Modelado y control de posición y de fuerza de una prótesis robótica de mano

Apéndice

Eliana Aguilar Larrarte

Tutor:

PhD. Andrés Vivas Albán

Universidad del Cauca

Facultad de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones

Maestría en Electrónica y Telecomunicaciones

Popayán

Marzo 2010

Índice general

A. Proceso de sintonización **1**

A.1. Control de movimiento 1

A.1.1. paso 1 1

A.1.2. paso 2 1

A.1.3. paso 3 2

A.1.4. paso 4 2

A.2. Ejemplo para el dedo medio 2

B. Fuerzas aplicadas en las falanges **6**

B.1. Fuerzas aplicadas en las falanges del dedo medio 6

B.1.1. Matrices de transformación dedo medio 6

B.1.2. Transformaciones cartesianas de los puntos de interés del dedo medio 11

B.1.3. Determinación de los pares articulares del dedo medio . 12

B.2. Fuerzas aplicadas en las falanges del dedo índice 17

B.2.1. Matrices de transformación dedo índice 17

B.2.2. Transformaciones cartesianas de los puntos de interés del dedo índice 21

B.2.3. Determinación de los pares articulares del dedo índice . 22

B.3. Fuerzas aplicadas en las falanges del dedo pulgar 26

B.3.1. Matrices de transformación dedo pulgar 26

B.3.2. Transformaciones cartesianas de los puntos de interés del dedo pulgar 32
B.3.3. Determinación de los pares articulares del dedo pulgar . 34

Apéndice A

Proceso de sintonización

A.1. Control de movimiento

El proceso de sintonización del controlador PD que hace parte del control por par calculado de movimientos de la mano robot de nueve grados de libertad el cual se realizó de manera manual y su proceso se describe a continuación.

A.1.1. paso 1

Poner el valor de las constantes derivativas en cero y las proporcionales en un valor cercano al valor 100, observar el comportamiento de las gráficas, sí las curvas tienen una tendencia oscilatoria se puede proceder a aumentar el valor de las constantes derivativas, sino se debe comenzar a aumentar la constantes proporcionales hasta ver un comportamiento del error casi oscilatorio.

A.1.2. paso 2

Cuando se consigue que la grafica muestre oscilación no se varian más las constantes proporcionales y se procede a aumentar las constantes derivativas hasta hacer que la oscilación desaparezca. En este proceso se puede

notar que las oscilaciones se atenuan con una tendencia hacia un valor muy pequeño a medida que se incrementa el valor de la constante derivativa, pero si se aumenta demasiado el valor de estas constantes el sistema se comporta inestable, en este punto se cesa el aumento de la constante derivativa y se procede a aumentar la constante proporcional, se puede experimenta aumentar la constante proporcional en 10 veces o hasta conseguir de nuevo que el error muestre nuevamente comportamiento oscilatorio

A.1.3. paso 3

Se repiten los paso 1 y 2 cuantas veces sea necesario, es decir hasta que se consiga una magnitud del error por debajo de un valor que se considere adecuado en virtud de la amplitud mínima y máxima que tendrán las consignas de posición.

A.1.4. paso 4

Cuando se tiene una magnitud del error satisfactoria solo basta en sintonizar haciendo los pasos 1 2 y 3 con pequeños valores de incremento.

A.2. Ejemplo para el dedo medio

La figura A.1 muestra la implementación del paso 1, la constante proporcional se incrementa hasta tener un comportamiento casi oscilatorio dejando la constante derivativa en cero. En la figura A.2 se ve la aplicación del paso 2. La figura A.3 muestra el caso del paso 3 y se puede observar como se ha disminuído la amplitud del error, resta suavizar un poco la curva ver figura A.4, y repetir los pasos 1 y 2 hasta obtener un error satisfactorio por debajo del 2 % o menos. La gráfica A.4 muestra una disminución sustancial del error, el cual

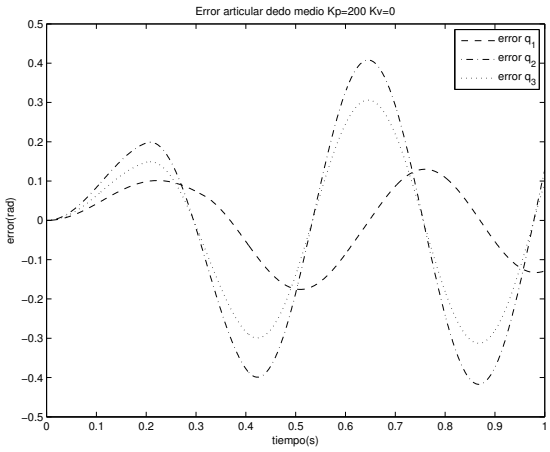

Figura A.1: Error articular dedo medio Kp_1=Kp_2=Kp_3=200 Kv_1=Kv_2=Kv_3=0

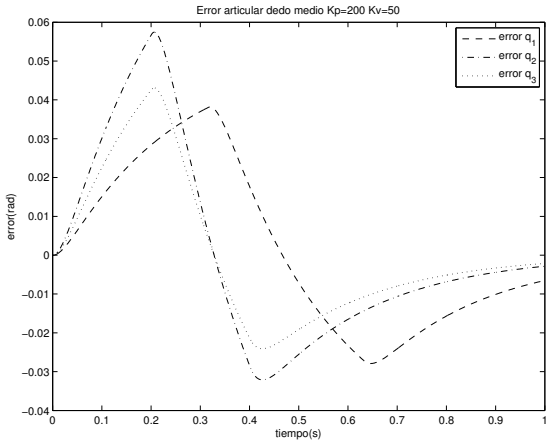

Figura A.2: Error articular dedo medio Kp_1=Kp_2=Kp_3=200 Kv_1=Kv_2=Kv_3=50

esta ahora por debajo del orden de 10^{-3}. La grafica A.5 muestra el resultado final de la sintonización

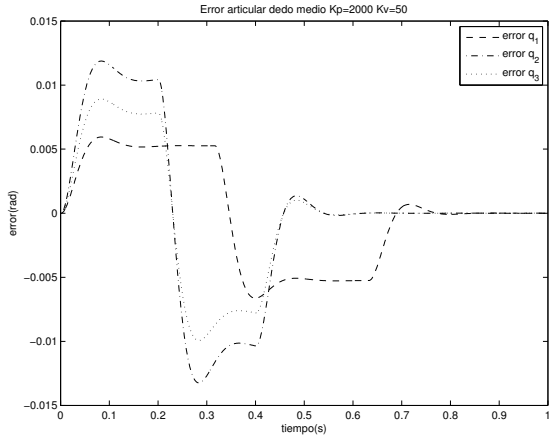

Figura A.3: Error articular dedo medio Kp_1=Kp_2=Kp_3=2000 Kv_1=Kv_2=Kv_3=50

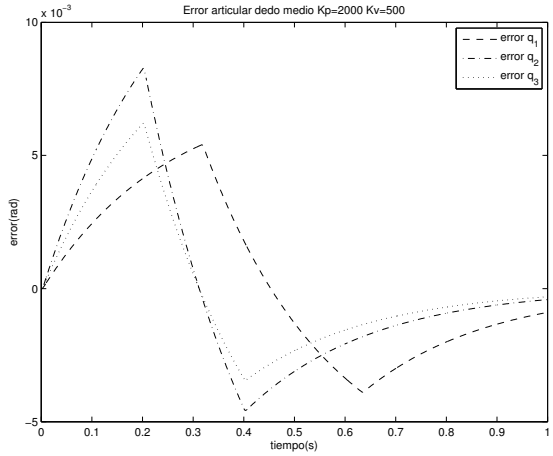

Figura A.4: Error articular dedo medio Kp_1=Kp_2=Kp_3=2000 Kv_1=Kv_2=Kv_3=500

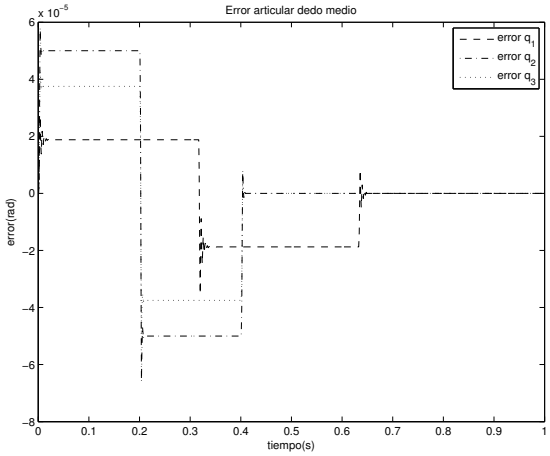

Figura A.5: Error articular final dedo medio $Kp_1 = 1600000$,$Kp_2 = 1200000$,$Kp_3 = 1200000$ $Kv_1 = Kv_2 = Kv_3 = 2000$

Apéndice B

Fuerzas aplicadas en las falanges

La siguiente sección describe un método general para estimar la fuerza en las falanges para lo cual es necesario aclarar que la forma general mostrada a continuación fué realizada para una fuerza por falange pero puede generalizarse facilemente a n fuerzas aplicadas.

B.1. Fuerzas aplicadas en las falanges del dedo medio

B.1.1. Matrices de transformación dedo medio

Partimos de las matrices de transformación que relacionan los frames 1, 2, 3 y la posición del efector final, en este caso la punta del dedo con respecto a la base, tales matrices son:

$$ {}^{0}T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(q_1) & -sin(q_1) & 0 \\ 0 & sin(q_1) & cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{B.1} $$

$$ {}^{1}T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(q_2) & -sin(q_2) & 0 \\ 0 & sin(q_2) & cos(q_2) & D_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{B.2} $$

$$ {}^{2}T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(q3) & -sin(q_3) & 0 \\ 0 & sin(q_3) & cos(q_3) & D_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{B.3} $$

$$ {}^{3}T_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & D_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{B.4} $$

Se consideraron ciertos puntos de contacto en las falanges del dedo medio. Tales puntos de contacto se encuentran a una distancia r_j de cada articulación, esta distancia puede considerarse como la mitad de la longitud de la respectiva falange, pero para este análisis se tomará r_j como una variable. En los puntos de estudio se asumirá que la fuerza esta concentrada (ver figura B.1 para mayor ilustración). Dichos puntos son:

- punto **A** situado a una distancia r_a de la articulación q_1
- punto **B** situado a una distancia r_b de la articulación q_2
- punto **C** situado a una distancia r_c de la articulación q_3

Con ayuda de las matrices de transformación mostradas en B.1, B.2, B.3 se obtuvieron unas nuevas matrices de transformación esta vez para los puntos de contacto **A**, **B** y **C**, tales matrices son ${}^{0}T_A$,${}^{0}T_B$,${}^{0}T_C$ en el grupo de ecuaciones

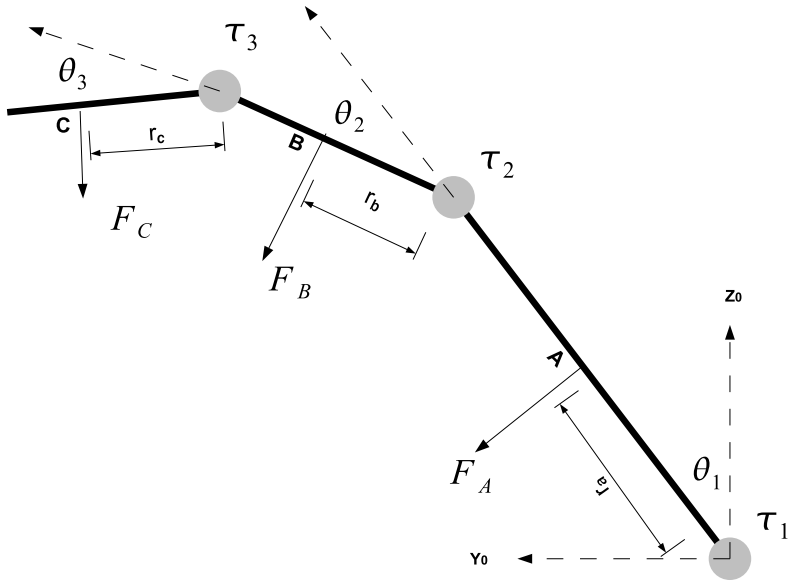

Figura B.1: Esquema de fuerzas aplicadas en las falanges del dedo medio

B.5, B.6 y B.7. Debido a que los elementos son muy extensos se mostrará elemento a elemento sus componentes usando la notación $matrix(n, m)$ con n como el numero de la fila, y m el de la columna.

$$
\begin{aligned}
{}^0T_A(1,1) =& 1 \\
{}^0T_A(1,2) =& 0 \\
{}^0T_A(1,3) =& 0 \\
{}^0T_A(1,4) =& 0 \\
{}^0T_A(2,1) =& 0 \\
{}^0T_A(2,2) =& cos(q_1) \\
{}^0T_A(2,3) =& -\,sin(q_1) \\
{}^0T_A(2,4) =& -\,sin(q_1)r_a \\
{}^0T_A(3,1) =& 0 \\
{}^0T_A(3,2) =& sin(q_1) \\
{}^0T_A(3,3) =& cos(q_1) \\
{}^0T_A(3,4) =& cos(q_1)r_a \\
{}^0T_A(4,1) =& 0 \\
{}^0T_A(4,2) =& 0 \\
{}^0T_A(4,3) =& 0 \\
{}^0T_A(4,4) =& 1
\end{aligned}
\tag{B.5}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^0T_B(1,1) =& 1 \\
{}^0T_B(1,2) =& 0 \\
{}^0T_B(1,3) =& 0 \\
{}^0T_B(1,4) =& 0 \\
{}^0T_B(2,1) =& 0 \\
{}^0T_B(2,2) =& cos(q_1+q_2) \\
{}^0T_B(2,3) =& -\,sin(q_1+q_2) \\
{}^0T_B(2,4) =& -\,sin(q_1+q_2)r_b - sin(q_1)D_2 \\
{}^0T_B(3,1) =& 0 \\
{}^0T_B(3,2) =& sin(q_1+q_2) \\
{}^0T_B(3,3) =& cos(q_1+q_2) \\
{}^0T_B(3,4) =& cos(q_1+q_2)r_b + cos(q_1)D_2 \\
{}^0T_B(4,1) =& 0 \\
{}^0T_B(4,2) =& 0 \\
{}^0T_B(4,3) =& 0 \\
{}^0T_B(4,4) =& 1
\end{aligned}
\tag{B.6}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^0T_C(1,1) =& 1 \\
{}^0T_C(1,2) =& 0 \\
{}^0T_C(1,3) =& 0 \\
{}^0T_C(1,4) =& 0 \\
{}^0T_C(2,1) =& 0 \\
{}^0T_C(2,2) =& cos(q_1+q_2+q_3) \\
{}^0T_C(2,3) =& -sin(q_1+q_2+q_3) \\
{}^0T_C(2,4) =& -sin(q_1+q_2+q_3)r_c - sin(q_1+q_2)D_3 - sin(q_1)D_2 \\
{}^0T_C(3,1) =& 0 \\
{}^0T_C(3,2) =& sin(q_1+q_2+q_3) \\
{}^0T_C(3,3) =& cos(q_1+q_2+q_3) \\
{}^0T_C(3,4) =& cos(q_1+q_2+q_3)r_c + cos(q_1+q_2)D_3 + cos(q_1)D_2 \\
{}^0T_C(4,1) =& 0 \\
{}^0T_C(4,2) =& 0 \\
{}^0T_C(4,3) =& 0 \\
{}^0T_C(4,4) =& 1
\end{aligned}
\tag{B.7}
$$

las constantes D_2 y D_3 corresponden a las distancias de la primera (falange proximal o MCP) y segunda falange (falange media o PIP).

B.1.2. Transformaciones cartesianas de los puntos de interés del dedo medio

De las anteriores matrices los tres primeros términos de la columna cuatro de las matrices de transformación mostradas en B.5, B.6 y B.7 corresponden a las funciones de transformación cartesiana **x**, **y**, **z**. Para los puntos A, B y C, estas funciones son:

para el punto A:

$$\begin{aligned}\varphi_{Ax} =& 0\\ \varphi_{Ay} =& -r_a sin(q_1)\\ \varphi_{Az} =& r_a cos(q_1)\end{aligned} \tag{B.8}$$

para el punto B:

$$\begin{aligned}\varphi_{Bx} =& 0\\ \varphi_{By} =& -r_b sin(q_1+q_2) - D_2 sin(q_1)\\ \varphi_{Bz} =& r_b cos(q_1+q_2) + D_2 cos(q_1)\end{aligned} \tag{B.9}$$

para el punto C:

$$\begin{aligned}\varphi_{Cx} =& 0\\ \varphi_{Cy} =& -r_c sin(q_1+q_2+q_3) - D_3 sin(q_1+q_2) - D_2 sin(q_1)\\ \varphi_{Cz} =& r_c cos(q_1+q_2+q_3) + D_3 cos(q_1+q_2) + D_2 cos(q_1)\end{aligned} \tag{B.10}$$

Estas funciones relacionan los estados de la mano q_1, q_2 y q_3, las dimensiones de la primera y segunda falange [1] y el punto de aplicación del contacto. Una anotación importante es que la distancia al punto de aplicación del contacto juega un papel de variable.

B.1.3. Determinación de los pares articulares del dedo medio

Realizando un análisis de sumatoria de torques se encuentra que el torque total τ es equivalente al aporte de los torques parciales generados por cada una de las fuerzas cartesianas en los puntos A,B y C.

[1] estas dimensiones que se consideran constantes debido a que los *links* que constituyen las falanges son rigídos

Para obtener el aporte de cada una de las fuerzas es necesario usar una función de transformación de la forma $\tau = J^T F$ de esta manera generalizando para varias fuerzas se tiene:

$$\tau = {}^0J_A{}^T F_A + {}^0J_B{}^T F_B + {}^0J_C{}^T F_C \tag{B.11}$$

donde $F_A = [f_{ax}\ f_{ay}\ f_{az}]$ es las fuerzas cartesianas en el punto A, $F_B = [f_{bx}\ f_{by}\ f_{bz}]$ es las fuerzas cartesianas en el punto B y $F_C = [f_{cx}\ f_{cy}\ f_{cz}]$ las fuerzas cartesianas en el punto C.

Matriz Jacobiana de los puntos de interés del dedo medio

Para realizar los calculos de B.11 se debe obtener la matrix Jacobiana de cada uno de los puntos de esta manera los componentes de las matrices Jacobianas son de la forma:

$${}^0J_A = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_{Ax}(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial\varphi_{Ax}(q)}{\partial q_2} & \frac{\partial\varphi_{Ax}(q)}{\partial q_3} \\ \frac{\partial\varphi_{Ay}(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial\varphi_{Ay}(q)}{\partial q_2} & \frac{\partial\varphi_{Ay}(q)}{\partial q_3} \\ \frac{\partial\varphi_{Az}(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial\varphi_{Az}(q)}{\partial q_2} & \frac{\partial\varphi_{Az}(q)}{\partial q_3} \end{pmatrix} \tag{B.12}$$

$${}^0J_B = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_{Bx}(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial\varphi_{Bx}(q)}{\partial q_2} & \frac{\partial\varphi_{Bx}(q)}{\partial q_3} \\ \frac{\partial\varphi_{By}(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial\varphi_{By}(q)}{\partial q_2} & \frac{\partial\varphi_{By}(q)}{\partial q_3} \\ \frac{\partial\varphi_{Bz}(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial\varphi_{Bz}(q)}{\partial q_2} & \frac{\partial\varphi_{Bz}(q)}{\partial q_3} \end{pmatrix} \tag{B.13}$$

$${}^0J_C = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_{Cx}(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial\varphi_{Cx}(q)}{\partial q_2} & \frac{\partial\varphi_{Cx}(q)}{\partial q_3} \\ \frac{\partial\varphi_{Cy}(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial\varphi_{Cy}(q)}{\partial q_2} & \frac{\partial\varphi_{Cy}(q)}{\partial q_3} \\ \frac{\partial\varphi_{Cz}(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial\varphi_{Cz}(q)}{\partial q_2} & \frac{\partial\varphi_{Cz}(q)}{\partial q_3} \end{pmatrix} \tag{B.14}$$

de esta manera las matrices Jacobianas para los puntos A, B y C son:

$$
\begin{aligned}
{}^0J_A(1,1) =& 0 \\
{}^0J_A(1,2) =& 0 \\
{}^0J_A(1,3) =& 0 \\
{}^0J_A(2,1) =& -\cos(q_1)\, r_a \\
{}^0J_A(2,2) =& 0 \\
{}^0J_A(2,3) =& 0 \\
{}^0J_A(3,1) =& -\sin(q_1)\, r_a \\
{}^0J_A(3,2) =& 0 \\
{}^0J_A(3,3) =& 0
\end{aligned}
\tag{B.15}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^0J_B(1,1) =& 0 \\
{}^0J_B(1,2) =& 0 \\
{}^0J_B(1,3) =& 0 \\
{}^0J_B(2,1) =& -\cos(q_1+q_2)\, r_b - \cos(q_1)\, D_2 \\
{}^0J_B(2,2) =& -\cos(q_1+q_2)\, r_b \\
{}^0J_B(2,3) =& 0 \\
{}^0J_B(3,1) =& -\sin(q_1+q_2)\, r_b - \sin(q_1)\, D_2 \\
{}^0J_B(3,2) =& -\sin(q_1+q_2)\, r_b \\
{}^0J_B(3,3) =& 0
\end{aligned}
\tag{B.16}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^0J_C(1,1) =& 0 \\
{}^0J_C(1,2) =& 0 \\
{}^0J_C(1,3) =& 0 \\
{}^0J_C(2,1) =& -\cos\left(q_1+q_2+q_3\right) r_c \\
& -\cos\left(q_1+q_2\right) D_3 - \cos\left(q_1\right) D_2 \\
{}^0J_C(2,2) =& -\cos\left(q_1+q_2+q_3\right) r_c \\
& -\cos\left(q_1+q_2\right) D_3 \\
{}^0J_C(2,3) =& -\cos\left(q_1+q_2+q_3\right) r_c \\
{}^0J_C(3,1) =& -\sin\left(q_1+q_2+q_3\right) r_c \\
& -\sin\left(q_1+q_2\right) D_3 - \sin\left(q_1\right) D_2 \\
{}^0J_C(3,2) =& -\sin\left(q_1+q_2+q_3\right) r_c \\
& -\sin\left(q_1+q_2\right) D_3 \\
{}^0J_C(3,3) =& -\sin\left(q_1+q_2+q_3\right) r_c
\end{aligned}
\tag{B.17}
$$

Pares articulares del dedo medio

El vector de torques $\tau = [\tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3]^T$ para las articulaciones $1, 2$ y 3 esta compuesto por los siguientes elementos:

$$
\begin{aligned}
\tau_1 =& -cos(q_1)r_a f_{ay} - sin(q_1)r_a f_{az} + \\
& [-cos(q_1+q_2)r_b - cos(q_1)D_2]f_{by} + \\
& [-sin(q_1+q_2)r_b - sin(q_1)D_2]f_{bz} + \\
& [-cos(q_1+q_2+q_3)r_c - cos(q_1+q_2)D_3 - cos(q_1)D_2]f_{cy} + \\
& [-sin(q_1+q_2+q_3)r_c - sin(q_1+q_2)D_3 - sin(q_1)D_2]f_{cz}
\end{aligned}
\tag{B.18}
$$

$$\begin{aligned}\tau_2 = &- cos(q_1+q_2)r_b f_{by} - sin(q_1+q_2)r_b f_{bz} + \\ &[-cos(q_1+q_2+q_3)r_c - cos(q_1+q_2)D_3]f_{cy} + \\ &[-sin(q_1+q_2+q_3)r_c - sin(q_1+q_2)D_3]f_{cz}\end{aligned} \tag{B.19}$$

$$\tau_3 = -cos(q1+q2+q3)r_c f_{cy} - sin(q1+q2+q3)r_c f_{cz} \tag{B.20}$$

Este metodo puede ampliarse al evento de presencia de multiples fuerzas en cada una de las falanges. Se puede observar que en el esquema mostrado en la figura B.1 se muestra solo una fuerza por falange. F_A con componentes cartesianos $[f_{ax}\ f_{ay}\ f_{az}]$ a una distancia r_a de la articulación q_1, F_B con componentes cartesianos $[f_{bx}\ f_{by}\ f_{bz}]$ a una distancia r_b de la articulación q_2 y F_C con componentes cartesianos $[f_{cx}\ f_{cy}\ f_{cz}]$ a una distancia r_c de la articulación q_3, pero suponiendo que se tiene medición de varias fuerzas a distintas posiciones en una misma falange como por ejemplo : F_{A1} con componentes cartesianos $[f_{ax1}\ f_{ay1}\ f_{az1}]$ a una distancia r_{a1}, F_{A2} con componentes cartesianos $[f_{ax2}\ f_{ay2}\ f_{az2}]$ a una distancia r_{a2}, F_{An} con componentes cartesianos $[f_{axn}\ f_{ayn}\ f_{azn}]$ a una distancia r_{an} y todas estas fuerzas presentandose en la falange próximal y de manera similar en las falanges media y distal. Si se generalizan las expresiones B.18, B.19, B.20 a una representación que incluya esas multiples fuerzas se tiene:

$$\begin{aligned}\tau_1 = &- cos(q_1)\mathbf{R_a}\mathbf{f_{ay}} - sin(q_1)\mathbf{R_a}\mathbf{f_{az}} + \\ &[-cos(q_1+q_2)\mathbf{R_b} - cos(q_1)D_2]\mathbf{f_{by}} + \\ &[-sin(q_1+q_2)\mathbf{R_b} - sin(q_1)D_2]\mathbf{f_{bz}} + \\ &[-cos(q_1+q_2+q_3)\mathbf{R_c} - cos(q_1+q_2)D_3 - cos(q_1)D_2]\mathbf{f_{cy}} + \\ &[-sin(q_1+q_2+q_3)\mathbf{R_c} - sin(q_1+q_2)D_3 - sin(q_1)D_2]\mathbf{f_{cz}}\end{aligned} \tag{B.21}$$

$$\begin{aligned}\tau_2 = &- cos(q_1+q_2)\mathbf{R_b}\mathbf{f_{by}} - sin(q_1+q_2)\mathbf{R_b}\mathbf{f_{bz}} + \\ &[-cos(q_1+q_2+q_3)\mathbf{R_c} - cos(q_1+q_2)D_3]\mathbf{f_{cy}} + \\ &[-sin(q_1+q_2+q_3)\mathbf{R_c} - sin(q_1+q_2)D_3]\mathbf{f_{cz}}\end{aligned} \tag{B.22}$$

$$\tau_3 = -cos(q1+q2+q3)\mathbf{R_c}\mathbf{f_{cy}} - sin(q1+q2+q3)\mathbf{R_c}\mathbf{f_{cz}} \tag{B.23}$$

donde

$\mathbf{R_a}$: $[r_{a1}\ r_{a2} \ldots r_{an}]$,

$\mathbf{R_b}$: $[r_{b1}\ r_{b2} \ldots r_{bn}]$,

$\mathbf{R_c}$: $[r_{c1}\ r_{c2} \ldots r_{cn}]$.

$\mathbf{f_{ax}}$: $[f_{ax1}\ f_{ax2} \ldots f_{axn}]^T$,

$\mathbf{f_{ay}}$: $[f_{ay1}\ f_{ax2} \ldots f_{ayn}]^T$,

$\mathbf{f_{az}}$: $[f_{az1}\ f_{az2} \ldots f_{azn}]^T$,

$\mathbf{f_{bx}}$: $[f_{bx1}\ f_{bx2} \ldots f_{bxn}]^T$,

$\mathbf{f_{by}}$: $[f_{by1}\ f_{bx2} \ldots f_{byn}]^T$,

$\mathbf{f_{bz}}$: $[f_{bz1}\ f_{bz2} \ldots f_{bzn}]^T$,

$\mathbf{f_{cx}}$: $[f_{cx1}\ f_{cx2} \ldots f_{cxn}]^T$,

$\mathbf{f_{cy}}$: $[f_{cy1}\ f_{cx2} \ldots f_{cyn}]^T$,

$\mathbf{f_{cz}}$: $[f_{cz1}\ f_{cz2} \ldots f_{czn}]^T$,

B.2. Fuerzas aplicadas en las falanges del dedo índice

B.2.1. Matrices de transformación dedo índice

Partiendo de un análisis similar al realizado en B.1, las matrices de transformación que relacionan los frames 4, 5, 6 y la posición del efector final con

respecto a la base son:

$$^{0}T_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & R_5 \\ 0 & cos(q_5) & -sin(q_5) & 0 \\ 0 & sin(q_5) & cos(q_5) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{B.24}$$

$$^{5}T_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(q_6) & -sin(q_6) & 0 \\ 0 & sin(q_6) & cos(q_6) & D_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{B.25}$$

$$^{6}T_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(q_7) & -sin(q_7) & 0 \\ 0 & sin(q_7) & cos(q_7) & D_7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{B.26}$$

$$^{7}T'_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & D_8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{B.27}$$

De igual manera que en la sección B.1 se consideraron ciertos puntos de contacto en las falanges a distancias r_j de cada articulación y puntos que coinciden con la aplicación de la fuerza por parte del dedo a las objetos (ver figura B.2), tales puntos son:

- punto **D** situado a una distancia r_5 de la articulación q_5
- punto **E** situado a una distancia r_6 de la articulación q_6
- punto **F** situado a una distancia r_7 de la articulación q_7

Con ayuda de las matrices de transformación mostradas en B.24, B.25, B.26 se encontraron las matrices de transformación de los puntos **D**, **E** y **F**, a

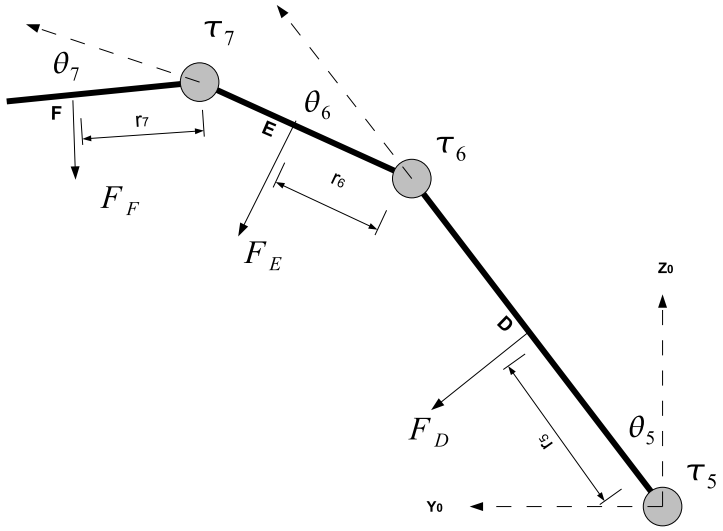

Figura B.2: Esquema de fuerzas aplicadas en las falanges del dedo índice

continuación se muestran sus elementos.

$$
\begin{aligned}
{}^0T_D(1,1) =& 1 \\
{}^0T_D(1,2) =& 0 \\
{}^0T_D(1,3) =& 0 \\
{}^0T_D(1,4) =& R_5 \\
{}^0T_D(2,1) =& 0 \\
{}^0T_D(2,2) =& cos(q_5) \\
{}^0T_D(2,3) =& -\,sin(q_5) \\
{}^0T_D(2,4) =& -\,sin(q_5)r_5 \\
{}^0T_D(3,1) =& 0 \\
{}^0T_D(3,2) =& sin(q_5) \\
{}^0T_D(3,3) =& cos(q_5) \\
{}^0T_D(3,4) =& cos(q_5)r_5 \\
{}^0T_D(4,1) =& 0 \\
{}^0T_D(4,2) =& 0 \\
{}^0T_D(4,3) =& 0 \\
{}^0T_D(4,4) =& 1
\end{aligned}
\tag{B.28}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^0T_E(1,1) =& 1 \\
{}^0T_E(1,2) =& 0 \\
{}^0T_E(1,3) =& 0 \\
{}^0T_E(1,4) =& R_5 \\
{}^0T_E(2,1) =& 0 \\
{}^0T_E(2,2) =& cos(q_5 + q_6) \\
{}^0T_E(2,3) =& -\,sin(q_5 + q_6) \\
{}^0T_E(2,4) =& -\,sin(q_5 + q_6)r_6 - sin(q_5)D_6 \\
{}^0T_E(3,1) =& 0 \\
{}^0T_E(3,2) =& sin(q_5 + q_6) \\
{}^0T_E(3,3) =& cos(q_5 + q_6) \\
{}^0T_E(3,4) =& cos(q_5 + q_6)r_6 + cos(q_5)D_6 \\
{}^0T_E(4,1) =& 0 \\
{}^0T_E(4,2) =& 0 \\
{}^0T_E(4,3) =& 0 \\
{}^0T_E(4,4) =& 1
\end{aligned}
\tag{B.29}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^0T_F(1,1) =& 1 \\
{}^0T_F(1,2) =& 0 \\
{}^0T_F(1,3) =& 0 \\
{}^0T_F(1,4) =& R_5 \\
{}^0T_F(2,1) =& 0 \\
{}^0T_F(2,2) =& cos(q_5+q_6+q_7) \\
{}^0T_F(2,3) =& -sin(q_5+q_6+q_7) \\
{}^0T_F(2,4) =& -sin(q_5+q_6+q_7)r7 - sin(q_5+q_6)D_7 - sin(q_5)D_6 \\
{}^0T_F(3,1) =& 0 \\
{}^0T_F(3,2) =& sin(q_5+q_6+q_7) \\
{}^0T_F(3,3) =& cos(q_5+q_6+q_7) \\
{}^0T_F(3,4) =& cos(q_5+q_6+q_7)r_7 + cos(q_5+q_6)D_7 + cos(q_5)D_6 \\
{}^0T_F(4,1) =& 0 \\
{}^0T_F(4,2) =& 0 \\
{}^0T_F(4,3) =& 0 \\
{}^0T_F(4,4) =& 1
\end{aligned}
\tag{B.30}
$$

las distancias D_6 y D_7 corresponden a las distancias de la primera y segunda falange del dedo índice.

B.2.2. Transformaciones cartesianas de los puntos de interés del dedo índice

De las anteriores matrices los tres primeros términos de la columna cuatro de cada matriz de transformación corresponden a las transformaciones cartesianas **x**, **y**, **z** las cuales son:

Para el punto D:

$$\begin{aligned}\varphi_{Dx} =& R_5 \\ \varphi_{Dy} =& -\sin(q_5)r_5 \\ \varphi_{Dz} =& \cos(q_5)r_5\end{aligned} \tag{B.31}$$

Para el punto E:

$$\begin{aligned}\varphi_{Ex} =& R_5 \\ \varphi_{Ey} =& -\sin(q_5+q_6)r_6 - \sin(q_5)D_6 \\ \varphi_{Ez} =& \cos(q_5+q_6)r_6 + \cos(q_5)D_6\end{aligned} \tag{B.32}$$

Para el punto F:

$$\begin{aligned}\varphi_{Fx} =& R_5 \\ \varphi_{Fy} =& -\sin(q_5+q_6+q_7)r_7 - \sin(q_5+q_6)D_7 - \sin(q_5)D_6 \\ \varphi_{Fz} =& \cos(q_5+q_6+q_7)r_7 + \cos(q_5+q_6)D_7 + \cos(q_5)D_6\end{aligned} \tag{B.33}$$

B.2.3. Determinación de los pares articulares del dedo índice

El torque total τ es equivalente al aporte de las fuerzas cartesianas en los puntos D,E y F por sus respectivas Jacobianas transpuestas es de la forma

$$\tau = {}^0J_D{}^T F_D + {}^0J_E{}^T F_E + {}^0J_F{}^T F_F \tag{B.34}$$

donde $F_D = [f_{dx}\ f_{dy}\ f_{dz}]$ es las fuerzas cartesianas en el punto D, $F_e = [f_{ex}\ f_{ey}\ f_{ez}]$ es las fuerzas cartesianas en el punto E y $F_f = [f_{fx}\ f_{fy}\ f_{fz}]$ las fuerzas cartesianas en el punto F.

Matriz Jacobiana de los puntos de interés del dedo índice

El cálculo de la matrix Jacobiana es de la forma:

$$
{}^{0}J_D = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{Dx}(q)}{\partial q_5} & \frac{\partial \varphi_{Dx}(q)}{\partial q_6} & \frac{\partial \varphi_{Dx}(q)}{\partial q_7} \\ \frac{\partial \varphi_{Dy}(q)}{\partial q_5} & \frac{\partial \varphi_{Dy}(q)}{\partial q_6} & \frac{\partial \varphi_{Dy}(q)}{\partial q_7} \\ \frac{\partial \varphi_{Dz}(q)}{\partial q_5} & \frac{\partial \varphi_{Dz}(q)}{\partial q_6} & \frac{\partial \varphi_{Dz}(q)}{\partial q_7} \end{pmatrix} \tag{B.35}
$$

$$
{}^{0}J_E = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{Ex}(q)}{\partial q_5} & \frac{\partial \varphi_{Ex}(q)}{\partial q_6} & \frac{\partial \varphi_{Ex}(q)}{\partial q_7} \\ \frac{\partial \varphi_{Ey}(q)}{\partial q_5} & \frac{\partial \varphi_{Ey}(q)}{\partial q_6} & \frac{\partial \varphi_{Ey}(q)}{\partial q_7} \\ \frac{\partial \varphi_{Ez}(q)}{\partial q_5} & \frac{\partial \varphi_{Ez}(q)}{\partial q_6} & \frac{\partial \varphi_{Ez}(q)}{\partial q_7} \end{pmatrix} \tag{B.36}
$$

$$
{}^{0}J_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{Fx}(q)}{\partial q_5} & \frac{\partial \varphi_{Fx}(q)}{\partial q_6} & \frac{\partial \varphi_{Fx}(q)}{\partial q_7} \\ \frac{\partial \varphi_{Fy}(q)}{\partial q_5} & \frac{\partial \varphi_{Fy}(q)}{\partial q_6} & \frac{\partial \varphi_{Fy}(q)}{\partial q_7} \\ \frac{\partial \varphi_{Fz}(q)}{\partial q_5} & \frac{\partial \varphi_{Fz}(q)}{\partial q_6} & \frac{\partial \varphi_{Fz}(q)}{\partial q_7} \end{pmatrix} \tag{B.37}
$$

de esta manera los elementos de las Jacobianas para los puntos D, E y F son:

$$
\begin{aligned}
{}^{0}J_D(1,1) =& 0 \\
{}^{0}J_D(1,2) =& 0 \\
{}^{0}J_D(1,3) =& 0 \\
{}^{0}J_D(2,1) =& -\,cos(q_5)r_5 \\
{}^{0}J_D(2,2) =& 0 \\
{}^{0}J_D(2,3) =& 0 \\
{}^{0}J_D(3,1) =& -\,sin(q_5)r_5 \\
{}^{0}J_D(3,2) =& 0 \\
{}^{0}J_D(3,3) =& 0
\end{aligned} \tag{B.38}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^0J_E(1,1) =& 0 \\
{}^0J_E(1,2) =& 0 \\
{}^0J_E(1,3) =& 0 \\
{}^0J_E(2,1) =& -\,cos(q_5+q_6)r_6 - cos(q_5)D_6 \\
{}^0J_E(2,2) =& -\,cos(q_5+q_6)r_6 \\
{}^0J_E(2,3) =& 0 \\
{}^0J_E(3,1) =& -\,sin(q_5+q_6)r_6 - sin(q_5)D_6 \\
{}^0J_E(3,2) =& -\,sin(q_5+q_6)r_6 \\
{}^0J_E(3,3) =& 0
\end{aligned}
\tag{B.39}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^0J_F(1,1) =& 0 \\
{}^0J_F(1,2) =& 0 \\
{}^0J_F(1,3) =& 0 \\
{}^0J_F(2,1) =& -\,cos(q_5+q_6+q_7)r_7 - cos(q_5+q_6)D_7 - cos(q_5)D_6 \\
{}^0J_F(2,2) =& -\,cos(q_5+q_6+q_7)r_7 - cos(q_5+q_6)D_7 \\
{}^0J_F(2,3) =& -\,cos(q_5+q_6+q_7)r_7 \\
{}^0J_F(3,1) =& -\,sin(q_5+q_6+q_7)r_7 - sin(q_5+q_6)D_7 - sin(q_5)D_6 \\
{}^0J_F(3,2) =& -\,sin(q_5+q_6+q_7)r_7 - sin(q_5+q_6)D_7 \\
{}^0J_F(3,3) =& -\,sin(q_5+q_6+q_7)r_7
\end{aligned}
\tag{B.40}
$$

Pares articulares del dedo índice

De esta manera el vector de torques $\tau = [\tau_5\ \tau_6\ \tau_7]^T$ para las articulaciones numeradas con $5, 6$ y 7 esta compuesto por los siguientes elementos:

$$\begin{aligned}\tau_5 = &- cos(q_5)r_5 f_{dy} - sin(q_5)r_5 f_{dz} + \\ &(-cos(q_5+q_6)r_6 - cos(q_5)D_6)f_{ey} + \\ &(-sin(q_5+q_6)r_6 - sin(q_5)D_6)f_{ez} + \\ &(-cos(q_5+q_6+q_7)r_7 - cos(q_5+q_6)D_7 - cos(q_5)D_6)f_{fy} + \\ &(-sin(q_5+q_6+q_7)r_7 - sin(q_5+q_6)D_7 - sin(q_5)D_6)f_{fz}\end{aligned} \tag{B.41}$$

$$\begin{aligned}\tau_6 = &- cos(q_5+q_6)r_6 f_{ey} - sin(q_5+q_6)r - 6f_{ez} + \\ &(-cos(q_5+q_6+q_7)r_7 - cos(q_5+q_6)D_7)f_{fy} + \\ &(-sin(q_5+q_6+q_7)r_7 - sin(q_5+q_6)D_7)f_{fz}\end{aligned} \tag{B.42}$$

$$\tau_7 = -cos(q_5+q_6+q_7)r_7 f_{fy} - sin(q_5+q_6+q_7)r_7 f_{fz} \tag{B.43}$$

y generalizando para multiples fuerzas,

$$\begin{aligned}\tau_5 = &- cos(q_5)\mathbf{R_d}\mathbf{f_{dy}} - sin(q_5)\mathbf{R_d}\mathbf{f_{dz}} + \\ &(-cos(q_5+q_6)\mathbf{R_e} - cos(q_5)D_6)\mathbf{f_{ey}} + \\ &(-sin(q_5+q_6)\mathbf{R_e} - sin(q_5)D_6)\mathbf{f_{ez}} + \\ &(-cos(q_5+q_6+q_7)\mathbf{R_f} - cos(q_5+q_6)D_7 - cos(q_5)D_6)\mathbf{f_{fy}} + \\ &(-sin(q_5+q_6+q_7)\mathbf{R_f} - sin(q_5+q_6)D_7 - sin(q_5)D_6)\mathbf{f_{fz}}\end{aligned} \tag{B.44}$$

$$\begin{aligned}\tau_6 = &- cos(q_5+q_6)\mathbf{R_e}\mathbf{f_e}\mathbf{y} - sin(q_5+q_6)r - 6\mathbf{f_{ez}} + \\ &(-cos(q_5+q_6+q_7)\mathbf{R_f} - cos(q_5+q_6)D_7)\mathbf{f_{fy}} + \\ &(-sin(q_5+q_6+q_7)\mathbf{R_f} - sin(q_5+q_6)D_7)\mathbf{f_{fz}}\end{aligned} \tag{B.45}$$

$$\tau_7 = -cos(q_5+q_6+q_7)\mathbf{R_f}\mathbf{f_{fy}} - sin(q_5+q_6+q_7)\mathbf{R_f}\mathbf{f_{fz}} \tag{B.46}$$

donde, $\mathbf{R_d}$: $[r_{d1}\ r_{d2} \ldots r_{dn}]$,

$\mathbf{R_e}$: $[r_{e1}\ r_{e2} \ldots r_{en}]$,

$\mathbf{R_f}$: $[r_{f1}\ r_{f2} \ldots r_{fn}]$.

$\mathbf{f_{dx}}$: $[f_{dx1}\ f_{dx2} \ldots f_{dxn}]^T$,

$\mathbf{f_{dy}}$: $[f_{dy1}\ f_{dx2} \ldots f_{dyn}]^T$,

$\mathbf{f_{dz}}$: $[f_{dz1}\ f_{dz2} \ldots f_{dzn}]^T$,

$\mathbf{f_{ex}}$: $[f_{ex1}\ f_{ex2} \ldots f_{exn}]^T$,

$\mathbf{f_{ey}}$: $[f_{ey1}\ f_{ex2} \ldots f_{eyn}]^T$,

$\mathbf{f_{ez}}$: $[f_{ez1}\ f_{ez2} \ldots f_{ezn}]^T$,

$\mathbf{f_{fx}}$: $[f_{fx1}\ f_{fx2} \ldots f_{fxn}]^T$,

$\mathbf{f_{fy}}$: $[f_{fy1}\ f_{fx2} \ldots f_{fyn}]^T$,

$\mathbf{f_{fz}}$: $[f_{fz1}\ f_{fz2} \ldots f_{fzn}]^T$,

de la misma forma esta generalización es aplicada para el dedo pulgar en las correspondientes expresiones para los pares articulares.

B.3. Fuerzas aplicadas en las falanges del dedo pulgar

B.3.1. Matrices de transformación dedo pulgar

Partimos de las matrices de transformación que relacionan los frames 9, 10, 11 y la posición del efector final con respecto a la base, tales matrices son:

$$ {}^{0''}T_9 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}sin(q_9) & \frac{\sqrt{2}}{2}cos(q_9) & 0 \\ 0 & cos(q_9) & -sin(q_9) & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}sin(q_9) & \frac{\sqrt{2}}{2}cos(q_9) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{B.47} $$

$$ {}^{9}T_{10} = \begin{bmatrix} 0 & cos(q_1 0) & sin(q_1 0) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sin(q_{10}) & cos(q_{10}) & D_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{B.48} $$

$$ {}^{10}T_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(q_{11}) & -sin(q_{11}) & 0 \\ 0 & sin(q_{11}) & cos(q_{11}) & D_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{B.49} $$

$$ {}^{11}T_{E''} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & D_8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{B.50} $$

de igual manera que en las secciones anteriores se consideraron ciertos puntos de contacto en las falanges a distancias r_j de cada articulación y de aplicación de la fuerza por parte de la mano a las objetos (ver figura B.2), tales puntos son:

- punto **G** situado a una distancia r_9 de la articulación q_9
- punto **H** situado a una distancia r_{10} de la articulación q_{10}
- punto **I** situado a una distancia r_{11} de la articulación q_{11}

Con ayuda de las matrices de transformación mostradas en B.47,B.48,B.49 se encontró las matrices de transformación de los puntos **G**, **H** y **I** las cuales

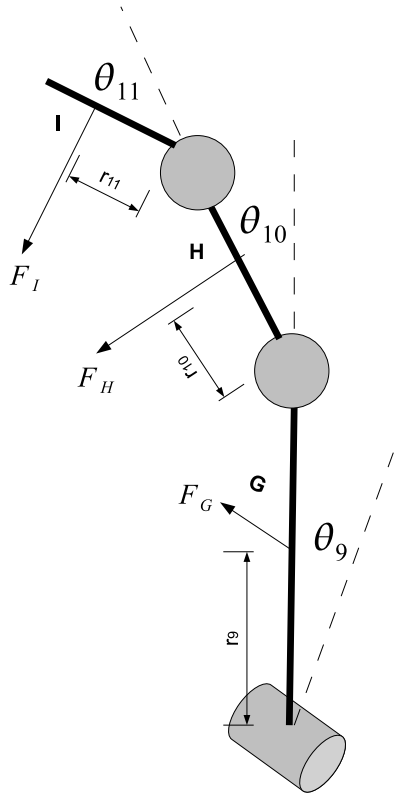

Figura B.3: Esquema de fuerzas aplicadas en las falanges del dedo pulgar

se muestran a continuación elemento a elemento,

$$
\begin{aligned}
{}^0T_G(1,1) =& \frac{1}{2} \\
{}^0T_G(1,2) =& \frac{\sqrt{2}}{2} sin(q_9) \\
{}^0T_G(1,3) =& \frac{\sqrt{2}}{2} cos(q_9) \\
{}^0T_G(1,4) =& \frac{\sqrt{2}}{2} cos(q_9) r_9 \\
{}^0T_G(2,1) =& 0 \\
{}^0T_G(2,2) =& cos(q_9) \\
{}^0T_G(2,3) =& -\, sin(q_9) \\
{}^0T_G(2,4) =& -\, sin(q_9) r_9 \\
{}^0T_G(3,1) =& \frac{\sqrt{2}}{2} \\
{}^0T_G(3,2) =& \frac{\sqrt{2}}{2} sin(q_9) \\
{}^0T_G(3,3) =& \frac{\sqrt{2}}{2} cos(q_9) \\
{}^0T_G(3,4) =& \frac{\sqrt{2}}{2} cos(q_9) r_9 \\
{}^0T_G(4,1) =& 0 \\
{}^0T_G(4,2) =& 0 \\
{}^0T_G(4,3) =& 0 \\
{}^0T_G(4,4) =& 1
\end{aligned}
\tag{B.51}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^0T_H(1,1) =& \frac{\sqrt{2}}{2} sin(q_9) \\
{}^0T_H(2,1) =& cos(q_9) \\
{}^0T_H(3,1) =& \frac{\sqrt{2}}{2} sin(q_9) \\
{}^0T_H(4,1) =& 0 \\
{}^0T_H(1,2) =& \frac{\sqrt{2}}{2} cos(q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{4} sin(q_9 + q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4} sin(q_9 - q_{10}) \\
{}^0T_H(2,2) =& -\frac{1}{2} cos(q_9 - q_{10}) + \frac{1}{2} cos(q_9 + q_{10}) \\
{}^0T_H(3,2) =& \frac{1}{2}\sqrt{2} cos(q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{4} sin(q_9 + q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4} sin(q_9 - q_{10}) \\
{}^0T_H(4,2) =& 0 \\
{}^0T_H(1,3) =& \frac{\sqrt{2}}{2} sin(q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{4} cos(q_9 - q_{10}) + 1\sqrt{2} cos(q_9 + q_{10}) \\
{}^0T_H(2,3) =& -\frac{1}{2} sin(q_9 + q_{10}) - \frac{1}{2} sin(q_9 - q_{10}) \\
{}^0T_H(3,3) =& \frac{\sqrt{2}}{2} sin(q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{4} cos(q_9 - q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{4} cos(q_9 + q_{10}) \\
{}^0T_H(4,3) =& 0 \\
{}^0T_H(1,4) =& \frac{1}{2} r_{10}\sqrt{2} sin(q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{4} r_{10} \cos(q_9 - q_{10}) \\
& + \frac{\sqrt{2}}{4} 10 \cos(q_9 + q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{2} cos(q_9) D_{10} \\
{}^0T_H(2,4) =& -\frac{1}{2} r_{10} sin(q_9 + q_{10}) \\
& - \frac{1}{2} r_{10} sin(q_9 - q_{10}) - sin(q_9) D_{10} \\
{}^0T_H(3,4) =& \frac{1}{2} r_{10}\sqrt{2} sin(q_{10}) \\
& + \frac{\sqrt{2}}{4} r_{10} cos(q_9 - q_{10}) \\
& + \frac{\sqrt{2}}{4} r_{10} cos(q_9 + q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{2} cos(q_9) D_{10} \\
{}^0T_H(4,4) =& 1
\end{aligned}
\tag{B.52}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^0T_I(1,1) =& \frac{\sqrt{2}}{2} sin(q_9) \\
{}^0T_I(2,1) =& cos(q_9) \\
{}^0T_I(3,1) =& \frac{\sqrt{2}}{2} sin(q_9) \\
{}^0T_I(4,1) =& 0 \\
{}^0T_I(1,2) =& \frac{\sqrt{2}}{2} cos(q_{11} - q_{10}) \\
& + \frac{\sqrt{2}}{4} sin(q_{11} + q_9 + q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{4} sin(q_{11} - q_9 + q_{10}) \\
{}^0T_I(2,2) =& -1/2 cos(q_{11} - q_9 + q_{10}) + 1/2 cos(q_{11} + q_9 + q_{10}) \\
{}^0T_I(3,2) =& \frac{\sqrt{2}}{2} cos(q_{11} - q_{10}) \\
& + \frac{\sqrt{2}}{4} sin(q_{11} + q_9 + q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{4} sin(q_{11} - q_9 + q_{10}) \\
{}^0T_I(4,2) =& 0 \\
{}^0T_I(1,3) =& -\frac{\sqrt{2}}{2} sin(q_{11} - q_{10}) \\
& + \frac{\sqrt{2}}{4} cos(q_{11} + q_9 + q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{4} cos(q_{11} - q_9 + q_{10}) \\
{}^0T_I(2,3) =& \frac{1}{2} sin(q_{11} - q_9 + q_{10}) - 1/2 sin(q_{11} + q_9 + q_{10}) \\
{}^0T_I(3,3) =& -\frac{\sqrt{2}}{2} sin(q_{11} - q_{10}) \\
& + \frac{\sqrt{2}}{4} cos(q_{11} + q_9 + q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{4} cos(q_{11} - q_9 + q_{10}) \\
{}^0T_I(4,3) =& 0
\end{aligned}
\tag{B.53}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^0T_I(1,4) =& -\frac{\sqrt{2}}{2}r_{11}sin(q_{11}-q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}cos(q_{11}+q_9+q_{10}) \\
&+\frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}cos(q_{11}-q_9+q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{2}D_{11}sin(q_{10}) \\
&+\frac{\sqrt{2}}{4}D_{11}cos(-q_9+q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{4}D_{11}cos(q_9+q_{10}) \\
&+\frac{\sqrt{2}}{2}cos(q_9)D_{10} \\
{}^0T_I(2,4) =& \frac{1}{2}r_{11}sin(q_{11}-q_9+q_{10}) \\
&-\frac{1}{2}r_{11}sin(q_{11}+q_9+q_{10}) - \frac{1}{2}D_{11}sin(q_9+q_{10}) \\
&+\frac{1}{2}D_{11}sin(-q_9+q_{10}) - sin(q_9)D_{10} \\
{}^0T_I(3,4) =& -\frac{\sqrt{2}}{2}r_{11}sin(q_{11}-q_{10}) \\
&+\frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}cos(q_{11}+q_9+q_{10}) \\
&+\frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}cos(q_{11}-q_9+q_{10}) \\
&+\frac{\sqrt{2}}{2}D_{11}sin(q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{4}D_{11}cos(-q_9+q_{10}) \\
&+\frac{\sqrt{2}}{4}D_{11}cos(q_9+q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{2}cos(q_9)D_{10} \\
{}^0T_I(4,4) =& 0
\end{aligned}
\tag{B.54}
$$

las distancias D_{10} y D_{11} corresponden a las distancias de las falanges proximal y media del dedo pulgar.

B.3.2. Transformaciones cartesianas de los puntos de interés del dedo pulgar

De las anteriores matrices los tres primeros términos de la columna cuatro de cada matriz de transformación corresponden a las transformaciones cartesianas **x**, **y**, **z** las cuales son:

para el punto G:

$$\begin{aligned}\varphi_{Gx} =& \frac{\sqrt{2}}{2} cos(q_9) r_9 \\ \varphi_{Gy} =& - sin(q_9) r_9 \\ \varphi_{Gz} =& \frac{\sqrt{2}}{2} cos(q_9) r_9\end{aligned} \tag{B.55}$$

para el punto H:

$$\begin{aligned}\varphi_{Hx} =& \frac{\sqrt{2}}{2} r_{10} sin(q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{4} r_{10} cos(-q_9 + q_{10}) \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{4} r_{10} cos(q_9 + q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{2} cos(q_9) D10 \\ \varphi_{Hy} =& - \frac{1}{2} r_{10} sin(q_9 + q_{10}) + \frac{1}{2} r_{10} sin(-q_9 + q_{10}) - sin(q_9) D_{10} \\ \varphi_{Hz} =& - \frac{1}{2} r_{10} sin(q_9 + q_{10}) + \frac{1}{2} r_{10} sin(-q_9 + q_{10}) - sin(q_9) D_{10}\end{aligned} \tag{B.56}$$

para el punto I:

$$\begin{aligned}\varphi_{Ix} =& - \frac{\sqrt{2}}{2} r_{11} sin(q_{11} - q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{4} r_{11} cos(q_{11} + q_9 + q_{10}) \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{4} r_{11} cos(q_{11} - q_9 + q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{2} D_{11} sin(q_{10}) \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{4} D_{11} cos(-q_9 + q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{4} D_{11} cos(q_9 + q_{10}) \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{2} cos(q_9) D_{10} \\ \varphi_{Iy} =& \frac{1}{2} r_{11} sin(q_{11} - q_9 + q_{10}) \\ &- \frac{1}{2} r_{11} sin(q_{11} + q_9 + q_{10}) - \frac{1}{2} D_{11} sin(q_9 + q_{10}) \\ &+ \frac{1}{2} D_{11} sin(-q_9 + q_{10}) - sin(q_9) D_{10} \\ \varphi_{Iz} =& - \frac{\sqrt{2}}{2} r_{11} sin(q_{11} - q_{10}) \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{4} r_{11} cos(q_{11} + q_9 + q_{10}) \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{4} r_{11} cos(q_{11} - q_9 + q_{10}) \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{2} D_{11} sin(q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{4} D_{11} cos(-q_9 + q_{10}) \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{4} D_{11} cos(q_9 + q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{2} cos(q_9) D_{10}\end{aligned} \tag{B.57}$$

B.3.3. Determinación de los pares articulares del dedo pulgar

El torque total τ es equivalente al aporte de las fuerzas cartesianas en los puntos G,H y I por sus respectivas Jacobianas transpuestas es de la forma:

$$\tau = {}^0J_G{}^T F_G + {}^0J_H{}^T F_H + {}^0J_I{}^T F_I \tag{B.58}$$

donde $F_G = [f_{gx}\ f_{gy}\ f_{gz}]$ es las fuerzas cartesianas en el punto G, $F_H = [f_{hx}\ f_{hy}\ f_{hz}]$ es las fuerzas cartesianas en el punto H y $F_I = [f_{ix}\ f_{iy}\ f_{iz}]$ las fuerzas cartesianas en el punto I.

Matriz Jacobiana de los puntos de interés del dedo pulgar

El cálculo de la matrix Jacobiana para cada punto es de la forma:

$$ {}^0J_G = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{Gx}(q)}{\partial q_9} & \frac{\partial \varphi_{Gx}(q)}{\partial q_{10}} & \frac{\partial \varphi_{Gx}(q)}{\partial q_{11}} \\ \frac{\partial \varphi_{Gy}(q)}{\partial q_9} & \frac{\partial \varphi_{Gy}(q)}{\partial q_{10}} & \frac{\partial \varphi_{Gy}(q)}{\partial q_{11}} \\ \frac{\partial \varphi_{Gz}(q)}{\partial q_9} & \frac{\partial \varphi_{Gz}(q)}{\partial q_{10}} & \frac{\partial \varphi_{Gz}(q)}{\partial q_{11}} \end{pmatrix} \tag{B.59}$$

$$ {}^0J_H = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{Hx}(q)}{\partial q_9} & \frac{\partial \varphi_{Hx}(q)}{\partial q_{10}} & \frac{\partial \varphi_{Hx}(q)}{\partial q_{11}} \\ \frac{\partial \varphi_{Hy}(q)}{\partial q_9} & \frac{\partial \varphi_{Hy}(q)}{\partial q_{10}} & \frac{\partial \varphi_{Hy}(q)}{\partial q_{11}} \\ \frac{\partial \varphi_{Hz}(q)}{\partial q_9} & \frac{\partial \varphi_{Hz}(q)}{\partial q_{10}} & \frac{\partial \varphi_{Hz}(q)}{\partial q_{11}} \end{pmatrix} \tag{B.60}$$

$$ {}^0J_I = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{Ix}(q)}{\partial q_9} & \frac{\partial \varphi_{Ix}(q)}{\partial q_{10}} & \frac{\partial \varphi_{Ix}(q)}{\partial q_{11}} \\ \frac{\partial \varphi_{Iy}(q)}{\partial q_9} & \frac{\partial \varphi_{Iy}(q)}{\partial q_{10}} & \frac{\partial \varphi_{Iy}(q)}{\partial q_{11}} \\ \frac{\partial \varphi_{Iz}(q)}{\partial q_9} & \frac{\partial \varphi_{Iz}(q)}{\partial q_{10}} & \frac{\partial \varphi_{Iz}(q)}{\partial q_{11}} \end{pmatrix} \tag{B.61}$$

de esta manera los componentes de las matrices anteriores son:

$$
\begin{aligned}
{}^0J_G(1,1) &= -\frac{\sqrt{2}}{2}sin(q_9)r_9 \\
{}^0J_G(2,1) &= -cos(q_9)r_9 \\
{}^0J_G(3,1) &= -\frac{\sqrt{2}}{2}sin(q_9)r_9 \\
{}^0J_G(1,2) &= 0 \\
{}^0J_G(2,2) &= 0 \\
{}^0J_G(3,2) &= 0 \\
{}^0J_G(1,3) &= 0 \\
{}^0J_G(2,3) &= 0 \\
{}^0J_G(3,3) &= 0
\end{aligned}
\tag{B.62}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^0J_H(1,1) =& \frac{\sqrt{2}}{4} r_{10} sin(-q_9 + q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4} r_{10} sin(q_9 + q_{10}) \\
& - \frac{\sqrt{2}}{2} sin(q_9) D_{10} \\
{}^0J_H(2,1) =& -\frac{1}{2} r_{10} cos(q_9 + q_{10}) \\
& - \frac{1}{2} r_{10} cos(-q_9 + q_{10}) - cos(q_9) D_{10} \\
{}^0J_H(3,1) =& \frac{\sqrt{2}}{4} r_{10} sin(-q_9 + q_{10}) \\
& - \frac{\sqrt{2}}{4} r_{10} sin(q_9 + q_{10}) \\
& - \frac{\sqrt{2}}{2} sin(q_9) D_{10} \\
{}^0J_H(1,2) =& \frac{\sqrt{2}}{2} r_{10} cos(q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4} r_{10} sin(-q_9 + q_{10}) \\
& - \frac{\sqrt{2}}{4} r_{10} sin(q_9 + q_{10}) \\
{}^0J_H(2,2) =& -\frac{1}{2} r_{10} cos(q_9 + q_{10}) \\
& + \frac{1}{2} r_{10} cos(-q_9 + q_{10}) \\
{}^0J_H(3,2) =& \frac{\sqrt{2}}{2} r_{10} cos(q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4} r_{10} sin(-q_9 + q_{10}) \\
& - \frac{\sqrt{2}}{4} r_{10} sin(q_9 + q_{10}) \\
{}^0J_H(1,3) =& 0 \\
{}^0J_H(2,3) =& 0 \\
{}^0J_H(3,3) =& 0
\end{aligned}
\tag{B.63}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^0J_I(1,1) =& -\frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}sin(q_{11}+q_9+q_{10}) \\
&+\frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}sin(q_{11}-q_9+q_{10})+\frac{\sqrt{2}}{4}D_{11}sin(-q_9+q_{10})- \\
&\frac{\sqrt{2}}{4}D_{11}sin(q_9+q_{10})-\frac{\sqrt{2}}{2}sin(q_9)D_{10} \\
{}^0J_I(2,1) =& -\frac{1}{2}r_{11}cos(q_{11}-q_9+q_{10}) \\
&-\frac{1}{2}r_{11}cos(q_{11}+q_9+q_{10})-\frac{1}{2}D_{11}cos(q_9+q_{10}) \\
&-\frac{1}{2}D_{11}cos(-q_9+q_{10})-cos(q_9)D_{10} \\
{}^0J_I(3,1) =& -\frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}sin(q_{11}+q_9+q_{10})+\frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}sin(q_{11}-q_9+q_{10}) \\
&+\frac{\sqrt{2}}{4}D_{11}sin(-q_9+q_{10})-\frac{\sqrt{2}}{4}D_{11}sin(q_9+q_{10}) \\
&-\frac{\sqrt{2}}{2}sin(q_9)D_{10} \\
{}^0J_I(1,2) =& \frac{\sqrt{2}}{2}r_{11}cos(q_{11}-q_{10}) \\
&-\frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}sin(q_{11}+q_9+q_{10})-\frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}sin(q_{11}-q_9+q_{10}) \\
&+\frac{\sqrt{2}}{2}D_{11}cos(q_{10})-\frac{\sqrt{2}}{4}D_{11}sin(-q_9+q_{10}) \\
&-\frac{\sqrt{2}}{4}D_{11}sin(q_9+q_{10})
\end{aligned}
\tag{B.64}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^0J_I(2,2) =& \frac{1}{2}r_{11}cos(q_{11}-q_9+q_{10}) - \frac{1}{2}r_{11}cos(q_{11}+q_9+q_{10}) \\
& - \frac{1}{2}D_{11}cos(q_9+q_{10}) + \frac{1}{2}D_{11}cos(-q_9+q_{10}) \\
{}^0J_I(3,2) =& \frac{\sqrt{2}}{2}r_{11}cos(q_{11}-q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}sin(q_{11}+q_9+q_{10}) \\
& - \frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}sin(q_{11}-q_9+q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{2}D_{11}cos(q_{10}) \\
& - \frac{\sqrt{2}}{4}D_{11}sin(-q_9+q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4}D_{11}sin(q_9+q_{10}) \\
{}^0J_I(1,3) =& -\frac{\sqrt{2}}{2}r_{11}cos(q_{11}-q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}sin(q_{11}+q_9+q_{10}) \\
& - \frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}sin(q_{11}-q_9+q_{10}) \\
{}^0J_I(2,3) =& \frac{1}{2}r_{11}cos(q_{11}-q_9+q_{10}) - \frac{1}{2}r_{11}cos(q_{11}+q_9+q_{10}) \\
{}^0J_I(3,3) =& -\frac{\sqrt{2}}{2}r_{11}cos(q_{11}-q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}sin(q_{11}+q_9+q_{10}) \\
& - \frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}sin(q_{11}-q_9+q_{10})
\end{aligned}
\tag{B.65}
$$

Pares articulares del dedo índice

El vector de torques $\tau = [\tau_9\ \tau_{10}\ \tau_{11}]^T$ para las articulaciones numeradas con $9, 10$ y 11 esta compuesto por los siguientes elementos:

$$
\begin{aligned}
\tau_9 = & -\frac{\sqrt{2}}{2}sin(q_9)r_9 f_{gx} - cos(q_9)r_9 f_{gy} - \frac{\sqrt{2}}{2}sin(q_9)r_9 f_{gz} \\
& + (\frac{\sqrt{2}}{4}r_{10}sin(-q_9+q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4}r_{10}sin(q_9+q_{10}) \\
& - \frac{\sqrt{2}}{2}sin(q_9)D_{10})f_{hx} \\
& + (-\frac{1}{2}r_{10}cos(q_9+q_{10}) - \frac{1}{2}r_{10}cos(-q_9+q_{10}) - cos(q_9)D_{10})f_{hy} \\
& + (\frac{\sqrt{2}}{4}r_{10}sin(-q_9+q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4}r_{10}sin(q_9+q_{10}) \\
& - \frac{\sqrt{2}}{2}sin(q_9)D_{10})f_{hz} + (-\frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}sin(q_{11}+q_9+q_{10}) \\
& + \frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}sin(q_{11}-q_9+q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{4}D_{11}sin(-q_9+q_{10}) \\
& - \frac{\sqrt{2}}{4}D_{11}sin(q_9+q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{2}sin(q_9)D_{10})f_{ix} \\
& + (-\frac{1}{2}r_{11}cos(q_{11}-q_9+q_{10}) \\
& - \frac{1}{2}r_{11}cos(q_{11}+q_9+q_{10}) - \frac{1}{2}D_{11}cos(q_9+q_{10}) \\
& - \frac{1}{2}D_{11}cos(-q_9+q_{10}) - cos(q_9)D_{10})f_{iy} \\
& + (-\frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}sin(q_{11}+q_9+q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}sin(q_{11}-q_9+q_{10}) \\
& + \frac{\sqrt{2}}{4}D_{11}sin(-q_9+q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4}D_{11}sin(q_9+q_{10}) \\
& - \frac{\sqrt{2}}{2}sin(q_9)D_{10})f_{iz}
\end{aligned}
\tag{B.66}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_{10} =&(\frac{\sqrt{2}}{2}r_{10}cos(q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4}r_{10}sin(-q_9 + q_{10}) \\
&- \frac{\sqrt{2}}{4}r_{10}sin(q_9 + q_{10}))f_{hx} + (-\frac{1}{2}r_{10}cos(q_9 + q_{10}) \\
&+ \frac{1}{2}r_{10}cos(-q_9 + q_{10}))f_{hy} + (\frac{\sqrt{2}}{2}r_{10}cos(q_{10}) \\
&- \frac{\sqrt{2}}{4}r_{10}sin(-q_9 + q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4}r_{10}sin(q_9 + q_{10}))f_{hz} \\
&+ (\frac{\sqrt{2}}{2}r_{11}cos(q_{11} - q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}sin(q_{11} + q_9 + q_{10}) \\
&- \frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}sin(q_{11} - q_9 + q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{2}D_{11}cos(q_{10}) \\
&- \frac{\sqrt{2}}{4}D_{11}sin(-q_9 + q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4}D_{11}sin(q_9 + q_{10}))f_{ix} \\
&+ (\frac{1}{2}r_{11}cos(q_{11} - q_9 + q_{10}) - \frac{1}{2}r_{11}cos(q_{11} + q_9 + q_{10}) \\
&- \frac{1}{2}D_{11}cos(q_9 + q_{10}) + \frac{1}{2}D_{11}cos(-q_9 + q_{10}))f_{iy} \\
&+ (\frac{\sqrt{2}}{2}r_{11}cos(q_{11} - q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}sin(q_{11} + q_9 + q_{10}) \\
&- \frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}sin(q_{11} - q_9 + q_{10}) + \frac{\sqrt{2}}{2}D_{11}cos(q_{10}) \\
&- \frac{\sqrt{2}}{4}D_{11}sin(-q_9 + q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4}D_{11}sin(q_9 + q_{10}))f_{iz}
\end{aligned}
\tag{B.67}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_{11} =&(-\frac{\sqrt{2}}{2}r_{11}cos(q_{11} - q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}sin(q_{11} + q_9 + q_{10}) \\
&- \frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}sin(q_{11} - q_9 + q_{10}))f_{ix} + (\frac{1}{2}r_{11}cos(q_{11} - q_9 + q_{10}) \\
&- \frac{1}{2}r_{11}cos(q_{11} + q_9 + q_{10}))f_{iy} + (-\frac{\sqrt{2}}{2}r_{11}cos(q_{11} - q_{10}) \\
&- \frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}sin(q_{11} + q_9 + q_{10}) - \frac{\sqrt{2}}{4}r_{11}sin(q_{11} - q_9 + q_{10}))f_{iz}
\end{aligned}
\tag{B.68}
$$