006).

La combinación de los enfoques *top-down* con el *bottom-up* otorga la flexibilidad para aproximarse a los subdominios y generar nuevas categorías de conocimiento, lo cual facilita someter a escrutinio el modelo, su estructura y su funcionalidad (Cayo-Maturana y Contreras-González, 2020). El método *Bottom-Up* permite que las categorías emerjan de forma inductiva a partir de los datos recolectados en el campo (Zapata, 2019). Durante la codificación abierta, se estudian las transcripciones de los cuestionarios, la entrevista semiestructurada y documentos sin imponer inicialmente las categorías teóricas (Zapata, 2019). De esta forma, se identifican patrones y nuevos significados que pueden complementar, ajustar o incluso expandir las categorías preestablecidas del modelo *MTSK.* Esta etapa es crucial para que el análisis refleje la complejidad y la realidad del contexto educativo, permitiendo que elementos emergentes como indicadores específicos del pensamiento algebraico temprano y la forma en que se generalizan patrones en el aula se integren en el proceso de análisis (Vergel, 2019).

Los aspectos fundamentales en el proceso de reducción y análisis de los datos integran los cuales comprenden los textos y transcripciones que constituyen la fuente de información (Escudero-Ávila y Carrillo-Yáñez, 2020). Asimismo, se identifican las citas, definidas como fragmentos significativos que contribuyen a la detección de temas cruciales para los objetivos de la investigación. Los códigos funcionan como etiquetas para capturar el significado subyacente de los datos, ya sea mediante una aproximación predeterminada (*top-down*) o una de carácter emergente (*bottom-up*). Por su parte, las familias constituyen agrupaciones de elementos bajo criterios definidos que favorecen las comparaciones analíticas entre distintos conjuntos de datos (Figura 9). Finalmente, las anotaciones (*memos*) operan como comentarios que enriquecen el análisis mediante el registro de interpretaciones, definiciones de categorías y vínculos entre datos (Penalva et al., 2015).

Figura 9

Acercamiento metodológico top – down y bottom –up



Fuente: elaboración propia

Organización de datos. Según Montes y Carrillo (2017) el modelo *MTSK* requiere una base teórica para realizar un análisis inicial del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, en el cual se destaca la importancia del pensamiento algebraico temprano para la generalización de patrones. Este fundamento teórico constituye el punto de partida para estructurar el análisis de la información. Con Atlas Ti 9 se procesa la organización de datos mediante un enfoque *Top-Down*.

En esta fase, se crea un conjunto de códigos y familias basados en el marco teórico y en los subdominios del modelo *MTSK (KoT, KMT y KMLS).* Este esquema predefinido funciona como el esqueleto del análisis. Por ejemplo, se establecen códigos para Conocimiento de los Temas, que se subdividen en categorías específicas como "Definiciones", "Fenomenología y Aplicaciones" y "Registros de Representación". Posteriormente, se identifican relaciones axiales entre dichas categorías, facilitando una comprensión integral de los hallazgos.

Complementariamente, se incorpora el enfoque *Bottom-Up*, el cual permite que, a partir de la codificación abierta de los datos, las categorías emergentes se integren al esquema teórico preestablecido. Como parte del análisis, se construyen matrices que contrastan los guiones de datos con códigos predefinidos y emergentes, facilitando la triangulación entre diversas fuentes de información (cuestionarios, entrevistas y documentos). Esta metodología fortalece la validez del análisis al proporcionar una visión rigurosa y contextualizada del conocimiento profesoral en torno al pensamiento algebraico temprano.

Análisis temático. Este enfoque facilita la extracción de significados y la interpretación de las dimensiones esenciales de los fenómenos estudiados, conectando de manera adecuada los datos con las preguntas de investigación. Según Simons (2014), el análisis temático se erige como herramienta clave para la interpretación integral de las evidencias empíricas, la identificación de elementos centrales; la caracterización del conocimiento especializado en diversos contextos, especialmente, en el ámbito de la educación matemática.

La matriz de criterios de evidencia empírica (Tabla 9) se diseñó con la finalidad de establecer descriptores explícitos para la identificación, inclusión y exclusión de fragmentos discursivos entendidos como unidades de información que constituyeran evidencia válida de los subdominios *KoT, KM T* y *KMLS* del modelo *MTSK*. En el contexto del pensamiento algebraico

temprano y la enseñanza de la generalización de patrones. Este instrumento permitió controlar solapamientos conceptuales, garantizar coherencia analítica y asegurar la auditabilidad del proceso de análisis cualitativo.

Tabla 9

Matriz de criterios de evidencia empírica

Subdominio	**Qué cuenta como evidencia**	**Qué no cuenta como evidencia**	**Riesgos de confusión analítica**
KoT	Explicaciones sobre qué es una generalización de patrones.	Cómo enseñar a encontrar patrones (es *KMT*).	Confusión con *KMT*: Decir "el patrón crece de 3 en 3" es *KoT* (propiedad); decir "les pido que busquen cuánto crece" es *KMT* (estrategia de enseñanza).
	Distinción conceptual entre patrón recursivo y funcional.	En qué grado enseñar generalización (es *KMLS*).	
	Identificación de propiedades de las expresiones generales (equivalencia algebraica).	Qué material usar para patrones (es *KMT*).	Confusión con *KMLS*: "La regla general se escribe $3n + 2$" es *KoT* (conocimiento del objeto); "en 5° básico se espera que escriban la regla con palabras, no con letras" es *KMLS* (expectativa curricular).
	Conocimiento de múltiples representaciones del mismo patrón (tabla-gráfica-algebraica-verbal).	Dificultades de los estudiantes con la variable (es *KFLM*, no solicitado).	
	Fundamentos de por qué una regla funciona matemáticamente	Secuencia didáctica para introducir patrones (es *KMT*).	
	Procedimientos para encontrar el término *n* (directo vs. recursivo)	Referencias al currículo nacional (es *KMLS*).	

	Conocimiento de diferentes tipos de patrones (lineales, cuadráticos, geométricos)	Estrategias que usan los niños (es *KFLM*) .	
	Relaciones intra conceptuales: variable como generalizador, no como incógnita.		
KMT	Tareas específicas que propone para enseñar generalización de patrones.	Definición matemática de generalización (es *KoT*).	Confusión con *KoT*: "Uso la tabla para que vean la relación" es *KMT* (recurso didáctico); "la tabla muestra la covariación entre posición y valor" es *KoT* (propiedad matemática).
	Ejemplos escogidos (ej. patrón de cuadrados vs. triángulos) y su justificación didáctica	Propiedades de las expresiones algebraicas (es *KoT*).	
	Secuencias de actividades: manipulación a verbalización hasta llegar a la simbolización.	En qué grado se enseña (es *KMLS*).	Confusión con *KMLS*: "Les doy primero patrones con figuras" es *KMT* (decisión didáctica); "el currículo dice que en 4° usen patrones pictóricos antes que numéricos" es *KMLS* (prescripción).
	Conocimiento del potencial didáctico de representaciones (tabla facilita patrón	Qué dice el currículo (es *KMLS*).	

	funcional).		
	Limitaciones de recursos (bloques vs. software dinámico).	Errores conceptuales de estudiantes (es *KFLM*).	
	Preguntas orientadoras: "¿cómo puedo saber el término 100 sin dibujarlo?"	Justificación matemática de por qué funciona (es *KoT*).	
	Uso de analogías ("la *n* es como una caja que guarda cualquier número").		
	Teorías personales sobre cómo facilitar transición aritmética-algebraica.		
KMLS	Referencias explícitas a currículo oficial o estándares (*NTCM*, currículo nacional).	Cómo enseñar esos contenidos (es *KMT*).	Confusión con *KMT*: "En 5° básico enseño patrones con bloques" es *KMT* (recurso); "en 5° el currículo prescribe patrones con material concreto" es *KMLS* (estándar).
	Conocimiento de qué se enseña en cada grado sobre PAT.	Qué es matemáticamente una generalización (es *KoT*).	

Secuenciación vertical: "antes deben saber...", "luego verán..."	Qué tarea usar para enseñar (es *KMT*).	Confusión con *KoT*: "Los patrones cuadráticos son más complejos" es *KoT* (propiedad matemática); "los patrones cuadráticos se enseñan en 7° porque requieren mayor abstracción" es *KMLS* (ubicación curricular justificada).
Nivel de complejidad esperado: "en 3° solo verbalizan, en 6° simbolizan"	Propiedades de los patrones (es *KoT*).	
Ámbito numérico apropiado (patrones con números hasta 100 en 2° básica primaria).	Teorías de enseñanza (es *KMT*).	
Conocimiento de contenidos prerrequisito (suma iterada antes de patrón aditivo).	Dificultades de aprendizaje (es *KFLM*).	
Conocimiento de progresión: de patrones numéricos, pasa a geométricos hasta llegar a las funcionales.		
Expectativas sobre grado de abstracción según edad.		

Fuente: Baldan da Silva et al. (2023), Chimoni et al. (2021), de Souza Barboza et al. (2020), Jungbluth et al. (2022), Otten et al. (2019), Radford (2015) y Schliemann et al. (2006).

Delimitación empírica. Cada subdominio del *MTSK*, en el contexto del desarrollo del pensamiento algebraico en la enseñanza de la generalización de patrones, el discurso del profesor integra contenido, enseñanza y expectativas de aprendizaje (Sousa et al., 2020). Por ello, la matriz cumple la función de segmentar analíticamente estas dimensiones; *KoT* identificar evidencia sobre el conocimiento matemático del patrón (estructura, regularidad, generalización), *KMT* identificar evidencia sobre la enseñanza del patrón (tareas, intervenciones, mediaciones) y *KMLS* identificar evidencia sobre lo que se espera que el estudiante aprenda y cuándo.

Establecimiento de criterios de inclusión y exclusión empírica, para mitigar el sesgo interpretativo durante el análisis de los instrumentos. Criterio de inclusión, la columna "qué cuenta como evidencia" permite la codificación de un fragmento, legitimando su relevancia para el subdominio y orientando la clasificación mediante una lógica descendente (*Top-Down*) (Santagata y Lee, 2021). Criterios de exclusión, la columna "qué no cuenta como evidencia" actúa como salvaguarda de la frontera conceptual, evitando la inclusión de datos que, aunque relacionados con el álgebra temprana, corresponden a dominios no solicitados o ajenos al foco de análisis (Hohensee, 2017).

Controlar los riesgos de confusión analítica propios del pensamiento algebraico temprano (PAT) constituye una necesidad metodológica central, dado que la enseñanza de la generalización de patrones es un ámbito especialmente propenso a solapamientos conceptuales. En este contexto, referirse al patrón puede aludir tanto a un contenido matemático como a un recurso o enfoque de enseñanza; del mismo modo, hablar del aprendizaje puede confundirse con decisiones didácticas, y la noción de progresión puede mezclarse con conocimiento matemático (Carraher y Schliemann, 2019). La finalidad es hacer explícitas las decisiones epistemológicas del estudio y guiar la resolución de ambigüedades durante la fase de análisis de datos (Hohensee,

2017). Así mismo, responder a la coherencia intra-caso e inter-caso, en los estudios de los cuestionarios y entrevista; para ello, la matriz asegura que todos los instrumentos se analicen bajo los mismos criterios, permite comparar perfiles *KoT, KMT y KMLS* sin modificar las reglas de decisión, y sostiene la validez del análisis transversal (Simons, 2011). Por último, fundamenta la fase *Top–Down* del enfoque deductivo–inductivo a *cómo se reconoce empíricamente* sin forzar los datos ni diluir la teoría (Hohensee, 2017; Yin, 2014). Por tanto, el criterio de *finalidad del conocimiento* permite diferenciar evidencias adscritas a *KoT*, cuando el foco se sitúa en qué es y por qué es la generalización algebraica, de aquellas correspondientes a *KMT*, cuando el énfasis se orienta a cómo hacerla comprensible para los estudiantes (Tabla 10).

Tabla 10

Fronteras analíticas

Frontera	**Criterio discriminador**	**Pertenece a A**	**No pertenece a B**	**Justificación**
KoT vs. *KSM*	Tipo de relación conceptual.	A: *KoT* (Conocimiento de los Temas).	B: *KSM* (Estructura de la Matemática).	El *KoT* incluye las conexiones intra conceptuales (propiedades internas de un tema), mientras que el *KSM* solo considera conexiones inter conceptuales entre diferentes temas o niveles educativos.

KoT vs. KPM	Naturaleza del saber (Qué vs. Cómo se crea).	A: *KoT* (Conocimiento de los Temas).	B: *KPM* (Práctica Matemática).	El *KoT* abarca el conocimiento de una definición específica de un objeto; el *KPM* se refiere al conocimiento de las características que debe tener cualquier definición y las formas de validar o producir matemática.
KoT vs. *KMT*	Finalidad del registro de representación.	A: *KoT* (Conocimiento de los Temas).	B: *KMT* (Enseñanza de la Matemática).	En el *KoT*, los registros se conocen por su naturaleza matemática (sintaxis, semántica); en el *KMT*, se consideran por su potencialidad didáctica para facilitar la comprensión.
KoT vs. *KFLM*	Foco en el objeto vs. Foco en el aprendizaje.	A: *KoT* (Conocimiento de los Temas).	B: *KFLM* (Aprendizaje de la Matemática).	El *KoT* se centra en el conocimiento profundo del contenido; el *KFLM* se enfoca en cómo ese contenido es aprehendido por el alumno, incluyendo sus errores y dificultades típicas.

KSM vs. *KMLS*	Razón de la secuenciación.	A: *KSM* (Estructura de la Matemática).	B: *KMLS* (Estándares de Aprendizaje).	La secuenciación en *KSM* responde a una lógica matemática de complejidad o simplificación; en *KMLS*, la secuenciación es didáctica o normativa, basada en lo prescrito por el currículo.
KMT vs. *KFLM*	Acción profesor vs. Proceso cognitivo.	A: *KMT* (Enseñanza de la Matemática).	B: *KFLM* (Aprendizaje de la Matemática).	El *KMT* agrupa el conocimiento sobre estrategias y recursos para enseñar; el *KFLM* se refiere a la capacidad de interpretar el pensamiento y los razonamientos de los estudiantes.

Fuente: Jungbluth et al. (2022) y Vergel et al. (2022).

Análisis comparativo. En un estudio de caso instrumental, se realizan comparaciones entre los tres casos de estudio, examinando las similitudes y diferencias entre ellos para caracterizar cómo el contexto influye en el conocimiento especializado (Bautista-Cárdenas, 2022). A través de este procedimiento de análisis de datos, se busca garantizar su validez y confiabilidad mediante diversas estrategias, como la triangulación de datos, utilizando múltiples fuentes de información; la validación por parte de los participantes, permitiendo que revisen y

corroboren los resultados obtenidos y la valoración externa, en la que un experto revisará el proceso de investigación para asegurar su rigor (Bisquerra, 2019).

4.5 Aspectos Éticos

Se consideran principios éticos fundamentales obtener el consentimiento informado de los participantes[22], garantizar la confidencialidad de la información y respetar su privacidad. Además, se asegura que los participantes comprendan claramente el propósito del estudio y la forma en que se utilizarán los datos recopilados (Simons, 2014), (ver apéndice 2). Belmont (1980) se refiere a beneficencia y no maleficencia, justicia, respeto.

La presente investigación se rigió por los principios éticos que salvaguardan la integridad y la dignidad de los participantes en estudios de carácter social y educativo. A continuación, se detalla la aplicación de los tres principios fundamentales. En primera instancia, el principio de respeto a las personas se materializó mediante el proceso de Consentimiento Informado. Antes de iniciar la recolección de datos, se les explicó a los tres docentes participantes (Sara, Orlando y Cristóbal) el objetivo de la investigación, el carácter voluntario de su participación y su derecho a retirarse del estudio en cualquier momento sin ninguna consecuencia negativa. Asimismo, se garantizó la confidencialidad y el anonimato mediante el uso de seudónimos, asegurando que ninguna información personal o institucional permitiera su identificación en el cuerpo de la tesis o en futuras publicaciones derivadas.

La investigación se diseñó bajo la premisa de minimizar cualquier riesgo y maximizar los beneficios. Dado que el estudio implicó cuestionarios y una entrevista, se aseguró que las actividades no interfirieran con el desarrollo habitual, ni generaran cargas laborales adicionales para los profesores. El beneficio directo para los participantes radica en la reflexión sobre su

[22] El apéndice B contiene los consentimientos de los participantes debidamente diligenciados.

propia práctica; el proceso de entrevista y el análisis basado en el modelo *MTSK* permitieron a los profesores identificar sus fortalezas y áreas de mejora en la enseñanza del álgebra temprana, contribuyendo así a su desarrollo profesional continuo.

Finalmente, el principio de justicia se aplicó en la selección equitativa de los participantes y en el tratamiento imparcial de la información recolectada. Los profesores fueron seleccionados bajo criterios de idoneidad profesional y disposición para colaborar, sin ningún tipo de discriminación o coacción. Asimismo, se garantizó una devolución de resultados ética, donde los hallazgos se presentan de manera objetiva, evitando juicios de valor sobre la competencia de los profesores y enfocándose, en cambio, en la caracterización científica de su conocimiento especializado para fortalecer el campo de la educación matemática.

En correspondencia con estos principios éticos y con el enfoque metodológico adoptado, la presentación de los resultados se organizará a partir de los subdominios *KoT, KMT y KMLS* del modelo *MTSK*, articulando el análisis intra-caso e inter-caso de los profesores Cristóbal, Orlando y Sara. La fase *Top–Down* orientó inicialmente la identificación y clasificación de las evidencias empíricas desde las categorías teóricas previamente definidas, mientras que la aproximación *Bottom–Up* permitió reconocer matices emergentes, tensiones y particularidades derivadas de los datos producidos en los cuestionarios y la entrevista semiestructurada. De esta manera, el análisis de resultados buscará mantener una interacción constante entre teoría y evidencia empírica, permitiendo interpretar cómo se configura y manifiesta el conocimiento especializado del profesorado en relación con el desarrollo del pensamiento algebraico temprano y la enseñanza de la generalización de patrones.

Capítulo 5. Análisis de resultados

En este capítulo se presenta el análisis de los instrumentos desarrolladas a lo largo del proceso de investigación, el cual se llevó a cabo mediante la articulación de las metodologías Estudio de caso instrumental y *Top–Down y Bottom–Up* descritas en el capítulo precedente. Posteriormente, se expone el procedimiento de análisis correspondiente a cada uno de los casos, lo cual se realizó mediante matrices de definiciones analíticas, criterios de evidencia empírica por subdominio (*KoT, KMT y KMLS*) y fronteras analíticas del modelo *MTSK*, junto con el análisis *Top–Down* (deductivo), la identificación de categorías emergentes derivadas del análisis *Bottom–Up* de los cuestionarios y entrevista aplicados a los profesores, la integración *Top–Down / Bottom–Up* (abducción), matrices de integración analítica y de relaciones internas por subdominio, así como el análisis transversal de cuestionarios y entrevistas, las triangulaciones y el alcance de los objetivos del estudio.

Si bien el estudio de los instrumentos de Cristóbal, Orlando y Sara se efectuó de manera individual, documento por documento, la presentación de los resultados se organiza por subdominios, con el propósito de visibilizar de forma más clara las contribuciones teóricas derivadas del análisis empírico, que emergieron gradualmente a través de la articulación sistemática del método *Top–Down / Bottom–Up.*

Desde esta perspectiva, los hallazgos del capítulo no se organizan como una suma de evidencias aisladas, se configuran como estructuradas de conocimiento del profesor que permiten comprender cómo se habilita, se restringe o se transforma el desarrollo del Pensamiento Algebraico Temprano en la enseñanza de la generalización de patrones.

5.1 Resultados del Subdominio Conocimiento de los Temas (KoT)

El presente apartado expone los resultados del análisis integrado del conocimiento del tema (*KoT*) evidenciado por los profesores Sara, Cristóbal y Orlando en relación con la generalización de patrones, entendida como componente central del pensamiento algebraico temprano. La evidencia empírica presentada no describe únicamente diferencias entre profesores, más bien revela configuraciones ontológicas diferenciadas del objeto matemático en juego (Godino, 2024). En este sentido, la generalización de patrones no se configura simplemente como un procedimiento para extender secuencias; se comprende como una estructura relacional basada en la covariación entre magnitudes indeterminadas (Carraher y Schliemann, 2019).

Desde la perspectiva del pensamiento algebraico temprano, el análisis muestra que la generalización depende de una articulación interna entre procedimientos (cómo, cuándo y por qué se hace de esa manera), definiciones, propiedades y fundamentos y no únicamente de la presencia de expresiones algebraicas (Fuentes-Leal, 2020). Está la articulación, observable empíricamente y rastreable metodológicamente, configura el núcleo epistemológico del *KoT* (Rojas et al., 2015) y constituye uno de los aportes centrales de este estudio al análisis del conocimiento matemático del profesorado de Educación Básica Primaria.

5.1.1 Procedimientos del Desarrollo del Pensamiento Algebraico Asociados a la Enseñanza de la Generalización de Patrones

Los procedimientos matemáticos asociados a la generalización, definidos por la integración del procedimiento (cómo hacer), su pertinencia cronológica (cuándo hacer) y su fundamentación (por qué se hace de esa manera), se manifiestan de forma explícita en el discurso del profesor como acciones orientadas a operar sobre la generalización de patrones. Entre ellas se encuentran a continuación secuencias, el cálculo de términos y la aplicación sistemática de

procedimientos operativos que permiten reconocer, extender y justificar regularidades (Radford, 2010, 2022). Sin embargo, el análisis permite identificar diferencias en el control conceptual de estos procesos. En algunos discursos, los procedimientos permanecen vinculados a una ejecución local y factual; en otros se articulan progresivamente hacia una estructura general que trasciende el campo perceptivo. Este tránsito constituye un indicio de analiticidad, rasgo distintivo entre la generalización aritmética y la generalización algebraica. En consecuencia, permite comprender cómo el tratamiento de casos particulares en aritmética puede sentar las bases para el desarrollo de procesos de abstracción funcional en niveles posteriores de escolaridad (Radford, 2015; Vergel, 2019).

En el caso de Sara describe el procedimiento de generalización como una extensión basada en ejemplos iniciales. Sara afirma explícitamente que *"el procedimiento se basa en los ejemplos"* mostrando un pensamiento donde la indeterminación se maneja de forma intuida, utilizando el ejemplo particular como un vehículo o metáfora para alcanzar la generalización de una comunalidad (Radford, 2013).

Calcula el número de cuadros para:

El término 5= 11

El término 9= 19

El término 100= 300

¿Cómo se hace?

Describe paso a paso el procedimiento que seguiste para encontrar el número de cuadros totales en los términos solicitados. Asegúrate de explicar cómo aplicaste la fórmula algebraica. *R/ El procedimiento que utilicé se basa en los ejemplos iniciales.*

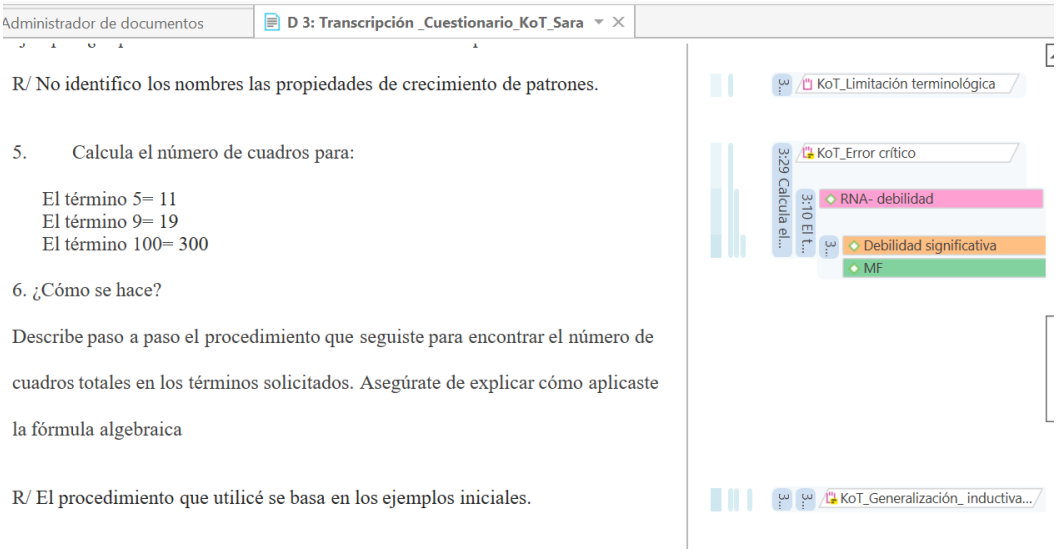
¿Cuándo se hace? ¿Siempre se pueden resolver patrones con una expresión algebraica? Proporcione ejemplos de situaciones en las que consideren que sí aplica y en las que no

aplica. Justifiquen por qué. *R/ No lo realicé con expresiones algebraicas lo deduzco de los ejemplos planteados.*

En la práctica, su actuación se sustenta en el uso de términos cercanos de la secuencia, el conteo directo y la aplicación de procedimientos locales para establecer relaciones entre los elementos observados, configurando una aproximación inductiva empírica a la generalización de patrones. Este conocimiento resulta operativo en casos próximos; sin embargo, al extenderse a términos lejanos, como el término 100, evidencia una forma de generalización sustentada principalmente en relaciones locales entre los términos de la secuencia (Nobrega et al., 2021). Desde esta perspectiva, emerge la subcategoría *procedimiento empírico por extrapolación cercana,* donde la profesora sigue pasos locales (invertir sumas, "hacerlo al revés") sin validar su generalidad. El resultado se considera correcto solo por coincidencia, no como consecuencia de una estructura funcional, limitando la generalización (Nobrega et al., 2021). Se evidencia ausencia de conexiones estructurales entre el comportamiento aritmético local de la secuencia y una formulación algebraica general que permita interpretar funcionalmente la regularidad identificada (Flores-Medrano, 2022).

Figura 10

Fragmento de codificación del cuestionario KoT en Atlas. Ti



Fuente: elaboración propia.

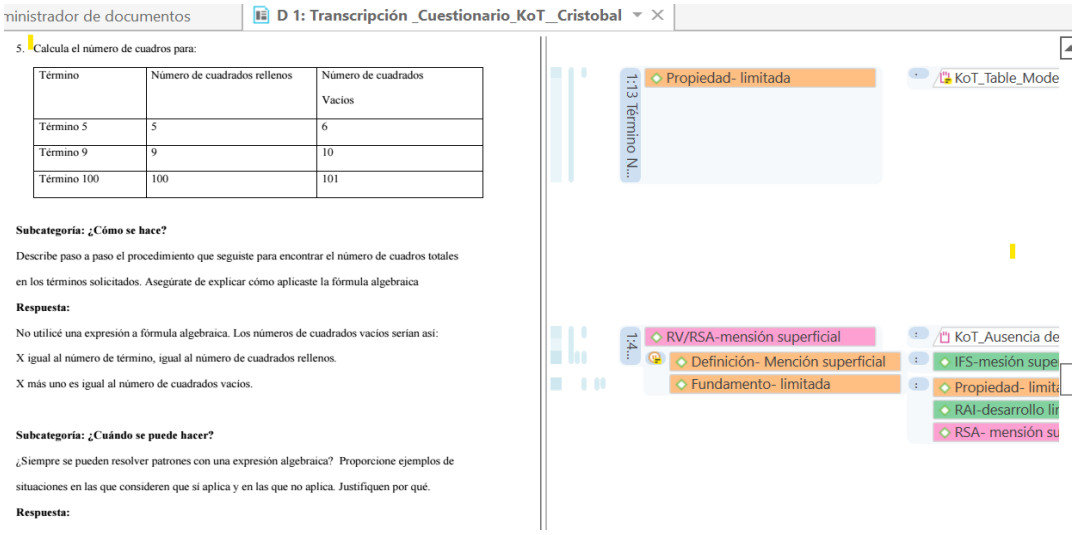
En Cristóbal, los procedimientos muestran mayor estabilidad operativa, por ejemplo, del tipo "*P: ¿Qué número encontraste? R: Pues yo digo que es el 3, si se multiplica por 2, da 6. y le suma 3, me da 9,* lo que indica un control operativo. Sin embargo, dicho procedimiento permanece subordinado a la verificación casuística y a la corrección del resultado numérico, sin fundamentar por qué la regla resulta válida para cualquier término de la secuencia (Girit-Yildiz, 2023); en otras palabras, se evidencia un avance hacia la explicitación verbal de la regularidad, aunque esta no llega a consolidarse como una formulación general estable (Radford, 2015).

Este procedimiento se apoya en procesos de ensayo, repetición y verificación aritmética que, si bien permiten identificar invariantes, no transforman el procedimiento en un objeto autónomo (Vergel et al., 2022). Cristóbal reconoce la regularidad aditiva entre términos consecutivos, al señalar que "*aumenta de dos en dos*", pero no explicita una regla general ni una estructura funcional completa que trascienda la relación recursiva inmediata (Vergel, 2010).

Aunque el profesor logra reconocer regularidades aditivas, las conexiones entre dicha regularidad y estructuras algebraicas más generales permanecen implícitas, lo que restringe la articulación entre pensamiento aritmético y pensamiento funcional (Sosa et al., 2016). En este sentido, se configura un *procedimiento operativo con invariantes implícitos* (Figura 11), caracterizado por una de estabilidad procedimental sin un control teórico deliberado sobre el proceso de generalización (Levin y Walkoe, 2022).

Figura 11

Procedimiento operativo con invariantes implícitas



Fuente: elaboración propia.

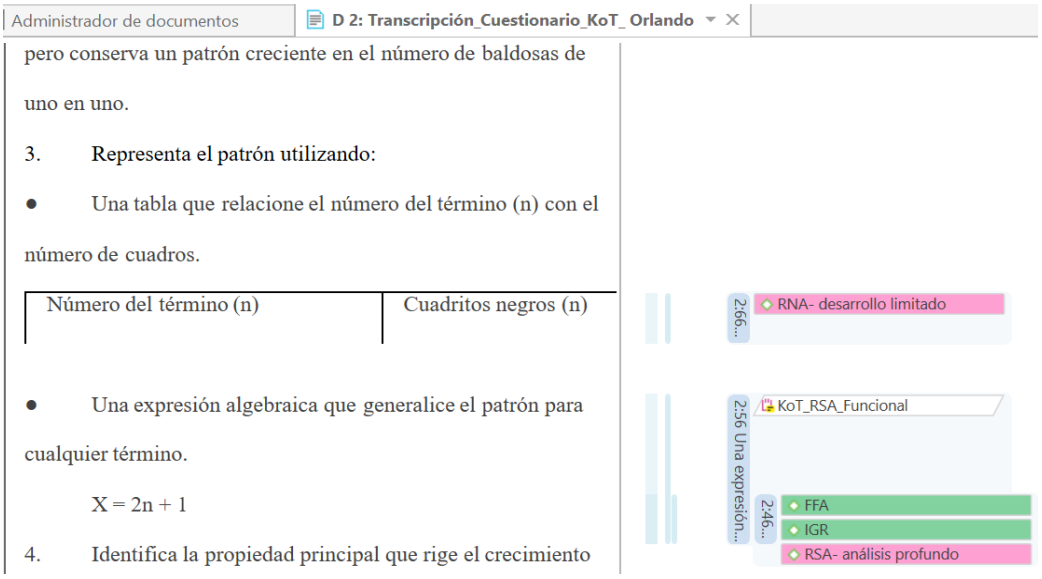
En Orlando, se observa una explicitación de procedimientos sistemáticos y generalizables a partir de la identificación precisa de la variable y la constante (Zapatera, 2018). En su actividad, construye la expresión algebraica "$2n + 1$" y la utiliza para calcular correctamente términos lejanos de la secuencia, lo que evidencia la superación de la etapa de recuento local y la construcción de conexiones estructurales entre representaciones aritméticas y expresiones algebraicas generales (Sosa et al., 2016). La formulación de esta regla explícita supone reconocer la regularidad como una relación funcional entre la posición y el valor correspondiente, lo que

posibilita operar con cantidades indeterminadas y anticipar términos no visibles sin recurrir a procedimientos iterativo. Esta articulación permite vincular la secuencia numérica con formas iniciales de pensamiento funcional, en las que la atención deja de centrarse en el cálculo de casos específicos para orientarse hacia la comprensión de la generalidad y de las relaciones invariantes que sostienen el patrón (Zapatera, 2018). A su vez, la validación de la expresión mediante la técnica de sustitución evidencia un control consciente del procedimiento y de los fundamentos que justifican su validez, dado que el profesor reconoce cómo aplicar la regla y comprende por qué la estructura algebraica propuesta representa adecuadamente el comportamiento de la secuencia (Aké y Godino, 2018).

El discurso del profesor profundiza este control al analizar la validez de sus procedimientos en relación con la expresión formal, emplear operaciones inversas de manera consciente y discutir los límites de aplicación de la regla (Castro et al., 2011). De este modo, el resultado matemático deja de entenderse como una coincidencia aritmética y se reconoce como una consecuencia necesaria de la estructura matemática subyacente. *El procedimiento funcional validado* se configura, así, como un procedimiento que trasciende el cálculo algorítmico para convertirse en un objeto y en fundamento de la generalización algebraica (Vergel et al., 2022).

Figura 12

Procedimiento funcional validado



Fuente: elaboración propia.

5.1.2 Definiciones, Propiedades y Fundamentos

En el caso de la profesora Sara, sus respuestas evidencian un énfasis en procedimientos asociados al reconocimiento de regularidades y al crecimiento recursivo de la secuencia. La profesora identifica incrementos entre términos consecutivos y describe el patrón a partir de ejemplos concretos y relaciones perceptibles dentro de la secuencia. Sin embargo, las explicaciones proporcionadas se centran en aspectos operativos y descriptivos, sin explicitar propiedades matemáticas asociadas a la estructura del patrón o relaciones funcionales que fundamenten la generalización algebraica.

Desde el subdominio *KoT*, esto permite identificar una mayor presencia de conocimiento procedimental que de referencias explícitas a definiciones, propiedades y fundamentos matemáticos del patrón (Escudero y Carrillo, 2020). En este sentido, la regla se infiere exclusivamente a partir de regularidades observadas en la secuencia, en particular la identificación de números impares, sin que se formule explícitamente ni se reconozcan

propiedades estructurales como la linealidad o la diferencia constante lo que dificulta establecer conexiones entre la regularidad aritmética observada y formas más generales al pensamiento algebraico temprano (Liñán et al., 2016).

Observa detenidamente la siguiente secuencia:



Término 1 Término 2 Término 3 Término 4

Fuente: Adaptado (Vergel, 2014)

Describe qué observas en el patrón de crecimiento entre cada término. *R/ Primero observo que las imágenes se organizan de acuerdo con números impares, luego se inicia a marcar un cuadro en cada imagen y aumenta uno en uno en las siguientes.*

La regla es concebida como un algoritmo secuencial orientado a "llegar a una meta". En esta perspectiva, la regla se interpreta como un procedimiento ejecutable y no como una relación funcional entre la posición y el valor correspondiente.

P: ¿Qué significa regla para ti?

R: Pensar en unas condiciones.

P: ¿Y por qué funciona la regla? ¿O crees que siempre funciona una regla, o no funciona una regla?

R: La regla permite seguir un paso a paso, respetar unas condiciones y establecer como el proceso para llegar a una meta o para lograr algo.

Lo que evidencia una atención centrada en la descripción local del crecimiento y no en la formulación de una relación funcional general (Climent y Carrillo, 2003). Desde esta

perspectiva, la regla se concibe como un algoritmo paso a paso orientado a la consecución de un resultado, más que como una relación funcional entre la posición y el valor del término (Carrillo y Yañez et al., 2018).

Esta concepción de carácter instrumental se refuerza en la entrevista cuando, al ser consultada por el significado de la regla, Sara responde: *"pensar en unas condiciones"*. Asimismo, ante la pregunta por la validez del objeto, afirma que la regla *"permite seguir un paso a paso, respetar unas condiciones y establecer el proceso para llegar a una meta o para lograr algo*". En consecuencia, el conocimiento evidenciado sitúa la regla principalmente en su *ejecutabilidad operativa* y no en su *estructura relacional*, lo que limita el reconocimiento de su estatuto ontológico como objeto matemático general y restringe su comprensión a un plano predominantemente procedimental (Escudero y Ávila et al., 2015; Rojas et al., 2015).

Desde la perspectiva de Cristóbal, se identifica una distinción entre la modelación pragmática y el uso de formalismos simbólicos. Aunque reconoce la generación de patrones como una práctica habitual, moviliza un conocimiento que privilegia la ejecución mental de operaciones y la resolución apoyada en estrategias internas, sin recurrir sistemáticamente a registros escritos de procedimientos y expresiones algebraicas convencionales (Liñán et al., 2016; Schliemann et al., 2006). En consecuencia, la generalización se configura a partir de una analiticidad sustentada en formas no convencionales de objetivación, en las que el tratamiento de la indeterminación se apoya principalmente en recursos semióticos implícitos (Radford, 2015).

Asimismo, el conocimiento manifestado por Cristóbal respecto de la modelación de patrones muestra una mayor valoración de estrategias implícitas de resolución, particularmente ante situaciones que demandan generalizaciones distantes (de Souza-Barboza et al., 2020; Vasco, 2015). En este sentido, dicho conocimiento privilegia la organización operativa de la

generalización, mientras que las conexiones entre la estructura numérica del patrón y las formas generales de representación algebraica emergen con menor grado de explicitación (Flores-Medrano, 2022).

> ¿Siempre se pueden resolver patrones con una expresión algebraica*?* Proporcione ejemplos de situaciones en las que consideren que sí aplica y en las que no aplica. Justifiquen por qué. R/ *La modelación de patrones es común, pero no utilizó fórmulas algebraicas para obtener resultados, al menos no las escribo, pero sí hago operaciones matemáticas mentalmente hasta obtener el resultado.* ***Hay patrones que uno no puede modelar*** *y simplemente no lo resuelvo o busco otras estrategias que implique no registrar (escribir) los procedimientos.*

Esta respuesta evidencia un conocimiento que reconoce la modelación de patrones como una práctica habitual, aunque sustentada principalmente en estrategias mentales y formas implícitas de resolución. Asimismo, sugiere que la explicitación escrita de procedimientos y expresiones algebraicas convencionales ocupa un lugar menos relevante dentro del repertorio de recursos movilizados por el profesor. A la luz de los hallazgos, la generalización se configura desde una aproximación predominantemente operativa, apoyada en recursos semióticos no convencionales de objetivación (Radford, 2015).

> P: ¿Qué significa para ti que siga una regla?
>
> *R: Para mí, seguir una regla es enseñarle a pensar, es empezar a enseñarle que en las matemáticas hay que seguir unos procedimientos, para obtener unos resultados. Entonces, que hay que establecer como unos esquemas, que hay que respetar, porque lo que dicen que las matemáticas son exactas. Entonces, si él no sigue la regla, no va a obtener el resultado esperado.*

En el discurso de Orlando, la regla se define de manera formal como una expresión algebraica que modela la regularidad subyacente del patrón. Un rasgo distintivo de su razonamiento es la capacidad para discriminar con precisión entre la variable, entendida como la magnitud que cambia, y la constante, concebida como el componente invariante de la estructura (Kaput et al., 2017). Esta distinción no es meramente nominal; refleja un dominio de la indeterminación de las magnitudes, lo que le permite operar con elementos desconocidos como si fueran conocidos. Tal capacidad constituye un rasgo central de la analiticidad algebraica (Radford, 2010, 2022). Orlando trasciende la ejecución procedimental y analiza la regla como un objeto matemático en sí mismo (Liñán et al., 2016). En sus explicaciones, aborda aspectos técnicos relevantes vinculados con la formulación de la regla, entre ellos el orden de las operaciones, la definición de un término inicial o punto de partida, y la precisión semántica en la formulación de la regla (Radford, 2008). En este sentido, *la regla se concibe como una relación funcional explícita,* reconocida como un objeto conceptual autónomo con condiciones de validez claramente definidas, lo que posibilita el tránsito desde una comprensión situacional hacia una estructura funcional estable (Espinoza et al., 2018; Radford, 2010).

> P. ¿Siempre se pueden resolver patrones con una expresión algebraica? Proporcione ejemplos de situaciones en las que consideren que sí aplica y en las que no aplica. Justifiquen por qué.
>
> *R/ Pues considero que los patrones se pueden resolver con una expresión algebraica toda vez que la relación entre los términos pueda ser expresada en operaciones aritméticas entre ellos y que dichos términos sean cuantificables. La variación que se presenta en el ejercicio es sencilla, como se pueden encontrar ejemplos de variación simples como la cantidad de galletas que se consiguen si se pide a estudiantes del colegio que lleven paquetes de galletas festival para una celebración (las galletas festival solo vienen en paquetes x4 y x6 galletas). Sin embargo,* ***otros asuntos tienen***

> ***muchas más situaciones variables,*** *o asuntos que son difícilmente cuantificables (o no directamente cuantificables, como justificación de respuestas), lo que complica bastante la expresión de las relaciones en términos aritméticos o el establecimiento de los términos con que funcionaría una expresión algebraica.*

5.1.3 Registros de Representación

Permite comprender cómo el profesorado configura el contenido matemático asociado a la generalización de patrones a partir de los sistemas representacionales que moviliza, reconoce y articula. Desde el marco del *MTSK*, los registros se conciben como componentes constitutivos del conocimiento matemático del contenido y no meros soportes expresivos, cuyo uso revela supuestos epistemológicos y ontológicos sobre la naturaleza del objeto matemático en cuestión (Flores et al., 2014).

Para Cristóbal, la noción de *"seguir una regla"* trasciende la mera repetición mecánica y se vincula con un proceso formativo orientado a "*enseñar a pensar*", basado en el respeto de esquemas y procedimientos establecidos (Acosta-Inchaustegui, 2023). Sin embargo, esta concepción de la matemática se encuentra ligada a una disciplina "exacta", que exige el cumplimiento de normas para obtener resultados predecibles, y se articula con una justificación predominantemente procedimental, en la que las propiedades estructurales de los objetos matemáticos permanecen implícitas y no son objeto de una tematización reflexiva (Acosta, 2023).

Bajo este enfoque, la regla se asume principalmente como un fin normativo que garantiza el éxito en el cálculo, más que como una herramienta para analizar la covariación entre magnitudes. Desde esta perspectiva se configura la categoría *Regla como esquema*

procedimental, definida por una comprensión de la regularidad como un esquema organizador de la acción matemática que permite anticipar y reproducir el comportamiento del patrón mediante procedimientos consistentes. El profesor moviliza una conciencia emergente sobre la estructura del patrón, orientando el control conceptual hacia la estabilidad del procedimiento, la previsibilidad de los resultados y la sistematicidad en la resolución de la tarea. En este sentido, la regla se constituye como un recurso para gestionar la generalización desde formas de pensamiento centradas en la coordinación de acciones recurrentes y la identificación de regularidades operativas (Hohensee, 2017).

Cristóbal declara explícitamente: *"No utilicé una expresión o fórmula algebraica"* y fundamenta su resolución en *"operaciones matemáticas mentalmente"*. Sus registros predominantes son concretos y aritméticos, apoyados en representaciones como *"ábacos o rectas numéricas"* y en la observación directa de *"crecen de uno en uno"* o *"aumento progresivo"*.

Asimismo, el profesor recurre a nociones vinculadas a las relaciones entre cantidades para interpretar el comportamiento de los patrones, utilizando expresiones como que las cantidades *"son directamente proporcionales"* o que el patrón *"crece de forma lineal porque involucra la adición"*. Estas formulaciones evidencian la movilización de categorías matemáticas para explicar la regularidad observada y otorgar significado al crecimiento del patrón, desde una comprensión centrada en las relaciones de cambio y en la identificación de características reconocibles de la secuencia.

En el plano representacional Sara recurre al uso de expresiones simbólicas para establecer relaciones entre las cantidades involucradas en el patrón, como se evidencia cuando afirma *"X igual al número de término, $X + 1$ igual al número de cuadrados vacíos"*. Esta formulación muestra una aproximación a la variable como recurso para coordinar y expresar relaciones entre

los elementos de la secuencia, otorgándole una función representacional vinculada a la descripción del comportamiento del patrón. Asimismo, los registros de representación que moviliza son predominantemente pictóricos y numéricos, lo que pone de manifiesto un conocimiento que privilegia medios semióticos visuales y aritméticos para favorecer el reconocimiento y la expresión de regularidades (Cayo Maturana y Contreras González, 2020), al señalar que *"las imágenes se organizan de acuerdo con números impares"*, *"aumenta uno en uno"* y valida el crecimiento *"en cada una de las gráficas"*. Según las fuentes, el sistema figurativo (configuraciones puntuales) debe ser un recurso para visualizar el desarrollo aritmético, pero si no hay un tránsito fluido hacia el registro algebraico, la comprensión del concepto es menor (Cayo, 2023).

Introduce una expresión simbólica mínima: *"R/* $n + 1$*"*, como medio para representar algebraicamente el patrón trabajado. Esta respuesta evidencia el uso inicial del registro simbólico para expresar una regularidad identificada. En este sentido, la expresión propuesta representa aproximación temprana a la generalización simbólica del patrón, coherente con los procesos de transición descritos en la literatura sobre el paso desde el uso inicial de símbolos hacia formas más elaboradas de representación de relaciones generales en el pensamiento algebraico temprano (Schliemann et al., 2006; Zapatera, 2018).

Asimismo, al calcular el término *"el término 100 = 300"* evidencia un intento de extender la regularidad observada hacia términos lejanos de la secuencia, utilizando relaciones construidas a partir de los ejemplos iniciales del patrón. Esta respuesta muestra una aproximación centrada en la identificación y prolongación de regularidades visibles, especialmente mediante estrategias de carácter recursivo y perceptivo. En términos del pensamiento algebraico temprano, la generalización se apoya principalmente en relaciones

observadas entre términos consecutivos, aspecto que la literatura asocia con formas iniciales de construcción de reglas antes de la explicitación de relaciones funcionales generales (Girit, 2023). Este fenómeno es descrito inducción ingenua, un procedimiento basado en un razonamiento probable cuyas conclusiones exceden lo contenido en las premisas inicial (Vergel et al., 2022).

En el mismo sentido, las respuestas de Sara evidencian un reconocimiento perceptivo y recursivo del crecimiento del patrón, particularmente al identificar regularidades a partir de ejemplos concretos y relaciones visibles entre los términos de la secuencia. *"No identifico los nombres las propiedades de crecimiento de patrones"* y *"No lo realicé con expresiones algebraicas"*; muestran que su aproximación se orienta principalmente hacia la observación y descripción operativa del patrón, más que hacia la explicitación formal de propiedades algebraicas o relaciones funcionales. Desde la perspectiva de Radford (2013) la *domestication de l'œil*, entendida como el proceso mediante el cual la mirada se educa para ver matemáticamente, de modo que deja de percibir las configuraciones como meros agregados perceptivos y comienza a reconocer en ellas estructuras y relaciones invariantes que organizan los términos como unidades matemáticas con sentido.

Orlando evidencia la movilización de una pluralidad de registros de representación y un tránsito fluido entre ellos. El proceso analítico se inicia en la observación de instancias empíricas, como se aprecia en la afirmación *"me baso en los ejemplos iniciales"*, y progresa hacia formas de representación más analíticas mediante la incorporación intencionada de una tabla, al señala *"Representé el patrón en una tabla para ver la relación"*. A través de este recurso, articula el número del término, las cantidades parciales y el total, utilizando la representación tabular como una herramienta para organizar la información, explicitar relaciones entre cantidades y hacer visible la estructura de crecimiento del patrón. De este modo, la tabla

adquiere una función mediadora en el reconocimiento y la expresión de regularidades, favoreciendo procesos de generalización propios del pensamiento algebraico temprano.

Formaliza la relación mediante *"Total de cuadritos (*$2n + 1$*)"*, reconoce la variable (*"Número del término (n)"*), valida por sustitución (*"*$X = 2\,(100) + 1 = 201$*"*), y justifica estructuralmente: *"siempre había la misma cantidad de cuadritos blancos que negros más un cuadrito"*.

Por otra, reconoce límites *"Expresadas por una operación aritmética"* y *"Dificultad para elaborar la construcción de una expresión algebraica",* estas afirmaciones revelan tensiones en la transición del pensamiento aritmético al algebraico, un aspecto crítico dentro del conocimiento de las características del desarrollo del PAT. En Orlando, los registros de representación cumplen una función mediadora, específicamente, la tabla actúa como puente fenomenológico entre el patrón visual y la expresión simbólica. Desde el punto de vista conceptual, el patrón se construye como objeto funcional, donde la variable representa indeterminación general y la expresión algebraica sintetiza la estructura (Baldan da Silva et al., 2023). Epistemológicamente, la validez de la generalización se establece por coherencia relacional y verificación funcional, junto con la recurrencia empírica, lo que implica una transición desde una concepción operacional del signo igual hacia una interpretación relacional que garantiza la equivalencia del modelo (Wettergren, 2022). En este contexto, la construcción de reglas generales emerge a partir de la exploración sistemática de casos particulares y de la coordinación explícita de diversos registros de representación, configurando formas de razonamiento que otorgan un papel relevante a la evidencia empírica en el proceso de generalización (Carraher y Schliemann, 2019)**.** En última instancia, la movilización de diversos sistemas semióticos, como tablas de funciones y modelos icónicos, actúa como un puente

fenomenológico que permite al estudiante objetivar la regularidad y consolidar el razonamiento funciona (Cayo, 2023; Espinoza et al., 2018).

Cristóbal y Sara, comparten una preferencia por registros no simbólicos y una validación empírica del patrón. En este contexto, Sara incorpora una expresión simbólica $(n + 1)$, como recurso para sintetizar la regularidad identificada, mientras que Cristóbal otorga mayor relevancia a formas de representación basadas en la descripción verbal y la recurrencia observada. Conceptualmente, ambos convergen en el reconocimiento y descripción de regularidades; no obstante, difieren en la función que atribuyen al símbolo dentro del proceso de generalización. Para Sara, la simbolización emerge como un medio para expresar relaciones generales, mientras Cristóbal la regularidad adquiere sentido principalmente a través de la explicitación empírica del patrón. En ambos casos, se evidencian capacidades para "*continuar un patrón*" o describir una "*recurrencia*", reconocidas en la literatura como manifestaciones relevantes del pensamiento algebraico temprano y como recursos para la construcción progresiva de generalizaciones más explícita (Fuentes-Leal, 2020b).

Entre Cristóbal y Orlando se observa una divergencia claramente marcada, configurando un continuo de complejidad cognitiva en la generalización de patrones (Aké, 2021). Orlando articula de manera coherente distintos registros de representación, transitando de la tabla al símbolo algebraico, mientras que Cristóbal se mantiene en registros concretos y aritméticos. Asimismo, Cristóbal valida sus procedimientos a partir de casos particulares, en contraste con Orlando, quien fundamenta la validez mediante la estructura de la relación y el uso de la sustitución (Jungbluth et al., 2022). En consecuencia, Orlando construye el patrón como una relación funcional, mientras que Cristóbal lo concibe como una acumulación progresiva de valores (Carraher y Schliemann, 2019).

Sara y Orlando reconocen regularidades numéricas y crecimiento constante. La diferencia central radica en la integración de registros en Sara, los registros permanecen yuxtapuestos (visual, numérico, simbólico mínimo); en Orlando, se articulan jerárquicamente. El nivel de formalización simbólica y la comprensión funcional son significativamente más altos en Orlando (Mason, 2018).

De manera integrada, el análisis muestra que el *KoT* en la categoría Registros de representación, se configura como un continuo de complejidad que evidencia distintas formas de reconocer, expresar y organizar la regularidad de los patrones. En una de esta configuraciones, Cristóbal, moviliza una comprensión de carácter fenomenológico y empírico, en la que los registros se orientan principalmente hacia la observación, el conteo y la verificación de la regularidad identificad (Vergel et al., 2022). Sara, por su parte, evidencia reconocimiento de regularidades mediante el uso de registros visuales y numéricos, particularmente a través de estrategias apoyadas en la observación de relaciones entre términos consecutivos y en la identificación perceptiva del crecimiento del patrón. Sus respuestas muestran aproximaciones iniciales al uso del registro simbólico y a la formulación de generalizaciones construidas a partir de ejemplos concretos, lo que permite situar sus producciones dentro de formas de generalidad factual y contextual descritas por Radford (2010). Y Orlando articula registros (pictórico, tabular y simbólico) para desplazar la atención desde el conteo hacia la variación conjunta (covariación) y construir el patrón como objeto funcional generalizable (Vergel et al., 2022).

De manera transversal se identifica, en los tres casos se identifican formas diferenciadas de interacción entre registros aritméticos y algebraicos, coherentes con las tendencias descritas en la literatura sobre pensamiento algebraico temprano. La generalización emerge inicialmente desde lo perceptual y lo numérico y alcanza consolidación cuando el registro simbólico adquiere

el estatus de mediador epistemológico, más allá de su uso como recurso de cálculo (Radford, 2011; Vergel et al., 2022). Este análisis permite comprender que los registros de representación, en el *KoT* del profesorado, funcionan tanto como formatos expresivos como indicadores del tipo de objeto matemático que se construye al generalizar patrones y de las formas de algebraización que se ponen en juego durante dicho proceso (Carrillo-Yañez et al., 2018; Climent et al., 2014).

5.1.4 Fenomenología y aplicaciones en la generalización de patrones

Cumple un rol epistemológico central, en tanto los fenómenos no se conciben como simples contextos motivacionales, se entienden como fuentes de significado matemático que posibilitan el tránsito desde la experiencia concreta hacia la generalización estructural (Vergel, 2015). En el marco del *KoT*, esta categoría permite analizar cómo el profesorado comprende, selecciona y utiliza fenómenos para organizar el contenido matemático vinculado a la generalización de patrones (Liñán et al., 2016).

En el caso de Cristóbal, la fenomenología se expresa a través de la observación de características perceptibles del comportamiento del patrón. Ante la identificación del patrón, Cristóbal describe el fenómeno en términos estrictamente perceptuales y sensibles *"Se observa cómo las unidades van creciendo en cantidad… también hay un crecimiento de uno en uno"*. Desde esta perspectiva, el fenómeno opera como un referente para describir y comunicar el crecimiento del patrón, constituyéndose en una vía para organizar el contenido matemático asociado a la generalización de patrones (Otten et al., 2019).

El fenómeno es interpretado principalmente a partir de incrementos visibles y relaciones perceptibles entre los términos de la secuencia, evidenciando una aproximación apoyada en la observación de regularidades concretas y en la identificación recursiva del crecimiento del patrón. Desde la perspectiva de Radford (2015) estas formas de reconocimiento se vinculan con

procesos de generalidad factual y contextual, en los cuales la atención matemática se organiza inicialmente alrededor de relaciones observables dentro de casos particulares. Esta aproximación se articula con lo planteado por Vergel y Rojas (2018) respecto a la generalización empírica o factual, en la que la regularidad adquiere significado a partir de la repetición observada y de la identificación de recurrencias entre los términos de la secuencia, configurando una forma particular de expresar y comunicar la generalidad del patrón.

Cristóbal recurre a un ejemplo del ámbito agrícola *"Cuando se siembra una plantación de café… los espacios vacíos que deben quedar entre ellos…"* Esta referencia evidencia una comprensión de los fenómenos cotidianos como fuentes de significado para reconocer y comunicar regularidades asociadas a los patrones, vinculando el contenido matemático con experiencias próximas al contexto de los estudiantes. Asimismo, durante la entrevista explicita una concepción del pensamiento algebraico como altamente abstracto al afirmar *"El pensamiento algebraico siempre es el más abstracto… el que menos he tenido en cuenta"*. En conjunto, estas evidencias muestran una configuración del conocimiento fenomenológico caracterizada por la relevancia que adquieren los contextos cercanos para expresar y dotar de significado a las regularidades, a su vez, el pensamiento algebraico es concebido como un ámbito de elevada abstracción dentro de la práctica profesoral.

La función principal que Cristóbal atribuye a este enfoque se centra en el potencial de los materiales concretos para favorecer la comprensión del crecimiento progresivo del patrón. Bajo la premisa de que *"En primaria se enseña el aumento progresivo… utilizando ábacos o rectas numéricas, para que deje de ser abstracto*" (Acosta Inchaustegui, 2023), el profesor reconoce en estos recursos una mediación que aproxima el contenido matemático a formas de representación accesibles para los estudiantes. Desde esta perspectiva, el patrón adquiere significado a través de

secuencias de acciones, manipulaciones y cambios observables, configurando una aproximación coherente con las formas de pensamiento algebraico factual descritas por Vergel (2014).

En el caso de Sara, la fenomenología ocupa un lugar central y se caracteriza por una amplia diversidad de contextos; por ejemplo, identifica regularidades visibles *"Las imágenes se organizan de acuerdo con números impares… aumenta uno en uno"*. Estos fenómenos son interpretados principalmente a partir de relaciones perceptibles y regularidades observadas entre los términos de la secuencia, evidenciando formas de pensamiento algebraico; estas formas de reconocimiento se asocian con procesos iniciales de generalización factual y contextual, en los cuales la organización matemática del patrón se construye progresivamente a partir de relaciones identificadas en casos particulares (Radford, 2013; Vergel et al., 2022). Si bien la regularidad se reconoce adecuadamente, la actividad semiótica permanece en un plano puramente descriptivo (Hohensee, 2017). Esta aproximación resulta consistente con formas iniciales de pensamiento algebraico descritas por Vergel (2015), en las cuales el reconocimiento del patrón se apoya principalmente en regularidades perceptibles y relaciones construidas a partir de ejemplos concretos. En este sentido, las respuestas evidencian procesos de generalización factual y contextual, asociados a formas iniciales de simbolización y organización semiótica del patrón (Vergel, 2019).

En relación con las aplicaciones, Sara recurre de manera sistemática a contextos cotidianos y naturales, tales como la *"Construcción de bloques con material concreto…" "El crecimiento de la planta… cuántos centímetros aumenta"* (Radford, 2015). Estos fenómenos funcionan como referentes cercanos para comunicar y otorgar significado a las regularidades presentes en los patrones, vinculando el contenido matemático con experiencias reconocibles para los estudiantes. Asimismo, cuando la profesora señala que *"Se puede evidenciar el*

crecimiento de la planta" pone de manifiesto una comprensión del cambio asociada a la observación de transformaciones perceptibles en el fenómeno. Desde esta perspectiva, el crecimiento y la variación adquieren relevancia como elementos organizadores del significado matemático atribuido al patrón (Levin y Walkoe, 2022; Schliemann et al., 2006).

Desde el *KoT*, el fenómeno se configura principalmente como un recurso de validación apoyado en la observación de regularidades y en la verificación de relaciones visibles dentro de la secuencia, priorizando una aproximación centrada en la confirmación de patrones identificados a partir de casos particulares (Santagata y Lee, 2021) *"No identifico los nombres de las propiedades de crecimiento" "El procedimiento se basa en los ejemplos iniciales"* la profesora pone de manifiesto una aproximación centrada en la observación y descripción de la regularidad a partir de sus manifestaciones perceptibles. Desde una perspectiva epistemológica, la fenomenología adquiere significado como experiencia de reconocimiento y validación de patrones, sustentada en la recurrencia observada y en la interpretación de situaciones concretas. En este sentido, el patrón se configura como un objeto matemático cuya comprensión se construye a partir de relaciones identificadas en casos particulares y de la experiencia directa con la regularidad observada (Radford, 2015; Vergel et al., 2022).

En contraste, Orlando presenta una configuración sustancialmente distinta del *KoT* en esta categoría. En su caso, la fenomenología activa el proceso de generalización y funciona como puente entre lo empírico y lo estructural (Otten et al., 2019). Orlando identifica explícitamente los componentes del fenómeno *"Siempre había un aumento de uno en cada color… y se conservaba que había la misma cantidad de cuadritos blancos que negros más un cuadrito*"; aquí, el fenómeno trasciende de la percepción sensorial superficial a descomponerlo en

invariantes y variables, lo que constituye un núcleo central del desarrollo del pensamiento algebraico temprano (Vergel et al., 2022).

Las aplicaciones propuestas, como baldosas, precios o mediciones con hojas se analizan en términos de cuantificabilidad y control de variables (Hohensee, 2017) *"Los patrones se pueden resolver con una expresión algebraica toda vez que la relación… sea cuantificable*"; Orlando explicita el rol epistemológico del fenómeno *"Primero hay que identificar qué se conserva y qué cambia… luego buscar cómo expresar esa relación";* este posicionamiento se alinea con la concepción del *KoT* en su génesis (Souza-Barboza et al., 2020; Escudero et al., 2016; Jungbluth et al., 2022) y con la generalización entendida como una construcción relacional (Fuentes Leal, 2020b). En consecuencia, para Orlando el patrón se configura como un objeto funcional que emerge del fenómeno y no como una estructura superpuesta o abstracta sin conexión con la realidad (Rojas y Vergel, 2018).

Cristóbal y Sara comparten una aproximación descriptiva, centrada en la observación y en el contexto cotidiano (Radford, 2010). En este marco, Cristóbal emplea el fenómeno como recursos hacer visible el crecimiento del patrón y favorecer su comprensión a partir de experiencias observables (Ferreira et al., 2022). Por su parte, Sara lo utiliza para otorgar significado a las regularidades mediante situaciones cercanas y reconocibles para los estudiantes. En ambos casos, los fenómenos adquieren una función mediadora en la construcción del significado matemático, permitiendo reconocer, describir y comunicar regularidades a partir de experiencias concretas (Schliemann et al., 2006).

En la comparación entre Cristóbal y Orlando, la divergencia adquiere un carácter epistemológico en función del papel que cada profesor atribuye al fenómeno dentro de la comprensión de los patrones. Mientras Cristóbal moviliza los fenómenos como referentes para

reconocer y comunicar regularidades observables, Orlando los utiliza como puntos de partida para establecer relaciones entre cantidades y coordinar distintas formas de representación matemática (Radford, 2010; Rojas y Vergel, 2018). Estas diferencias configuran maneras particulares de organizar el significado matemático asociado a la generalización de patrones dentro del *KoT*.

De manera similar, Sara y Orlando coinciden en reconocer la relevancia de los contextos y fenómenos como fuentes de significado para el trabajo con patrones. No obstante, difieren en la función que estos desempeñan en sus explicaciones. En Sara, los fenómenos adquieren sentido principalmente a través de la descripción del crecimiento y del cambio en situaciones cercanas a la experiencia cotidiana, mientras que Orlando los articula con relaciones entre cantidades, variables y formas de simbolización para expresar la regularidad identificada. Estas configuraciones evidencian distintas formas de movilizar el conocimiento fenomenológico en la enseñanza de la generalización de patrones.

De manera integrada, los resultados permiten identificar tres perfiles fenomenológicos del *KoT*. En Cristóbal, la fenomenología se configura a partir de experiencias concretas y observables que favorecen el reconocimiento y la comunicación de regularidades presentes en los patrones (Chimoni et al., 2021). En Sara, los fenómenos adquieren un carácter contextual y experiencial, proporcionando referentes cercanos para interpretar el crecimiento y el cambio en situaciones cotidianas (Kaput et al., 2017). Por su parte, en Orlando la fenomenología se articula con la identificación de relaciones entre cantidades y con la coordinación de diferentes representaciones, otorgando al fenómeno una función organizadora del significado matemático asociado a los patrones. Estas configuraciones evidencian distintas maneras de movilizar la fenomenología dentro del conocimiento de los temas, así como diversas formas de construir

significado alrededor de la generalización de patrones. Desde la perspectiva del pensamiento algebraico temprano, el perfil evidenciado por Orlando se caracteriza por una articulación explícita entre los fenómenos observados y las relaciones generales que describen el comportamiento del patrón, aspecto asociado a procesos de generalización funcional vinculados a la relación $n \rightarrow f\ (n)$ (Chimoni et al., 2021).

Por su parte, los perfiles evidenciados en Cristóbal y Sara se caracterizan por una comprensión de los patrones apoyada en experiencias perceptivas, ejemplos concretos y regularidades observables. En estas configuraciones, la experiencia, el lenguaje y las formas de abstracción movilizadas por los profesores participan de manera diferenciada en la construcción y organización del conocimiento especializado asociado a la fenomenología de los patrones (Levin y Walkoe, 2022).

El análisis empírico previamente expuesto permite observar que el desarrollo del pensamiento algebraico temprano se consolida cuando se produce una transformación ontológica del objeto matemático:

- Secuencia observable → relación funcional (Carraher y Schliemann, 2019; Chimoni et al., 2021).
- Letra nominal → número general (Souza Barboza et al., 2020; Kaput et al., 2017).
- Verificación empírica → validez universal (Vergel, 2019).
- Símbolo instrumental → condensación estructural (Baldan da Silva et al., 2023).
- Procedimiento ejecutable → modelización fundamentada (Radford, 2013).

Esta integración analítica no sustituye los hallazgos previos; por el contrario, los articula en una estructura explicativa que permite comprender que el núcleo del *KoT* asociado al pensamiento algebraico temprano se organiza alrededor del reconocimiento y explicitación de

relaciones de covariación, así como de la comprensión progresiva de la variable como medio para representar y generalizar regularidades presentes en los patrones (Radford, 2010).

En este sentido, la variable como eje ontológico del PAT, el análisis evidencia que la generalización funcional se consolida únicamente cuando la variable deja de operar como etiqueta o marcador posicional y se tematiza como un número general, magnitud indeterminada o elemento en covariación con otra magnitud (Vergel et al., 2022).

En efecto, mientras la variable permanezca implícita o nominal, el patrón se mantiene en un plano empírico o recursivo. Cuando la variable adquiere estatuto de número general, el patrón se constituye como relación funcional $n \rightarrow f\,(n)$, independiente de casos particulares (Souza Barboza et al., 2020).

El resultado matemático como criterio estructural, emerge como indicador decisivo del nivel de algebraización. A lo largo del análisis se observan distintas configuraciones:

- Resultado como valor numérico local (Vergel, 2010).
- Resultado como regularidad verbal (Kieran et al., 2016).
- Resultado como expresión general fragmentada (Radford, 2013).
- Resultado como relación funcional explícita (Carraher y Schliemann, 2019).

La diferencia estructural radica en el dominio de validez cuando el resultado es válido para cualquier n y se fundamenta estructuralmente, la generalización trasciende la extrapolación empírica y adquiere carácter funcional (Otten et al., 2019).

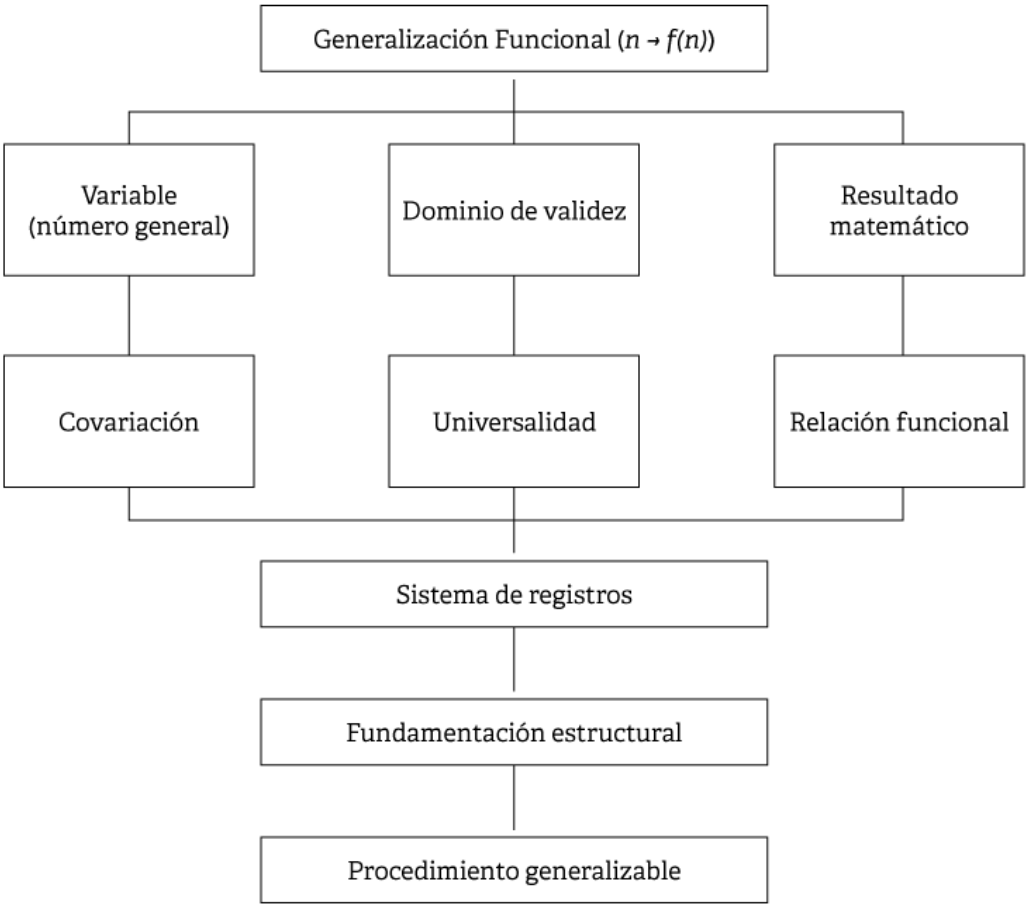
Aunque el signo igual y el pensamiento relacional no siempre aparecen explicitados en los discursos de los profesores, el análisis permite identificar configuraciones diferenciadas del

signo igual como operador aritmético, como asignación, como equivalencia relacional (Souza-Barboza et al., 2020). Estas configuraciones evidencian distintas formas de comprender y movilizar las relaciones matemáticas asociadas a los patrones. En este contexto, el uso relacional del signo igual constituye un indicador relevante del desarrollo del pensamiento algebraico temprano, al expresar relaciones de dependencia entre magnitudes (Jungbluth et al., 2022).

El análisis de los registros de representación revela que estos son la estructura constitutiva misma de los objetos matemáticos que el estudiante logra construir (Radford, 2010). La forma en que se coordinan los signos (gestos, palabras, tablas, símbolos) define el nivel de generalidad y el tipo de pensamiento aritmético o algebraico, que se está movilizando (Radford, 2010). Cuando los registros permanecen yuxtapuestos, la generalización no alcanza síntesis estructural (Radford, 2010). En cambio, cuando el registro simbólico unifica la estructura espacial del dibujo con la estructura numérica de la tabla, el patrón deja de ser una secuencia observable para convertirse en una estructura relacional y predictiva (Figura 13), en otras palabras, se consolida la generalización funcional (Radford, 2015).

Figura 13

Sistema de relaciones en la generalización funcional de patrones



Nota. La generalización surge cuando la variable es número general, la covariación es clara, el resultado es relacional, su validez es universal, los registros sintetizan la estructura y el procedimiento está fundamentado.

Fuente: elaboración propia.

Interpretar los casos como configuraciones epistemológicas:

1. *Empírico – Descriptiva:* el patrón adquiere significado a través de la observación de regularidades perceptibles y de la descripción de cambios entre términos consecutivos. La variable se asocia al seguimiento de la secuencia, el resultado matemático se construye a partir

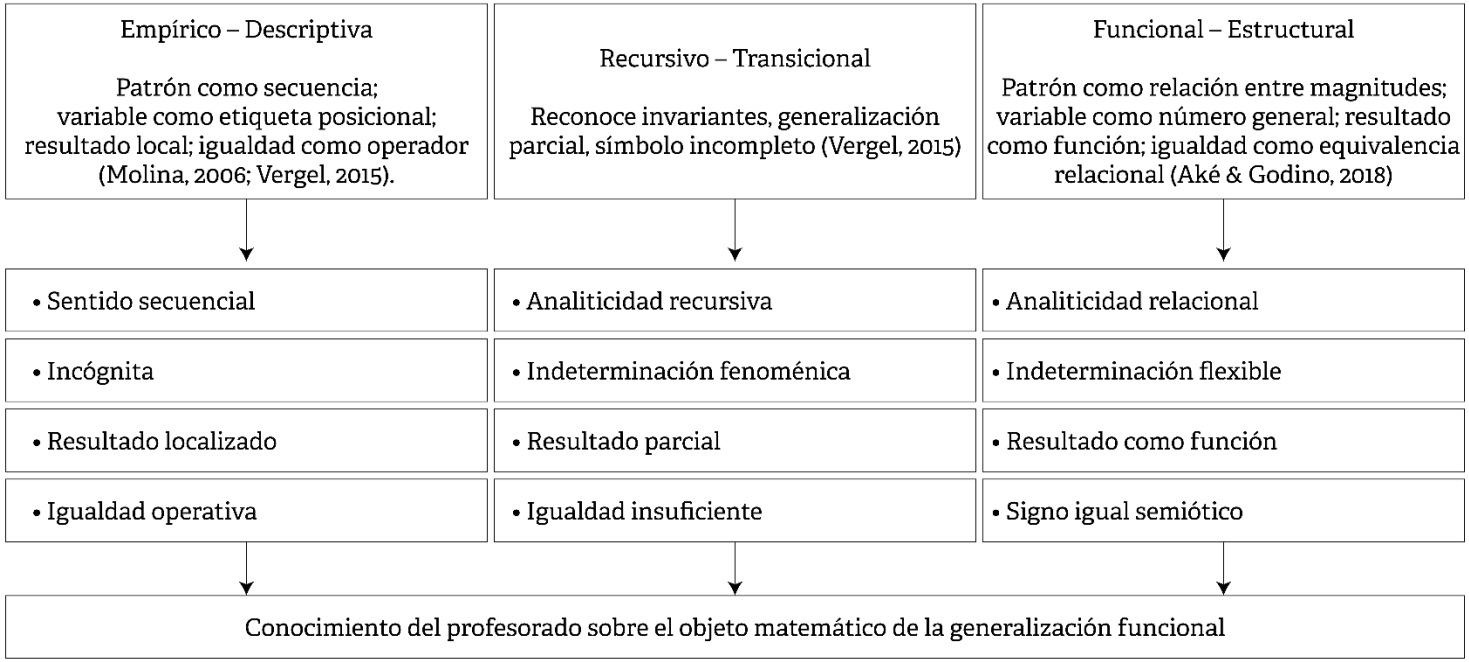
de casos particulares y el signo igual se moviliza principalmente para expresar operaciones y resultados (Molina, 2006; Vergel, 2015).

2. *Recursivo –Transicional:* el patrón se comprende mediante la identificación de regularidades recurrentes y relaciones estables entre términos. La generalización emerge a partir de la coordinación de ejemplos, el uso inicial de expresiones simbólicas y la búsqueda de reglas que permitan describir el comportamiento observado de la secuencia (Vergel, 2015).

3. *Funcional – Estructural:* el patrón se interpreta como una relación entre magnitudes que covarían. La variable adquiere el significado de número general, la regla expresa una relación funcional aplicable a cualquier término y el signo igual se moviliza como expresión de equivalencia relacional entre cantidades (Aké y Godino, 2018).

Figura 14

Conocimiento del objeto matemático del patrón



Fuente: Elaboración propia

A partir del análisis transversal de los casos y de la matriz estructural del *KoT*–PAT, emergen las siguientes categorías que refinan la lectura del subdominio *KoT* (Cayo-Maturana y Contreras-González, 2020). Estas categorías no sustituyen las oficiales del modelo *MTSK*, pero permiten una lectura más densa y coherente con la epistemología del pensamiento algebraico temprano, al incorporar dimensiones críticas como la analiticidad, el sentido de la indeterminancia y la expresión semiótica (Radford, 2010). En última instancia, se trata de estructuras de conocimiento (Tabla 11) que dan cuenta de cómo el profesorado constituye internamente el objeto matemático de la generalización funcional, facilitando la transición desde el tratamiento de objetos extensivos hacia la deducción de reglas generales que gobiernan las relaciones de covariación y la estructura de los sistemas matemáticos (Godino et al., 2014).

La siguiente tabla sistematiza los aportes emergentes del análisis del subdominio *KoT*, articulando los núcleos conceptuales del modelo *MTSK* con categorías epistemológicas refinadas y conocimientos de los profesores específicos observables en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

Tabla 11

Categorías analíticas del KoT en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano: articulación entre núcleo teórico, configuración emergente y conocimiento del profesor

Categoría *KoT*	**Categoría emergente**	**Descripción**
Definiciones y fundamentos	Comprensión estructural de la variable como número general.	Utiliza la letra como representación de una cantidad indeterminada que varía y permite establecer relaciones funcionales generales.

Fundamentos + Características del resultado	Reconocimiento tipológico de formas de generalización.	Distingue entre repetir un patrón, describir cómo crece y construir una regla general que funcione más allá de los casos vistos
Características del resultado	Conciencia del dominio de validez de la expresión general.	Reconoce que una regla debe funcionar para cualquier término de la secuencia, no solo para ejemplos observados o cercanos.
Procedimientos matemáticos (por qué)	Uso relacional del signo igual como equivalencia funcional.	Interpreta el signo igual como relación estructural entre expresiones equivalentes, y no como simple indicador de resultado.
Registros de representación	Articulación estructural entre registros de representación.	Coordina representaciones pictóricas, tabulares y simbólicas para construir y explicar la estructura general de un patrón

Procedimientos matemáticos (cómo y por qué)	Fundamentación estructural del procedimiento generalizador.	Justifica la validez de la regla construida, explicando por qué funciona para cualquier caso, más allá de la ejecución paso a paso.
Fenomenología y aplicaciones	Abstracción estructurante desde el fenómeno al objeto funcional.	Identifica invariantes y relaciones matemáticas en situaciones concretas, transformando lo perceptual en una estructura funcional.

Nota. Su valor reside en reconstruir cómo el profesorado configura estructuralmente la generalización funcional como objeto matemático. Esta arquitectura permite transformar el análisis de descriptivo a relacional, elevando el uso del *KoT* a un nivel estructural coherente con los fundamentos del pensamiento algebraico temprano.

Fuente: elaboración propia.

5.2 Resultados del Subdominio Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT)

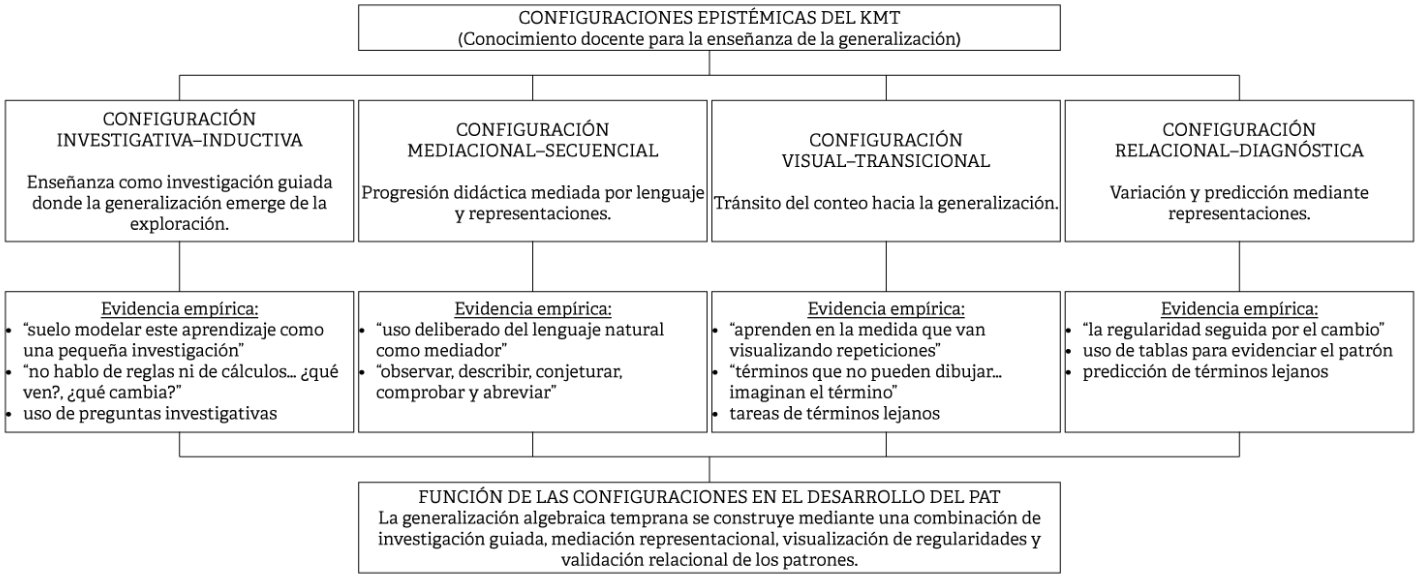
El análisis del subdominio *KMT* pone de manifiesto configuraciones diferenciadas del conocimiento del profesorado en el desarrollo del PAT. A partir de los cuestionarios y las entrevistas, se caracteriza el conocimiento asociado a la selección de recursos, el diseño de estrategias y la estructuración de las tareas en la enseñanza de la generalización de patrones (Cayo y Contreras, 2020). En este subdominio, la matemática actúa como criterio rector de las decisiones del profesorado, orientando la acción didáctica desde el contenido hacia su enseñanza. Este conocimiento se organiza en tres categorías principales: teorías de la enseñanza de las matemáticas; recursos didácticos (físicos y digitales) y estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, esta última entendida al conocimiento sobre el cómo, cuándo y por qué se emplean determinados

procedimientos instruccionales para transformar el contenido matemático en algo comprensible (Carrillo-Yañez et al., 2018).

La siguiente figura nos aproxima al conocimiento para la enseñanza de la generalización de patrones en Educación Básica Primaria de los participantes.

Figura 15

Configuraciones epistémicas KMT- PAT



Fuente: elaboración propia.

La Figura 15 sintetiza las configuraciones epistémicas del subdominio *KMT* identificadas en relación con la enseñanza de la generalización de patrones dentro del pensamiento algebraico temprano. Estas configuraciones representan formas diferenciadas en las que el profesorado organiza, media y orienta la construcción de regularidades y procesos de generalización algebraica en el aula. La figura articula cuatro configuraciones: investigativa-inductiva, mediacional-secuencial, visual-transicional y relacional-diagnóstica, junto con evidencias empíricas obtenidas en los cuestionarios y la entrevista semiestructurada. En conjunto, dichas configuraciones permiten interpretar cómo las estrategias didácticas, los recursos de representación y las formas de interacción matemática contribuyen al desarrollo progresivo de procesos de generalización, covariación y explicitación de relaciones algebraicas en Educación Básica Primaria. Posteriormente, cada configuración será analizada de manera detallada a partir de las producciones y discursos de los profesores participantes.

5.2.1 Teorías de la Enseñanza de las Matemáticas

En el discurso de Cristóbal emergen referencias explícitas a una concepción de la enseñanza que organiza la actividad matemática como un proceso de *investigación guiada y progresiva* (Hernández Barrera, 2017). El Profesor señala que *"suelo modelar este aprendizaje como una pequeña investigación",* formulación que actúa como principio organizador de su práctica (Aguilar-González, 2015; Flores-Medrano, 2015; Vergel, 2015).

Esta concepción se concreta en la afirmación de que *"mis estudiantes aprenden a generalizar patrones cuando pasan por pasos sencillos y guiados"* (Acosta y Alsina, 2018), y en la decisión de priorizar la interrogación por sobre la presentación directa de reglas: *"no hablo de reglas ni de cálculos, sino que hago preguntas sencillas como: ¿qué ven?, ¿qué cambia?"* (Acosta y Alsina, 2018); lo cual denota un conocimiento de las estrategias, técnicas y tareas para

la enseñanza (*KMT*) fundamentado en la selección y secuenciación cuidadosa de ejemplos para respaldar la construcción de conceptos (Aguilar-González, 2015; Cayo, 2023). En este enfoque, el profesor actúa como un dinamizador que provoca la curiosidad del alumno, conduciendo su investigación hacia la consecución de aprendizajes significativos y la generalización de regularidades, en lugar de limitarse a la transmisión verbal de contenidos acabados (Aguilar-González, 2015; Fuentes-Leal, 2020a).

Las expresiones analizadas describen una lógica de enseñanza coherente que se refuerza mediante decisiones didácticas sistemáticas. Dentro de esta estructura, destaca el uso deliberado del lenguaje natural como mediador fundamental antes de la introducción de formalismos simbólicos (Callejo et al., 2016; Torres et al., 2022; Vergel, 2015; Zapatera, 2018). En este sentido, la explicitación de la simbolización constituye una herramienta para abreviar los procesos y no representa el punto de partida del aprendizaje. En su conjunto, estas decisiones evidencian formas de organización didáctica orientadas a promover procesos de observación, descripción, formulación de conjeturas y verificación de regularidades, aspectos que se relacionan con las fases de observar, describir, conjeturar, comprobar y abreviar propuestas por Acosta y Alsina, (2018) y Muñoz-Catalán et al. (2022).

Desde esta perspectiva del PAT, la enseñanza de la generalización se concibe como un proceso de indagación progresiva; y la generalización se define como un proceso de construcción donde se identifican comunalidades a partir de ejemplos particulares, establecen conjeturas y las expresan de formas cada vez más formales (Souza-Barboza et al., 2020; Radford, 2010). En consecuencia, la regla se configura como una construcción emergente derivada de procesos de observación, reconocimiento de regularidades y establecimiento de relaciones aritméticas o funcionales entre los términos del patrón (Chimoni et al., 2021).

Asimismo, la validez de estas reglas se pone a prueba mediante lo deductivo, ya que establece la precisión de la generalización de predecir términos lejanos (Chimoni et al., 2021). Desde esta lógica, la coherencia entre concepción de enseñanza, uso del lenguaje, tratamiento del error y diseño de tareas evidencia un conocimiento para la enseñanza articulado y explícito, en el que las estrategias y los recursos se subordinan a una tendencia investigativa (Carrillo-Yañez et al., 2018; Muñoz-Catalán et al., 2022; Vergel, 2015).

El discurso de Sara revela una concepción de la enseñanza orientada a la *visibilización de la regularidad y el acompañamiento en el tránsito progresivo* hacia la generalización (Acosta y Alsina, 2018). La profesora sostiene que los estudiantes *"aprenden en la medida que van visualizando en los ejercicios repeticiones"* y que su propósito es *"ayudar a los niños a ver y expresar regularidades y relaciones"* (Alsina, 2019). Esta orientación se traduce en la incorporación sistemática de tareas que fuerzan la anticipación, como cuando propone *"términos que no puedan dibujar todos… y pido que imaginen el término"*, lo cual fuerza el paso de la representación pictórica a la abstracción necesaria para abordar términos lejanos (Zapatera, 2018).

La enseñanza se organiza mediante una combinación de estrategias que incluyen tareas de término lejano, las cuales exigen que trascienda el recuento directo para identificar pautas analíticas (Callejo et al., 2016). Este proceso se apoya en la verbalización progresiva de la regla transitando desde el lenguaje natural hacia el uso de dibujos o símbolos sencillos (Acosta y Alsina, 2018). Asimismo, se evidencia una regulación consciente del ritmo de formalización, expresada en afirmaciones como "*cuando están listos*". Estas decisiones configuran un andamiaje didáctico cuidadoso, que busca sostener la transición desde el conteo hacia la anticipación y la explicación (Zapatera, 2018).

La concepción de enseñanza manifestada se orienta principalmente hacia decisiones pedagógicas construidas desde la experiencia profesional y la observación sistemática del comportamiento y desempeño de los estudiantes. En este sentido, las acciones didácticas evidencian una organización de la enseñanza apoyada en el seguimiento de los procesos de aprendizaje y en la adaptación progresiva de las actividades según las respuestas de los estudiantes, aspectos que Zapata (2019) relaciona con formas de conocimiento profesoral construidas desde la práctica pedagógica. La generalización se constituye como un objeto matemático que emerge en el momento en que la percepción sensible resulta insuficiente para resolver la tarea, lo que obliga al escolar a recurrir a procesos de anticipación, explicación y comunicación de regularidades (Zapatera, 2018). Esta configuración muestra una elevada coherencia interna entre tareas, estrategias y recursos, aunque sin una explicitación teórica formal que las articule discursivamente (Acosta y Alsina, 2018).

En el discurso de Orlando se observa una explicitación directa de principios teóricos que organizan la enseñanza de la generalización. El profesor define el aprendizaje del patrón en términos de *"razonamiento de tipo inductivo, de casos particulares hacia una generalidad"* y conceptualiza el patrón como:

> *Y eso es algo que a mí me ha servido mucho también cuando trato de explicarles a los niños cositas sobre variación. Es eso. ¿Se acuerdan que yo les dije a ustedes que la tabla de multiplicar era contar de tantos en tantos? Sí. ¿Y cuál era esos tantos? Ah, pues depende. ¿Cómo así? Pues sí, es que, si es la tabla del 3, pues debe ser de 3 en 3. Pero si es la del 5, pues es de 5 en 5. Ah, o sea que no es lo mismo. No, nunca, no, o sea, eso cambia. Eso es una variable.*

Este fragmento evidencia un conocimiento orientado a establecer relaciones entre pensamiento numérico y pensamiento algebraico temprano, particularmente mediante la interpretación de las tablas de multiplicar como procesos de variación y crecimiento iterativo. El profesor utiliza expresiones como *"depende"* y *"eso cambia"* para introducir la idea de variación entre cantidades, articulando relaciones multiplicativas con nociones iniciales de variable. Asimismo, el discurso muestra una aproximación contextual y funcional a la covariación, en la medida en que la cantidad de crecimiento se modifica según la relación establecida en cada tabla de multiplicar. Desde la perspectiva del *KoT* y del *KSM*, estas explicaciones evidencian conexiones entre estructuras aritméticas y formas iniciales de pensamiento algebraico temprano asociadas a la comprensión progresiva de la variable en Educación Básica Primaria (Carrillo-Yañez et al., 2018; Radford, 2010; Vergel, 2015).

Frente a la afirmación: "*la regularidad seguida por el cambio*". Esta definición se alinea con el estudio del pensamiento funcional, el cual se centra en las ideas de causalidad, crecimiento y variación conjunta (Chimoni et al., 2021). Bajo esta mirada, el patrón deja de ser una mera secuencia de objetos para convertirse en una relación de covariación, donde se identifica cómo una magnitud cambia en función de otra (Chimoni et al., 2021; Fuentes Leal, 2020a).

La enseñanza se concibe como un proceso *inductivo estructurado y diagnosticable*, en el que el profesor solicita explicaciones para identificar el punto exacto de dificultad y utiliza representaciones como la tabla para evidenciar el funcionamiento del patrón (Baldan da Silva et al., 2023; Escudero-Ávila y Carrillo Yáñez, 2020).

Ha sido enseñarles que finalmente uno puede entender las tablas de multiplicar como una serie numérica. Y una serie numérica en la cual, si nosotros tenemos, por ejemplo, la tabla del 2, ¿usted puede contar de 2 en 2?

Ejemplifica el proceso

Y entonces vamos 2, 6, luego 3 y 4, luego 6, luego 7, 8, 9 y 10, y van colocando los términos de la serie. Y entonces van escribiendo los números, 2, 4, 6, 8, 10.

Amplía con la tabla del 3: Bueno, ahí contamos de 3 en 3, entonces, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, anotas en la lista y vas anotando 3, 6, 9, 12, 15. ¿Cómo sería la del 4? Ah, fácil, de 4 en 4.

La predictibilidad se constituye como un criterio de validación de la generalización, otorgando a las tareas un carácter estructural y relacional. En este marco, Orlando reconoce la importancia de acompañar a los estudiantes en la construcción y expresión de reglas generales mediante diferentes sistemas de representación, especialmente cuando estas regularidades se comunican en lenguaje algebraico (Radford, 2011). Asimismo, evidencia una comprensión de la formalización como un proceso que requiere mediaciones progresivas para favorecer la articulación entre las relaciones identificadas en el patrón y sus formas de representación simbólica. Desde esta perspectiva, la mediación profesoral adquiere un papel central en la consolidación del pensamiento algebraico temprano y en la coordinación de los distintos registros utilizados para expresar la generalización (Pincheira y Alsina, 2021b).

¿Y si le pedimos el término cien? Yo le digo al término cien. Y eso es lo que uno hace regularmente para descolocarlos. ¿No? Es… "Y si yo le pido el número quinientos, entonces usted tiene que hacer quinientos". "¡Uy, no!".

Reflexiona sobre el punto de inflexión:

Entonces… entonces explíqueme cómo es que cambia. "Ajá, claro". Pero ahí la cosa comienza a hacérseles difícil. Pero ahí es donde uno comienza a identificar eso. ¿No? O sea, hacer la tablita, en parte, sirve para decirles…Es que mire, esa forma en la que usted lo está deduciendo le sirve para la parte limitadita que tiene usted ahí en el cuaderno.

Estas producciones evidencian una aproximación a la generalización centrada en procesos de comparación, representación y anticipación de regularidades, aspectos que Levin y Walkoe (2022) relacionan con la construcción progresiva del pensamiento algebraico temprano. En este sentido, la generalización se configura como un objeto relacional y predictivo, cuya comprensión se expresa en la capacidad de identificar regularidades, anticipar comportamientos y justificar relaciones entre los términos del patrón (Levin y Walkoe, 2022; Schliemann et al., 2006).

5.2.2 Recursos Didácticos (Físicos y Digitales)

El análisis de los recursos didácticos muestra que, en los tres casos, estos no se conciben como apoyos logísticos o motivacionales, en cambio se asumen como mediadores con funciones epistemológicas específicas, definidas por la concepción de enseñanza que los orienta (Escudero-Ávila y Carrillo Yáñez, 2020).

En el caso de Cristóbal, los recursos se seleccionan en función de su potencial para favorecer la exploración de regularidades, la formulación de conjeturas y la verificación de relaciones identificadas en los patrones (Chimoni et al., 2021). Al respecto, señala:

> *"Una estrategia es la de ensayo y error… Empiezan a probar, a poner numeritos y a que cumpla con las condiciones".* Cristóbal justifica esta elección explícitamente por su valor experimental al afirma *"Porque permite ir visualizando los resultados".*

Asimismo, considera que un recurso debe "*permitir ver claramente lo que se repite y lo que cambia*" y que, si no contribuye a observar o explicar el patrón, prefiere no utilizarlo. Estas afirmaciones evidencian un conocimiento para la enseñanza que otorga valor a los recursos por su capacidad para hacer visibles las regularidades del patrón y favorecer procesos de observación, comparación y explicación matemática, aspectos que Cristóbal reconoce como relevantes para el trabajo con la generalización de patrones en Educación Básica Primaria. En este marco, los recursos manipulativos, los dibujos y las tablas se integran a la secuencia didáctica como medios para construir términos, contrastar hipótesis y revisar reglas que no funcionan (Escudero-Ávila et al., 2016; Radford, 2008). Asimismo, expresiones como "*empiezan a probar, a poner numeritos y a que cumpla con las condiciones*" y "*permite ir visualizando los resultados*" evidencian un conocimiento orientado hacia la exploración, la observación de regularidades y la validación progresiva de relaciones matemáticas. Desde el subdominio *KMT*, estas decisiones muestran una comprensión de los recursos y estrategias didácticas como mediadores para favorecer procesos de comparación, formulación de hipótesis y construcción gradual de generalizaciones dentro del pensamiento algebraico temprano (Escudero-Ávila et al., 2016; Radford, 2008).

Cristóbal selecciona tapitas y unidades físicas como recurso inicial, *"Empezaría dándoles tapas a los niños… que ellos vayan viendo cómo con las mismas unidades se pueden organizar diferentes grupos"*. La selección de tapitas y unidades físicas como recurso inicial evidencia un conocimiento orientado a favorecer la construcción de relaciones matemáticas a partir de la manipulación y organización de unidades concretas. Expresiones como *"con las mismas unidades se pueden organizar diferentes grupos"* muestran una atención hacia procesos de agrupación, composición y reorganización de cantidades, aspectos vinculados al reconocimiento de regularidades y estructuras dentro del pensamiento algebraico temprano. Desde el subdominio *KMT*, estas decisiones reflejan una comprensión de los materiales manipulativos como mediadores para promover procesos de observación, comparación y construcción progresiva de relaciones matemáticas en los estudiantes (Escudero-Ávila et al., 2016; Radford, 2008).

Sara, por su parte, concibe los recursos como mediadores de *visibilidad y transición representacional*; selecciona materiales y enuncia de forma directa el criterio central que guía su elección de materiales, de manera explícita, señala que selecciona recursos que,

> *"Elijo recursos que hagan visible la regularidad y permitan a los estudiantes manipular, representar y discutir la secuencia con claridad." que "hagan visible la regularidad" y que permitan "ver fácilmente cómo crece el patrón.*

Las expresiones evidencian un conocimiento orientado a utilizar los recursos didácticos como mediadores para la identificación de relaciones, regularidades y procesos de crecimiento dentro de las secuencias. Asimismo, la articulación entre manipular, representar y discutir muestra una comprensión de la enseñanza de patrones como una actividad que integra diferentes

formas de representación y comunicación matemática. Desde el subdominio *KMT*, estas decisiones reflejan conocimiento sobre el papel de los recursos en la construcción progresiva de generalizaciones y en la visualización de relaciones matemáticas asociadas al pensamiento algebraico temprano (Pincheira et al., 2023).

Esta afirmación se sustenta en el marco de la *Early Algebra* y la *Teoría de la Objetivación*, donde los recursos no se consideran simples apoyos motivacionales, se entienden como medios semióticos de objetivación (Radford, 2008). Desde esta perspectiva, el profesor evidencia conocimiento sobre la potencialidad didáctica de los recursos al reconocer que materiales como torres, hilos, dibujos, tablas o elementos manipulativos permiten hacer visibles regularidades, relaciones de crecimiento y estructuras invariantes dentro de los patrones (Vergel, 2015). En este sentido, los recursos trascienden una función motivacional y se configuran como medios semióticos que posibilitan la construcción progresiva de significados algebraicos (Cayo-Maturana y Contreras-González, 2020).

Un rasgo relevante del *KMT* de Sara es la diferenciación explícita de los efectos cognitivos de distintos soportes la profesora distingue:

> *"Si enseño un mismo patrón con dos recursos distintos, como fichas y papel cuadriculado, cambia la forma en que los niños lo representan y, a veces, la forma en que explican su pensamiento".*
>
> *"Con fichas, los estudiantes suelen enfocarse en la construcción física: cuentan, agrupan, mueven, y eso les ayuda a entender el crecimiento paso a paso".*
>
> *"En cambio, con papel cuadriculado, tienden a fijarse más en la forma, la posición y la cantidad de cuadros (...) lo que facilita hacer esquemas y luego pasar a tablas numéricas".*

Esta diferenciación evidencia que Sara reconoce que los recursos se configuran el tipo de pensamiento que los estudiantes ponen en juego (Escudero-Ávila y Carrillo-Yáñez, 2020). Asimismo, emerge un criterio explícito de regulación del foco atencional en la selección de recursos (Sosa et al., 2016).

El caso de Sara evidencia un conocimiento para la enseñanza que reconoce el potencial de los recursos didácticos como medios semióticos para objetivar las regularidades presentes en los patrones. En consecuencia, los recursos orientan la atención de los estudiantes hacia la identificación de relaciones, la coordinación de representaciones y la construcción progresiva de generalizaciones. Esta configuración del conocimiento favorece que la variable adquiera significado en relación con las regularidades observadas y con las relaciones que estructuran el patrón, constituyendo una base relevante para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano (Radford, 2015).

En coherencia con esta perspectiva, sus decisiones didácticas respecto a la selección y uso de recursos se sustentan en el conocimiento construido a partir de la experiencia de aula y de la observación de las respuestas de los estudiantes. Dichas decisiones se apoyan en criterios prácticos vinculados con la visibilización de regularidades, la exploración de patrones y la comprensión de los procesos desplegados por los estudiantes durante la resolución de tareas. Desde esta perspectiva, el valor atribuido a los recursos radica en su potencial para favorecer la observación, la explicación y la construcción progresiva de relaciones matemáticas.

Asimismo, expresiones como *“La verdad no lo había revisado específicamente con esa denominación, generalización de patrones.” “No me he enfocado en esta parte de la regla para la generalización”* sugieren que el conocimiento movilizado para abordar este contenido se

encuentra estrechamente vinculado a experiencias de aula y a las interacciones que emergen durante los procesos de enseñanza. En consecuencia, dicho conocimiento se organiza alrededor del trabajo con regularidades y patrones, orientando la selección de recursos y las decisiones didácticas desplegadas durante la enseñanza (Adamuz-Povedano et al., 2021; Espinoza-Vásquez et al., 2018).

En caso del profesor Orlando, los recursos (como la tabla de funciones o modelos icónicos) actúan como medios semióticos de objetivación (Radford, 2000, 2015). Su función primordial es externalizar la estructura del patrón, permitiendo que los estudiantes trasciendan la percepción sensorial inmediata para identificar invariantes y variables (Chimoni et al., 2021). Su discurso se fundamenta en una base empírica donde estos actúan como medios semióticos de objetivación, integrándose como componentes esenciales que orientan y materializan el pensamiento matemático (Radford, 2015). En la categoría de teorías de la enseñanza, Orlando evidencia una orientación inductiva y funcional de la generalización, en la medida en que la validez de una regla se relaciona con su capacidad para anticipar comportamientos dentro de la secuencia (Escudero et al., 2021). Su conocimiento se manifiesta también en la articulación de diferentes formas de representación y comunicación matemática, integrando lenguaje verbal, tablas, gestos y recursos visuales como medios para construir significado algebraico en el aula (Escudero et al., 2021).

El conocimiento de Orlando es un conocimiento profesoral; refleja que para desarrollar el pensamiento algebraico temprano consiste en saber transformar un contenido abstracto (la función/patrón) en un fenómeno sensible a través de medios semióticos (Escudero-Ávila et al., 2016; Radford, 2008, 2015). La integración de los recursos como mediadores para orientar y materializar el pensamiento matemático evidencia un conocimiento didáctico en el que la

matemática actúa como criterio central para la selección y organización de las herramientas utilizadas en la enseñanza (Climent et al., 2014).

De manera consistente, Orlando articula el uso de los recursos con una lógica inductiva de la generalización, en la que la validez de una regla se evalúa por su capacidad predictiva (Climent-Rodríguez, 2002; Zapatera, 2018). En este marco, la tabulación ocupa un lugar central, la tabla se utiliza como un instrumento de contraste epistemológico que permite distinguir entre una producción recursiva basada en el conteo y una generalización estructural (Fuentes-Leal, 2020a); esto se evidencia cuando Orlando afirma que "*si yo tuviera el término veinte, pues tendría que hacer la tabla hasta el número veinte"* o incluso hasta *"el quinientos"*, concluyendo que en ese caso *"no está generalizando el patrón"*. Estas expresiones evidencian un conocimiento orientado a diferenciar procedimientos apoyados en la extensión recursiva de la secuencia respecto a procesos de generalización funcional basados en relaciones estructurales entre las variables del patrón. Asimismo, su discurso muestra una comprensión de la generalización como un proceso asociado a la anticipación, la explicitación de relaciones y la construcción de reglas generales que permitan trascender el conteo término a término dentro del pensamiento algebraico temprano (Pincheira et al., 2023).

La necesidad de extender la tabla término a término se convierte así en un indicador claro de ausencia de generalización, mientras que la posibilidad de anticipar sin completarla valida la regla construida (Cayo, 2023). En este sentido, la tabulación cumple una función claramente diagnóstica, al poner a prueba la potencia anticipatoria de la relación identificada, y deja de ser una herramienta de análisis para convertirse en una carga procedimental ineficiente (Cayo, 2023).

Esta función diagnóstica se refuerza cuando Orlando reconoce que la tabla puede incluso encubrir una falsa comprensión, si el estudiante la utiliza de manera automática. *Al señalar que "ellos van a decir que sumé dos, que sumé dos"* y que, ante un término lejano, *"toca hacer toda la tabla,* el profesor Orlando manifiesta un conocimiento orientado a diferenciar entre la extensión reiterativa de la secuencia y la construcción de relaciones generales que permitan anticipar términos sin recurrir al conteo sucesivo (Zapatera-Llinares, 2022). En este sentido, su discurso muestra una comprensión de la generalización asociada a la explicitación de relaciones funcionales y a la necesidad de trascender procedimientos recursivos (Acosta-Inchaustegui, 2023) para favorecer formas de pensamiento algebraico temprano basadas en la identificación de estructuras y regularidades dentro del patrón.

De forma complementaria, los dibujos y esquemas cumplen una función estructural al permitir identificar visualmente qué cambia y qué se mantiene en el patrón (Radford, 2010). Orlando recurre a representaciones pictóricas, cuadritos, hojas y dibujos en el tablero, para desplazar la atención del procedimiento mecánico hacia la variación. Se evidencia cuando señala que "*hay niños que entienden mucho con el dibujito en el tablero"* y cuando insiste en que lo que necesita es que los estudiantes *"miren qué cambió… no que cuenten"*.

El dibujo, en su práctica, no es ilustrativo ni decorativo, externaliza la estructura del cambio, permitiendo que el patrón sea percibido como una relación entre cantidades y no como una sucesión de acciones aisladas (Chimoni et al., 2021). Estas decisiones evidencian un conocimiento didáctico orientado a utilizar las representaciones visuales como mediadores para promover procesos de observación, comparación y explicitación progresiva de relaciones matemáticas asociadas al pensamiento algebraico temprano (Pincheira, 2023).

> *"Mi idea sobre la comprensión de los estudiantes acerca de la identificación de patrones está relacionada con cuatro elementos: el primero es el hallazgo de los elementos puntuales que cambian [...]; el segundo es el hallazgo de la regularidad [...]; el tercero es la expresión de la regularidad de dicho cambio (una expresión algebraica, un diagrama, un dibujo, una tabulación, etc.); y el cuarto es la evaluación de la capacidad de predictibilidad que añade el patrón".*

Orlando concibe las representaciones como formas de expresión que aparecen en un proceso progresivo, orientado a la generalización (Otten et al., 2019).

> *"Considero que es importante el uso de un recurso como la tabla [...], pues este ejercicio de tabulación hace que se evidencie el funcionamiento del patrón y, por tanto, los elementos que son constantes y los que son variables, así como la forma en que se pueden expresar."*

Aquí, la tabulación aparece claramente como una representación intermedia, cuyo propósito es hacer visible la estructura del patrón y preparar su expresión. Asimismo, explicita que el tránsito hacia la expresión algebraica no ocurre de manera directa ni automática (Radford, 2015). Al reconstruir paso a paso la llegada a una expresión como $2n + 1$, describe un proceso mediado por preguntas, reformulaciones verbales y contrastes entre casos particulares y términos lejanos (Sosa Guerrero, 2024b). En este recorrido, reconoce explícitamente el punto de quiebre del proceso cuando afirma: *"¿Dónde viene la parte que me parece realmente más difícil? ¿Cómo escribo yo eso?" y más adelante precisa que "el problema aparece cuando paso de la expresión verbal a la expresión simbólica".*

En coherencia con esta perspectiva, Orlando reconoce explícitamente las limitaciones contextuales para el uso de recursos digitales, conectividad restringida y falta de dispositivos, pero estas no deslegitiman el valor didáctico de los recursos disponibles (Escudero-Ávila et al.,

2016). Por el contrario, refuerzan su convicción de que el valor del recurso no es tecnológico, corresponde a su potencial estructural. Como él mismo señala, *"no hay internet… pero el tablero, los dibujos, la tabla, eso sí funciona"*. Incluso cuando menciona herramientas como GeoGebra o Scratch, aclara que *"nunca lo he utilizado… para trabajarlo con los niños uno tiene que conocerlo"*, lo que evidencia que un recurso solo es pertinente si permite cumplir la función de mediación estructural y diagnóstica que él considera indispensable. Para Orlando, los recursos didácticos cumplen de manera articulada una *función estructural*, al hacer visible la relación matemática subyacente al patrón y sostener la transición desde lo empírico hacia lo general, y una *función diagnóstica*, al permitir identificar con precisión si el estudiante comprende la variación, si depende del conteo o si la dificultad se localiza en el registro de expresión. Así, el recurso se concibe como *instrumento central para interpretar, orientar y validar el proceso de generalización de patrones* en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

5.2.3 Estrategias, Tareas y Ejemplos en la Enseñanza del Patrón

La categoría estrategias, tareas y ejemplos da cuenta del conocimiento profesional del profesor de primaria para organizar, secuenciar y gestionar la enseñanza de la generalización de patrones. Este conocimiento se manifiesta en las decisiones del profesor toma al diseñar tareas con potencial algebraizante, seleccionar ejemplos que hagan visible la estructura matemática y desplegar estrategias de intervención que orienten el trabajo en el aula (Climent y Carrillo, 2003).

El análisis del discurso de Cristóbal permite caracterizar su conocimiento profesoral como un conocimiento especializado, en el que la estructura matemática del patrón orienta de forma sistemática las decisiones didácticas (Flores-Medrano, 2015). Este rasgo se evidencia cuando afirma que *"la repetición y el ir cambiando determinados elementos"* permite que los

estudiantes establezcan que *"a pesar de que cambien los números, si se sigue la regla se va a obtener un resultado",* así como cuando ejemplifica el trabajo con *"parejas de entrada y salida"* del tipo *(2→4), (4→8), (8→16)*, enfatizando que *"duplico el número y luego lo repito"*. Estas expresiones muestran que sus estrategias se organizan en torno a la invariancia de la transformación, y no como un conjunto de técnicas instruccionales desconectadas del contenido matemático.

En coherencia con esta orientación, Cristóbal explicita una secuenciación didáctica progresiva que estructura la experiencia de aprendizaje como una trayectoria intencional. Señala que sus estudiantes *"pasan por pasos sencillos y guiados: primero ven ejemplos concretos, luego describen con palabras lo que se repite, después prueban su idea en nuevos ejemplos y, finalmente, usan una forma abreviada para decir cómo siempre funciona"*. Esta secuencia evidencia un conocimiento de la enseñanza alineado con el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

Esta organización revela, además, un dominio de la transnumeración, entendido como el tránsito entre registros figural, verbal y simbólico, donde el lenguaje cumple una función mediadora central para el acceso a la abstracción (Hernández-Barrera, 2017). Cristóbal enfatiza la necesidad de que el estudiante *"haga una descripción verbal de cómo está variando la secuencia, con sus palabras",* y reconoce que la introducción del símbolo se reserva para momentos posteriores, cuando *"en quinto uno ya les empieza a manejar qué X es una cantidad desconocida"*. La verbalización opera, así como un puente entre la percepción de regularidades y la formalización, garantizando que el símbolo adquiera sentido matemático.

Las tareas diseñadas por Cristóbal se configuran como escenarios de *exploración guiada*, en los que el aprendizaje se concibe como una actividad de indagación (Acosta y Alsina, 2018).

Esta concepción se expresa de manera explícita cuando afirma: *"yo veo este aprendizaje como una serie de pequeñas investigaciones: observar es decir una idea y comprobar es* explicar", y cuando describe que suele *"modelar este aprendizaje como una pequeña investigación, proponiendo una situación concreta, pidiendo observaciones y animando a los estudiantes a predecir y a comprobar sus predicciones".* En este marco, la validación matemática se desplaza desde la autoridad del profesor hacia la coherencia interna de las ideas construidas por los estudiantes, criterio que se refuerza mediante el uso de contraejemplos, como cuando señala que en el libro de PTA (Acosta-Inchaustegui, 2023) *"los ejercicios se van volviendo más complejos"* y que muestra distintos casos para contrastar reglas.

Un rasgo distintivo de su *KMT* se observa en la postergación deliberada de la formalización. Afirma que en las fases iniciales *"no hablo de reglas ni de cálculos",* y que privilegia preguntas como *"¿qué ven en estos dibujos?"* o *"¿qué cambia de un término al siguiente?"*. Esta decisión didáctica busca asegurar que la identificación de la regularidad y de la unidad de repetición preceda a cualquier simbolización, sosteniendo el foco en la estructura del patrón antes de introducir notaciones formales (Alsina y Acosta, 2018).

Asimismo, la evidencia empírica pone de relieve una capacidad refinada de diagnóstico didáctico situado, mediante la cual Cristóbal ajusta sus intervenciones según la naturaleza de las respuestas estudiantiles (Zapatera, 2018). Al distinguir entre estudiantes que "cuentan" y aquellos que *"describen",* y al señalar que *"si cuentan, necesitan apoyo para ver la relación general; si describen, puedo pedirles que expliquen con ejemplos",* Cristóbal evidencia criterios para reconocer distintos niveles de aproximación a la generalización y para seleccionar acciones de mediación acordes con tales diferencias. De este modo, su práctica refleja una atención constante a las producciones estudiantiles como fuente de información para orientar el

aprendizaje y promover la construcción progresiva de relaciones asociadas a los patrones (Torres et al., 2022).

En este entramado, el error ocupa un lugar formativo y regulador del proceso de generalización. Cuando Cristóbal indica que, si los estudiantes *"aplican una regla que no funciona para otro término, enseña que necesitan revisar la idea"*, el error se convierte en un recurso para la revisión y el refinamiento conceptual, reforzando la idea de que la validez de una generalización depende de su funcionamiento en nuevos casos (Torres et al., 2022).

Sara despliega estrategias centradas en la visualización, la anticipación y la abstracción progresiva (Vergel, 2010). Las tareas de término lejano, las preguntas concretas, el uso de gestos y la verbalización paso a paso fuerzan el paso del conteo a la explicación, regulando cuidadosamente el ritmo de introducción de los símbolos (Vergel y Rojas, 2018).

Orlando estructura las estrategias en torno a la *comparación sistemática, la explicación del procedimiento, la tabulación y la evaluación de la predictibilidad*. Las tareas buscan que el estudiante identifique la regularidad, exprese la relación y anticipe nuevos casos, permitiendo al profesor diagnosticar el punto de ruptura del PAT (Callejo et al., 2016).

5.2.4 Articulaciones Transversales del KMT

El análisis transversal muestra regularidades claras en la articulación entre concepciones de enseñanza, recursos y estrategias de Sara, Orlando y Cristóbal, desde una articulación *Top–Down - Bottom–Up*, evidencia que las diferencias en el desarrollo del PAT se asocian a configuraciones diferenciadas del *KMT*, y no a decisiones metodológicas aisladas (Flores Medrano, 2015).

Desde la categoría teorías de la enseñanza de las matemáticas, se identifican configuraciones diferenciadas respecto al lugar que ocupa la generalización dentro de la actividad de enseñanza. En Sara, la generalización se vincula con la exploración de ejemplos y la observación de regularidades, otorgando un papel relevante a la experiencia de los estudiantes en la construcción de relaciones matemáticas (Aguilar-González, 2015). En Orlando, la generalización constituye un propósito explícito de enseñanza, promovido mediante la comparación de casos, la búsqueda de invariantes y la validación de relaciones generales (Aguilar-González, 2015). Por su parte, en Cristóbal, la generalización se articula con procesos de exploración, práctica y reconocimiento progresivo de regularidades, adquiriendo significado a partir del trabajo realizado sobre los patrones (Sosa et al., 2016). En conjunto, estas configuraciones permiten interpretar diferentes formas de comprender y organizar la enseñanza de la generalización de patrones, las cuales se expresan en enfoques que enfatizan, en distinta medida, la exploración, la mediación diagnóstica y la estructuración progresiva de relaciones matemáticas asociadas al pensamiento algebraico temprano (Escudero-Ávila et al., 2015).

En la categoría recursos didácticos, los resultados muestran que la diferencia no reside en los materiales utilizados; se encuentra en las funciones que estos desempeñan dentro de la enseñanza de la generalización de patrones. En Sara, los recursos operan como apoyos visuales que favorecen la observación de regularidades y la identificación de cambios en las secuencias, otorgando un papel relevante a la exploración de ejemplos y representaciones concreta (Acosta y Alsina, 2018). En Orlando, las representaciones, particularmente las tablas, se utilizan como herramientas para organizar información, coordinar distintos registros y explicitar relaciones generales asociadas al patrón (Torres et al., 2022). Y en Cristóbal, los recursos cumplen una función de organización y apoyo a la exploración de los patrones, facilitando la observación de

regularidades y la comunicación de los procedimientos desarrollados durante la resolución de las tareas (Vergel et al., 2022).

Respecto a estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, Sara y Cristóbal privilegian tareas de extensión secuencial del patrón, acompañadas de intervenciones diagnósticas centradas en el conteo o la descripción (Pincheira et al., 2022). Por su parte, Orlando propone tareas que favorecen la construcción, explicación y justificación de reglas generales mediante la comparación de casos y el análisis de relaciones presentes en la secuencia (Vergel, 2014). Estas configuraciones de enseñanza muestran distintas maneras de comprender y organizar la enseñanza de la generalización de patrones. Mientras algunas enfatizan el reconocimiento y la descripción de regularidades observables, otras promueven la explicitación progresiva de relaciones generales y su comunicación mediante diversos registros de representación. En conjunto, las estrategias movilizadas evidencian concepciones diferenciadas sobre cómo acompañar a los estudiantes en la construcción de significados asociados al pensamiento algebraico temprano (Zapatera, 2022).

A partir del análisis cualitativo de las entrevistas y los cuestionarios aplicados a profesores de Educación Básica Primaria, se identifican categorías que permiten caracterizar el conocimiento para la enseñanza de la generalización de patrones en el marco del subdominio *KMT*. Estas categorías ponen de manifiesto conocimientos situados del profesorado que inciden directamente en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano. La tabla que se presenta a continuación organiza dichas categorías, las relaciona con los núcleos del *KMT* a los que contribuyen y describe los conocimientos específicos que los profesores movilizan en su práctica al abordar la generalización de patrones.

Tabla 12

Categorías analíticas del KMT en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, articulación entre núcleo teórico, configuración emergente y conocimiento del profesor.

Categoría *KMT*	**Categoría emergente**	**Descripción**
Teorías de la enseñanza de las matemáticas	Generalización como objetivo didáctico estructurante.	El profesor estructura intencionalmente la enseñanza para que los estudiantes construyan reglas generales, más allá de continuar secuencias.
Teorías de la enseñanza de las matemáticas	Secuenciación de fases inductivas y deductivas.	El profesor organiza tareas que pasan de la observación y conjetura a la validación y predicción (por ejemplo, usando el término lejano).
Teorías de la enseñanza de las matemáticas	Enseñanza como investigación guiada.	El profesor asume el rol de mediador que promueve procesos de indagación y descubrimiento matemático.
Recursos didácticos (físicos y digitales)	Uso intencional de la tabla para evidenciar relaciones funcionales.	La tabla se usa para organizar datos, y visibilizar relaciones funcionales.
Recursos didácticos (físicos y digitales)	Diferenciación funcional de los recursos según foco cognitivo.	Los profesores distinguen entre recursos que promueven acción física vs. los que facilitan esquemas mentales y visuales.
Recursos didácticos (físicos y digitales)	Articulación entre registros representacionales (figural–verbal–simbólico)	Los recursos permiten transitar del lenguaje natural al pictórico y simbólico.
Recursos didácticos (físicos y digitales)	Reconocimiento de limitaciones y adaptabilidad contextual.	El profesor ajusta el uso de recursos a las posibilidades reales del aula (tecnología,

		materiales disponibles).
Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	Diseño de tareas que movilizan explicación antes que simbolización.	Diseño de tareas que priorizan la construcción verbal y argumentativa de la regla antes de introducir notaciones algebraicas.
Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	Uso del término lejano como estrategia diagnóstica.	Se propone anticipar el valor de un término distante como medio para evaluar el nivel de generalización alcanzado.
Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	Postergación estratégica de la formalización algebraica.	Regula el momento de introducir símbolos, asegurando que el estudiante haya comprendido primero la estructura del patrón a través del lenguaje natural.

Nota. Esta tabla sintetiza diferentes formas en que los profesores de Educación Básica Primaria movilizan su conocimiento para la enseñanza de la generalización de patrones. Cada categoría representa un aspecto relevante de dicho conocimiento, evidenciado en las decisiones que orientan la organización de las tareas, la selección de recursos, las estrategias de mediación para favorecer el reconocimiento de regularidades, la construcción de relaciones y la formulación progresiva de generalizaciones en el contexto del pensamiento algebraico temprano.

Fuente: elaboración propia.

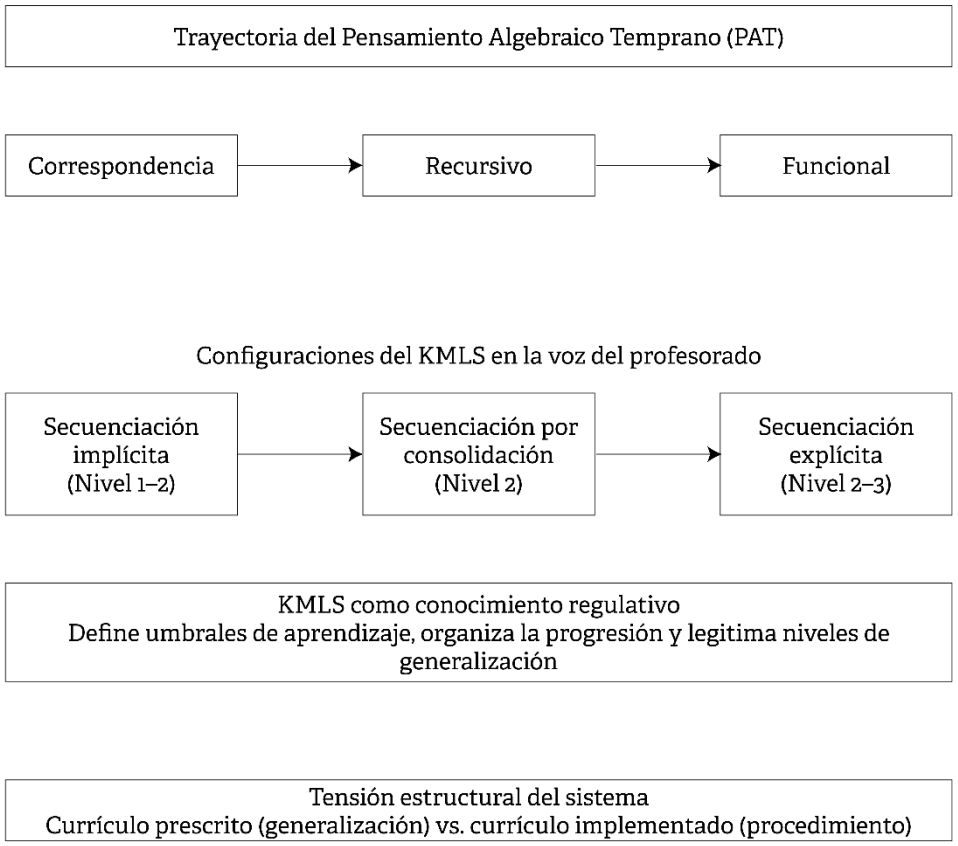
5.3 Resultados del Subdominio Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje en Matemáticas (KMLS)

Se refiere al conocimiento del profesor sobre lo que se estipula que un estudiante debe aprender en cada nivel educativo, incluyendo estándares oficiales, no oficiales (como los del NTCM o la investigación), los objetivos de aprendizaje, el nivel esperado de desarrollo

conceptual o procedimental, y la secuenciación de los temas (Carrillo-Yañez et al., 2018; Codes y Contreras, 2022).

Figura 16

Configuración del KMLS como conocimiento regulativo en la trayectoria del Pensamiento Algebraico Temprano (PAT)



Fuente: elaboración propia.

Desde la perspectiva del *KMLS*, el conocimiento evidenciado por los profesores se organiza en torno a la comprensión de qué aprendizajes promover, cómo reconocer su progresión y de qué manera secuenciar experiencias de enseñanza que favorezcan el desarrollo del pensamiento algebraico temprano:

i. Reconocimiento del aprendizaje mediante acciones matemáticas observables.
ii. Definición del nivel conceptual esperado, donde el razonamiento recursivo se configura como un nivel de referencia en las expectativas de los profesores.
iii. Organización del aprendizaje mediante trayectorias progresivas y secuencias conceptuales.

En conjunto, estos niveles muestran que el conocimiento del profesor sobre los estándares de aprendizaje no se limita a reproducir lineamientos curriculares, se configura como interpretación profesoral situada del desarrollo del pensamiento algebraico temprano (Sosa-Guerrero, 2024b).

5.3.1 Resultados de Aprendizaje Esperados

Remite al conocimiento que posee el profesorado sobre qué aprendizajes se espera que el estudiante logre, qué producciones matemáticas cuentan como evidencia de dicho logro y con qué nivel de profundidad en relación con un contenido específico (Carrillo-Yañez et al., 2018; Codes y Contreras, 2022); este conocimiento se expresa a través de la interpretación, traducción y reconstrucción profesoral de dichos estándares en función de contextos de enseñanza concretos (NTCM, 2020). En el contexto del desarrollo del PAT, y particularmente de la generalización de patrones, este conocimiento se expresa a través de expectativas anticipatorias que orientan la práctica del profesor y delimitan qué se considera un aprendizaje alcanzado (Kaput et al., 2017; Radford, 2010; Vergel y Rojas, 2018).

El análisis empírico muestra que, en los tres casos estudiados, se configura como un conocimiento práctico y situado, construido desde la experiencia en el aula, que traduce los

estándares en criterios operativos de logro (Adame-Esparza y de Lira-Lozano, 2019; Sosa-Guerrero, 2024b). Los resultados de aprendizaje se formulan, predominantemente, como acciones matemáticas observables del estudiante, crear, completar, predecir, describir, representar y no como formulaciones normativas abstractas (Radford, 2015; Zapatera, 2022).

En el discurso de Sara, los resultados de aprendizaje esperados vinculados a la generalización de patrones aparecen formulados de manera clara como producciones del estudiante. Cuando afirma *"crear sus propios patrones, secuencias" o "predecir secuencias",* explicita expectativas directamente asociadas al PAT, que permiten ubicar estas evidencias en una alineación explícita con estándares con el desarrollo del PAT, especialmente la generalización de patrones, en tanto anticipan capacidades de producción y anticipación más allá del conteo inmediato (Radford, 2013; Vergel, 2014).

Asimismo, al señalar *"buscar la regla que conecta a un elemento con el anterior"* Sara introduce explícitamente la noción de regla como resultado esperado, lo que refuerza la orientación con la generalización de patrones. Esta formulación evidencia una concepción de la regla construida a partir de las relaciones entre términos consecutivos, donde la identificación de regularidades constituye el principio organizador del proceso de generalización y orienta la producción de explicaciones sobre el comportamiento de la secuencia (Alsina, 2019; Pincheira y Alsina, 2021b).

Esta concepción se complementa cuando afirma Sara *"eso ya es como para cursos más grandes"*. expresión que evidencia un conocimiento sobre la progresión de los aprendizajes en el que la generalización de patrones se organiza según referentes curriculares asociados al nivel escolar. Desde esta perspectiva, la enseñanza de la generalización se comprende como un aprendizaje que se desarrolla de manera progresiva a lo largo de la escolaridad, articulando las

expectativas sobre qué enseñar y cuándo promover determinados procesos de razonamiento propios del pensamiento algebraico temprano (Radford, 2022; Vergel, 2015).

En este sentido, Sara evidencia un conocimiento sobre los resultados de aprendizaje que anticipa la construcción de reglas y reconoce el valor de la generalización dentro del trabajo con patrones. El conocimiento de estos aprendizajes se organiza a partir de una progresión curricular, en la que la formalización adquiere significado como parte de un desarrollo gradual del pensamiento algebraico temprano (Alsina, 2019; Pincheira y Alsina, 2021b).

En Cristóbal, los resultados de aprendizaje esperados se expresan de manera consistente como productos organizativos que permiten evidenciar la comprensión del patrón. Cuando señala *"construir tablas cuando ha determinado el patrón",* define con claridad qué cuenta como evidencia de logro la capacidad de organizar la información del patrón en una estructura tabular. Esta expectativa se sitúa en una alineación explícita con estándares en la enseñanza de la generalización de patrones, al implicar una reorganización del patrón y no solo su continuación mecánica (Radford, 2011; Manson, 2018).

Del mismo modo, al indicar *"cuando empieza a utilizar íconos o símbolos"*, Cristóbal establece el uso de símbolos como criterio observable de aprendizaje, asociado al inicio de la abstracción. La expectativa no se fórmula en términos normativos, más bien en términos funcionales, el símbolo aparece como señal de que el estudiante ha avanzado en su comprensión (Carraher y Schliemann, 2019; Otten et al., 2019). Otro resultado esperado explícito emerge cuando plantea que el estudiante debe *"generar una descripción verbal de cómo está variando la secuencia".* Aquí, la verbalización del cambio funciona como evidencia de comprensión del patrón, reforzando una concepción del aprendizaje ligada a la explicación del proceso, no limitándose al resultado numérico (Radford, 2013; Vergel et al., 2022).

Asimismo, al igual que en Sara, las expectativas de aprendizaje de Cristóbal se organizan en función de una progresión curricular asociada a los distintos niveles de escolaridad. La afirmación *"ya en quinto uno ya les empieza a manejar qué X es una cantidad desconocida*" evidencia un conocimiento sobre la secuenciación de los aprendizajes, en el que la introducción de la variable se vincula con momentos específicos del desarrollo escolar (Kaput et al., 2017; Rojas y Vergel, 2018). Así, el conocimiento evidenciado se organiza alrededor de expectativas de aprendizaje que privilegian la construcción de reglas, el reconocimiento de regularidades, el uso inicial de la simbolización y la explicación verbal como manifestaciones del pensamiento algebraico temprano. Desde esta perspectiva, la generalización de patrones se comprende como un aprendizaje cuya construcción se desarrolla progresivamente, articulando las expectativas del profesor sobre la introducción de la variable, la comunicación de relaciones matemáticas y la formulación de reglas generales (Carrillo-Yañez et al., 2018; Godino et al., 2014).

El caso de Orlando, explicita qué significa, en términos de aprendizaje, avanzar en la generalización de patrones. Cuando afirma *"predecir valores no observables de forma directa"*, establece un criterio claro de logro que rompe con el razonamiento caso a caso y se alinea directamente con el núcleo del PAT, desde una línea explícita con estándares con el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, especialmente la generalización de patrones (Kieran et al., 2016; Radford, 2008).

Lo anterior se refuerza cuando señala que *"pedir a los estudiantes que encuentren esta expresión (...) implica una labor de abstracción"*, afirmación que anticipa como resultado esperado la explicitación de una expresión general. Del mismo modo, al declarar que *"el razonamiento funcional sería la meta a conseguir"*, formula explícitamente un resultado final de aprendizaje, jerarquizado dentro de una progresión (Kaput et al., 2017).

De manera significativa, Orlando va más allá de lo explícito y alcanza una adaptación curricular para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, cuando problematiza el currículo y propone ajustes en el alcance del estándar. Al afirmar *"los estándares dicen que uno debería estar enseñando eso en primaria, pero en la práctica no pasa",* evidencia una conciencia crítica de la brecha entre currículo prescrito e implementado, y al describir que *"de primero a tercero… describir el patrón; en cuarto o quinto, expresarlo de diferentes maneras"*, reinterpreta los resultados de aprendizaje como una trayectoria progresiva, ajustada a los niveles escolares (Codes y Contreras, 2022; Sosa-Guerrero, 2024b).

En conjunto, el *KMLS* evidenciado se configura como un conocimiento mediante el cual los profesores articulan las expectativas de aprendizaje, la progresión de los contenidos y las experiencias de aula para orientar la enseñanza de la generalización de patrones. Desde esta perspectiva, la generalización se reconoce como un aprendizaje que adquiere significado a través de la organización progresiva de regularidades, reglas y relaciones matemáticas, en coherencia con las decisiones curriculares y pedagógicas que los profesores movilizan en su práctica (Codes y Contreras, 2022; Vergel, 2015; Zapatera, 2022).

5.3.2 Nivel Esperado de Desarrollo Conceptual o Procedimental

Esta categoría permite analizar cómo los profesores comprenden y organizan las expectativas de aprendizaje asociadas al desarrollo del PAT en relación con la generalización de patrones, así como la manera en que sitúan dichos aprendizajes dentro de una progresión curricular y conceptual (Climent-Rodríguez, 2002; Codes y Contreras, 2022). El foco del análisis se orienta a caracterizar el conocimiento que el profesorado moviliza sobre los aprendizajes que espera promover, las relaciones matemáticas que considera relevantes y la progresión mediante

la cual los estudiantes pueden construir procesos de generalización en el marco del PAT (Radford, 2010; Vergel, 2015).

El análisis de los fragmentos asociados a esta categoría evidencia que los profesores organizan sus expectativas de aprendizaje alrededor de acciones como reconocer regularidades, construir reglas, explicar procedimientos y anticipar el comportamiento de los patrones. Estas expectativas configuran referentes que orientan la interpretación del progreso de los estudiantes y la planificación de experiencias de enseñanza vinculadas con la generalización de patrones. Esta configuración es coherente con la literatura que reconoce el razonamiento recursivo y la predicción sustentada en regularidades como formas de construcción del PAT y como referentes para la organización progresiva de los aprendizajes asociados a la generalización (Carraher y Schliemann, 2019; Kieran et al., 2016).

En el discurso de Sara, expresiones como *"creería que añadirían 3 cada valor" y "si identifican qué valor se agrega… ya establecen los demás"* evidencian expectativas de aprendizaje centradas en el reconocimiento de regularidades y en la construcción de reglas a partir de relaciones entre términos consecutivos. Estas expectativas sitúan el razonamiento recursivo como un referente para la enseñanza de la generalización de patrones en el nivel escolar considerado. De manera complementaria, la profesora incorpora horizontes de aprendizaje asociados *"buscar la fórmula que conecta la posición (n) con el valor"*, integrando la construcción de expresiones generales dentro de una progresión de aprendizajes vinculada al pensamiento algebraico temprano (Alsina, 2019; Pincheira y Alsina, 2022). Asimismo, expresiones como *"no, no, ellos no lo hacen",* evidencian una comprensión de la progresión de los aprendizajes en la que determinadas formas de generalización son situadas en momentos

diferenciados de la trayectoria escolar, configurando expectativas sobre la evolución progresiva del razonamiento algebraico.

De manera similar, Cristóbal organiza el nivel esperado de aprendizaje a partir de una secuencia progresiva asociada al grado escolar, afirmando que *"en estudiantes de 1–3, es muy importante el pensamiento recursivo"* y que *"utilizarán un procedimiento recursivo"* como eje de *enseñanza*. Su discurso evidencia una concepción del pensamiento recursivo como conocimiento fundacional, al sostener que *"sobre este se establece las bases para construir los demás razonamientos"*, y razón por la cual propone *"ejercitar intensamente el nivel recursivo antes de pasar a los demás"* (Godino et al., 2014). Además, aparece la expresión *"no sé si llegue hasta hacer patrones observables"*; desde esta perspectiva, el desarrollo del pensamiento algebraico temprano es entendido como una progresión gradual, en la que la consolidación de estrategias recursivas orienta la incorporación posterior de formas más complejas de generalización de patrones.

Por su parte, Orlando explicita con mayor detalle una progresión interna del razonamiento esperado. Reconoce el conteo reiterado como punto de partida *"que cuenten de tres en tres",* y articula esta estrategia inicial con metas de aprendizaje orientadas hacia formas más generales de razonamiento, expresadas en afirmaciones como *"evite tener que hallar la equivalencia bicicleta por bicicleta",* y *"la evidencia mínima creo que sería el hallazgo de un término avanzado"* (Kaput et al., 2017). Estas evidencias muestran un conocimiento de la secuenciación del aprendizaje que transita desde procedimientos de recuento hacia la anticipación de términos lejanos como manifestación de la generalización. Asimismo, formula con claridad que *"el razonamiento funcional sería la meta a conseguir",* posicionando la generalización conceptual como horizonte del proceso, aunque sin convertirla en exigencia

inmediata (Rojas y Vergel, 2018; Vergel, 2014). Finalmente, su expresión *"un patrón como ese no me parece tan sencillo para niños"* evidencia que utiliza el nivel esperado de desarrollo conceptual como criterio para ajustar las expectativas de aprendizaje y valorar la pertinencia de introducir determinadas tareas de generalización.

El análisis evidencia que el conocimiento sobre los estándares de aprendizaje se manifiesta como un dispositivo de anticipación pedagógica mediante el cual los profesores organizan la progresión esperada del pensamiento algebraico temprano. En sus discursos, la generalización de patrones adquiere el papel de horizonte de aprendizaje que estructura las expectativas sobre el desempeño estudiantil y orienta la secuencia de logros esperados, desde estrategias iniciales de reconocimiento y conteo hasta la formulación de relaciones generales. Así, el estándar de aprendizaje se configura como un referente que permite graduar la complejidad del contenido y proyectar una evolución conceptual consistente con una comprensión gradual y acumulativa del pensamiento algebraico temprano (Codes y Contreras, 2022).

Desde un análisis intracaso, se observa que Sara organiza la secuenciación de los aprendizajes como una progresión articulada por etapas, en la que las experiencias previas constituyen referentes para la construcción de nuevos significados asociados a la generalización de patrones (Kaput et al., 2017; Kieran et al., 2016). Cuando afirma que *"cada etapa del proceso de aprendizaje requiere de ejemplificaciones para poder llegar al nivel del aprendizaje esperado (avanzado)",* evidencia un conocimiento sobre la progresión del pensamiento algebraico temprano en el que las ejemplificaciones cumplen una función de mediación para favorecer el tránsito entre distintos niveles de comprensión. Desde esta perspectiva, la secuenciación se

configura como una organización gradual de los aprendizajes, orientada por la articulación progresiva de experiencias y expectativas de desarrollo (Alsina, 2019).

Esta concepción se fortalece cuando la profesora afirma que *"para poder llegar al razonamiento de correspondencia, se debió pasar por razonamiento funcional y recursivo",* manifiesta un conocimiento sobre la secuenciación de los aprendizajes en el que los distintos tipos de razonamiento se organizan como una progresión conceptual propia del pensamiento algebraico temprano (Radford, 2011, 2013). De igual manera, al señalar que *"la identificación de patrones son la base o cimiento",* configura los patrones como un contenido estructurante que articula aprendizajes sucesivos y orienta la construcción gradual de relaciones matemáticas cada vez más generales, otorgando a la secuenciación un sentido epistemológico además de curricular (Mason, 2018; Zapatera, 2022).

En el caso de Cristóbal, la secuenciación aparece fuertemente asociada a la consolidación de un nivel previo antes de avanzar. Su discurso enfatiza una lógica condicional del progreso *"sobre este se establece las bases para construir los demás razonamientos"* y *"ejercitar intensamente el nivel recursivo antes de pasar a los demás".* Estas expresiones muestran que la organización temporal del PAT se entiende como una secuencia acumulativa, en la que el dominio del pensamiento recursivo adquiere un papel estructurante para la construcción de otros modos de generalización (Carraher y Schliemann, 2019; Godino et al., 2017). Desde esta perspectiva, la secuenciación se configura como una organización gradual de los aprendizajes, sustentada en la articulación entre conocimientos previos y nuevos desarrollos, y orientada por la experiencia profesoral en la enseñanza de la generalización de patrones (Carrillo-Yañez et al., 2018).

En el caso de Orlando, la secuenciación se configura como un conocimiento especializado que organiza el desarrollo del pensamiento algebraico temprano mediante una progresión articulada de contenidos, formas de razonamiento y contextos de aprendizaje. Al afirma que *"el razonamiento de correspondencia sería el inicial"* y que *"con posterioridad, se trabajaría el razonamiento recursivo"*, establece un orden explícito entre contenidos y tipos de razonamiento (Vergel, 2014; Vergel et al., 2022). Esta secuencia se amplía cuando sitúa el inicio en contextos cercanos *"construcción de patrones simples a partir de una actividad de semirrealidad"* y ordena el avance desde *"números pequeños"* hacia situaciones más complejas (Kaput et al., 2017; Otten et al., 2019). Además, al señalar que *"la identificación de patrones es clave"* y que el *"pensamiento variacional enriquece… la simbolización y abstracción",* proyecta una continuidad del aprendizaje más allá del momento inmediato, concibiendo la secuenciación como una trayectoria de largo plazo (Vergel et al., 2022).

El análisis intercaso permite identificar regularidades compartidas en la manera en que los profesores comprenden la secuenciación del PAT. En los tres discursos, la progresión del aprendizaje se concibe como un tránsito gradual por etapas, en el que determinados contenidos, razonamientos y formas de representación cumplen una función articuladora para desarrollos posteriores.

En este sentido, el currículo es interpretado como un marco orientador para organizar la enseñanza de la generalización de patrones y favorecer la construcción progresiva de relaciones algebraicas en Educación Básica Primaria. La secuenciación se expresa mediante referencias a procesos de base, consolidación y avance progresivo, especialmente asociados al reconocimiento de regularidades, la construcción de secuencias, el razonamiento recursivo y la transición hacia formas más generales de representación. Estas producciones evidencian conocimiento

relacionado con la progresión del aprendizaje y con la organización gradual de contenidos vinculados al desarrollo del PAT y la enseñanza de la generalización de patrones (Codes y Contreras, 2022).

5.3.3 Secuenciación de Temas

Se configura como un conocimiento regulativo situado, que permite a los profesores anticipar cómo debería desplegarse el aprendizaje de la generalización de patrones a lo largo del tiempo escolar. La relación entre contenidos previos, actuales y posteriores se establece mediante nociones como *"base", "inicio", "posterioridad" o "avance",* todas ellas formuladas en el lenguaje propio de los profesores. La progresión del PAT se concibe, así, como necesaria y gradual, pero también flexible, dependiente del contexto, del grado y de la consolidación de aprendizajes previos (Radford, 2011; Vergel et al., 2022). Esta categoría permite comprender cómo los profesores Sara, Cristóbal y Orlando organizan, de manera explícita o implícita, el orden y la progresión temporal de los contenidos asociados a la generalización de patrones (Carrillo-Yáñez et al., 2018; Codes y Contreras, 2022).

Por tanto, la secuenciación se configura como un conocimiento especializado de carácter situado, mediante el cual los profesores organizan la progresión del pensamiento algebraico temprano a partir de su experiencia de aula. En sus discursos, esta organización se expresa a través de nociones de etapas, bases, avances posteriores y relaciones de continuidad entre aprendizajes, configurando una comprensión de la enseñanza como un proceso gradual de construcción de la generalización de patrones (Llinares y Fernández, 2021; Montes y Carrillo, 2017).

En el discurso de Sara, la secuenciación aparece fundamentalmente como un tránsito necesario por etapas previas, en el que los aprendizajes se conciben como procesos graduales que

requieren consolidación progresiva y no únicamente como eventos aislados (Vergel, 2019; Zapatera, 2022). Cuando afirma que *"cada etapa del proceso de aprendizaje requiere de ejemplificaciones para poder llegar al nivel del aprendizaje esperado (avanzado)",* sitúa la progresión como un recorrido acumulativo, donde las experiencias iniciales sostienen aprendizajes posteriores (Radford, 2013; Vergel, 2015). Esta lógica se refuerza cuando señala que *"para poder llegar al razonamiento de correspondencia, se debió pasar por razonamiento funcional y recursivo",* explicitando una relación de precedencia entre distintos tipos de pensamiento (Alsina, 2019; Vergel et al., 2022). Del mismo modo, al afirmar que *"la identificación de patrones son la base o cimiento",* Sara establece con claridad un contenido fundacional, que habilita desarrollos posteriores, aunque sin detallar tiempos, niveles de escolaridad ni criterios precisos de avance (Carraher y Schliemann, 2019; Kaput et al., 2017). La secuenciación, en su caso, se enuncia como intención didáctica, flexible y dependiente del contexto y del grado, más que como una trayectoria curricular cerrada (Llinares, 2018).

En Cristóbal, la secuenciación se configura con un carácter condicional y normativo, anclado en la idea de consolidación previa. Expresiones como *"sobre este se establece las bases para construir los demás razonamientos"* y *"ejercitar intensamente el nivel recursivo antes de pasar a los demás"* muestran que el avance en la generalización de patrones se entiende como dependiente del dominio de un razonamiento inicial, particularmente el recursivo (Godino et al., 2014). La progresión se concibe, así, como una secuencia acumulativa, donde no se avanza por calendario, mejor por suficiencia del aprendizaje previo (Codes y Contreras, 2022; MEN, 2006). Esta lógica se ve matizada por referencias a la significatividad de las experiencias *"experiencias que sean significativas para los estudiantes",* o *"Ejercitar intensamente el nivel recursivo antes de pasar a los demás"* lo que introduce cierto margen de flexibilidad, aunque la estructura

general de la secuencia permanece centrada en la idea de ejercitar primero y avanzar después (Mason, 2018; Otten et al., 2019).

En el caso de Orlando, la secuenciación de los temas se configura como un conocimiento que organiza el desarrollo del PAT mediante puntos de inicio, transiciones y proyecciones de aprendizaje (Alsina y Acosta, 2018; Zapatera, 2022). Cuando afirma que *"el razonamiento de correspondencia sería el inicial"* y que *"con posterioridad, se trabajaría el razonamiento recursivo",* evidencia una comprensión de la progresión en la que los distintos tipos de razonamiento se articulan como parte de una trayectoria para la construcción de la generalización de patrones (Radford, 2008; Vergel, 2014).

Esta secuencia se complementa con decisiones sobre el tipo de situaciones iniciales, como *"construcción de patrones simples a partir de una actividad de semirrealidad"* y *"empezar con números pequeños",* lo que muestra una organización gradual de la complejidad (Carraher y Schliemann, 2019; Schliemann et al., 2006). Además, Orlando proyecta la secuenciación más allá del momento inmediato al señalar que *"la identificación de patrones es clave"* y que el *"pensamiento variacional enriquece no solo la capacidad de razonamiento sino también la capacidad de simbolización y abstracción",* concibiendo el aprendizaje como una trayectoria extendida en el tiempo escolar (Jungbluth et al., 2022; Kieran et al., 2016).

El análisis transversal de las matrices muestra que, en los tres casos, la secuenciación de los temas se articula en torno a contenidos base y aún PAT prioritario, que deben ser abordados antes de avanzar hacia formas más complejas de generalización (Godino et al., 2017; Vergel et al., 2022). En los discursos de los profesores Sara y Cristóbal, la progresión curricular se organiza mediante referencias a contenidos base, procesos previos de consolidación y relaciones entre diferentes niveles del PAT, particularmente asociados al reconocimiento de regularidades,

la construcción de secuencias y la transición hacia formas más generales de representación (Godino et al., 2017). Asimismo, las producciones evidencian interpretaciones profesionales del currículo orientadas a ajustar la enseñanza según los ritmos de aprendizaje de los estudiantes (Codes y Contreras, 2022; MEN, 1998).

En el caso de Orlando, emergen referencias a ciclos y a la relación entre currículo prescrito e implementado, lo que muestra una lectura reflexiva de la organización curricular y de las condiciones de enseñanza en el aula (Codes y Contreras, 2022). En conjunto, estas producciones evidencian conocimiento relacionado con la progresión del aprendizaje y con la organización gradual de contenidos vinculados al desarrollo del PAT y la enseñanza de la generalización de patrones (Zapatera, 2022).

Desde una mirada integrada, el *KMLS* en la categoría secuenciación de los temas se configura como un conocimiento que regula la progresión del aprendizaje mediante nociones de base, consolidación y avance gradual (Carrillo-Yañez et al., 2018; Montes y Carrillo, 2017). En los discursos analizados, expresiones como *"base", "inicio", "posterioridad", "antes de pasar" o "meta",* que evidencian una comprensión compartida del PAT como proceso acumulativo (Radford, 2015; Vergel, 2015). De este modo, la secuenciación se configura como una organización dinámica del aprendizaje, sustentada en la articulación progresiva de conocimientos y en la experiencia profesoral como referente para orientar el desarrollo del pensamiento algebraico temprano (Mason, 2018; Llinares y Fernández, 2021).

En conclusión, el análisis permite sostener que la secuenciación de los temas en la enseñanza de la generalización de patrones no opera como una planificación curricular rígida, se configura como construcción profesoral situada, profundamente vinculada a la experiencia del aula y a la percepción del profesor sobre aquello que los estudiantes pueden abordar en distintos

momentos (Simons, 2011; Stake, 2015). Las voces de Sara, Cristóbal y Orlando muestran que el PAT se organiza mediante progresiones graduales y razonamientos priorizados, configurando un *KMLS* de carácter regulativo que orienta la enseñanza desde criterios prácticos de avance y desde la interpretación contextualizada de los estándares, más que desde prescripciones normativas externa (Carrillo-Yañez et al., 2018; Vergel et al., 2022).

Las categorías analíticas que se presentan a continuación permiten interpretar configuraciones particulares del conocimiento que los profesores movilizan para enseñar la generalización de patrones. Estas configuraciones integran criterios sobre los aprendizajes esperados, la progresión de los contenidos y las decisiones curriculares que orientan la enseñanza, lo que manifiesta una comprensión del pensamiento algebraico temprano como un proceso gradual de construcción de regularidades, relaciones y formas de generalización.

Tabla 13.

Categorías analíticas del KMLS en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, articulación entre núcleo teórico, configuración emergente y conocimiento del profesor

Categoría *KMLS*	**Categoría**	**Descripción**
Resultados de aprendizaje esperados	Identificación de acciones observables como evidencia de comprensión del patrón.	Reconoce que el aprendizaje se evidencia cuando el estudiante es capaz de describir, representar o anticipar regularidades.
Resultados de aprendizaje esperados	Uso de producciones estudiantiles para definir logros en generalización.	Define como resultado alcanzado la creación de patrones, el hallazgo de reglas o la predicción de términos, más que fórmulas fijas.
Resultados de aprendizaje esperados	Reconocimiento del nivel de formalización	Regula sus expectativas considerando límites de edad

	alcanzable en primaria.	y grado, identificando qué tipo de generalización es viable en cada nivel.
Nivel esperado de desarrollo conceptual o procedimental	Ubicación del pensamiento recursivo como logro. mínimo y base para avanzar.	Sitúa el uso de estrategias como "sumar de tantos en tantos" como un punto de partida legítimo hacia formas más estructuradas.
Nivel esperado de desarrollo conceptual o procedimental	Distinción entre generalización funcional y recursiva en la trayectoria del PAT.	Comprende la diferencia entre prever un término por repetición y expresar una regla general; ubica cada una en su momento didáctico.
Nivel esperado de desarrollo conceptual o procedimental	Regulación del umbral cognitivo según evidencia funcional.	Establece un estándar práctico basado en la capacidad del estudiante para prever y explicar, no solo para ejecutar.
Secuenciación de los temas	Articulación progresiva de contenidos y razonamientos según función base.	Concibe el aprendizaje como una acumulación gradual en la que ciertos razonamientos (como la identificación de patrones) son cimiento.
Secuenciación de los temas	Adaptación flexible de la progresión del PAT al contexto del aula.	Organiza la enseñanza considerando el grado, la experiencia previa del grupo y la complejidad de las tareas en lugar de seguir secuencias rígidas.
Secuenciación de los temas	Anticipación especializada de trayectorias de	Proyecta intencionadamente el avance desde patrones

	desarrollo del pensamiento algebraico temprano.	simples hacia expresiones simbólicas, ajustando los pasos según el progreso del grupo.

Nota. Esta tabla muestra cómo los profesores entienden y usan los estándares de aprendizaje en su trabajo diario. Más que seguirlos al pie de la letra, los adaptan según la realidad de su aula y la forma en que sus estudiantes aprenden. Así, el conocimiento sobre los estándares se convierte en una herramienta que les ayuda a tomar decisiones.

Fuente: elaboración propia.

5.4 Discusión de Resultados

La discusión de los resultados se desarrolla a partir del marco analítico *MTSK*, considerando particularmente los subdominios *KoT, KMT y KMLS.* Este marco permite interpretar el conocimiento especializado del profesorado de Educación Básica Primaria en relación con el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, especialmente en la enseñanza de generalización de patrones. Asimismo, proporciona elementos para caracterizar cómo se manifiesta el conocimiento de los profesores sobre regularidades y relaciones matemáticas presentes en los patrones, así como la manera en que articulan decisiones didácticas, estrategias de enseñanza, recursos y referentes curriculares que intervienen en la enseñanza de este objeto matemático.

En este sentido, la discusión se organiza alrededor de varios ejes interpretativos que emergen del análisis de los casos estudiados. En primer lugar, se interpreta cómo los profesores articulan procedimientos aritméticos y conocimiento con el desarrollo del pensamiento algebraico durante la enseñanza de la generalización de patrones, lo que permite interpretar diferentes configuraciones del conocimiento que los profesores movilizan para abordar el

pensamiento algebraico temprano. En segundo lugar, se analiza el papel que desempeñan los registros de representación en la enseñanza de los patrones, particularmente la dificultad para mediar la transición desde registros pictóricos hacia formas de representación más abstractas que favorezcan la generalización. Posteriormente, se analiza cómo el conocimiento que los profesores movilizan sobre los resultados de aprendizaje, los niveles esperados de desarrollo y la secuenciación de los contenidos orienta las decisiones de interpretación y concreción curricular asociadas a la enseñanza de la generalización de patrones en el marco del PAT. Finalmente, se reflexiona sobre las implicaciones que estas configuraciones del conocimiento especializado tienen para la formación inicial y continua del profesorado de Educación Básica Primaria y para el fortalecimiento de la enseñanza de la generalización de patrones.

5.4.1 Conexión entre el Conocimiento Matemático y la Práctica

La caracterización del conocimiento especializado de los profesores participantes evidencia configuraciones particulares del conocimiento matemático movilizado para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, especialmente en la enseñanza de la generalización de patrones. El análisis integrado de los cuestionarios y la entrevista muestra que los significados atribuidos a los patrones, las reglas y las formas de generalización se organizan principalmente alrededor de procedimientos aritméticos, regularidades observables y estrategias de resolución, configurando una comprensión en la que el "cómo se hace" adquiere un papel central. Esta organización del conocimiento es consistente con lo señalado por Pincheira y Alsina (2021b) sobre la presencia de aproximaciones fundamentadas en relaciones aritméticas durante las primeras experiencias de enseñanza del álgebra. Desde el modelo *MTSK* de Carrillo-Yañez et al. (2018) estas configuraciones permiten interpretar cómo los profesores articulan

procedimientos, propiedades, representaciones y fundamentos para enseñar la generalización de patrones y favorecer el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

Los hallazgos de esta investigación permiten interpretar que el conocimiento especializado movilizado por los profesores de Educación Básica Primaria para la enseñanza de la generalización de patrones se organiza principalmente alrededor del pensamiento recursivo, privilegiando la identificación y extensión de regularidades como vía para promover el desarrollo del pensamiento algebraico temprano (Acosta, 2023). Esta configuración sitúa los procedimientos, las representaciones y las relaciones entre términos consecutivos como referentes centrales para construir significados algebraicos en el aula, configurando una aproximación coherente con las primeras formas de generalización descritas en la literatura sobre pensamiento algebraico temprano (Acosta-Inchaustegui, 2023). Desde esta perspectiva, el aporte de la investigación consiste en evidenciar que el conocimiento del profesor de Educación de Básica Primaria es una articulación de procedimientos, propiedades, registros de representación y expectativas de aprendizaje que orientan la interpretación de las regularidades y la construcción progresiva de relaciones entre la aritmética y el álgebra (Chimoni et al., 2021).

En consecuencia, los hallazgos permiten interpretar que el conocimiento especializado de los profesores organiza la enseñanza de la generalización de patrones mediante formas particulares de mediación entre procedimientos aritméticos, reconocimiento de regularidades y construcción progresiva de relaciones generales. Esta configuración sitúa al profesorado como un agente que articula experiencias de conteo, identificación de patrones y formulación de reglas para favorecer el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, en consonancia con los planteamientos Aké y Godino (2018) y Radford (2010, 2022). Desde esta perspectiva, la mediación profesoral adquiere un papel estructurante al establecer conexiones progresivas entre

contenidos matemáticos de distinta complejidad, promoviendo el tránsito desde regularidades numéricas locales hacia formas cada vez más generales de organización matemática (Acosta Inchaustegui, 2023; Carraher y Schliemann, 2019). Desde la perspectiva de Carrillo et al. (2018) y Climent et al. (2015) plantean que el conocimiento especializado del profesor trasciende el dominio procedimental e integra la comprensión de la fenomenología del contenido como condición para organizar y dar sentido a la enseñanza de las matemáticas (Cayo, 2023).

Las intervenciones analizadas revelan que el conocimiento movilizado por los profesores para la enseñanza de la generalización de patrones otorga un papel central al cálculo numérico y a los procedimientos (Aguilar-González, 2015). Por tanto, la tendencia a la *aritmetización del álgebra* observada en los casos de estudio converge con los hallazgos reportados por Pincheira (2023), según los cuales la generalización de patrones tiende a interpretarse como una prolongación de prácticas aritméticas de cálculo y verificación, más que como una oportunidad para explicitar relaciones funcionales y construir expresiones generales, dimensiones fundamentales en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano (Muñoz-Catalán et al., 2022).

En conjunto, los hallazgos permiten interpretar que el *KoT* movilizado por los profesores de Educación Básica Primaria para la enseñanza de la generalización de patrones se caracteriza por una organización en la que los procedimientos aritméticos, las regularidades observables, los registros de representación y la formulación de reglas constituyen referentes centrales para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano. Esta configuración dialoga con la literatura internacional al reconocer la necesidad de articular la aritmética y el álgebra desde los primeros años escolares. En Brasil, Jungbluth et al. (2022) muestran que la incorporación del álgebra en los primeros grados plantea desafíos asociados a la formación docente; mientras que, en España

y Alemania, Burgos y Godino (2022) identifican formas diferenciadas de interpretar la actividad aritmética y algebraica en las producciones de los estudiantes. De manera similar, Carraher y Schliemann (2019) señalan que la construcción de trayectorias longitudinales de aprendizaje requiere articular progresivamente la aritmética y el álgebra desde los primeros años escolares. En este contexto, la presente investigación aporta evidencia sobre cómo el conocimiento especializado del profesor de Educación Básica Primaria configura la enseñanza de la generalización de patrones mediante la articulación de procedimientos, regularidades, representaciones y expectativas de aprendizaje, ampliando la comprensión del desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

5.4.2 La Gestión de los Registros de Representación

Un hallazgo significativo del análisis empírico corresponde a la forma en que el profesorado moviliza los registros de representación durante la enseñanza de la generalización de patrones. Los resultados evidencian un predominio del registro pictórico para interpretar y organizar las regularidades, mientras que la articulación entre múltiples sistemas representacionales aparece como una configuración menos frecuente del conocimiento especializado. Este resultado adquiere especial relevancia porque, en el marco del PAT, las representaciones trascienden la función de recursos didácticos y constituyen medios para construir, comunicar y generalizar relaciones matemáticas (Radford, 2010, 2022).

Desde la perspectiva semiótica de Duval (2006), la comprensión matemática implica coordinar distintos registros de representación y establecer conversiones entre ellos para construir significados sobre un mismo objeto matemático. En este sentido, el análisis evidencia que el conocimiento de los profesores sobre los registros de representación en la generalización de patrones se expresa mediante una utilización articulada de registros verbales, pictóricos y

aritméticos para identificar regularidades, describir el crecimiento de las secuencias y fundamentar sus respuestas. Esta forma de movilización del conocimiento refleja una comprensión del patrón sustentada en relaciones perceptibles y numéricas, desde las cuales los profesores organizan sus explicaciones y argumentaciones matemáticas. En consecuencia, el conocimiento manifestado configura una aproximación a la generalización en la que la representación cumple una función de descripción, comunicación y validación de regularidades, aportando evidencia sobre las maneras en que los profesores construyen significado matemático en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano (Radford, 2019).

Un hallazgo recurrente corresponde al uso del registro de representación pictórico como mediador para favorecer la identificación de regularidades y relaciones de crecimiento en los patrones. Las figuras, secuencias visuales y representaciones gráficas se integran como recursos que orientan la observación, comparación y explicitación de cambios entre los términos de la secuencia, aspectos reconocidos en el pensamiento algebraico temprano como formas iniciales de construcción de generalizaciones (Rojas-Garzón, 2014). Desde el subdominio *KoT* y su articulación con el *KMT*, estas producciones evidencian conocimiento relacionado con el potencial de los registros visuales para promover procesos de transición hacia formas de representación más abstractas en la enseñanza de la generalización de patrones (Rojas Garzón, 2014).

Desde la perspectiva de Duval (2006), el aprendizaje de las matemáticas implica la coordinación de registros de representación y, fundamentalmente, en la capacidad de realizar “conversiones” entre registros. Esto sugiere que el *KMT* de los profesores se manifiesta principalmente en el diseño de acciones orientadas a favorecer la comprensión de las regularidades mediante registros visuales, verbales y numéricos. Esta forma de abordar la

generalización evidencia una enseñanza centrada en la construcción intuitiva de la regla del patrón, donde los procesos de simbolización emergen subordinados al reconocimiento previo de relaciones y regularidades (Vergel, 2015).

Asimismo, se observa que el conocimiento sobre registros de representación de los profesores participantes privilegia el lenguaje natural como principal vía de validación. Al solicitar a los estudiantes que expliquen "qué sigue" en la secuencia, se fomenta una descripción narrativa que, aunque valiosa, no siempre evoluciona hacia una estructura funcional. Este fenómeno puede interpretarse a la luz de los niveles de algebrización de Godino et al. (2014), estas actuaciones se vinculan principalmente con procesos de generalización y reconocimiento de regularidades característicos del nivel intermedio de algebrización, en los que la regla emerge a partir de la observación de casos particulares y de su descripción mediante lenguaje natural. En este sentido, la evidencia empírica sugiere que los profesores promueven formas de PAT que permiten identificar y comunicar relaciones generales, apoyándose especialmente en registros verbales y pictóricos (Burgos-Navarro, 2020).

Este predominio en lo pictórico contrasta con las propuestas de Wilkie (2016) y Rivera y Becker (2011) quienes enfatizan que la visualización debe servir para identificar la estructura invariante de un patrón. En los casos de esta tesis, la visualización se utiliza de forma meramente perceptiva (contar elementos) y no estructural (identificar la relación entre la posición y el número de elementos). Este hallazgo es fundamental para la tesis, pues permite sostener que el conocimiento especializado del profesor de primaria requiere una reconceptualización del papel de las representaciones, no como ayudas visuales para "hacer más fácil" la clase y pasan a concebirse como herramientas cognitivas para la construcción del objeto algebraico (Alsina, 2019; Pincheira et al., 2022).

5.4.3 El papel de los Estándares Curriculares (KMLS) vs. Realidad

Los resultados en relación con el subdominio *KMLS* evidencian un conocimiento sobre los lineamientos curriculares y los derechos básicos de aprendizaje (DBA), particularmente en lo relacionado con la organización gradual de contenidos y expectativas de aprendizaje vinculadas al pensamiento algebraico temprano. Estas producciones muestran que los profesores interpretan el currículo como un referente orientador para organizar la enseñanza y acompañar el desarrollo progresivo de relaciones algebraicas en Educación Básica Primaria (Jungbluth et al., 2022).

En este sentido, se observa una tendencia a interpretar el estándar como una meta terminal o como un contenido aislado que debe cumplirse en un momento específico del currículo (Jungbluth et al., 2022). Esta interpretación contrasta con la noción de continuidad vertical, según la cual las ideas matemáticas deben articularse progresivamente a lo largo de distintos niveles escolares, de manera que las experiencias iniciales con patrones, regularidades y relaciones preparen el terreno para la comprensión posterior de funciones y estructuras algebraicas (Carraher y Schliemann, 2019). Cuando el conocimiento curricular se limita al cumplimiento del tema, por ejemplo, extender o continuar una secuencia, se pierde de vista cómo estas actividades se relacionan con conceptos más generales que los estudiantes abordarán en grados superiores (Carraher y Schliemann, 2019).

Desde la perspectiva del modelo *MTSK*, el *KMLS* trasciende la mera capacidad del profesor para citar normas o lineamientos administrativos, implica comprender cómo un contenido, en este caso *la generalización,* se articula verticalmente en el currículo (Radford, 2015). En este sentido, cuando dicha progresión se interpreta principalmente desde la organización temática del currículo, la enseñanza tiende a privilegiar el abordaje de contenidos específicos, mientras que las oportunidades para consolidar procesos de generalización como un

eje articulador del aprendizaje matemático pueden quedar subordinadas a la secuencia programática. Esta interpretación coincide con lo planteado por Carraher y Schliemann (2019), quienes sostienen que el desarrollo del PTA depende de la capacidad del profesor para reconocer la continuidad del razonamiento algebraico más allá del tratamiento aislado de un tema curricular.

Al contrastar esta situación con autores como Remillard et al. (2024) sobre la mediación curricular, se evidencia que los profesores participantes se posicionan como ejecutores de tareas preestablecidas, más que como agentes capaces de interpretar el currículo. El argumento aquí es que el conocimiento de los estándares, sin un soporte robusto en el conocimiento de los temas, se convierte en una cáscara vacía (Acosta-Inchaustegui, 2023), el profesor conoce "qué" debe enseñar según el MEN, pero su propia formación previa le impide operacionalizar el "cómo" de manera que se fomente la abstracción algebraica.

Los hallazgos de este eje coinciden con lo reportado por investigaciones que analizan la implementación de reformas en educación matemática en contextos latinoamericanos (Ribeiro et al., 2018). La dificultad para integrar los estándares de álgebra temprana en la práctica diaria no es exclusiva de los casos estudiados, y refleja una tensión más amplia entre las políticas educativas de vanguardia y la formación inicial del profesor (Pincheira y Alsina, 2021a). Al comparar estos resultados con el Estado del Arte propuesto, se reafirma que la apropiación del *KMLS* requiere una mediación institucional que vaya más allá de la entrega de guías pedagógicas (Acosta y Alsina, 2018). En esta línea, la discusión sugiere que el desarrollo pensamiento algebraico temprano sea una realidad en el aula depende de la capacidad del profesor para interpretar el estándar como una orientación para la construcción de trayectorias de aprendizaje,

en lugar de asumirlo únicamente como un requerimiento administrativo (Acosta y Alsina, 2018; Pincheira et al., 2022).

5.4.4 Implicaciones para la Formación del Profesor

Los hallazgos de esta investigación sugieren que el modelo *MTSK* posee un alcance que supera su utilización como marco analítico en investigación, al constituirse también en un referente conceptual que favorece la reflexión sistemática sobre la práctica del profesor (Montes y Carrillo, 2017). En este sentido, su potencial radica en ofrecer al profesor un marco teórico-analítico que le permita analizar, problematizar y reconstruir el conocimiento especializado que moviliza en la enseñanza de las matemáticas (Sosa-Guerrero, 2024a). Bajo esta perspectiva, este modelo puede actuar como una forma de *conciencia profesoral*, en la medida en que la práctica diaria, el *MTSK* llega a actuar como una "conciencia" que dicta qué conocimientos (matemáticos y didácticos) deben ponerse en juego al abordar un contenido específico (Sosa-Guerrero, 2024b).

Al observar cómo Sara, Orlando y Cristóbal interactuaron con los cuestionarios de situaciones, se hace evidente que el enfrentarlos a escenarios donde su *KoT* entra en tensión con las respuestas de los estudiantes genera un espacio de aprendizaje profesoral (Climent et al., 2014). La discusión plantea que la formación continua debe centrarse en fomentar la capacidad reflexiva del profesor sobre los subdominios de su propio conocimiento, en lugar de concentrar exclusivamente en la transmisión de contenidos técnicos aislados (Zapata, 2019).

Siguiendo a Jaworski (2008), quién plantea la indagación en la enseñanza, se argumenta que la formación debe permitir al profesor de primaria 'mirar' su propia clase de matemáticas bajo el lente de la especialización, transformando su rol de ejecutor en uno de investigador de su propia práctica.

Asimismo, los resultados subrayan la urgencia de diseñar programas de desarrollo profesoral situados en las necesidades específicas relacionadas con el álgebra temprana (Jungbluth et al., 2022). La tendencia a la aritmetización identificada en los participantes refleja una formación inicial donde el álgebra se presenta como una etapa posterior y ajena a la primaria (Jungbluth et al., 2022).

En este sentido, la discusión se apoya en los planteamientos de Kaput et al. (2017) quienes sostienen que los profesores necesitan desarrollar una "mirada algebraica" que les permita identificar oportunidades de generalización en tareas cotidianas y promover relaciones funcionales desde los primeros años escolares. Esta perspectiva contrasta con posturas que han defendido la necesidad de consolidar previamente el pensamiento aritmético antes de avanzar hacia formas de pensamiento algebraico, al considerar que existe una ruptura cognitiva entre ambos dominios (Schliemann et al., 2006).

En el marco del pensamiento algebraico temprano, la aritmética y el álgebra no se entienden como dominios completamente separados ni como etapas sucesivas de aprendizaje. Por el contrario, se reconoce que actividades aritméticas relacionadas con patrones, regularidades, variación y relaciones entre cantidades pueden constituir escenarios iniciales para el desarrollo de formas de razonamiento algebraico (Vergel, 2019; Cortés et al., 2014; Filloy et al., 2003). El argumento doctoral planteado sostiene que el fortalecimiento del *KMT* requiere, en primer lugar, una reconstrucción del conocimiento matemático del profesor, orientada a superar la ruptura histórica entre la aritmética y el álgebra que ha marcado su propia trayectoria escolar (de Souza-Barboza et al., 2020).

Finalmente, se debe discutir el papel de los programas de acompañamiento, como el programa 'Todos a Aprender' (PTA) mencionado en la génesis de este estudio. Los datos

sugieren que el acompañamiento en cascada es insuficiente si no se profundiza en el conocimiento especializado del tutor y del profesor (Ferreira et al., 2022). La discusión apunta a que las comunidades de aprendizaje deben transitar de la revisión administrativa de guías hacia el análisis de casos clínicos de aula, donde se discutan las producciones de los estudiantes, las decisiones disciplinares y didácticas tomadas (Jungbluth et al., 2022).

Al contrastar estos hallazgos con el Estado del Arte, se evidencia la necesidad de fortalecer procesos de formación docente que reconozcan al profesorado de Educación Básica Primaria como un agente especializado en la enseñanza del pensamiento algebraico temprano, particularmente en relación con la gestión de procesos de variación, generalización y razonamiento funcional (Radford, 2015).

Capítulo 6. Conclusiones

La presente investigación tuvo como propósito caracterizar el conocimiento especializado evidenciado por profesores de Educación Básica Primaria al enseñar la generalización de patrones como base para promover el desarrollo del pensamiento algebraico temprano. Para abordar este objetivo se adoptó como marco analítico el modelo *MTSK,* centrándose particularmente en los subdominios *KoT, KMT y KMLS*.

Para lo anterior, las conclusiones se presentan en tres momentos. El primer apartado corresponde a las conclusiones respecto de los objetivos inicialmente planteados; en el segundo apartado se consideran las aportaciones de la investigación; y en el tercer apartado se aborda la exposición de las limitaciones y perspectiva de la investigación.

Respecto de los objetivos planteados, el primer objetivo específico, estuvo orientado a analizar las evidencias del conocimiento especializado de profesores de primaria en los subdominios *KoT, KMT y KMLS* en la enseñanza de la generalización de patrones. Al respecto, se concluye que existe conocimiento especializado del profesorado en relación con la enseñanza de la generalización de patrones, lo que permitió caracterizar cómo este conocimiento se manifiesta en los tres subdominios *KoT, KMT y KMLS.*

En relación con el subdominio conocimiento del tema, el análisis permitió concluir la identificación de distintas formas de conceptualización del patrón por parte del profesorado, las cuales reflejan diferentes niveles de estructuración del objeto matemático. Estas diferencias evidencian distintos niveles de articulación entre razonamientos aritméticos y formas iniciales de pensamiento algebraico, permitiendo reconocer conexiones estructurales asociadas al desarrollo progresivo de la generalización de patrones. En algunos casos, el patrón se concibe principalmente como una secuencia observable de regularidades, lo que conduce a formas de

generalización basadas en la extensión de secuencias y en la verificación empírica de resultados. En estas situaciones, la regla se interpreta como un procedimiento que permite calcular términos sucesivos, sin que necesariamente se explicite una relación general entre variables. En otros casos, el patrón es comprendido como una estructura recursiva, donde los profesores identifican relaciones entre términos consecutivos y utilizan estas regularidades para anticipar nuevos términos. Aunque esta perspectiva muestra un mayor control estructural del patrón, la generalización permanece asociada a procedimientos iterativos.

Finalmente, el análisis identificó situaciones en las que el patrón se conceptualiza como una relación funcional entre magnitudes, lo que permite formular reglas generales mediante expresiones algebraicas y utilizar la variable como número general. En estos casos, la generalización se fundamenta en la comprensión de la estructura matemática del patrón y en la articulación entre distintos registros de representación. De este modo, la comprensión del patrón trasciende la identificación empírica de regularidades y favorece el establecimiento de conexiones inter conceptuales entre expresiones aritméticas particulares y formas generales de representación algebraica.

Sobre el conocimiento para la enseñanza el análisis también muestra que las mediaciones didácticas empleadas por los profesores influyen significativamente en el tipo de generalización que se promueve. En los casos de Sara y Cristóbal, las estrategias de enseñanza se centran en la visualización de patrones, extensión de secuencias y verificación mediante ejemplos. Estas estrategias facilitan la identificación de regularidades, pero no necesariamente conducen a la formulación de una regla general.

En contraste, cuando el profesor Orlando utiliza representaciones de manera intencional, por ejemplo, coordinando tablas, representaciones visuales y expresiones simbólicas, las tareas

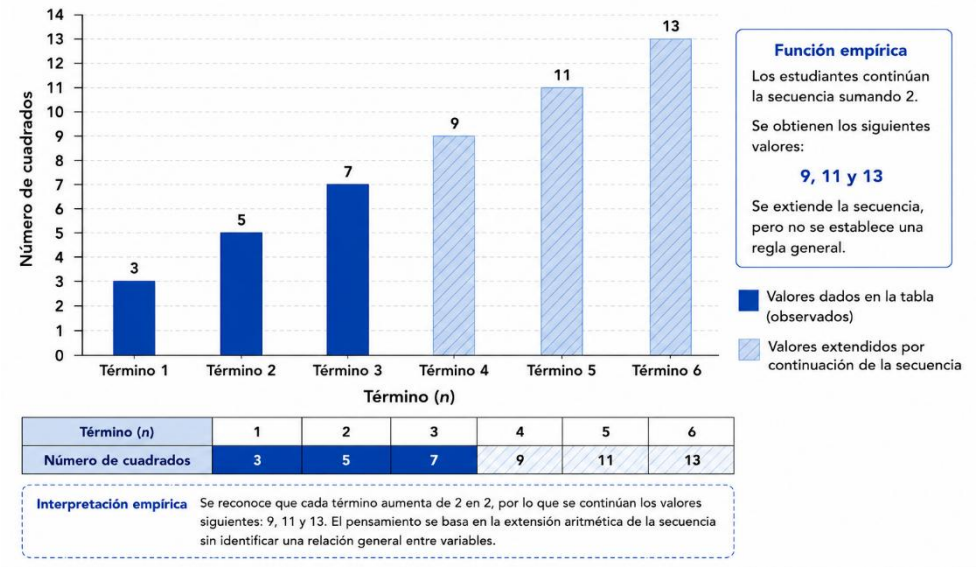
didácticas tienden a orientar la actividad hacia la construcción de relaciones algebraicas. En este sentido, el uso de representaciones no constituye por sí mismo una garantía de desarrollo del pensamiento algebraico temprano; su potencial depende de la función epistemológica que el profesor les atribuye dentro de la actividad matemática, tiene un significado muy específico desde el punto de vista del conocimiento para la enseñanza de las matemáticas y del desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

Cuando se habla de función epistemológica, se está haciendo referencia al papel que un objeto matemático cumple en la construcción del conocimiento dentro de la actividad matemática. En este caso, las representaciones, tablas, diagramas o configuraciones visuales, expresiones simbólicas y esquemas o dibujos de patrones constituyen recursos para producir conocimiento matemático desde la generalización de patrones.

Por ejemplo, una representación no tiene valor algebraico por sí misma, la tabla puede ser usada de maneras muy distintas, como función empírica y como función estructural o algebraica. Mientras que en la *función empírica* la tabla se usa solo para calcular o completar valores, los estudiantes continúan la secuencia: 9, 11 y 13. Aquí la tabla sirve para extender la secuencia, pero no necesariamente para formular una regla general, el pensamiento sigue siendo aritmético-recursivo.

Figura 17

Función empírica: extensión de la secuencia.



Fuente: elaboración propia.

Esta figura evidencia un crecimiento regular de dos unidades entre figuras consecutivas:

De la figura 1 a la 2: $+2$

De la figura 2 a la 3: $+2$

Desde el enfoque del pensamiento algebraico temprano, la representación corresponde a una **función empírica**, debido a que:

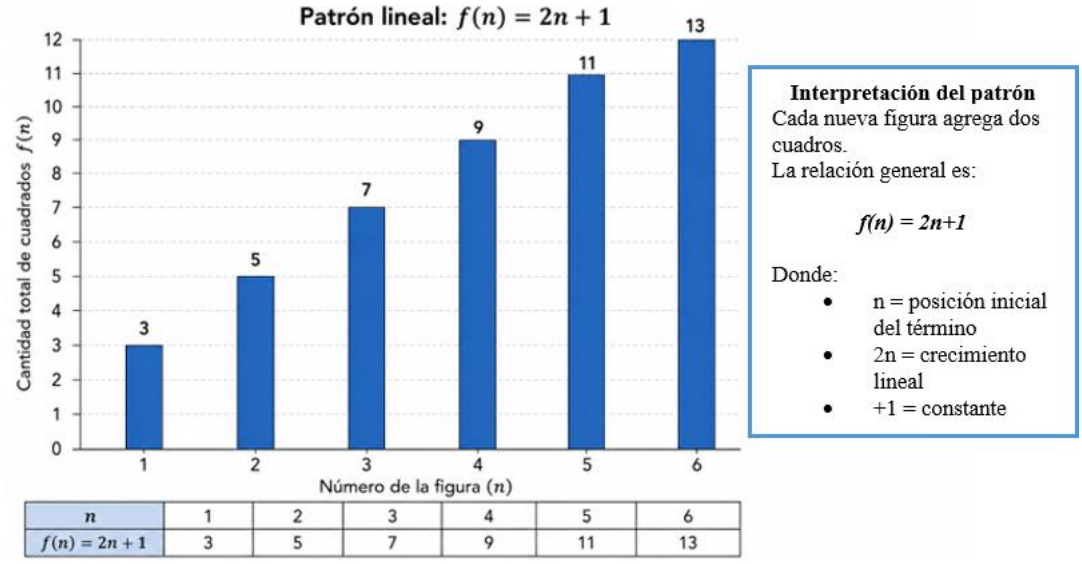
La utilización de la tabla y la figura como herramientas para continuar la secuencia evidencia un conocimiento especializado del profesor sobre recursos y representaciones que permiten apoyar la identificación de regularidades en patrones. Sin embargo, el uso que se hace de estas herramientas orienta el razonamiento de los estudiantes predominantemente hacia relaciones recursivas, centradas en identificar “qué sigue”, sin favorecer todavía la construcción

de una generalización explícita, como $2n + 1$. En este sentido, el conocimiento especializado manifestado en la selección y utilización de estas representaciones favorece inicialmente un acercamiento aritmético-recursivo al patrón, aunque aún no promueve de manera explícita el tránsito hacia una comprensión estructural de la generalización.

Asimismo, en la *función estructural o algebraica*, la misma tabla puede usarse para analizar relaciones entre variables. El profesor pregunta: ¿Cuánto aumenta cada vez?, ¿Cómo depende el número de cuadrados de la figura?, ¿podemos escribir una regla para cualquier figura? Los estudiantes pueden llegar a: $f\,(n) = 2\,n + 1$ aquí la representación sirve para construir una relación general. En este sentido, las representaciones dejan de operar únicamente como recursos de cálculo y se convierten en medios para establecer conexiones estructurales entre regularidades numéricas, relaciones funcionales y expresiones algebraicas generales. En este caso la tabla cumple una función epistemológica de generalización.

Figura 18

Representación gráfica de la función estructural del patrón lineal $f(n) = 2n + 1$



n	1	2	3	4	5	6
$f(n) = 2n + 1$	3	5	7	9	11	13

Nota. La figura permite visualizar el crecimiento constante de la secuencia y la relación entre el número del término *(n)* y la cantidad total de cuadrados *f (n)*.

Fuente: elaboración propia.

Desde el subdominio *KMT*, esto implica que el profesor moviliza conocimientos sobre cómo utilizar representaciones para orientar la actividad matemática hacia relaciones y estructuras algebraicas. En este sentido, la enseñanza requiere una orquestación didáctica de las representaciones y de las conexiones que pueden establecerse entre ellas. Por tanto, esto implica decisiones relacionadas con las preguntas que se formulan, las conexiones entre representaciones, el momento oportuno para transitar de lo visual a lo simbólico y la manera de orientar la discusión hacia una relación general *¿qué preguntas hacer?, ¿qué conexiones establecer entre representaciones?, ¿cuándo pasar de lo visual a lo simbólico?, ¿cómo orientar la discusión hacia una relación general?* A su vez, este proceso se articula con *KoT*, dado que el reconocimiento de relaciones algebraicas requiere comprender la estructura matemática del patrón.

Finalmente, el análisis evidenció prácticas orientadas a la construcción y validación de reglas generales, en las cuales el profesor utiliza representaciones tabulares, pictóricas y simbólicas para apoyar la identificación de relaciones funcionales y promover la formulación de expresiones algebraicas. Estos resultados muestran que el conocimiento para la enseñanza desempeña un papel fundamental en la manera en que se orientan los procesos de generalización en el aula.

En cuanto al subdominio *KMLS*, se concluye que el conocimiento del profesorado sobre los estándares de aprendizaje se configura principalmente como un conocimiento situado y

experiencial, mediante el cual los profesores interpretan y traducen los objetivos curriculares en expectativas concretas de aprendizaje para los estudiantes.

En los casos de Sara, Cristóbal y Orlando, el currículo se interpreta como una secuencia de contenidos organizados por grado escolar, lo que sitúa la generalización de patrones dentro de una progresión curricular específica. Esta configuración orienta la enseñanza hacia una construcción gradual de la generalización, de acuerdo con las expectativas que los profesores. Asimismo, el estudio identificó interpretaciones del currículo como una trayectoria conceptual que favorece la incorporación progresiva del PAT mediante el trabajo con patrones y regularidades. Estos resultados evidencian que el conocimiento curricular del profesorado regula las expectativas sobre lo que los estudiantes pueden aprender y, por tanto, influye en el nivel de formalización matemática que se promueve en la enseñanza.

En conjunto, el análisis permitió caracterizar el conocimiento especializado del profesorado como un sistema articulado de conocimiento que configura de manera diferenciada el desarrollo del pensamiento algebraico temprano en la enseñanza de la generalización de patrones.

El segundo objetivo específico, permitió identificar criterios conceptuales y empíricos que diferenciar los subdominios *KoT, KMT y KMLS* del modelo *MTSK* en la enseñanza de la generalización de patrones. Esta diferenciación se sustentó en la articulación entre los referentes del pensamiento algebraico temprano y del modelo MTSK con las evidencias empíricas del estudio, lo que posibilitó construir un marco interpretativo para reconocer las distintas manifestaciones del conocimiento especializado del profesorado.

A partir de esta articulación fue posible establecer criterios conceptuales que delimitan las fronteras analíticas entre los subdominios *KoT, KMT y KMLS*. Dichas fronteras no fueron

concebidas como compartimentos estancos del conocimiento especializado; se entendieron como distinciones metodológicas construidas con fines analíticos, dado que en la práctica profesoral las dimensiones matemática, didáctica y curricular suelen manifestarse de manera interrelacionada dentro de una misma acción o discurso profesoral. En este sentido, la diferenciación entre subdominios no respondió únicamente al contenido temático de las respuestas; también consideró la función epistemológica que cada evidencia cumplía dentro de la actividad matemática y didáctica asociada a la generalización de patrones.

En este sentido, el subdominio *KoT* se identificó en aquellas evidencias relacionadas con la comprensión del contenido matemático del patrón, incluyendo definiciones, propiedades, procedimientos, registros de representación y características del resultado matemático. El subdominio *KMT* se evidenció en las decisiones didácticas orientadas a la enseñanza del contenido, tales como el diseño de tareas, el uso de recursos y las estrategias de intervención profesoral. Finalmente, el subdominio *KMLS* se manifestó en las referencias a los estándares de aprendizaje, las expectativas sobre los logros de los estudiantes y la secuenciación de los contenidos dentro del currículo escolar.

De manera complementaria, el estudio permitió identificar indicadores empíricos específicos que posibilitaron clasificar las evidencias del conocimiento especializado del profesorado dentro de cada subdominio. Estos criterios fueron operacionalizados mediante matrices analíticas de fronteras, criterios de evidencia, familias de códigos y meta-matrices transversales, las cuales orientaron el proceso de codificación y permitieron distinguir con mayor precisión las manifestaciones del conocimiento matemático, didáctico y curricular del profesorado en la enseñanza de la generalización de patrones. El cumplimiento de este objetivo permitió refinar la operacionalización empírica del modelo *MTSK* en el contexto específico de la

enseñanza de la generalización de patrones, proporcionando un marco analítico que facilitó la identificación y caracterización del conocimiento especializado del profesorado en los subdominios *KoT, KMT y KMLS*. Con el propósito de explicitar estos criterios analíticos y transparentar las decisiones metodológicas que orientaron el proceso de codificación, a continuación, se presenta la matriz de fronteras analíticas, la cual sintetiza los criterios discriminadores utilizados para diferenciar los subdominios *KoT, KMT* y *KMLS*, junto con ejemplos ilustrativos y la justificación metodológica correspondiente.

Tabla 14

Fronteras desde la evidencia empírica

Matriz de Fronteras Analíticas	Criterio discriminador principal	Ejemplo que PERTENECE al primer subdominio	Ejemplo que NO pertenece (va al segundo)	Justificación metodológica
KoT vs. *KMT*	Finalidad del conocimiento: *KoT* = conocer el contenido matemático *KMT* = conocer cómo enseñarlo	"Una generalización algebraica expresa la relación funcional entre la posición del término y su valor mediante una variable" [*KoT*: definición del objeto]	"Para enseñar generalización, primero les doy casos particulares (términos 1, 2, 3), luego les pregunto por el término 50 para forzar el salto a la regla general" [*KMT*: estrategia didáctica]	*KoT* responde "¿qué/por qué es? (qué es, cómo funciona y por qué es válido)" (epistemología del contenido). Procedimientos, representaciones y fenomenología. *KMT* responde "¿cómo lo hago comprensible?" (mediación didáctica). Ambos pueden coexistir en un mismo enunciado docente, pero se codifican por separado según su función analítica.
KoT vs. *KMT*	Objeto vs. Medio:	"El patrón 2, 5, 8, 11... puede	"Uso primero la	La representación como objeto

	Si la representación es el objeto de estudio = *KoT* Si la representación es el medio de enseñanza = *KMT*	representarse como tabla (posición-valor), como secuencia de Figuras, o algebraicamente como 3n-1. Todas son equivalentes porque expresan la misma relación funcional" [*KoT*: conocimiento de registros del objeto y sus relaciones]	representación Figural porque es más concreta, luego la tabla para sistematizar, y finalmente introduzco la expresión algebraica" [*KMT*: secuencia didáctica intencional]	matemático (registros, equivalencias, conversiones) es *KoT*. La representación como recurso pedagógico (cuál uso primero, por qué, con qué fin) es *KMT*.
KoT vs. *KMLS*	Naturaleza del saber: *KoT* = saber disciplinar *KMLS* = saber curricular/evolutivo	"Los patrones cuadráticos tienen segunda diferencia constante; su regla general incluye un término de grado 2 ($an^2 + bn + c$)" [*KoT*: propiedad matemática]	"Los patrones cuadráticos se introducen en 7° u 8° básico porque requieren comprensión previa de patrones lineales y operaciones con potencias" [*KMLS*: ubicación curricular y secuenciación]	*KoT* describe qué es el contenido matemáticamente. *KMLS* describe cuándo/dónde se ubica curricularmente y por qué (complejidad evolutiva, prerrequisitos). Un contenido puede ser matemáticamente complejo (*KoT*) y ubicarse tarde en el currículo (*KMLS*), pero son conocimientos distintos.
KMT vs. *KMLS*	Decisión vs. Prescripción:	"Yo introduzco patrones	"El currículo nacional	*KMT* refleja el cómo enseño

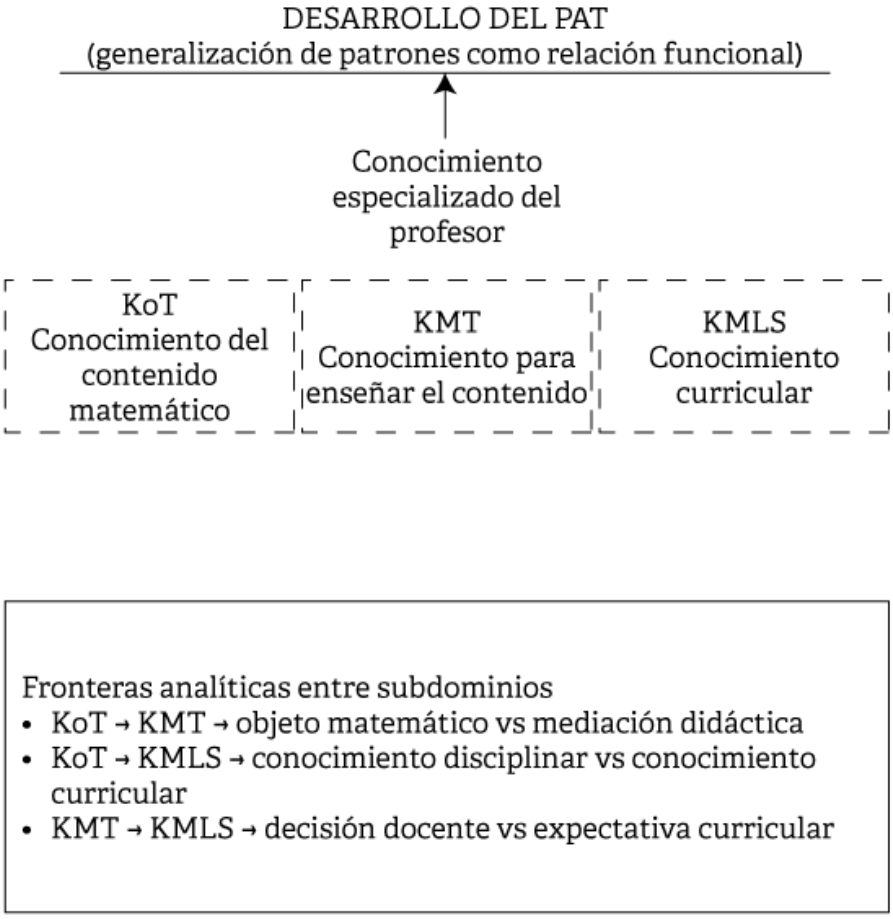
	KMT = decisión didáctica del profesor *KMLS* = expectativa institucional/curricular	primero con material concreto (fichas de colores) porque permite manipular y visualizar el crecimiento" [*KMT*: decisión pedagógica personal]	prescribe que en 3° básico los estudiantes identifiquen y describan patrones con material concreto" (*KMLS*: estándar oficial)	yo/cómo se puede enseñar (teorías, recursos, tareas). *KMLS* refleja el qué se prescribe que se enseñe, a qué edad, en qué secuencia (normativa, expectativa). Ambos pueden coincidir, pero la fuente del conocimiento difiere.
KMT vs. *KMLS* (caso ambiguo)	Intencionalidad: Si refiere a lo que el profesor HACE = *KMT* Si refiere a lo que se espera que el estudiante logre = *KMLS*	"Uso patrones lineales antes que cuadráticos porque didácticamente es más claro iniciar con relaciones de proporcionalidad directa" [*KMT*: justificación didáctica de secuencia]	"En 4° básico se espera que los estudiantes completen y creen patrones numéricos simples; en 6° que encuentren reglas generales verbales; en 8° que usen notación algebraica" [*KMLS*: progresión de expectativas curriculares]	La secuenciación didáctica (qué enseño primero y por qué pedagógicamente) es *KMT*. La secuenciación curricular (qué corresponde a cada nivel según estándares) es *KMLS*. La frontera está en la fuente de legitimidad: decisión docente vs. prescripción institucional.

Nota: La matriz permite la identificación de la **función predominante del conocimiento movilizado** en cada evidencia empírica, distinguiendo entre su dimensión disciplinar (*KoT*), didáctica (*KMT*) o curricular (*KMLS*). Este procedimiento responde a la necesidad de asegurar consistencia analítica en el proceso de codificación y de hacer explícitos los criterios utilizados para la interpretación de las evidencias dentro del marco del modelo *MTSK*.

Fuente: elaboración propia.

Figura 19

Modelo analítico del conocimiento especializado del profesor en la enseñanza de la generalización de patrones.



Fuente: elaboración propia.

La Figura 19 sintetiza el marco analítico construido en el estudio para analizar el conocimiento especializado del profesorado en la enseñanza de la generalización de patrones. En el núcleo se sitúa el objeto matemático central del estudio, la generalización de patrones entendida como relación funcional entre magnitudes, que constituye una base para el desarrollo del pensamiento algebraico temprano. Alrededor de este núcleo se articulan los tres subdominios *KoT, KMT* y *KMLS* del modelo *MTSK*.

Las fronteras analíticas entre estos subdominios se establecen a partir de criterios conceptuales que permiten distinguir la naturaleza del conocimiento que se moviliza en el discurso del profesorado. Estas fronteras no representan separaciones ontológicas del conocimiento del profesor, constituyen distinciones analíticas orientadas a identificar las funciones epistemológicas, didácticas y curriculares que configuran el conocimiento especializado del profesor en la enseñanza de la generalización de patrones.

El tercer objetivo específico, orientado a analizar las interrelaciones entre los subdominios *KoT, KMT* y *KMLS* evidenciadas por los profesores de Educación Básica Primaria en la enseñanza de la generalización de patrones. Estas interrelaciones explican las diferencias observadas en la forma en que los profesores promueven procesos de generalización en el aula y permiten comprender por qué, en algunos casos, la enseñanza se orienta hacia formas empíricas o recursivas de generalización, mientras que en otros casos se promueve la construcción de relaciones funcionales propias del pensamiento algebraico temprano.

De este modo, el cumplimiento de este objetivo permitió evidenciar que el desarrollo del pensamiento algebraico temprano depende de la articulación dinámica entre los subdominios *KoT, KMT* y *KMLS*, lo que aporta una comprensión más integrada del conocimiento especializado del profesorado en la enseñanza de la generalización de patrones.

Interrelación entre *KoT* y *KMT*, el análisis evidenció que las decisiones didácticas de los profesores se encuentran estrechamente vinculadas con la forma en que conceptualizan el objeto matemático asociado a la generalización de patrones. Cuando el patrón es comprendido como una secuencia observable basada en regularidades aritméticas, las estrategias de enseñanza se orientan hacia el conteo, la extensión de secuencias y la identificación de cambios entre términos consecutivos. En contraste, cuando el patrón es conceptualizado como una relación funcional

entre magnitudes, las estrategias didácticas tienden a promover la construcción de reglas generales, el análisis de covariación y el uso de expresiones algebraicas para describir la relación entre variables.

Estos resultados permiten concluir que la estructura del conocimiento del contenido condiciona la naturaleza del conocimiento para la enseñanza, evidenciando que la forma en que el profesor comprende el objeto matemático influye directamente en la manera en que lo transforma en contenido enseñable.

Interrelación entre *KMT* y *KMLS*, el análisis también permitió identificar que las decisiones didácticas del profesorado se encuentran mediadas por su interpretación de los estándares de aprendizaje y por las expectativas curriculares asociadas a los distintos niveles escolares. Los profesores participantes consideran que la generalización funcional constituye un contenido propio de niveles educativos posteriores, lo que conduce a diseñar tareas centradas en la identificación de regularidades recursivas o en la extensión de secuencias numéricas. En este sentido, el conocimiento de los estándares de aprendizaje regula el alcance del conocimiento para la enseñanza, condicionando el tipo de actividades que se consideran apropiadas para promover el pensamiento algebraico en la Educación Básica Primaria.

Interrelación entre *KoT* y *KMLS***,** mostraron que las concepciones del contenido matemático influyen en la manera en que los profesores interpretan el currículo escolar. Cuando el patrón se concibe como una relación funcional, los profesores tienden a interpretar los estándares de aprendizaje de manera más amplia, anticipando aprendizajes vinculados al desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

Por el contrario, cuando el patrón se interpreta principalmente como una secuencia numérica, el currículo se entiende en términos de tareas asociadas a la continuación de

secuencias o a la identificación de regularidades simples. Esto evidencia que el conocimiento del contenido matemático también incide en la forma en que los profesores interpretan y aplican los estándares curriculares.

6.1 Aportes de la Investigación

La presente investigación aporta al campo de la Educación Matemática en tres niveles complementarios: confirmación de resultados reportados en la literatura, ampliación teórica del conocimiento sobre el profesorado de Educación Básica Primaria en el contexto del pensamiento algebraico temprano y problematización de ciertos supuestos presentes en el campo de *Early Algebra*. Estas contribuciones se articulan a partir del análisis del conocimiento especializado del profesorado mediante el modelo *MTSK*.

Como *resultados que confirma la literatura*: en primer lugar, se confirman diversas tendencias ampliamente documentadas en la investigación sobre pensamiento algebraico temprano y conocimiento del profesor. Uno de los hallazgos más consistentes del estudio es que la generalización algebraica no depende únicamente del uso de expresiones simbólicas; requiere la articulación entre distintos componentes del conocimiento matemático. En los casos analizados, la construcción de la generalización emerge cuando se coordinan procedimientos matemáticos, definiciones y fundamentos del contenido, registros de representación y fenómenos que otorgan significado al patrón.

Este resultado coincide con investigaciones que sostienen que el desarrollo del pensamiento algebraico temprano surge de la articulación entre diferentes formas de representación y razonamiento matemático, y no exclusivamente del uso de símbolos algebraicos. Aunado a lo anterior, los hallazgos del estudio se alinean con los planteamientos desarrollados por Radford (2010, 2015, 2022), Vergel (2014, 2019), Kaput et al. (2017) y

Carraher y Schliemann (2019), quienes sostienen que la generalización algebraica implica una coordinación progresiva entre procedimientos, representaciones y significados matemáticos.

En segundo lugar, los resultados del estudio confirman que los procesos de generalización escolar suelen permanecer en niveles empíricos o recursivos, incluso cuando se trabaja con tareas diseñadas para promover la generalización algebraica. En los casos de Sara y Cristóbal, la generalización se manifiesta principalmente a través de la extensión de secuencias, el reconocimiento de regularidades y la aplicación de procedimientos recursivos, sin llegar a formular una relación funcional general entre variables. Este resultado coincide con investigaciones sobre pensamiento algebraico temprano que muestran que tanto estudiantes como profesores tienden a permanecer en formas de generalización empírica o inductiva, y que la transición hacia la generalización funcional constituye un proceso cognitivamente complejo. En este sentido, los hallazgos del estudio confirman lo señalado por Radford (2010, 2015), Vergel (2015) y Levin y Walkoe (2022) respecto a las dificultades asociadas a la construcción de generalizaciones estructurales.

Un tercer resultado que confirma la literatura se relaciona con el papel de los registros de representación en la construcción de la generalización algebraica. El análisis realizado muestra que los registros pictóricos, tabulares y simbólicos no funcionan únicamente como soportes expresivos; también actúan como indicadores del tipo de objeto matemático que el profesor construye al abordar los patrones. En particular, el estudio evidencia que la generalización funcional emerge cuando el registro simbólico permite sintetizar la estructura previamente identificada en registros pictóricos y tabulares. Este resultado coincide con investigaciones sobre registros semióticos y pensamiento algebraico temprano, particularmente con los trabajos de

Duval sobre registros de representación, Radford sobre procesos de objetivación, y estudios desarrollados por Flores-Medrano et al. (2014) y Carrillo-Yañez et al. (2018).

El objetivo general de la investigación se alcanza al demostrar que la enseñanza de la generalización de patrones se encuentra profundamente condicionada por la manera en que el profesor *conceptualiza el patrón, organiza las mediaciones didácticas y posiciona curricularmente la generalización dentro del proceso de aprendizaje matemático*. Esta caracterización permite comprender cómo el conocimiento especializado del profesorado configura las condiciones epistemológicas y didácticas que favorecen o limitan el desarrollo del pensamiento algebraico temprano en la Educación Básica Primaria.

Como *resultados que amplían la literatura*, además de confirmar tendencias presentes en la investigación previa, el estudio aporta elementos que amplían la comprensión del conocimiento del profesorado en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, particularmente desde la articulación entre el modelo *MTSK* y el campo de Early Algebra.

Uno de los aportes más relevantes del estudio consiste en la reconstrucción epistemológica del subdominio *KoT* en el contexto de la generalización de patrones. Los resultados muestran que el conocimiento del contenido matemático del profesor trasciende la resolución de tareas de patrones e implica una forma particular de configurar epistemológicamente el objeto matemático "patrón". El análisis permitió identificar transformaciones conceptuales que reflejan distintos niveles de construcción del objeto matemático, entre las que destacan el tránsito desde la secuencia observable hacia la relación funcional, desde la letra entendida como símbolo nominal hacia la variable como número general, desde la verificación empírica hacia la validez universal, y desde el símbolo como instrumento de cálculo hacia su función como condensación estructural del patrón.

Otro aporte teórico del estudio consiste en la identificación de configuraciones epistemológicas del conocimiento del profesor frente a la generalización de patrones. No son estilos de enseñanza genéricos, implica estructuras de conocimiento del profesor que integran: ¿qué conocimiento posee el profesor (conceptos, procedimientos, representaciones) ?, ¿cómo construye dicho conocimiento (intuiciones, estrategias, recursos) ?, ¿cómo lo aplica en el aula (tareas, preguntas, intervenciones)?

El análisis permitió reconocer tres configuraciones principales del conocimiento matemático del profesorado: (i) una configuración empírico-descriptiva, centrada en la observación de regularidades y la extensión de secuencias; (ii) una configuración recursivo-transicional, basada en procedimientos iterativos que permiten anticipar términos sucesivos; y, (iii) una configuración funcional-estructural, en la que el patrón se conceptualiza como una relación general entre variables. En este contexto, el término configuraciones alude a maneras específicas, organizadas y consistentes mediante las cuales el profesor comprende, estructura y desarrolla la enseñanza de contenidos relacionados con la generalización de patrones. Estas configuraciones trascienden los estilos generales de enseñanza y se vinculan con estructuras propias del conocimiento del profesor.

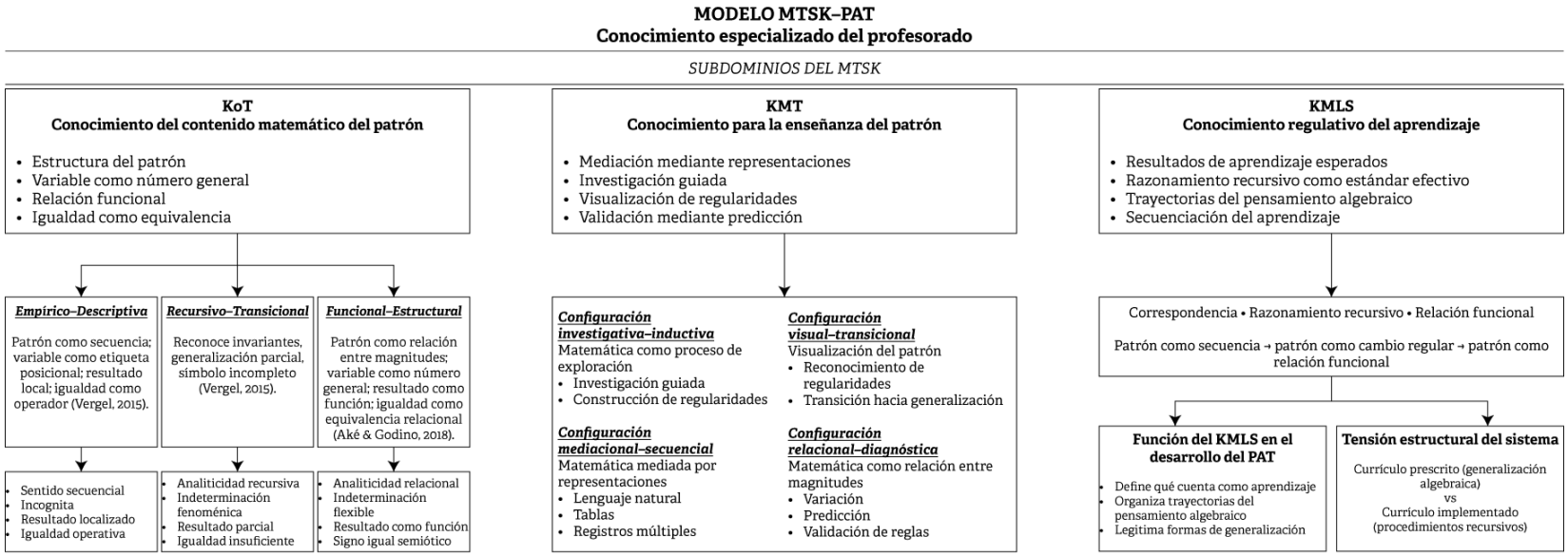
La *configuración empírico-descriptiva*, se proyecta desde la forma en que el profesor enfoca la enseñanza en que los estudiantes observen, describan y continúen secuencias, sin buscar reglas generales ni explicaciones. La generalización es visual y concreta, pero no estructural. Por su parte, la *configuración recursivo-transicional*, se reconoce cierta regularidad entre los términos del patrón y se utilizan procedimientos repetitivos (como *"sumar de tantos en tantos"*) para predecir valores. Aquí comienza la transición hacia una comprensión más estructurada, pero aún sin formular relaciones funcionales generales. En la *configuración*

funcional-estructural, el patrón se comprende como una función general que relaciona dos variables (por ejemplo, número del término y cantidad de objetos). El profesor promueve el uso de expresiones algebraicas, la validación de reglas para cualquier caso y el uso articulado de representaciones (dibujos, tablas, símbolos). Esta tipología constituye un aporte relevante porque permite comprender cómo el profesorado configura el objeto matemático "patrón" en su práctica de enseñanza. Aunque la literatura sobre pensamiento algebraico temprano ha identificado niveles de generalización en estudiantes, existen pocos estudios que vinculen estas formas de generalización con el conocimiento del profesor de Educación Básica Primaria analizado desde el modelo *MTSK*.

Un tercer aporte se relaciona con el plano metodológico. El estudio muestra cómo el análisis del conocimiento del profesor puede desarrollarse mediante la integración de enfoques deductivos y emergentes, articulando el marco teórico del modelo *MTSK* con categorías que emergen del análisis empírico de los datos. Esta integración metodológica entre enfoques *Top-Down* y *Bottom-Up* permitió refinar la operacionalización del modelo *MTSK* en el estudio del pensamiento algebraico temprano, aportando criterios analíticos para identificar evidencias del conocimiento especializado del profesorado en los subdominios *KoT*, *KMT* y *KMLS*.

Figura 20.

Modelo conceptual del conocimiento especializado del profesorado para la enseñanza de la generalización de patrones y el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.



Nota: las configuraciones del conocimiento del profesor se generan en diferentes niveles al desarrollar el pensamiento algebraico temprano, en particular en la enseñanza de la generalización de patrones.

Fuente: elaboración propia.

Como *resultados que proyectan tensiones en la literatura*, algunos hallazgos del estudio permiten problematizar ciertos supuestos presentes en la literatura sobre *Early Algebra*. Una primera tensión se relaciona con la idea ampliamente difundida de que el trabajo con patrones favorece de manera natural el desarrollo del pensamiento algebraico. Los resultados muestran que la presencia de tareas basadas en patrones no garantiza la emergencia de generalizaciones algebraicas, ya que estas pueden ser abordadas desde enfoques puramente recursivos o procedimentales. En este sentido, el estudio evidencia que el potencial *algebraizante* de las tareas con patrones depende en gran medida de la forma en que el profesor conceptualiza el objeto matemático y de las estrategias didácticas que emplea para mediar su enseñanza. Esto sugiere que el desarrollo del pensamiento algebraico temprano está estrechamente vinculado con la configuración del conocimiento especializado del profesor, más que con las características de las tareas en sí mismas.

Otra tensión relevante se relaciona con el papel de la fenomenología y de los contextos en la enseñanza de los patrones. En algunos de los casos analizados, el uso de contextos o fenómenos facilita la observación de regularidades, pero no conduce necesariamente a la construcción de relaciones estructurales. En estas situaciones, los fenómenos contribuyen a reforzar formas de razonamiento empírico basadas en la observación de cambios entre términos. Este resultado cuestiona la idea presente en algunos enfoques de enseñanza según la cual el uso de contextos reales favorece automáticamente la comprensión algebraica. Los resultados del estudio sugieren que los fenómenos cumplen una función epistemológica relevante únicamente cuando permiten identificar invariantes y relaciones funcionales dentro del patrón.

En conjunto, los resultados del estudio confirman que el desarrollo del pensamiento algebraico temprano depende de la articulación entre procedimientos, registros de representación

y significados matemáticos, tal como lo plantean investigaciones previas sobre *Early Algebra*. Al mismo tiempo, amplían la literatura al mostrar que estas articulaciones pueden comprenderse como estructuras epistemológicas del conocimiento del profesor, identificables mediante el modelo *MTSK*. Finalmente, los resultados permiten problematizar ciertos supuestos del campo, particularmente la idea de que el trabajo con patrones conduce de forma natural a la generalización algebraica. El estudio evidencia que dicho proceso depende de manera crítica de la forma en que el profesorado conceptualiza el objeto matemático y de cómo media su enseñanza en el aula.

Entre las limitaciones y perspectiva de la investigación, se manifiesta que, al tratarse de un estudio cualitativo basado en un número reducido de casos, los resultados obtenidos deben interpretarse en relación con el contexto específico en el que se desarrolló la investigación. Asimismo, el análisis se centró en cuestionarios y una entrevista con el profesorado de Educación Básica Primaria. Futuras investigaciones podrían incorporar observaciones de aula que permitan examinar con mayor profundidad las interacciones entre profesores y estudiantes en situaciones de generalización de patrones. Del mismo modo, aunque el estudio permitió reconocer algunas conexiones estructurales vinculadas al tránsito entre pensamiento aritmético y pensamiento algebraico, el diseño metodológico no contempló una exploración específica del subdominio Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (*KSM*). En este sentido, futuras investigaciones podrían incorporar instrumentos y situaciones didácticas orientadas explícitamente a analizar cómo el profesorado establece conexiones inter conceptuales entre distintos contenidos matemáticos durante la enseñanza de la generalización de patrones.

Por otra parte, los resultados abren nuevas preguntas de investigación relacionadas con el conocimiento especializado del profesorado en el desarrollo del pensamiento algebraico

temprano. Entre ellas destacan interrogantes como: ¿Cómo se transforma el conocimiento especializado del profesorado cuando participa en procesos de formación orientados al desarrollo del pensamiento algebraico temprano? ¿Qué papel desempeñan las concepciones del profesorado sobre la naturaleza del álgebra en la forma en que enseñan la generalización de patrones? ¿Cómo se manifiestan los subdominios del modelo *MTSK* en contextos de interacción directa entre profesores y estudiantes durante la resolución de tareas de generalización?

Explorar estas cuestiones podría contribuir a profundizar en la comprensión del papel del conocimiento especializado del profesorado en la enseñanza del álgebra en los primeros niveles escolares. Particularmente, profundizar en las conexiones estructurales entre aritmética y álgebra podría contribuir a ampliar la comprensión del conocimiento especializado del profesorado desde la perspectiva del subdominio *KSM* del modelo *MTSK*, especialmente en relación con el desarrollo progresivo del pensamiento algebraico temprano.

Referencias

Adame-Esparza, A., y de Lira-Lozano, E. del R. (2019). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas (*MTSK*). *DOCERE*, 29–32. https://doi.org/https://doi.org/10.33064/2019docere202202

Adamuz-Povedano, N., Fernández-Ahumada, E., Teresa García-Pérez, M., y Montejo-Gámez, J. (2021). Developing number sense: An approach to initiate algebraic thinking in primary education. *Mathematics*, *9*(5). https://doi.org/10.3390/math9050518

Aké, L. P. (2021). El carácter algebraico en el conocimiento matemático de maestros en formación. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED, 49*, 15–34. https://revistas.upn.edu.co/index.php/TED/article/view/9871

Aké, L. P., y Godino, J. (2018). Análisis de tareas de un libro de texto de primaria desde la perspectiva de los niveles de algebrización. *Educación matemática*, *30*(2). https://doi.org/10.24844/em3002.07

Alsina, Á. (2019). Del razonamiento lógico-matemático al álgebra temprana en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación matemática en la Infancia*. *8*(1), 1–19. http://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6

Alsina, Á., y Acosta, Y. (2018). Iniciación al álgebra en Educación Infantil a través del pensamiento computacional: una experiencia sobre patrones con robots educativos programables. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación matemática*, *52*. https://revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/350

Badillo, E. (2019). *Investigación sobre el profesor de matemáticas: práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional*. Universidad de Salamanca.

Ball, D., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*,59 (5), 389–407). SAGE Publications Inc. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Bautista-Cárdenas, N. P. (2022). Proceso de la investigación cualitativa: epistemología, metodología y aplicaciones. *Revista Investigaciones en Educación, 13*(2); 195-201. https://uniclanet.unicla.edu.mx/assets/contenidos/152520240111214129.pdf

Bisquerra, R. (2019). *Metodología de la investigación educativa*. Editorial La Muralla.

Bonilla-Mejía, L., Londoño-Ortega, E., Cardona-Sosa, L., y Trujillo-Escalante, L. D. (2018). ¿Quiénes son los profesores en Colombia? Características generales y brechas regionales. *Documentos de Trabajo Sobre Economía Regional y Urbana*, *276*. https://opinioncaribe.com/wp-content/uploads/2018/12/DTSERU-276.pdf

Cadrecha, M. Á. (1990). John Dewey: propuesta de un modelo educativo. I. Fundamentos. *Aula Abierta*, *55*, 61–85.

Carraher, D. W., y Schliemann, A. D. (2019). Early algebraic thinking and the US mathematics standards for grades K to 5 / El pensamiento algebraico temprano y los estándares matemáticos en la Educación Básica Primaria (6–12 años) en Estados Unidos. *Infancia y Aprendizaje*, *42*(3). https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1638570

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (*MTSK*) model*. *Research in Mathematics Education*, *20*(3). https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Chimoni, M., Pitta-Pantazi, D., y Christou, C. (2021). The impact of two different types of instructional tasks on students' development of early algebraic thinking. *Infancia y Aprendizaje*, *44*(3), 589–624. https://doi.org/10.1080/02103702.2020.1778280

Climent, N., Escudero, D., Rojas, N., Carrillo, J., Muñoz, C., y Sosa, L. (2014). El conocimiento del profesor para la enseñanza de la matemática. *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas* 42, 43–70). https://www.researchgate.net/publication/267392675

Codes, M., y Contreras, L. C. (2022). El conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas. In *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) 10 años de camino.* https://doi.org/10.2307/j.ctv2zp4vp1.12

Creswell, J. W., y Creswell, J. D. (2022). Research Design: Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches, 5th Edition. *Journal of Electronic Resources in Medical Libraries*, *19*(1–2). https://doi.org/10.1080/15424065.2022.2046231

De Miguel, R. (2005). La entrevista en profundidad a los emisores y los receptores de los medios. *Investigar En Comunicación: Guía Práctica de Métodos y Técnicas de Investigación Social En Comunicación.*

de Sousa, J. R., Silva Gusmão, T. C. R., Font, V., y Lando, J. C. (2020). Task (Re)design to enhance the didactic-mathematical knowledge of teachers. *Acta Scientiae*, *22*(4). https://doi.org/10.17648/ACTA.SCIENTIAE.5711

English, L. D., y Kirshner, D. (2015). Handbook of International Research in Mathematics Education, Third Edition. In *Handbook of International Research in Mathematics Education, Third Edition*. https://doi.org/10.4324/9780203448946

Escobar-Pérez, J., y Cuervo-Martínez, Á. (2008). Validez de contenido y juicio de expertos: una aproximación a su utilización. *Avances en medición, 6*(1), 27–36. https://www.humanas.unal.edu.co/lab_psicometria/application/files/9416/0463/3548/Vol_6._Articulo3_Juicio_de_expertos_27-36.pdf

Escudero, A. M., Muñoz-Catalán, M. de la C., y Yáñez, J. C. (2021). Conocimiento especializado de un profesor de educación infantil al enseñar cuerpos geométricos. *Zetetike*, *29*. https://doi.org/10.20396/zet.v29i00.8661819

Escudero- Ávila, Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L. C., y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA. Revista de Investigación En Didáctica de La Matemática*, *10*(1). https://doi.org/10.30827/pna.v10i1.6095

Escudero-Ávila, Contreras, L. C., y Vasco, D. (2016). Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (*KMT*). In J. Carrillo, L.C. Contreras, y M. Montes (Eds.). *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática* (pp. 35-41.). https://doi.org/10.13140/2.1.3107.4246

Escudero-Ávila, D. I., y Carrillo Yáñez, J. (2020). El Conocimiento Didáctico del Contenido: Bases teóricas y metodológicas para su caracterización como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. *Educación matemática*, *32*(2). https://doi.org/10.24844/em3202.01

Espinoza, G. (2020). Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de educación media sobre el concepto de función. *Pontificia Universidad Católica de Valparaíso*.

Ferreira, M. C. N., Ponte, J. P., y Ribeiro, A. J. (2022). Towards an approach to teachers' professional development: how to work with algebraic thinking in the early years. *PNA*, *16*(2). https://doi.org/10.30827/pna.v16i2.22234

Flores, C. D., y García, G. A. M. (2022). Conceptualizations of slope in Colombian intended mathematics curriculum. *Educación Matemática*, *34*(2). https://doi.org/10.24844/EM3402.08

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, Á., y Carrillo, J. (2014). Un Marco teórico para el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas. *10.13140/2.1.3107.4246*, *October*.

Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación matemática*, *26*.

Franco Seguí, J., y Alsina, Á. (2023). Evaluando el conocimiento especializado para enseñar estadística y probabilidad: Elaboración y validación del Cuestionario *MTSK*-estocástico. *Uniciencia*, *37*(1). https://doi.org/10.15359/ru.37-1.5

Fuentes, C. (2020). Uso del Modelo *MTSK* para la Caracterización del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas en Secundaria: El caso de la Proporcionalidad. *Año XVI-Número*, *59*, 33–63. http://www.fisem.org/www/index.phphttps://union.fespm.es/index.php/UNION

Garner, B., Munson, J., Krause, G., Bertolone-Smith, C., Saclarides, E. S., Vo, A., y Lee, H. S. (2023). The landscape of US elementary mathematics teacher education: course requirements for mathematics content and methods. *Journal of Mathematics Teacher Education*. https://doi.org/10.1007/s10857-023-09593-4

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M., y Wilhelmi, M. R. (2014). Algebrization levels of school mathematics activity. Implication for primary school teacher education. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(1), 199–219. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965

Godino, J. D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en educación matemática: Fundamentos, herramientas y aplicaciones*. Aula Magna Proyecto Clave McGraw Hill. ttps://hdl.handle.net/10481/93596

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, *31*(57), 90–113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inical de profesores de matemáticas de secundaria* [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. http://hdl.handle.net/10481/1483

Gómez, P., y Rico, L. (2002). *Análisis didáctico, conocimiento didáctico y formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. http://funes.uniandes.edu.co/376/

Gorgorió, N., y Albarracín, L. (2019). El conocimiento matemático previo a la formación inicial de los maestros: necesidad y concreción de una prueba para su evaluación. *Investigación Sobre El Profesor de Matemáticas: Formación, Práctica de Aula, Conocimiento y Competencia Profesional*.

Grossman, P., Wilson, S., y Shulman, L. (2005). Profesores de sustancia: el conocimiento de la materia para la enseñanza. *Revista de Curriculum y Formacion Del Profesorado*, *9*(2). https://www.redalyc.org/pdf/567/56790203.pdf

Hernández, R. (2014). Metodología de la investigación. *Metodología de la Investigación.* McGraw Hill.

Hohensee, C. (2017). Preparing elementary prospective teachers to teach early algebra *Journal*. *of Mathematics Teacher Education*, *20*(3). https://doi.org/10.1007/s10857-015-9324-9

Jungbluth, A., Silveira, E., y Grando, R. C. (2022). Álgebra no Currículo de Matemática dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. *Educação Matemática Pesquisa: Revista Do Programa de Estudos Pós-Graduados Em Educação Matemática*, *24*(1), 250–288. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2022v24i1p250-288

Kaput, J. J., Carrahe, D. W., y Blanton, M. L. (2017). Algebra in the Early Grades. In *Algebra in the Early Grades*. https://doi.org/10.4324/9781315097435

Kieran, C., Pang, J., Swee, D. S., y Ng, F. (2016). *Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching. Springer Nature.* http://www.springer.com/series/14352

Knuth, E. J., Alibali, M. W., Mcneil, N. M., Weinberg, A., Stephens, A. C., Knuth, E. J., Alibali, M. W., Mcneil, N. M., Weinberg, A., y Stephens, A. C. (2011). Middle School Students' Understanding of Core Algebraic Concepts: Equivalence y Variable. *ZDM-International Reviews on Mathematical Education*, *37*(1), 68–76. https://doi.org/10.1007/BF0255899

Lagies, J. (2021). Orientation framework of primary school teachers teaching mathematics out-of-field– insights into a qualitative-reconstructive documentary method study. *European Journal of Teacher Education*, *44*(5). https://doi.org/10.1080/02619768.2021.1915978

Liñán, M. del M., Barrera, V. J., y Contreras-González, L. C. (2016). Conocimiento de los temas (*KoT*). In *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 12–20). SGSE. https://www.researchgate.net/publication/305205018

Litke, E., Corven, J., y Sternberg, K. A. (2023). Algebra-focused features of instruction: an integrated investigation of curricular guidance and instructional enactment. *Journal of Mathematics Teacher Education*. https://doi.org/10.1007/s10857-023-09573-8

Llinares, S. y Fernández, C. (2021). Mirar profesionalmente la enseñanza de las matemáticas: características de una agenda de investigación en Didáctica de la Matemática. In *La Gaceta de la RSME*, 24, 185-205. https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=1625

Llinares, S. (2018). *La formación del profesor de matemáticas. Realidades y desafíos*.

Llinares, S., Breda, A., Climent, N., Fernández, C., Font, V., Lupiáñez, J. L., Moreno, M., Perez-Tyteca, P., Ruiz-Hidalgo, J. F., y Sánchez, A. (2022). Formación y desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. *Mathematics Teacher Education and Professional Development*.

Mason, J. (2018). *How Early Is Too Early for Thinking Algebraically?* https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_14

Maturana, H. (2023). *El conocimiento especializado de un profesor de matemáticas, cuando enseña sucesiones numéricas: relaciones entre subdominios en la selección y uso de ejemplos* [Tesis doctoral, Universidad de Huelva]. https://ariasmontano.uhu.es/entities/publication/09a251db-e23c-4515-a23d-98bfb5ff307

McMillan, J. H., y Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa una introducción conceptual*. Pearson Educación.

Meléndez-Cruz, J. A., Flores-Medrano, E., y Hernández-Rebollar, L. A. (2023). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas al analizar una secuencia de suma de fracciones. *Uniciencia*, *37*(1). https://doi.org/10.15359/ru.37-1.11

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares* [Documento en línea]. https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-339975_recurso_6.pdf

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias* [Documento en línea]. https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-340021_recurso_1.pdf

Merriam, S. B. (2009). *Qualitative Research A Guide to Design and Implementation Revised and Expanded from Qualitative Research and Case Study Applications in Education*. Ed. Tercera.

Mochón, S., y Morales Flores, Melchor. (2010). En qué consiste el" conocimiento matemático para la enseñanza" de un profesor y cómo fomentar su desarrollo: un estudio en la escuela primaria. *Educación matemática*, *22*(1), 87–113. https://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v22n1/v22n1a5.pdf

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria* [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/desarrollo-de-pensamiento-relacional-y-comprension-del-signo-igual-por-alumnos-de-tercero-de-educacion-primaria-tesis-doctoral/

Montes, M. Á., y Carrillo, J. (2017). *Introducción al modelo MTSK: origen e investigaciones realizadas*. https://www.researchgate.net/publication/313824049

Montoya, P. N. (2005). Herramientas para investigar ¿Qué es el estado del arte? *Ciencia y Tecnologia Para La Salud Visual y Ocular*, *5*.

Muñoz-Catalán, M. C., Ramírez-García, M., Joglar-Prieto, N., y Carrillo-Yáñez, J. (2022). Early childhood teachers' specialised knowledge to promote algebraic thinking as from a task

of additive decomposition. *Infancia y Aprendizaje*, *45*(1), 92–128. https://doi.org/10.1080/02103702.2021.1946640

Neubrand, M. (2018). Conceptualizations of professional knowledge for teachers of mathematics. *ZDM - Mathematics Education*, *50*(4), 601–612. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0906-0

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. En *Proceedings of the 3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education* (pp. 115–124). https://scispace.com/pdf/mathematical-competencies-and-the-learning-of-mathematics-38x59w2aha.pdf

Nobrega, M. C., Ribeiro, A. J., y Ponte, J. P. (2021). Prática profissional de professores dos anos iniciais e o pensamento algébrico: contribuições a partir de uma formação continuada. *Educação Matemática Pesquisa, 23*(1), 171–200. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2021v23i1p171-200

Otten, M., van den Heuvel-Panhuizen, M., Veldhuis, M., y Heinze, A. (2019). El desarrollo del razonamiento algebraico en Educación Básica Primaria utilizando una balanza como herramienta de apoyo. *Infancia y Aprendizaje*, *42*(3), 543–589. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1612137

Pecharromán-Gómez, C. (2013). Naturaleza de los objetos matemáticos: representación y significado. *Enseñanza de Las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, *31*(3), 121–134. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v31n3.931

Penalva, V. C., Alaminos, C. A., Francés, G. F., y Santacreu, F. Ó. (2015). *La investigación cualitativa: Técnicas de investigación y análisis con Atlas.ti*. PYDLOS Ediciones.

Penfold, E., y Hoskins, K. (2024). Primary teachers' perceptions of their mathematical knowledge for teaching and the effects of policy on their mathematics teaching. *Research in Mathematics Education, 26*(3), 443–459. https://doi.org/10.1080/14794802.2023.2173639.

Pincheira, N. y Alsina, Á. (2022). Evaluación del conocimiento para enseñar álgebra temprana durante la formación inicial del profesorado de Educación Infantil. *Revista de Investigación en Educación*, *20*(2), 257–276. https://doi.org/10.35869/reined.v20i2.4222

Pincheira, N., Alsina, Á., y Acosta, Y. (2023). ¿Qué conocimientos de álgebra temprana movilizan las tareas que diseña el profesorado en formación de educación infantil? En C. Jiménez-Gestal (ed.). *SEIEM* (pp. 451–458). https://www.researchgate.net/profile/Nataly-Pincheira-Hauck/publication/374925821_Que_conocimientos_de_algebra_temprana_movilizan_las_tareas_que_disena_el_profesorado_en_formacion_de_educacion_infantil/links/653797d25d51a8012b6c4688/Que-conocimientos-de-algebra-temprana-movilizan-las-tareas-que-disena-el-profesorado-en-formacion-de-educacion-infantil.pdf

Pincheira, N. (2023). *Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza del álgebra en edades tempranas en los futuros profesores de educación infantil y primaria.* [Tesis doctoral, Universidad de Girona]. https://www.tdx.cat/handle/10803/689503#page=1

Pincheira, N., y Alsina, Á. (2021a). Teachers' mathematics knowledge for teaching early algebra: A systematic review from the mkt perspective. *Mathematics*, *9*(20), 2590. https://doi.org/10.3390/math9202590

Pincheira, N., y Alsina, Á. (2021b). Towards a characterization of early algebra from the analysis of the contemporary curricula of early childhood education and primary education. *Educacion Matematica*, *33*(1), 137–168. https://doi.org/10.24844/EM3301.06

Pincheira, N., y Alsina, Á. (2024). Mathematical Knowledge of Early Algebra Exhibited by Pre-Service Early Childhood Education Teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 23, 461-487. https://doi.org/10.1007/s10763-024-10478-y

Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 83–98). Graó.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *40*(1), 83–96. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0061-0

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA. Revista de Investigación En Didáctica de La Matemática*, *4*(2), 37–62. https://doi.org/10.30827/pna.v4i2.6169

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization (pp. 303–322*). https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_17

Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de generalización. En *Investigación en didáctica de la matemática: Homenaje a Encarnación Castro*. Comares. https://www.luisradford.ca/pub/2013%20-%20En%20torno%20a%20tres%20problemas%20de%20la%20generalizacion.pdf

Radford, L. (2015). Early Algebraic Thinking: Epistemological, Semiotic, and developmental issues. En S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 209-227). https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_15

Radford, L. (2022). Álgebra temprana: La simplificación de ecuaciones. *Revista de Investigação e Divulgação Em Educação Matemática*, *6*(1). https://doi.org/10.34019/2594-4673.2022.v6.39730

Ramírez, H. E. (2023). *Desarrollo de conocimientos tecnológicos para enseñanza de las matemáticas: Una intervención de diseño con profesores de primaria de la Mixteca Baja de Oaxaca* [Tesis doctoral, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Unidad Zacatenco].

Reyes-Bravo, M., Pascual, M. ª. I., Contreras, L. C., y Estrella, S. (2024). Double view of the mathematics teacher educator*:* Opportunity to identify their knowledge. *PNA, 18*(5), 467–493. https://doi.org/10.30827/pna.v18i5.29431

Ribeiro, A. J., Aguiar, M., Trevisan, A. L., y Elias, H. R. (2023). Exploring learning opportunities for primary teachers: the case of knowledge for teaching early algebra. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *26*(3), 327–356. https://doi.org/10.12802/relime.23.2633

Rojas, N., Flores, P., y Carrillo, J. (2015). Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas de educación básica primaria al enseñar los números racionales. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *29*(51), 143–164. https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a08

Rojas, P., y Vergel, R. (2018). Iniciación al álgebra y pensamiento algebraico temprano: actividades para orientar el trabajo en el aula. *RECME - Revista Colombiana de*

Matemática Educativa, *3*(1), 187–192. https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1149533/document_6.pdf

Romero, J. G., y Batallanos, V. A. Q. (2016). El consentimiento con el otro en la interpretación de la comprensión en matemáticas. *Bolema - Boletim de Educação Matemática, 30*(55), 662–682. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a16

Rowland, T., Huckstep, P., y Thwaites, A. (2003). The knowledge quartet. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *23*(3), 97–102. https://www.redalyc.org/pdf/5757/575763900002.pdf

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B. M., y Earnest, D. (2006). *Bringing out the algebraic character of arithmetic: From children's ideas to classroom practice*. Lawrence Erlbaum Associates.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4–16. https://www.wcu.edu/webfiles/pdfs/shulman.pdf

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-21. https://people.ucsc.edu/~ktellez/shulman.pdf.

Simons, H. (2009). *Case study research in practice.* SAGE Publications. https://doi.org/10.4135/9781446268322

Simons, H. (2011). *El estudio de caso: Teoría y práctica*. Morata. https://proyectoacademico.com/wp-content/uploads/2024/08/Helen-Simons.pdf

Somasundram, P. (2021). The role of cognitive factors in year five pupils' algebraic thinking: A Structural Equation Modelling Analysis. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *17*(1), 1-12. https://doi.org/10.29333/ejmste/9612

Sosa-Guerrero, L. (2024). The *MTSK* model as a support for professional growth of teacher educator. *PNA*, *18*(5), 523–549. https://doi.org/10.30827/pna.v18i5.29828

Sosa, L., Flores-Medrano, E., y Carrillo, J. (2016). Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas del profesor cuando ejemplifica y ayuda en clase de álgebra lineal. *Educación Matemática*, *28*(2), 151–181. https://doi.org/10.24844/em2802.06

Sosa-Moguel, L. E., Aparicio Landa, E., y Cabañas-Sánchez, G. (2020). Fases del razonamiento inductivo que presentan profesores de matemáticas al resolver un problema de generalización. *PNA: Revista de Investigación En Didáctica de La Matemática*, *14*(2), 118-141. https://doi.org/10.30827/pna.v14i2.9118

Stake, R. E. (2015). *Investigación con estudio de casos* (5.ª ed.). Morata. https://revistas.udistrital.edu.co/index.php/GDLA/article/view/10093/11218

Stott, L., y Ramil, X. (2014). *Metodología para el desarrollo de estudios de caso*. Escuela Politécnica. https://www.academia.edu/40410070/Metodolog%C3%ADa_para_el_desarrollo_de_estudios_de_caso

Vanegas, Y., y Pino-Fan. (2019). *Análisis de la práctica profesional de un profesor cuando explica contenidos de medida*. En E. Badillo, et al. (eds.). *Investigación sobre el profesor de matemáticas: práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional* (pp. 44-66). https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/analisis-de-la-practica-profesional-de-un-profesor-cuando-explica-contenidos-de-medida/

Vargas, X. (2011). *¿Cómo hacer investigación cualitativa? Una guía práctica para saber qué es la investigación en general y cómo hacerla, con énfasis en las etapas de la investigación cualitativa*. UNAM.

Vasco Mora, D., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Montes, M. A., y Ribeiro, M. (2016). Conocimiento especializado de un profesor de álgebra lineal y espacios de trabajo matemático. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 30*(54), 222-239. https://www.redalyc.org/pdf/2912/291245156012.pdf

Vásquez, C., Piñeiro, J. L., y García-Alonso, I. (2022). What Challenges Does the 21st Century Impose on the Knowledge of Primary School Teachers Who Teach Mathematics? An Analysis from a Latin American Perspective. *Mathematics*, *10*(3), 391. https://doi.org/10.3390/math10030391

Vergel, R. (2010). La perspectiva de cambio curricular early-algebra como posibilidad para desarrollar el pensamiento algebraico en escolares de educación básica primaria: Una mirada al proceso matemático de generalización. En *11° Encuentro Colombiano Matemática Educativa.* https://die.udistrital.edu.co/publicaciones/contribuciones_publicadas_en_analesmemorias_de_eventos_nacionales/la_perspectiva_de

Vergel, R. (2014). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de educación básica primaria (9-10 años). *Revista científica*, *2*, 225-231. https://doi.org/10.14483/23448350.6546

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA. Revista de Investigación En Didáctica de La Matemática*, *9*(3), 193-215. https://doi.org/10.30827/pna.v9i3.6220

Vergel, R. (2019). Una posible zona conceptual de formas de pensamiento aritmético "sofisticado" y proto-formas de pensamiento algebraico. En *Educación Matemática en*

las Américas 2019 (pp. 346–363). Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM). https://conferencia.ciaem-redumate.org/index.php/xvciaem/xv/paper/view/1072/0

Vergel, R., Radford, L., y Rojas, P. J. (2022). Zona conceptual de formas de pensamiento aritmético "sofisticado" y proto-formas de pensamiento algebraico: una contribución a la noción de zona de emergencia del pensamiento algebraico. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *36*(74), 1155–1181. https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a11

Wettergren, S. (2022). Identifying and promoting young students' early algebraic thinking. *LUMAT*, *10*(2), 190-214. https://doi.org/10.31129/LUMAT.10.2.1617

Yacuzzi, E. (2005). *El estudio de caso como metodología de investigación: Teoría, mecanismos causales, validación (Case study as a research methodology: Theory, causal mechanisms, validation)* (Serie Documentos de Trabajo No. 296). Universidad del Centro de Estudios Macroeconómicos de Argentina (UCEMA). https://ucema.edu.ar/publicaciones/download/documentos/296.pdf

Yin, R. K. (2014). *Case study research: Design and methods* (5th ed.). SAGE. https://iwansuharyanto.wordpress.com/wp-content/uploads/2013/04/robert_k-_yin_case_study_research_design_and_mebookfi-org.pdf

Zakaryan, D., y Sosa, L. (2021). Knowledge of practices in mathematics of a secondary teacher in geometry classes. *Educación Matemática*, *33*(1), 71-97. https://doi.org/10.24844/EM3301.03

Zapata, S. M. (2020). *Transformación del conocimiento profesional del profesor de matemáticas de primaria en el contexto del pensamiento algebraico temprano* [Tesis doctoral, Universidad de Antioquia]. https://bibliotecadigital.udea.edu.co/handle/10495/14855

Zapatera, A. (2018). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones: Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. *Números. Revista de Didáctica de Las Matemáticas*, *97*, 51-67. https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1150040/Zapatera2018Introduccion.pdf

Apéndices

1. Apéndice A. Base de datos

Esta base de datos tiene como objetivo centralizar y organizar documentos relevantes para la investigación en educación matemática, desde el modelo *MTSK* y el pensamiento algebraico temprano. Permite el acceso a información clave sobre la generalización de patrones y el conocimiento de profesores en matemáticas a nivel de Educación Básica Primaria.

https://drive.google.com/drive/folders/1iuYaj5O_jmKGYiPfoKmieKxnsnQGcAeF?usp=drive_link

2. Apéndice B. Caracterización

Este instrumento facilitará la comprensión de las condiciones personales, laborales y formativas de los profesores, así como sus prácticas en la planeación y uso de recursos didácticos en el área de matemáticas.

https://drive.google.com/drive/folders/1Jj3mIAxawzG4ORLW3xqNJ927EX7HZkVE?usp=drive_link

3. Apéndice C. Perfiles académicos de los jueces expertos

Este instrumento evidencia que la selección de los evaluadores se realizó a partir de criterios metodológicos ampliamente reconocidos en la literatura científica, orientados a asegurar la idoneidad académica y profesional de los jueces participantes en el proceso de validación.

https://drive.google.com/drive/folders/192ifwJMcgXKf-NNWl5yZoshJrZSctopI?usp=drive_link

4. **Apéndice D. Transcripciones Cuestionario KoT**

El cuestionario tiene como objetivo analizar el conocimiento especializado de tres profesores de primaria en relación con la generalización de patrones, utilizando el subdominio *KoT* como marco conceptual. Este subdominio abarca categorías esenciales para la enseñanza de matemáticas, tales como: definiciones, fenomenología y aplicaciones, registros de representación, propiedades y fundamentos y procedimientos.

https://drive.google.com/drive/folders/1DiEL4O87w51CsZZv2P4HeD0zVf4W44KR?usp=drive_link

5. **Apéndice C. Transcripciones Cuestionario KMT**

El siguiente cuestionario tiene como propósito caracterizar el conocimiento especializado de los profesores de Educación Básica Primaria en relación con la enseñanza de la generalización de patrones, en el marco del subdominio *KMT*. Para ello, se emplea la tarea de la secuencia de cuadros, adaptada de los trabajos de Vergel (2014) y Zapatera (2018); y se sustenta teóricamente en la Teoría de los Campos Conceptuales (Vergnaud, 1990). Este subdominio se estructura de la siguiente manera: categoría teorías de enseñanza de las matemáticas, categoría recursos didácticos (físicos y digitales) y categoría estrategias, técnicas, tareas y ejemplos.

https://drive.google.com/drive/folders/1CBRUsNYvHi66HjmTaAWBqc8AT3Gc6G5n?usp=drive_link

6. **Apéndice D. Transcripciones Cuestionario KMLS**

Este cuestionario busca caracterizar en el conocimiento especializado de los profesores de Educación Básica Primaria sobre el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, con un foco particular en la generalización de patrones. Las respuestas permitirán comprender cómo los

profesores conciben los aprendizajes esperados, los niveles de comprensión conceptual y procedimental, y la organización secuencial de los contenidos.
La información recopilada se usará con fines investigativos en el subdominio *KMLS* (Carrillo-Yañez et al., 2018). Las tres categorías abordadas en este cuestionario son esenciales para caracterizar el conocimiento especializado del profesor (Carrillo-Yañez et al., 2018) en el pensamiento algebraico temprano. Resultados de aprendizaje esperados, Nivel esperado de desarrollo conceptual o procedimental y Secuenciación de temas.

https://drive.google.com/drive/folders/1HulfM4imFDiMl9vdnJrF4xvbk5Oq3Yco?usp=drive_link

7. Apéndice E. Transcripciones de entrevista semiestructurada

Este instrumento pretende recolectar información sobre los conocimientos de los profesores participantes en relación con el desarrollo del pensamiento algebraico en Educación Básica Primaria, particularmente en lo que se refiere a la generalización de patrones, dentro del marco conceptual de los subdominios *KoT, KMT* y *KMLS*.

https://drive.google.com/drive/folders/1HxpzozedNBJPL9j8pBjSSWdBuh5L9fDs?usp=drive_link

8. Apéndice F. Matrices

A. Matriz transversal interna de cada subdominio *KoT, KMT y KMLS* se organiza en varios libros de Excel. El primero corresponde a la matriz de definición analítica operativa; el segundo, a la matriz de criterios de evidencia; el tercero matriz de fronteras analíticas; al cuarto, al análisis *Top – down*; el quinto, a la matriz subcategorías emergentes; el sexto, a la matriz de integración analítica; y el séptimo, a la matriz relaciones internas del subdominio.

https://drive.google.com/drive/folders/1RdQsqQYjywiYiAP9g4xDudTUonqLemPf?usp=drive_link

B. Matriz transversal entres los subdominios *KOT, KMT* Y *KMLS*, construida a partir de cuestionarios y entrevista, organizada en varios libros de Excel. Estos incluyen la matriz analítica; la matriz de criterios de evidencia empírica; la matriz de fronteras analíticas; la matriz analítica de familias de códigos, estructurada en tres conjuntos: familias *KOT* + PAT, b. familias *KMT* + PAT, c. familias *KMLS* + PAT; meta-matriz transversal anclada en fragmentos textuales; la matriz analítica de memos de familias de códigos; comparaciones transversales *KOT*; comparaciones transversales *KMT*; comparaciones transversales *KMLS*; finalmente la matriz de triangulación por subdominio.

https://drive.google.com/drive/folders/1rr_MUH-vSIOytSWCNdddfdYg5Cr9otOe?usp=drive_link

Anexos

1. Anexo A. Consentimiento de participantes

Este instrumento busca garantizar que la participación en el estudio se realice de forma informada, respetando los derechos y la privacidad de la persona, y facilitando el proceso de recolección de datos necesarios para profundizar en el análisis del conocimiento profesional de los profesores, específicamente en lo que respecta al subdominio del modelo *MTSK* (*KoT*, *KMT* y *KMLS*) y el pensamiento algebraico temprano.

https://drive.google.com/drive/folders/1MNfKllDVAq8MW8XXgeRByMaoQXJ8pRqJ?usp=drive_link

2. Anexo B. Observaciones de jurados

https://drive.google.com/drive/folders/1fOBJO1_ZKTY-4PUByc-TAKg-ft2K3Stv?usp=drive_link