

**EL RAZONAMIENTO INDUCTIVO EN EL DESARROLLO DEL
PENSAMIENTO NUMÉRICO**



Andrés Felipe Díaz Cruz

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

Licenciatura en Matemáticas

POPAYÁN-CAUCA

2024

**EL RAZONAMIENTO INDUCTIVO EN EL DESARROLLO DEL
PENSAMIENTO NUMÉRICO**

Proyecto de práctica pedagógica para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Andrés Felipe Díaz Cruz

Directora

Dra. Martha Lucía Bobadilla Alfaro

UNIVERSIDAD DEL CAUCA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y DE LA EDUCACIÓN

Licenciatura en Matemáticas

POPAYÁN-CAUCA

2024

Nota de aceptación

Directora: _____

PhD. Martha Lucia Bobadilla Alfaro

Jurado: _____

Dr. David Fernando Daza Urbano

Lugar y fecha de sustentación: _____

Contenido

Introducción	1
Contexto	3
Problemática	5
Objetivos	8
Objetivo general:.....	8
Objetivos específicos:	8
Justificación	9
Antecedentes	12
Marco Teórico	17
Razonamiento	17
Razonamiento deductivo	19
Inducción	20
El razonamiento inductivo	20
<i>Errores formales</i>	25
<i>Errores informales</i>	25
Patrones	27
Particularización	29
Abstracción	32
Generalización	34
Pensamiento numérico	36
Metodología	40
Metodología de la práctica docente	40
Metodología de la sistematización	42
Cronograma	44
Recuento histórico y análisis crítico	45
Encuestas	45
Análisis de actividades	47
Actividad 1 (Naturales)	48
Actividad 2 (El Intruso)	51
Actividad 3 (cuadrados)	54
Actividad 4 (pentagonales)	59
Actividad 5 (sucesión de Fibonacci)	62

Actividad 6 (Sucesiones geométricas y aritméticas)	65
Actividad 7 (Generalizando sucesiones)	71
Actividad 8 (Algoritmo de la división)	74
Actividad 9 (Aritmética modular)	77
Actividad 10 (Tablas de suma y multiplicación modular)	81
Actividad 11 (Criterios de divisibilidad)	84
Conclusiones	87
Bibliografía	89
Anexos	92

Tabla de Ilustraciones

<i>Ilustración 1</i> Primeros 10 elementos de los Naturales	48
<i>Ilustración 2</i> - Sucesor del 10.....	49
<i>Ilustración 3</i> -El Intruso	51
<i>Ilustración 4</i> -El Intruso 2	52
<i>Ilustración 5</i>	53
<i>Ilustración 6</i>	55
<i>Ilustración 7</i> -Organización de datos	56
<i>Ilustración 8</i>	56
<i>Ilustración 9</i>	57
<i>Ilustración 10</i>	57
<i>Ilustración 11</i>	58
<i>Ilustración 12</i>	59
<i>Ilustración 13</i>	59
<i>Ilustración 14</i>	61
<i>Ilustración 15</i>	62
<i>Ilustración 16</i>	64
<i>Ilustración 17</i>	67
<i>Ilustración 18</i>	68
<i>Ilustración 19</i>	68
<i>Ilustración 20</i>	69
<i>Ilustración 21</i> -Torres de hanoi	70
<i>Ilustración 22</i>	72
<i>Ilustración 23</i>	75
<i>Ilustración 24</i> -Residuos	76
<i>Ilustración 25</i>	78
<i>Ilustración 26</i> -Aritmética modular	79
<i>Ilustración 27</i>	80
<i>Ilustración 28</i>	82
<i>Ilustración 29</i>	82
<i>Ilustración 30</i>	85

Tabla de anexos

<i>Anexo 1-Encuesta Inicial</i>	94
<i>Anexo 2- Encuesta Final</i>	96
<i>Anexo 3-Guía 1: Naturales y sucesiones</i>	97
<i>Anexo 4-Guía 2: Sucesiones aritméticas y geométricas</i>	108
<i>Anexo 5-Guía 3: Algoritmo de la división</i>	117
<i>Anexo 6-Guía 4: Aritmética modular</i>	124
<i>Anexo 7-Guía 5: Criterios de divisibilidad</i>	135
<i>Anexo 8-Acertijos</i>	143

Introducción

En este documento se expone la sistematización de una Práctica Pedagógica realizada en el periodo académico correspondiente al 2023-2, cuyo objetivo fue fortalecer el razonamiento inductivo de un grupo de 20 estudiantes de octavo y noveno grado, para contribuir con el desarrollo de su pensamiento numérico. La práctica docente se llevó a cabo en la Institución Educativa Simón Bolívar de El Bordo, Cauca, en el marco del programa "Semillero de Matemáticas", ofrecido por el Departamento de Matemáticas y el Centro de Regionalización de la Universidad del Cauca. Esta intervención abordó las dificultades que los estudiantes enfrentan en el proceso de abstracción matemática, particularmente en la comprensión del conjunto inductivo de los números naturales y el desarrollo del pensamiento numérico.

La metodología empleada tuvo un enfoque constructivista, considerando al estudiante como un agente activo en su propio proceso de aprendizaje. Este enfoque permitió crear un ambiente en el que los estudiantes pudieran construir conocimientos a través de la exploración, el descubrimiento y la reflexión, lo que facilitó el desarrollo de habilidades matemáticas de manera significativa. La propuesta responde a la necesidad de superar los enfoques tradicionales de enseñanza, centrada en aspectos como la memorización, la enseñanza pasiva, dependencia del tablero, priorización en resultados y exámenes, entre otros; para promover una educación más dinámica y participativa que fomente la exploración, la generación y justificación de conjeturas, y el ensayo-error.

Así mismo, se facilitó el aprendizaje de conceptos matemáticos fundamentales como los números naturales, sucesiones, algoritmo de la división, criterios de divisibilidad y aritmética modular; con el fin de que los estudiantes pudieran formular conjeturas y justificarlas, potenciando

así su capacidad de razonamiento lógico. No solo se buscó que los estudiantes llegaran a las respuestas correctas, sino que comprendieran el "por qué" y el "cómo" detrás de sus conclusiones. También, esta aproximación fomentó una actitud investigativa y proactiva en los estudiantes, quienes, mediante el razonamiento inductivo, abordaron problemas matemáticos con mayor confianza y creatividad, desarrollando competencias clave en su proceso educativo.

El análisis de los hechos y resultados observados en el aula se realizó considerando los 6 pasos que Cañadas y Castro (2004) proponen, basados en aportaciones de Pólya y Hadamard: el trabajo con casos particulares, la organización de los casos particulares, la identificación de patrones, la formulación de conjeturas, su justificación y, por último, algunas generalizaciones. Es importante destacar que los resultados de este trabajo no son generalizables a todos los contextos educativos, pues se basan en un grupo específico de estudiantes y circunstancias particulares. Además, el enfoque constructivista depende en gran medida del compromiso y las experiencias previas de los estudiantes, por lo que los resultados pueden variar en otros entornos.

Contexto

En el contexto de una práctica pedagógica, se necesita considerar el entorno para lograr una enseñanza efectiva y significativa. Comprender el ámbito educativo permite al docente identificar las necesidades de los estudiantes con mayor precisión, fomentar la inclusión y el aprendizaje con sentido, desarrollando así habilidades profesionales sólidas.

La práctica docente se llevó a cabo en el periodo 2023-2, en la Institución Educativa Simón Bolívar, como parte del Programa de Proyección Social: Semillero de Matemáticas, esta se encuentra ubicada en la calle 3-A, No 3-02 del barrio El Campin, en la zona urbana de El Bordo, cabecera municipal de Patía, Cauca; la cual fue fundada mediante el decreto 782 del 7 de septiembre de 1981. Es una institución mixta de carácter público, con calendario A, que ofrece niveles de preescolar, básica primaria, básica secundaria, media vocacional, técnica empresarial, técnica en sistemas y educación para adultos.

La población estudiantil de esta Institución enfrenta un contexto social complejo, marcado por problemas como la drogadicción, la delincuencia, el desplazamiento forzado y el conflicto armado, además de desafíos económicos. Estos factores han llevado a que los jóvenes sean estigmatizados por la sociedad. Sin embargo, la Institución ha buscado estrategias vinculadas al deporte, la ciencia y el arte para alejar a los estudiantes de las calles, del consumo, el pandillaje y demás influencias negativas.

Frente a estas complejidades, el Proyecto Educativo Institucional (PEI) de la Institución, elaborado en 2016, busca desarrollar habilidades y competencias de emprendimiento entre los jóvenes. Esto les permite desempeñar roles específicos o generar oportunidades de empleo una vez finalicen sus estudios básicos. Por otra parte, la situación económica precaria de muchos de ellos

les impide acceder a la educación superior, debido a los costos asociados no solo a la matrícula, sino también al sostenimiento. A pesar de los desafíos que presenta el Plantel Educativo, se ha buscado mejorar la infraestructura ampliando la capacidad de salones y así dar cabida a más estudiantes.

Por otro lado, el Semillero de Matemáticas es un Programa de Proyección Social sin ánimo de lucro, ofrecido por el Departamento de Matemáticas de la Universidad del Cauca en colaboración con el Centro de Regionalización. Este es un proyecto cuyo propósito es estimular el interés por las matemáticas y facilitar la transición de la escuela a la universidad. Para aportar al cumplimiento de este objetivo, en la práctica docente, se brindó apoyo a 20 estudiantes de octavo y noveno grado, contribuyendo con el desarrollo de su pensamiento numérico mediante el fortalecimiento del razonamiento inductivo; para el alcance de este objetivo se utilizó la metodología constructivista apoyada con actividades lúdicas, tal como lo plantea el Programa del Semillero de Matemáticas.

Problemática

El proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas presenta desafíos significativos, lo que ha impulsado a toda una comunidad educativa a trabajar en su mejoramiento. Uno de los retos más persistentes está relacionado con las dificultades que enfrentan los estudiantes para comprender, manipular y usar de manera efectiva los números, específicamente los números naturales.

El principal obstáculo en el desarrollo del pensamiento numérico radica en la polaridad entre los conceptos abstractos y sus representaciones concretas, es decir, entre los diseños que representan los números y los que son representados. Esto se refleja en la tensión entre las operaciones mentales y físicas, y en la distancia entre las representaciones internas (mentales) y externas (visuales o manipulativas) del mundo matemático (Albaladejo, 2000). En otras palabras, el proceso de abstracción en matemáticas actúa como un obstáculo epistemológico que dificulta a muchos alumnos obtener resultados significativos. Estas dificultades no solo afectan el desempeño académico en matemáticas, sino que también limitan la capacidad de los estudiantes para resolver problemas lógicos en otras áreas del conocimiento y en la vida cotidiana.

Además, muchos estudiantes experimentan ansiedad y una notable falta de confianza al enfrentarse a las matemáticas. Esto suele deberse a una comprensión insuficiente de los conceptos, lo que lleva a una excesiva dependencia de la memorización. Generalmente, las instituciones educativas promueven un enfoque deductivo, donde las conclusiones se derivan de premisas previas de manera cerrada. Aunque este método proporciona certeza, limita las oportunidades para que los estudiantes formulen conjeturas, exploren a través del ensayo y error y generalicen esos hallazgos para su posterior demostración.

El razonamiento inductivo, por el contrario, permite avanzar desde lo particular hacia lo general, descubriendo nuevos conceptos y relaciones subyacentes. Este enfoque no solo facilita la comprensión de operaciones matemáticas, sino que también promueve la capacidad de aplicar esos conocimientos en situaciones del mundo real. La falta de un razonamiento inductivo robusto puede dificultar la comprensión profunda de los números naturales y la asimilación de otros conceptos matemáticos. Para muchos estudiantes, la transición de lo concreto a lo abstracto se complica cuando no se proporciona un contexto práctico que facilite la internalización de los conceptos.

Existen varios factores que pueden influir en la falta de razonamiento inductivo: la carencia de habilidades analíticas, la excesiva dependencia de la intuición, la insuficiencia de información adecuada, la falta de recursos educativos efectivos, la formación insuficiente del profesorado en metodologías que promuevan el pensamiento crítico y el predominio de una enseñanza tradicional centrada en la memorización.

Es crucial que los educadores superen los obstáculos relacionados con la abstracción, algo que requiere tiempo, esfuerzo y una enseñanza adecuada que no se limite a la transmisión de conocimientos. Despertar el interés por las matemáticas es clave. Las matemáticas deben presentarse no solo como un conjunto de reglas, sino como una actividad humana que involucra creatividad, razonamiento y resolución de problemas. Esto generaría un aprendizaje más dinámico y participativo, promoviendo la exploración y la generalización, que son fundamentales en el razonamiento inductivo.

Para promover el desarrollo del razonamiento inductivo, se pueden adoptar metodologías que incluyan actividades exploratorias, en las que los estudiantes puedan formular y validar conjeturas a través de la experimentación; la contextualización de problemas matemáticos, relacionando los conceptos abstractos con situaciones del mundo real; y la retroalimentación

activa, que permita a los estudiantes reflexionar sobre sus errores y ajustar sus razonamientos. El trabajo colaborativo también es clave, ya que el intercambio de ideas entre estudiantes fomenta una comprensión más profunda de los conceptos.

Con base en estas ideas, surge la pregunta de investigación: ¿Cómo fortalecer el razonamiento inductivo para contribuir al desarrollo del pensamiento numérico?

Objetivos

Objetivo general:

Fortalecer el razonamiento inductivo para contribuir con el desarrollo del pensamiento numérico.

Objetivos específicos:

- Facilitar a los estudiantes la identificación y descripción de patrones en sucesiones numéricas.
- Desarrollar la capacidad de los estudiantes, de conjeturar a partir de sucesiones y operaciones con números enteros.
- Fortalecer la habilidad de los estudiantes para justificar sus conjeturas.
- Generar espacios de aprendizaje donde se reconozca la importancia del ensayo-error en la actividad matemática.

Justificación

Debido al papel que desempeñan las matemáticas en el desarrollo intelectual y cognitivo de los estudiantes, es importante prestar atención a una enseñanza y aprendizaje efectivos. El Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006), a través de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, enfatiza que las competencias matemáticas no se logran mediante la memorización de fórmulas o procedimientos, sino a través de ambientes de aprendizaje enriquecidos que involucran situaciones problema significativas y comprensivas.

Estas competencias desafían a los estudiantes a pensar críticamente, aplicar conceptos matemáticos en contextos del mundo real y desarrollar habilidades para la resolución de problemas. Por esto, el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas no debe centrarse en la resolución de problemas de una manera automatizada a partir de técnicas de memorización ni en la retención de fórmulas. Al contrario, es importante crear espacios donde se logre explorar, generar hipótesis, abstraer, generalizar y demostrar.

Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 2006) promueven el avance de los procesos educativos y la planificación de actividades que tengan como enfoque principal y objetivo la comprensión de los conceptos y usos de los números y la numeración. También enfatizan la importancia de las operaciones matemáticas, las relaciones entre los números y el fomento de diversas habilidades de cálculo y estimación.

Sin embargo, en la práctica, muchos estudiantes enfrentan desafíos en el desarrollo del pensamiento numérico debido a enfoques pedagógicos tradicionales que enfatizan la memorización en lugar de fomentar la exploración y la creatividad matemática. Varios estudios muestran que el razonamiento inductivo, desde tempranas edades, es crucial para la comprensión

de los números (pensamiento numérico) (Salgado y Salinas, 2012), ya que potencia el rendimiento en matemáticas y la habilidad para enfrentar problemas de manera autónoma, cultivando una mentalidad de crecimiento y confianza en los estudiantes. Este enfoque enriquece significativamente la experiencia de aprendizaje de los estudiantes, generando una transformación profunda en el proceso educativo.

El proceso de enseñanza y aprendizaje debe ser adecuado, relevante y significativo para el estudiante. Es importante recordar que el pensamiento numérico no se limita únicamente a la didáctica matemática, por lo que es posible que haya otros factores que también deban considerarse al enseñarlo (Albaladejo, 2000).

Es crucial comprender que el razonamiento inductivo y el pensamiento numérico están estrechamente conectados. El razonamiento inductivo, que consiste en observar patrones y hacer generalizaciones a partir de ejemplos específicos, orienta al pensamiento numérico al señalar áreas de interés y descubrir posibles relaciones entre los números. Esta interacción se refleja en la habilidad de los estudiantes para formular conjeturas basadas en sus observaciones. Posteriormente, emplean su conocimiento de los números, las operaciones matemáticas y sus saberes previos para validar esas conjeturas, así como para generalizarlas de manera fundamentada. Esta conexión entre ambos tipos de pensamiento fortalece la comprensión matemática y fomenta un enfoque más profundo y flexible en el aprendizaje.

También, se fomenta la autonomía en el proceso de aprendizaje y la aplicación de saberes en diversos contextos, convirtiéndose en una herramienta esencial para alcanzar el éxito educativo. Con el pensamiento numérico se pueden abarcar una serie de habilidades que permiten comprender la cantidad y el valor de los números, realizar operaciones matemáticas básicas, estimar cantidades, y resolver problemas matemáticos, entre otros. Además, el razonamiento inductivo se caracteriza

por ser no algorítmico, involucrar el juicio e interpretación, y abrir un campo a soluciones múltiples.

En consecuencia, es menester del docente reconocer la importancia del pensamiento numérico y del razonamiento inductivo en el entorno educativo. Con este propósito, la intervención se enfoca en potenciar el razonamiento inductivo de los estudiantes, cultivando así su capacidad para comprender conceptos numéricos y preparándolos para enfrentar desafíos tanto en su desarrollo académico como personal.

Los docentes de matemáticas deben utilizar estrategias pedagógicas que incluyan ejemplos concretos y aplicaciones contextuales para asistir a los estudiantes en la superación de las barreras vinculadas con la abstracción en las matemáticas. Al centrarse en fortalecer el razonamiento inductivo para desarrollar el pensamiento numérico a través de estrategias pedagógicas lúdicas con casos particulares, se provee a los estudiantes de las herramientas necesarias para comprender de manera más profunda los objetos matemáticos y aplicar sus conocimientos de forma efectiva en distintos ambientes.

Por consiguiente, se promueve el uso de estrategias y metodologías que involucran a los y las estudiantes de manera activa, capturando la atención y fomentando la participación en el proceso de aprendizaje.

Antecedentes

Cañadas, (2002) es un trabajo de investigación que se centra en el estudio del razonamiento inductivo en el contexto de la educación matemática, específicamente en alumnos de secundaria. Se presenta como un informe que cumple con la normativa del programa de doctorado del Dpto. de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

La investigación busca analizar cómo los estudiantes desarrollan su capacidad de razonamiento inductivo, es decir, cómo pasan de observaciones específicas a generalizaciones más amplias. Se exploran diferentes enfoques teóricos y se revisan documentos relevantes que abordan la evolución histórica y las concepciones del razonamiento inductivo. Además, se discuten las implicaciones educativas de fomentar este tipo de razonamiento en el aula, destacando la importancia de que los alumnos formulen conjeturas y las justifiquen.

El trabajo también menciona la relevancia de la argumentación en el proceso de razonamiento, así como la relación entre el desarrollo del lenguaje y la habilidad para pensar metafóricamente en el contexto matemático.

Castro et al., (2010) es un artículo de investigación que presenta al razonamiento inductivo como un medio importante en la construcción de conocimiento en medios científicos y sociales. Su valor se debe a su capacidad para generalizar. Esta generalización se logra al abstraer lo que es consistente y común en los eventos científicos, descubriendo patrones que eventualmente se convierten en las bases de nuevas leyes del conocimiento.

Por otra parte, el texto afirma, sustentado en Trujillo, Castro y Molina, (2009), que la necesidad de incorporar actividades de razonamiento inductivo en la educación, desde temprana edad es esencial para permitir a los estudiantes establecer generalizaciones y expresarlas

algebraicamente. Esto es importante porque, en niveles educativos más avanzados, los estudiantes a menudo tienen dificultades para expresar relaciones numéricas de manera algebraica.

Finalmente, la introducción temprana al razonamiento inductivo, con un enfoque en la identificación de regularidades, sienta las bases para que los estudiantes puedan establecer generalizaciones y expresarlas de manera más sistemática y rigurosa en niveles superiores. En última instancia, esto les permite resolver problemas sin que se les describa explícitamente el procedimiento a seguir. Esta incorporación temprana es esencial para fomentar habilidades fundamentales, como la capacidad para generalizar, justificar y expresar generalizaciones en matemáticas.

Acero y Callejas Parra, (2019) es un trabajo de investigación que se llevó a cabo en el contexto de la práctica pedagógica de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia. El enfoque del análisis se centra en comprender cómo el uso de material de apoyo puede fomentar el desarrollo del razonamiento inductivo en estudiantes del grupo 6°A de la Institución Educativa San Pedro Claver, ubicada en el municipio de Apartadó. El estudio se desarrolló dentro del contexto escolar y se basó en la perspectiva del conocimiento pedagógico del contenido.

El objetivo principal de esta investigación es examinar cómo el material de apoyo utilizado en la enseñanza de las matemáticas puede influir en el desarrollo del razonamiento inductivo de los estudiantes. El estudio se centra en un grupo específico de estudiantes de sexto grado y se realiza con el propósito de mejorar las estrategias pedagógicas en el aula. Por otro lado, la metodología empleada incluye la observación de clases, la interacción con los estudiantes y la recopilación de datos relevantes para analizar la forma como el material de apoyo contribuye al razonamiento inductivo. Los hallazgos de este estudio proporcionan una visión más clara de cómo

la enseñanza de las matemáticas puede promover el desarrollo de habilidades inductivas en el contexto escolar y, en última instancia, mejorar la calidad de la educación matemática.

Concluyen afirmando que, en el proceso investigativo, los maestros en formación tomaron una posición crítica, considerando tanto el conocimiento pedagógico del contenido (PCK por sus iniciales en inglés: Pedagogical Content, Knowledge) como el conocimiento contextual de los estudiantes. Acero y Callejas Parra identificaron las deficiencias que los estudiantes presentaban y optaron por transformar el contenido disciplinar de las matemáticas en algo comprensible y participativo para los estudiantes, de modo que los conceptos matemáticos se convirtieran en algo significativo para ellos. Esta estrategia pedagógica se basó en el uso de material de apoyo en el aula, respaldado por las contribuciones de diversos autores que destacan la eficacia de dicho material en la enseñanza.

Para responder a la pregunta problematizadora: ¿Cómo fortalecer el razonamiento inductivo en los estudiantes del grado sexto de la Institución Educativa San Pedro Claver utilizando material de apoyo desde el enfoque del Conocimiento Pedagógico del Contenido? se analizaron los resultados obtenidos mediante actividades de aprendizaje que involucraban el uso de material de apoyo. Se observó la importancia y las ventajas de utilizar este material en la realización de las actividades. Además, se identificaron momentos en los que los estudiantes empleaban el razonamiento inductivo, y se describieron desde tres componentes del modelo teórico propuesto por Pólya para el proceso inductivo de resolución de problemas: trabajo con premisas particulares, identificación de patrones y generalización. De esta manera, se categorizó el razonamiento inductivo de los estudiantes.

Los resultados mostraron que el trabajo con premisas particulares permitió a los estudiantes afianzar y comprender la nueva temática matemática. A medida que identificaban patrones en las

situaciones planteadas por el maestro, ejercitaban y aplicaban conceptos matemáticos, lo que los llevaba a comprender en profundidad los conceptos y a generalizarlos. Además, se destacó el interés y la motivación de los estudiantes al utilizar material de apoyo en el aula, lo que hacía que disfrutaran del proceso de resolución de problemas y lo vieran como un juego.

Otro antecedente, Cañadas y Castro (s.f.), es un artículo donde se expone la importancia del razonamiento inductivo en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a nivel de secundaria. De allí que sea menester de los futuros docentes la realización de tareas que fomenten el uso y conocimiento de este tipo de razonamiento.

Por último, Mera y Paguay (2022), es un documento de sistematización de intervención pedagógica en el aula que resalta la significativa influencia que tienen la actitud, percepción, motivación y concepciones al momento de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En este, se presentan los resultados obtenidos mediante la implementación de la matemática recreativa y el constructivismo a 10 estudiantes de la Institución Educativa Antonio García Paredes, sede principal. Esta práctica se llevó a cabo en el contexto del Semillero de Matemáticas de la Universidad del Cauca. Las autoras afirman que la matemática recreativa estimula de manera positiva la motivación y el entusiasmo. Para ello, se realiza un proceso de revisión y creación de 5 guías con contenido llamativo y creativo correspondientes a diferentes temáticas que, posteriormente, ejecutan para obtener y analizar resultados.

Para finalizar el trabajo, las autoras concluyen que:

- El modelo pedagógico tradicional y la memorización generan obstáculos en la interpretación y comprensión de conceptos matemáticos, y en el rendimiento académico de los estudiantes.

- El diseño de guías llamativas y creativas logra captar la atención y buena disposición de los estudiantes.
- En el proceso de aprendizaje el juego adquiere un papel importante gracias a la interacción que este genera.
- La matemática recreativa crea ambientes que permiten al estudiante reforzar y relacionar conceptos matemáticos, estimulando el desarrollo del pensamiento lógico matemático.

Marco Teórico

El presente marco teórico tiene como objetivo proporcionar una base sólida de conceptos relacionados con la problemática abordada, a fin de garantizar la coherencia de la investigación. La tarea educativa fundamental de fortalecer el razonamiento inductivo de los y las estudiantes, se cimenta en la capacidad que tengan para generalizar patrones a partir de observaciones específicas y llegar a conclusiones basadas en evidencia empírica. Por tanto, para desarrollar un marco teórico sólido consideraremos elementos como definiciones, nociones o conceptualizaciones claves relacionadas con lo mencionado en estas líneas.

Razonamiento

El razonamiento ha sido conceptualizado de distintas maneras según el enfoque teórico. Formalmente, puede definirse como un conjunto de reglas y procedimientos que permiten inferir nueva información a partir de información previamente conocida. Esta nueva información, denominada conclusión, se obtiene a través de un proceso de inferencia basado en un conjunto de premisas.

Según Bustamante (2009), en la lógica formal, el razonamiento se diferencia de la definición de la RAE, que lo describe como un proceso mental. Bustamante sostiene que el razonamiento se concibe como un bloque especial de proposiciones a partir del cual se derivan nuevas inferencias. Aquí, la validez de un razonamiento depende de la relación formal entre premisas y conclusión, no de la veracidad de las premisas. Por lo tanto, en lógica, no se califica a un razonamiento como "verdadero" o "falso", sino como válido o inválido, dependiendo de si la conclusión se sigue de las premisas de manera necesaria.

Existen varios tipos de razonamientos: deductivo, inductivo y abductivo.

1. **Razonamiento deductivo:** es un proceso en el que, si las premisas son verdaderas y la estructura lógica es válida, la conclusión será necesariamente verdadera. Se caracteriza por partir de premisas generales para llegar a conclusiones específicas. Este tipo de razonamiento es el más usado en matemáticas y lógica formal, ya que asegura la certeza de la conclusión.
2. **Razonamiento inductivo:** parte de observaciones particulares para llegar a conclusiones generales. Es decir, se analizan casos específicos y a partir de ellos se generaliza una regla o principio. Aunque es útil para descubrir patrones y realizar predicciones, no garantiza la verdad de la conclusión, ya que siempre existe la posibilidad de encontrar excepciones.
3. **Razonamiento abductivo:** Es un proceso mediante el cual se busca la explicación más probable o plausible a partir de un conjunto de observaciones. Se utiliza para formular hipótesis que podrían explicar ciertos hechos o fenómenos. A diferencia de la deducción, la conclusión de un razonamiento abductivo no es necesariamente verdadera, sino que es una posible explicación que puede ser sometida a prueba.

Además, Cañadas y Castro Martínez (s.f.) definen el razonamiento como la acción de dar razones para explicar un hecho, un proceso mental que puede no ser evidente para observadores externos, ya que puede ser implícito. Este razonamiento implica trabajar con información existente, sea esta proporcionada o adquirida mediante la observación, la experiencia o el estudio. Su esencia está en la generación de nueva información o conclusiones a partir de la información previa, transformando así los datos iniciales en algo nuevo y útil (Balacheff, 2000).

Finalmente, Pachón et al. (2016) conceptualizan al razonamiento como una actividad mental que surge cuando una persona debe asociar conocimientos previos con nueva información para sacar conclusiones y construir nuevo conocimiento. Además, señalan que el razonamiento

puede tener dos fines: justificar una conclusión ya alcanzada o persuadir a otros de su validez. Así, el razonamiento se presenta como una herramienta central en la toma de decisiones y en la persuasión.

Razonamiento deductivo

El razonamiento deductivo se caracteriza por ser un tipo de razonamiento en el que la conclusión se deriva inevitablemente de las premisas. Es decir, en el razonamiento deductivo, si las premisas son correctas y se sigue un proceso lógico adecuado, la conclusión debe ser verdadera. Bustamante (2009) lo describe como un razonamiento en el cual la conclusión está garantizada por las premisas, siempre que estas sean verdaderas y la estructura lógica sea correcta.

En este tipo de razonamiento, las premisas deben ofrecer evidencia concluyente que garantice la validez de la conclusión. Las conclusiones del razonamiento deductivo tienen una aplicación universal siempre que se parta de premisas generales. A diferencia del razonamiento inductivo, que se basa en la observación de casos particulares para llegar a conclusiones generales (aunque estas no sean completamente seguras) el razonamiento deductivo es un proceso puramente lógico.

En términos formales, la validez de un razonamiento deductivo en la lógica proposicional significa que no existe ninguna interpretación (o mundo posible) en la cual todas las premisas sean verdaderas y la conclusión sea falsa. Por ejemplo:

Sea $P = (\{R_1, R_2, \dots, R_t\}, C)$ un razonamiento deductivo de premisas R_1, R_2, \dots, R_t y conclusión C . Entonces P es válido si y solo si C es consecuencia lógica de R_1, R_2, \dots, R_t . En otras palabras, P es válido si y solo si $\{R_1, R_2, \dots, R_t\} \models C$.

En matemáticas, donde se busca la precisión y la claridad, el razonamiento deductivo se erige como el método preferido, garantizando que las conclusiones sean válidas y universales.

Pues, aunque el razonamiento inductivo y abductivo tienen sus aplicaciones, especialmente en matemáticas aplicadas y ciencias, no ofrecen la misma certeza que el razonamiento deductivo.

Inducción

Cañadas M. C., 2009 asegura que el término “inducción” hace su aparición por primera vez en la historia gracias a Aristóteles (384-322 a.C.). Proviene del término griego epagógē y denota el establecimiento de proposiciones universales mediante el uso de casos particulares que pueden estar contenidos en ellas; en otras palabras, la inducción es “un tránsito de las cosas individuales a los conceptos universales”. Con esta significación precisa se puede reconocer la diferencia que existe entre silogismos e inducción pues los primeros se pueden definir como el tránsito de lo más universal a lo menos universal.

Por otra parte, (Fetisov, 1980) citado en (Cañadas M. C., 2009), afirma que la inducción es “el razonamiento que parte de los conocimientos o verdades particulares para obtener, mediante ellos, una verdad más general o que observa varios fenómenos para inferir la ley que los explica.

Finalmente, en Pólya (1994) se habla de inducción como un modo de razonar, el cual conduce a encontrar leyes generales gracias a la observación de ejemplos particulares y de sus combinaciones, debido a ello es de gran uso en las ciencias, incluidas las matemáticas.

El razonamiento inductivo

Bustamante (2009) afirma que Aristóteles consideraba la inducción como la operación lógica utilizada para generalizar la experiencia, permitiendo el paso de lo particular a lo general. Por ello, esta técnica fue empleada por los antiguos griegos principalmente en las ciencias naturales y experimentales. Se afirma que la inducción es una forma de aprendizaje practicada a lo largo de la vida, ya que permite adquirir conocimientos a partir de la experiencia. Esta operación generalmente se lleva a cabo de la siguiente manera: se observa un patrón y la regularidad de los

resultados, y sobre esta base se infiere una regla. La regla inferida carece de la certeza o inevitabilidad que caracteriza los resultados de los razonamientos deductivos válidos.

Una de las características del razonamiento inductivo es que no se sostiene que la conclusión se derive necesariamente de las premisas; más bien, a partir de la verdad de estas (ya sea real o aceptada), es razonable inferir que, en cierta medida, la conclusión es verdadera.

En este tipo de razonamiento, es posible hablar de argumentos por analogía, que son las formas más frecuentes de razonar inductivamente. Este enfoque se basa en la comparación entre dos o más entidades que presentan características similares. Busca establecer una conexión entre estas entidades, de modo que lo que se sostiene para una de ellas se extienda a la otra, fundamentado en las semejanzas observadas. La analogía permite extrapolar características conocidas de un caso particular a otro, sugiriendo que, debido a su similitud, lo que es válido en un caso también lo será en el otro.

La estructura básica de un argumento por analogía es la siguiente:

1. La Entidad A posee determinadas características.
2. La Entidad B comparte varias de esas características con la Entidad A.
3. Por consiguiente, se infiere que lo que es aplicable a la Entidad A también debería serlo a la Entidad B.

Por ejemplo:

- Entidad A: Un reloj mecánico requiere mantenimiento periódico para funcionar adecuadamente.
- Entidad B: El cuerpo humano, de forma análoga, también es un sistema complejo.

- Conclusión: Así como un reloj mecánico necesita mantenimiento, el cuerpo humano requiere cuidados y atenciones periódicas para mantener su buen funcionamiento.

Sin embargo, la validez de un argumento por analogía depende de la relevancia y la cantidad de semejanzas entre las entidades comparadas. Un argumento de este tipo es fuerte cuando las similitudes son significativas para la conclusión que se pretende derivar. En cambio, es débil si las características compartidas son superficiales o irrelevantes para el aspecto que se pretende inferir; además, puede debilitarse significativamente con solo una diferencia relevante en la comparación. Por esta razón, es fundamental evaluar con rigor la pertinencia de las comparaciones establecidas en un argumento de esta naturaleza.

Cañadas y Castro (s.f.) señalan que el razonamiento inductivo implica proporcionar "razones" que respalden una afirmación o explicación, y no se limita a hacer afirmaciones sin respaldo lógico. María Moliner (s.f., citado por Cañadas, 2002) describe el razonamiento inductivo como una "acción del pensamiento humano adoptada para producir afirmaciones y alcanzar conclusiones, partiendo de casos particulares y buscando una generalidad". Este proceso implica no solo deducir ideas a partir de otras y justificar ciertos aspectos, sino también utilizar la inferencia y la generalización, dependiendo de la cantidad y diversidad de ejemplos observados. Así, un razonamiento inductivo se fortalece cuando es improbable obtener conclusiones falsas cuando sus premisas son verdaderas. Por tanto, el razonamiento inductivo depende del apoyo empírico que le proporcionan las premisas para alcanzar la conclusión.

Según Cañadas y Castro (s.f.), el razonamiento inductivo es "un proceso cognitivo que permite avanzar en el conocimiento mediante la obtención de más información de la que aportan los datos iniciales con los que se inicia el proceso". Por ello, es apreciado como una herramienta fundamental para adquirir y expandir cualquier tipo de conocimiento, constituyendo un importante

camino de acceso al conocimiento matemático. Por esta razón, los trabajos relacionados con el razonamiento inductivo se llevan a cabo, en gran parte, en el contexto de la resolución de problemas, ya que esta actividad pone de manifiesto diversos tipos de razonamiento, en particular, el inductivo.

Existen varios modelos teóricos de razonamiento inductivo. Cañadas y Castro (2004) proponen uno de siete pasos basado en las aportaciones de Pólya y Hadamard:

1. *Trabajo con casos particulares:* Se inicia el proceso con casos precisos o ejemplos sencillos y fácilmente observables.
2. *Organización de casos particulares:* Es necesario organizar todos los datos obtenidos para facilitar la percepción de patrones, ya sea en una tabla, en filas y columnas o con algún orden.
3. *Identificación de patrones:* Un patrón o pauta es lo común, lo repetido con regularidad en diversos hechos o situaciones, y se prevé que puede volver a repetirse.
4. *Formulación de conjeturas:* Una conjetura es una proposición que se supone verdadera, pero que no ha sido sometida a demostración.
5. *Justificación de las conjeturas:* Se refiere a la razón dada para convencer de la verdad de una afirmación. Se distingue entre justificaciones empíricas y deductivas; las empíricas utilizan ejemplos como elemento de convicción y se comprueban nuevamente con otros casos particulares.

6. *Generalización:* La conjetura se expresa de tal manera que se refiere a todos los casos de una clase determinada, extendiendo el razonamiento más allá de los casos particulares considerados.
7. *Demostración:* Es un proceso de validación formal que no deja lugar a dudas sobre la validez de la conjetura que se intenta probar, determinándola inequívocamente.

Partiendo de lo anterior, es fundamental que los docentes de matemáticas busquen situaciones adecuadas que promuevan el aprendizaje y el razonamiento inductivo en sus estudiantes. Esta responsabilidad es crucial para ayudarlos a desarrollar habilidades matemáticas concretas y una comprensión profunda de los conceptos. Esto se logra si los profesores adquieren habilidades y hábitos relacionados con este tipo de razonamiento durante su formación. Por ello, es necesario que la preparación de los futuros docentes incluya experiencias que les permitan comprender y aplicar el razonamiento inductivo (Cañadas y Castro Martínez, s.f.).

Errores en el razonamiento inductivo

Estos ocurren cuando la conexión entre las premisas y la conclusión es insuficiente o defectuosa, lo que lleva a conclusiones que se acercan más a la falsedad que a la verdad. Según Bustamante (2009), un razonamiento inductivo es débil si el soporte que proporcionan las premisas no es sólido o es insuficiente, lo que significa que las premisas no ofrecen una base adecuada para la conclusión, situándola más cerca de la falsedad.

Cañadas (2002) clasifica los errores en el razonamiento inductivo en dos categorías principales: formales e informales. Estos pueden tener serias implicaciones en la validez de un argumento y deben ser cuidadosamente considerados para evitar conclusiones incorrectas:

Errores formales

Los errores formales en el razonamiento inductivo ocurren cuando se infringe alguna regla de inferencia lógica. En este caso, el error se da en la estructura del argumento, es decir, la manera en que las premisas están relacionadas con la conclusión no sigue las normas de la lógica correcta. Aunque el razonamiento inductivo no sigue las mismas reglas estrictas que el deductivo, se espera que mantenga una coherencia interna en la relación entre las premisas y la conclusión. En un argumento con un error formal, aunque las premisas puedan parecer verdaderas, la estructura del argumento falla, lo que invalida la conclusión. Estos errores son más fáciles de detectar porque se enfocan en la forma del razonamiento y no en su contenido.

Errores informales

Están relacionados con el contenido del argumento y no con su estructura lógica. Estos errores ocurren cuando hay un mal uso o interpretación del contenido del argumento, lo que lleva a conclusiones engañosas o incorrectas. A diferencia de los errores formales, los errores informales son más difíciles de identificar porque requieren un análisis detallado del contexto y del significado de las premisas. Algunos ejemplos de errores informales incluyen el mal uso de analogías, generalizaciones apresuradas o suposiciones no justificadas.

En este contexto, hay sesgos cognitivos que son factores importantes que pueden influir en la calidad del razonamiento inductivo. Los sesgos son desviaciones sistemáticas en el pensamiento que afectan la objetividad y la lógica. Estos errores pueden surgir debido a prejuicios o influencias externas que distorsionan la manera en que una persona selecciona, interpreta o evalúa la información.

Algunos de los sesgos más comunes en el razonamiento inductivo incluyen:

Sesgo de selección de información: Se produce cuando una persona selecciona solo la información que apoya su conclusión y descarta datos contradictorios. Esto lleva a una visión distorsionada y parcial del problema, lo que da lugar a una conclusión sesgada.

Sesgo de confirmación: Este sesgo se refiere a la tendencia de las personas a buscar, interpretar y recordar información que confirme sus creencias preexistentes, ignorando la evidencia que las contradiga. Este sesgo es particularmente problemático en el razonamiento inductivo, ya que puede llevar a la aceptación de conclusiones incorrectas sin una evaluación completa de todas las posibles evidencias.

Sesgo de contenido y contexto: En este tipo de sesgo, el contexto en el que se presenta un argumento o la familiaridad con el contenido puede influir en cómo se interpreta la información. Por ejemplo, si un argumento se presenta en un contexto emocionalmente cargado, las personas pueden estar más inclinadas a aceptar la conclusión sin evaluar críticamente las premisas.

Ahora bien, el reconocimiento de estos errores y sesgos en el razonamiento inductivo es crucial para evitar conclusiones falsas o engañosas. El razonamiento inductivo, por su naturaleza, siempre implica un grado de incertidumbre, ya que generaliza a partir de observaciones específicas. Sin embargo, cuando las premisas están correctamente relacionadas con la conclusión y no están distorsionadas por sesgos o errores lógicos, el razonamiento inductivo puede ser una herramienta poderosa para generar nuevas hipótesis y teorías.

Por lo tanto, es importante que los procesos inductivos se realicen con un análisis crítico, evaluando cuidadosamente la calidad de las premisas y el posible impacto de los sesgos cognitivos en el proceso de razonamiento.

Patrones

Un patrón se refiere a una secuencia estructurada que sigue una regla definida o una regularidad observable, y puede encontrarse en números, formas, objetos o eventos. Estos patrones, fundamentales en matemáticas, permiten identificar estructuras repetitivas y predecibles, lo que facilita la resolución de problemas y el entendimiento de conceptos matemáticos más abstractos. Existen múltiples tipos de patrones, como los numéricos, que siguen una secuencia lógica de números; los geométricos, que involucran formas y configuraciones espaciales; y los patrones de frecuencia, que se refieren a la recurrencia de ciertos eventos en intervalos de tiempo o secuencias. Estos patrones permiten describir relaciones matemáticas complejas, detectar regularidades en el entorno y, de manera crucial, prever resultados o comportamientos futuros con base en la observación de tendencias.

Según Pólya (1966, citado en Núñez, 2018), los patrones, debido a su naturaleza de repeticiones regulares, se manifiestan tanto en el pensamiento interno como en representaciones externas. Es decir, los seres humanos pueden identificar y trabajar con patrones en su mente (como en el caso del razonamiento matemático abstracto), al mismo tiempo que los visualizan o experimentan en el mundo físico. Pólya destaca la importancia de los patrones en el desarrollo de la habilidad de generalización, ya que, al reconocer las regularidades en un conjunto de datos o situaciones, las personas pueden formular reglas generales o principios más amplios. En este sentido, el reconocimiento de patrones juega un papel crucial en el razonamiento inductivo, permitiendo a los matemáticos y estudiantes pasar de la observación de casos particulares a la construcción de fórmulas o relaciones generales que expliquen dichas observaciones.

De acuerdo con Núñez (2018), los patrones pueden clasificarse principalmente en patrones numéricos y patrones figurales. Ambos tipos de patrones siguen una regularidad, aunque presentan características y usos específicos dentro de las matemáticas:

1. **Patrones numéricos:** Son secuencias de números que siguen una regla o fórmula específica. Un ejemplo común de este tipo es la secuencia aritmética, en la que cada número se obtiene sumando una constante al número anterior, como en la secuencia 2, 4, 6, 8, 10, donde se suma 2 a cada término. También pueden incluir secuencias geométricas, donde cada término se obtiene multiplicando el anterior por una constante, como en 3, 9, 27, 81, donde el factor de multiplicación es 3. Los patrones numéricos son esenciales en la deducción de fórmulas algebraicas, la resolución de problemas de progresiones y series, y en el cálculo de probabilidades.
2. **Patrones figurales:** Se refieren a secuencias de figuras geométricas u objetos que siguen una regularidad en su forma o disposición espacial. Un ejemplo de este tipo de patrón podría ser una sucesión de triángulos equiláteros que aumenta en número de lados en cada paso, o una repetición de figuras geométricas como cuadrados y círculos en un orden específico. Estos patrones son útiles para el análisis de simetrías, transformaciones geométricas y para la comprensión visual de propiedades espaciales en matemáticas.

A través de la observación de estos patrones, los matemáticos pueden identificar características específicas de una secuencia y realizar cálculos que permitan predecir futuros términos o establecer relaciones entre elementos de una secuencia o conjunto. En este sentido, los patrones no solo son una herramienta para el análisis y la predicción, sino que también facilitan el desarrollo de una comprensión más profunda de las relaciones matemáticas subyacentes.

El estudio de los patrones no se limita a las matemáticas, sino que tiene amplias aplicaciones en otros campos y en la vida cotidiana. En las ciencias naturales, los patrones son fundamentales para modelar fenómenos como las órbitas planetarias, las frecuencias de ondas electromagnéticas, o las trayectorias de objetos en movimiento. En biología, los patrones se observan en el crecimiento de organismos, la repetición de estructuras celulares o la formación de fractales en la naturaleza, como las ramas de los árboles o las conchas marinas.

El reconocimiento de patrones es una habilidad clave que los estudiantes desarrollan en los primeros años de su educación matemática. Desde la primaria, los niños son introducidos a la identificación de patrones simples (como secuencias de colores, formas o números), lo que les permite desarrollar una comprensión más intuitiva de conceptos más avanzados. Este enfoque es gradual: a medida que los estudiantes progresan en su educación, los patrones se vuelven más complejos, involucrando no solo secuencias, sino también el reconocimiento de regularidades en funciones algebraicas, geometría y estadística.

Los patrones fomentan una forma de pensamiento lógico y estructurado, ya que los estudiantes aprenden a analizar los elementos de una secuencia, formular hipótesis y prever los siguientes pasos basados en observaciones previas. Esta capacidad para identificar y trabajar con patrones es crucial para el desarrollo del pensamiento algebraico, ya que las relaciones entre las variables y las constantes en las ecuaciones algebraicas a menudo siguen un patrón estructurado.

Particularización

La particularización es un concepto fundamental no solo en matemáticas, sino también en diversas disciplinas que requieren la aplicación de teorías generales a situaciones concretas. Este proceso implica aplicar un principio, regla o concepto general a un caso específico, permitiendo así un análisis más detallado y profundo de las situaciones o problemas planteados. Al

particularizar, se busca trasladar las propiedades generales de un conjunto a un caso más concreto, lo que facilita su comprensión y resolución.

El matemático Pólya (1994) define la particularización como: "Consiste en pasar de la consideración de un conjunto de objetos dado a la de un conjunto más pequeño o incluso de un solo objeto, contenido en el conjunto dado" (p. 138). Esta definición resalta la importancia de reducir el ámbito de un problema a una escala más manejable, lo que a su vez favorece la identificación de detalles cruciales que podrían pasar desapercibidos en una visión más amplia. Este método es esencial para pasar de lo abstracto a lo concreto, permitiendo así a los estudiantes construir una base sólida sobre conceptos más generales.

En el ámbito matemático, el razonamiento suele comenzar con enunciados o teorías generales. Sin embargo, para comprender y aplicar correctamente estos principios, es necesario probar su validez en casos particulares. Este enfoque es uno de los más antiguos y efectivos en el aprendizaje matemático. Al centrarse en un caso específico, se simplifica el problema, lo que ayuda a clarificar detalles y a revelar excepciones o limitaciones de un principio general. Este proceso es esencial, ya que permite a los matemáticos identificar cuándo una regla es válida y cuándo necesita ser ajustada.

En la enseñanza de las matemáticas, la particularización resulta particularmente útil, ya que los estudiantes suelen tener dificultades para manejar conceptos abstractos de inmediato. Comenzar con ejemplos específicos les permite desarrollar una comprensión intuitiva de las reglas y principios matemáticos. Con el tiempo, esta comprensión se expande y se transforma en un dominio más sólido de lo general, convirtiendo el proceso de particularización en una herramienta clave para la enseñanza y el aprendizaje progresivo.

Pólya (1994) identifica dos situaciones comunes en las que se lleva a cabo la particularización:

1. *Sustitución de una variable general por un valor específico*: Este proceso implica tomar un enunciado general que contiene variables y sustituir una o más de estas variables por valores concretos. Por ejemplo, al estudiar polígonos regulares con un número variable de lados, denotado por “ n ”, se puede considerar un triángulo equilátero sustituyendo “ n ” por el valor específico 3. Esto permite explorar las propiedades del triángulo de manera más detallada.
2. *Introducción de una restricción al enunciado original*: En esta forma de particularización, se impone una condición adicional que limita el conjunto de objetos o situaciones considerados originalmente. Por ejemplo, partiendo de la categoría general de polígonos y añadiendo la restricción de que todos los lados y ángulos sean iguales, se particulariza el problema al conjunto de polígonos regulares. Esto permite concentrarse en un subconjunto de figuras que poseen propiedades más específicas y regulares.

La particularización no es un proceso aislado, sino que está profundamente relacionado con la generalización, el proceso inverso. Mientras que la particularización se enfoca en aplicar principios generales a casos específicos, la generalización toma observaciones o resultados obtenidos en casos particulares y los extiende a un conjunto más amplio o a una regla general. Ambos procesos son esenciales en el desarrollo del pensamiento matemático, permitiendo al matemático moverse de lo específico a lo general y viceversa. La particularización afina la comprensión de un problema, mientras que la generalización permite extender las conclusiones a una gama más amplia de problemas o situaciones.

Un ejemplo típico de esta relación es el proceso de descubrimiento de una fórmula matemática. Se puede comenzar particularizando el problema, probando con valores específicos y analizando los resultados obtenidos. Una vez que se comprenden los patrones en los casos particulares, es posible generalizar los resultados para proponer una fórmula que funcione en una variedad de casos. Este enfoque no solo es útil en matemáticas, sino que también se aplica en disciplinas como la física e ingeniería, donde se requiere aplicar teorías a situaciones concretas.

Abstracción

Según Recalde (2018), Aristóteles entiende la abstracción como un proceso mediante el cual la mente humana aísla las propiedades universales de un objeto particular, separándolas de sus características sensibles. Esto permite identificar aspectos comunes a varios objetos, dejando de lado lo individual y específico. En el caso de la abstracción del número, se trata de reconocer la cantidad de una colección de objetos sin considerar sus cualidades particulares. Así, la abstracción numérica en Aristóteles se basa en la experiencia directa de contar, en lugar de partir de una división del continuo.

En *Metafísica* (Libro XIV), Aristóteles aborda el concepto de número de forma distinta a la moderna, pues no lo ve como el resultado de dividir un continuo, sino como una propiedad que surge de la experiencia directa con objetos discretos. Los números, para él, emergen del acto de contar y ordenar unidades, lo que los vincula estrechamente con la aritmética. Esta perspectiva difiere de la idea de abstraer un número a partir de una partición mental de un continuo, lo cual, según Aristóteles, sería una confusión entre lo discreto y lo continuo.

Gambra (1996) complementa esta visión al señalar que la abstracción en el pensamiento de Aristóteles permite al entendimiento separar aspectos de las cosas que, en la experiencia sensible, se presentan unidos. A través de esta capacidad, el intelecto aísla características

específicas, como la esencia de un objeto, sin considerar sus aspectos accidentales. Este proceso gradual va de lo particular a lo universal, permitiendo que las ciencias se especialicen en objetos específicos.

En matemáticas, Aristóteles considera que los números son aspectos de la realidad física que el entendimiento analiza mediante la abstracción, y no entidades independientes. Su visión del número está más conectada con la experiencia sensorial y el acto de contar, sin implicar una separación radical de la realidad sensible, a diferencia de la perspectiva platónica, que postula la existencia autónoma de las entidades matemáticas.

La abstracción numérica aristotélica se centra en la noción de "cantidad" de los objetos contados, basada en una experiencia sensorial inicial que permite identificar conjuntos. Por ejemplo, al contar juguetes, se abstrae la noción de cuántos hay, sin atender a las diferencias de color, tamaño o forma. Esta visión resalta la importancia de la experiencia sensorial como punto de partida para identificar la cantidad, sin implicar una división de un continuo en elementos discretos.

Históricamente, la noción del cero fue un desafío para la tradición griega, ya que la idea de "nada" no formaba parte de su sistema de numeración. La incorporación del cero por culturas como la babilónica y la india representó un avance conceptual, permitiendo la representación de la ausencia de cantidad y el desarrollo de sistemas numéricos más complejos. Villa Ochoa (2006) destaca que la abstracción es esencial para identificar los aspectos fundamentales de los objetos matemáticos y formular ideas generales, lo que facilita un conocimiento más profundo de las estructuras numéricas.

Por último, Gamba (1996) menciona que la relación entre abstracción e inducción en la filosofía de Aristóteles es clave para entender cómo se forma el conocimiento, especialmente en matemáticas. Aunque distintos, ambos procesos son complementarios y contribuyen a una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos. La abstracción permite identificar la esencia de un concepto matemático, mientras que la inducción actúa sobre casos particulares, encontrando patrones que se pueden generalizar. Por ejemplo, al abstraer la noción de un "número primo" como un número que solo es divisible por 1 y por sí mismo, la inducción nos lleva a observar que números como 2, 3, 5 y 7 cumplen esta propiedad, permitiendo formular reglas generales sobre los números primos.

Generalización

Para Pólya (1994), generalizar implica pasar del examen de un objeto al análisis de un conjunto que incluye al primero, o del estudio de un conjunto limitado al de uno más amplio. Este proceso es fundamental en el razonamiento matemático y se puede llevar a cabo de diversas maneras. A continuación, se identifican dos enfoques distintivos de generalización:

- *Reemplazo de Constantes por Variables:* Este enfoque implica considerar un conjunto más amplio de objetos. Por ejemplo, al estudiar triángulos en lugar de limitarse a polígonos con un número arbitrario de lados, se permite un análisis más generalizado que incluye múltiples formas y propiedades.
- *Eliminación de Restricciones:* Esta forma de generalización se produce cuando se levantan condiciones que limitan el análisis. Por ejemplo, al estudiar funciones trigonométricas de un ángulo agudo en lugar de restringirse a funciones trigonométricas de un ángulo específico, se logra una comprensión más amplia de su comportamiento.

La generalización es un proceso mental esencial en la lógica y el pensamiento humano. Comienza con la observación cuidadosa de fenómenos particulares, de donde se extraen conclusiones generales o reglas. Este proceso transforma información limitada en principios generales que pueden aplicarse en contextos más amplios. Los investigadores recopilan datos sobre situaciones específicas y buscan patrones o similitudes, lo que requiere una atención meticulosa a los detalles que pueden revelar tendencias subyacentes.

El esfuerzo de observación se complementa a menudo con la analogía, que busca comparar los hechos observados con otros ya conocidos para identificar similitudes y facilitar la comprensión del fenómeno en cuestión. A medida que se acumulan más ejemplos y se realizan comparaciones, surgen conjeturas o hipótesis sobre el comportamiento general de estos fenómenos. Aunque inicialmente especulativas, estas hipótesis son cruciales para avanzar en el conocimiento, ya que permiten establecer una base teórica que puede ser probada y verificada.

La verificación de estas hipótesis es esencial en el proceso de generalización. Los investigadores aplican sus conjeturas a nuevos casos particulares y observan si las reglas propuestas se mantienen consistentes. Este proceso de prueba y error es fundamental para establecer la validez de las generalizaciones. Si las hipótesis se confirman en múltiples situaciones, se consolidan en reglas generales que describen patrones de comportamiento más amplios.

Villa Ochoa (2006) señala que la generalización implica identificar patrones, regularidades o propiedades comunes a partir de casos particulares para formular afirmaciones generales que abarquen diversas situaciones. Este enfoque permite extender el conocimiento más allá de los casos específicos, llegando a conclusiones más amplias aplicables en diferentes contextos. Reconocer similitudes entre situaciones y formular expresiones generales que representen esas

regularidades es esencial en el desarrollo del pensamiento matemático, ya que simplifica y abstrae conceptos que facilitan la comprensión de los objetos matemáticos.

Castro et al. (2010) destacan que Piaget y sus colaboradores hicieron importantes contribuciones al estudio de la construcción del conocimiento y la relación entre la abstracción y la generalización en el desarrollo cognitivo. La generalización se presenta como un proceso fundamental en la construcción del conocimiento, diferenciando lo posible de lo real mediante los conceptos de abstracción y generalización. Distinguen dos formas de abstracción: la empírica, donde el sujeto comprueba propiedades de los objetos exteriores, y la reflexiva, que se refiere a las acciones y operaciones que el sujeto realiza, haciendo de lo real una manifestación de lo posible (Castro et al., 2010, p. 5).

Por último, es importante reconocer que la generalización y la abstracción están intrínsecamente entrelazadas en matemáticas, ya que cada proceso se apoya en el otro para facilitar el desarrollo del conocimiento matemático. La generalización permite extender conceptos a partir de ejemplos específicos, mientras que la abstracción se encarga de extraer las propiedades esenciales comunes a esos ejemplos. Este proceso requiere identificar características relevantes y eliminar detalles no esenciales. Ambas herramientas trabajan juntas en la formulación de teoremas y la construcción de modelos, permitiendo la identificación de patrones, el desarrollo de teorías y la aplicación de conceptos en diversas disciplinas.

Pensamiento numérico

El pensamiento numérico, según el Ministerio de Educación Nacional (MEN) en los Estándares Básicos de Competencias, es uno de los cinco tipos de pensamiento matemático que deben guiar el estudio de los sistemas numéricos. Este pensamiento está vinculado a la comprensión y el uso de los números en una variedad de situaciones cotidianas y académicas,

abarcando habilidades como el conteo, la estimación, la comparación de cantidades, el reconocimiento de patrones numéricos y la resolución de problemas que involucren números. Además, incluye el desarrollo del sentido numérico, que implica la comprensión de las propiedades y relaciones entre los números y el uso de estrategias flexibles y eficientes para operar con ellos.

El MEN enfatiza que el pensamiento numérico es fundamental para el desarrollo de competencias matemáticas desde los grados iniciales hasta los niveles avanzados. Según los estándares, los objetivos para su desarrollo en cada nivel educativo son los siguientes:

- *Preescolar y primaria:* Se espera que los estudiantes desarrollen un sentido numérico inicial, que incluye la capacidad de contar, identificar y comparar cantidades, entender las relaciones entre los números y realizar operaciones básicas como la suma y la resta. Además, se busca que puedan representar los números de diferentes maneras, como en rectas numéricas, mediante objetos concretos o utilizando otros medios visuales.
- *Grados 6° a 9°:* En esta etapa, los estudiantes deben consolidar su comprensión del sistema numérico y las operaciones, trabajando con números naturales, enteros, fraccionarios, decimales y porcentajes. También deben aplicar el pensamiento numérico en la resolución de problemas cotidianos, realizar estimaciones precisas y comprender relaciones numéricas a través de factores, múltiplos, potencias y raíces.
- *Grados 10° y 11°:* En los últimos años de la educación media, el pensamiento numérico se enfoca en la profundización de conceptos abstractos, incluyendo los números reales, irracionales y complejos. Los estudiantes deben usar funciones matemáticas para modelar situaciones y aplicar su conocimiento numérico en contextos más complejos, como el

análisis de patrones, la representación algebraica de relaciones numéricas y la resolución de problemas en diversas áreas del conocimiento.

Además, el pensamiento numérico va más allá de la simple interpretación de números, abarcando una serie de habilidades cognitivas que permiten comprender símbolos, significados y relaciones numéricas. Estas habilidades son esenciales para el análisis de fenómenos y la resolución de problemas matemáticos en diversos contextos. Según Cárdenas Soler et al. (2017), su desarrollo es un proceso gradual, donde los estudiantes, a través de la interacción con el entorno y otras personas, configuran estructuras conceptuales y adquieren una comprensión más profunda de los sistemas numéricos. Este proceso subraya la importancia del aprendizaje social y contextual en la adquisición de competencias matemáticas.

Cárdenas et al. (2017) describen el pensamiento numérico como una aptitud matemática que no solo permite comprender los números, sino también sus representaciones simbólicas, significados y conexiones. Esta capacidad facilita la realización de tareas cognitivas que organizan procesos mentales más complejos, lo que a su vez fomenta una comprensión más profunda de otros aspectos matemáticos. Un aspecto importante de este pensamiento es el estudio continuo de cómo las personas originan y conceptualizan los números, ya que el manejo de estos constituye una destreza cognitiva esencial para el ser humano.

De acuerdo con Rico y Castro (1995, citado en Cárdenas et al., 2017), el pensamiento numérico también puede entenderse como el análisis de los procesos cognitivos y culturales mediante los cuales las personas comparten significados a través de diferentes estructuras numéricas. Este tipo de pensamiento implica no solo el manejo de sistemas simbólicos, sino también el desarrollo de actividades cognitivas como la configuración numérica, el análisis de fenómenos y la resolución de problemas que exigen procesos complejos de pensamiento.

Ahora, las conexiones entre el razonamiento inductivo y el pensamiento numérico son fundamentales para el aprendizaje matemático y se manifiestan a través de varios aspectos clave. En primer lugar, el razonamiento inductivo permite a los estudiantes identificar patrones en los datos numéricos, lo que les ayuda a formular generalizaciones sobre las propiedades aritméticas. Esta capacidad de generalización es crucial para el desarrollo del pensamiento numérico, ya que proporciona una base conceptual que guía la comprensión de las relaciones entre diferentes operaciones y conceptos matemáticos.

El razonamiento inductivo también fomenta el desarrollo de estrategias de resolución de problemas, ya que permite a los estudiantes extrapolar patrones observados a nuevas situaciones. Esta extrapolación no solo mejora su habilidad para abordar problemas matemáticos, sino que también promueve una comprensión más profunda de la estructura subyacente de las matemáticas.

Al establecer generalizaciones a través del razonamiento inductivo, los estudiantes pueden utilizar estas conclusiones como base para la transición al razonamiento deductivo, un paso esencial en el estudio avanzado de las matemáticas. Esta interconexión fortalece la comprensión matemática y la capacidad de aplicar conceptos en contextos diversos.

Finalmente, la integración del razonamiento inductivo en la enseñanza del pensamiento numérico es crucial para facilitar un aprendizaje más efectivo y significativo. Al fomentar la identificación de patrones y la extrapolación de resultados, se prepara a los estudiantes no solo para resolver problemas matemáticos, sino también para abordar situaciones complejas en diversos contextos académicos y de la vida cotidiana. La formación de un pensamiento numérico robusto, enriquecido por el razonamiento inductivo, se erige como una piedra angular en la educación matemática, impactando significativamente en la comprensión y aplicación de conceptos en un amplio espectro de situaciones.

Metodología

Metodología de la práctica docente

Con el fin de proporcionar una estructura y un marco de trabajo que guíen el proceso de la intervención en el aula, este apartado presenta el conjunto de procedimientos y enfoques utilizados para llevarla a cabo. En la práctica se implementaron guías que, gracias a su contenido y organización, buscan, cumpliendo con los pasos propuestos por Cañadas y Castro (2004), fortalecer el razonamiento inductivo en los estudiantes, es decir, ser capaces de generalizar a partir de casos particulares y mostrar las matemáticas a partir de experiencias interactivas y divertidas con ludificación y matemáticas recreativas.

En cada una de las guías se tiene en cuenta el enfoque constructivista y su esquema es el siguiente: presentación del objeto matemático de manera concreta y fácil de entender; actividades referentes al tema donde se presentan no solo preguntas, sino problemas matemáticos, que permitan a los y las estudiantes construir los conceptos correspondientes. Las actividades, que incluyen la manipulación de materiales y el trabajo en equipo, se disponen principalmente de manera progresiva, ajustándose a su nivel de dificultad. Es importante destacar que cada tarea se presenta con su correspondiente objetivo e instrucciones.

Con las actividades propuestas en las guías también se pretende motivar a los estudiantes despertando su interés y curiosidad, fomentando la creación de un ambiente propicio para el aprendizaje significativo. Se emplea la lúdica y se incorporan actividades recreativas relacionadas al objeto matemático, transformando así las lecciones en experiencias interactivas y divertidas. Este enfoque tiene como objetivo mantener a los estudiantes comprometidos y participativos, contribuyendo al fortalecimiento de sus conocimientos previos y facilitando la construcción de nuevos aprendizajes.

Además de las guías, se cuenta con apoyo audiovisual (videos y juegos online), acertijos, dinámicas y algunos trucos para llamar la atención de los estudiantes y generar en ellos una capacidad de asombro, que los haga indagar y querer ir aún más allá de lo trabajado en las sesiones de clase. Los temas trabajados son los siguientes:

- Inducción, números naturales y sucesiones
- Sucesiones aritméticas y geométricas
- Algoritmo de la división
- Aritmética modular
- Criterios de divisibilidad

La totalidad de la intervención se desarrolló en 10 sesiones, los sábados, en horarios de 8:00 a.m. a 12 m. y distribuidos de la siguiente forma:

- Primera sesión: bienvenida, presentación de docentes y directora del Semillero de Matemáticas, entrega de souvenirs, juegos matemáticos e inicio de la primera guía.
- De la segunda sesión hasta la novena: ejecución de las guías diseñadas por los docentes.
- Décima Sesión: clausura.

Para iniciar con cada sesión se realiza, entre los mismos estudiantes, un recuento de la clase anterior, buscando entrelazar cada tema. Seguidamente, es presentada la guía para su respectivo estudio, es decir, de forma individual se lee la guía y el docente está dispuesto a resolver, de forma personalizada, cada inquietud o interrogante que pueden surgir. Posteriormente, se ejecutan las actividades con el acompañamiento constante de los docentes; terminada cada actividad se concretan las respuestas o resultados obtenidos para continuar con las tareas. Finalizada cada guía,

se intenta por medio de videos cortos profundizar más en los temas. Cabe resaltar que se realizan pausas activas y a los estudiantes que lograron completar las actividades antes que los demás se les presentaron acertijos y problemas para que su proceso de aprendizaje siguiese activo.

Con esto, no solo se busca cumplir con el objetivo de la práctica, sino también contribuir con los objetivos propuestos en el Programa Semillero de Matemáticas. Cada sesión cuenta con el apoyo y participación de otro docente integrante del Semillero.

Metodología de la sistematización

Para poder realizar una sistematización efectiva de la intervención realizada, es fundamental contar con un conjunto de herramientas y estrategias que permitan no solo la obtención de datos, sino también su organización, análisis y reflexión crítica. El objetivo de la sistematización es comprender y documentar el impacto y los resultados obtenidos a lo largo del proceso, permitiendo generar aprendizajes que contribuyan a mejorar futuras intervenciones educativas. Por lo tanto, se emplean las siguientes herramientas:

Encuestas: Con el fin de recolectar información cuantitativa y cualitativa relevante, se aplicó una encuesta al inicio de la intervención. Esta encuesta fue diseñada para explorar las concepciones que los estudiantes tienen sobre las matemáticas, su nivel de aceptación hacia la asignatura y la relación que perciben entre las matemáticas y su vida cotidiana. A través de preguntas abiertas y cerradas, se buscó profundizar en sus actitudes, percepciones, y experiencias previas, lo que permitió establecer un punto de partida para evaluar el impacto de la intervención. Además, se llevó a cabo una encuesta final para medir los cambios en sus percepciones y actitudes a lo largo del proceso.

Diario de campo: Como herramienta fundamental para el análisis reflexivo, el diario de campo se utiliza para mantener un registro detallado y sistemático de cada sesión o actividad. En este diario

se documentan las observaciones del facilitador, incluyendo aspectos relacionados con la dinámica grupal, las reacciones de los estudiantes, dificultades encontradas y logros observados. Asimismo, se incluyen reflexiones personales del docente sobre su propia práctica, permitiendo un análisis crítico que fomente la mejora continua. Este recurso facilita la identificación de patrones y tendencias a lo largo de la intervención, y sirve como base para el análisis teórico y metodológico en la sistematización.

Informe semanal: De manera complementaria al diario de campo, se elabora un informe semanal que ofrece una descripción detallada de cada sesión realizada en el contexto del Semillero de Matemáticas. Este informe no solo describe las actividades desarrolladas, sino que también recoge información relevante sobre la participación de los estudiantes, los desafíos enfrentados y los avances observados en términos de comprensión y actitud hacia las matemáticas. Este informe es una herramienta clave para evaluar la coherencia y consistencia de las sesiones, y sirve como insumo para la toma de decisiones pedagógicas en el transcurso de la intervención.

Evidencias: Las evidencias documentales son fundamentales para la evaluación y análisis posterior de los resultados de la intervención. Al finalizar cada actividad, se recogen evidencias en forma de fotografías de los productos realizados por los estudiantes, como sus guías o cuadernos de trabajo. Estas evidencias permiten observar el nivel de comprensión y ejecución de las tareas propuestas. Adicionalmente, se registran momentos claves del proceso de enseñanza-aprendizaje, como la resolución de dinámicas, acertijos o actividades lúdicas, lo que ofrece una visión más integral del impacto de la intervención. Estas evidencias visuales no solo enriquecen la sistematización, sino que también constituyen un material valioso para la evaluación crítica de la metodología aplicada.

Cronograma

En este apartado se presenta el cronograma de actividades propuestas y ejecutadas para cumplir con los objetivos establecidos.

Sesión	Actividades realizadas	Septiembre			Octubre				Noviembre		
		16	23	30	7	14	21	28	4	11	18
Primera sesión	Presentación										
	Juegos matemáticos										
	Inducción: Números naturales y sucesiones										
Segunda sesión	Sucesión de números cuadrados										
	El joyero										
	Números pentagonales										
Tercera sesión	Sucesión de Fibonacci										
	Bingo con sucesiones										
Cuarta sesión	Sucesiones aritméticas										
Quinta sesión	Sucesiones geométricas Torre de Hanoi										
Sexta sesión	Algoritmo de la división										
Séptima sesión	Aritmética modular										
Octava sesión	Actividades sobre clases residuales										
Novena sesión	Criterios de divisibilidad										
Décima sesión	Clausura y entrega de certificados										

Recuento histórico y análisis crítico

En este apartado se presenta un análisis crítico que ilustra los resultados significativos observados durante la intervención realizada con estudiantes de los grados octavo y noveno de la Institución Educativa Simón Bolívar de El Bordo, Patía. Para este propósito, se consideraron dos encuestas aplicadas a los estudiantes: una al inicio y otra al final de la práctica. Además, se utilizaron las fases propuestas por Cañadas y Castro (2004), fundamentadas en las contribuciones de Pólya y Hadamard: trabajo con casos particulares, organización de casos, identificación de patrones, formulación de conjeturas, justificación de conjeturas y generalización. Estas fases servirán como marco de análisis en este capítulo.

Es importante señalar que el autor no ha seguido una cronología estricta en el relato de los hechos y análisis, sino que se ha guiado por las fases mencionadas, las cuales se presentan de manera implícita y explícita a lo largo del análisis.

Encuestas

El análisis de las encuestas inicial, la cual se puede ver en Anexo 1-Encuesta Inicial y final en Anexo 2- Encuesta Final, proporciona información fundamental sobre la percepción y actitud de los estudiantes hacia las matemáticas. En la etapa inicial, una parte considerable de los alumnos manifestó dificultades y una actitud negativa hacia la materia, lo que indica deficiencias en los métodos de enseñanza convencionales y la necesidad de implementar intervenciones más adaptativas y dinámicas. A pesar de que una proporción significativa de los estudiantes mostró una actitud positiva hacia el estudio de las matemáticas, enfrentaban obstáculos que impedían un aprendizaje efectivo.

La relevancia de aplicar estrategias pedagógicas interactivas y centradas en el estudiante se evidenció en la preferencia de los alumnos por enfoques prácticos y lúdicos en la enseñanza. Estos métodos no solo fomentan una mayor participación y entusiasmo, sino que también contribuyen a una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos.

A lo largo del Semillero de Matemáticas, los resultados finales reflejaron una notable mejora en la actitud y comprensión de los estudiantes. La mayoría reportó un aumento en su interés y habilidades en matemáticas, lo que indica que el enfoque innovador y participativo implementado resultó efectivo. Sin embargo, la persistencia de algunos desafíos, como la falta de certeza en la actitud positiva de un pequeño grupo de estudiantes, subraya la necesidad de seguir ajustando las metodologías y mantener un diálogo constante con los alumnos.

Para maximizar el impacto de futuras intervenciones, es esencial continuar personalizando las estrategias pedagógicas para atender las necesidades individuales de los estudiantes y adaptarse a sus diversos estilos de aprendizaje. Además, establecer un proceso de retroalimentación continua permitirá ajustar y mejorar las prácticas de enseñanza basándose en las experiencias y opiniones de los alumnos.

Fomentar un entorno de aprendizaje en el que los estudiantes se sientan cómodos para expresar sus inquietudes y participar activamente en su proceso educativo es fundamental, ya que aumenta su motivación y compromiso con el aprendizaje. Esto también facilita la identificación temprana de problemas o malentendidos y ayuda a construir una relación de confianza entre estudiantes y docentes. Finalmente, diversificar los enfoques pedagógicos, incluyendo actividades lúdicas y prácticas, contribuirá a mantener el interés de los estudiantes y a facilitar una comprensión más completa y duradera de los conceptos matemáticos

Análisis de actividades

El Ministerio de Educación Nacional (MEN), en los estándares básicos de competencias en matemáticas, establece que el progreso en la comprensión numérica implica la adquisición gradual de una serie de habilidades, conceptos, enunciados, modelos y teorías en diversos entornos, que son fundamentales para construir los marcos conceptuales de los distintos sistemas numéricos requeridos en la educación básica y media. Esta comprensión facilita su aplicación efectiva a través de diferentes formas de representación numérica. Por ello, es crucial garantizar una conexión clara entre las actividades propuestas y las situaciones cotidianas, diversificar los métodos de enseñanza para atender a los distintos estilos de aprendizaje y proporcionar una retroalimentación constructiva constante que oriente el progreso de los alumnos y maximice su efectividad.

Así, y teniendo en cuenta los objetivos específicos de este proyecto: facilitar a los estudiantes la identificación y descripción de patrones en sucesiones numéricas, desarrollar su capacidad de conjeturar a partir de sucesiones y operaciones con números naturales, fortalecer su habilidad para justificar conjeturas y generar espacios de aprendizaje que reconozcan la importancia del ensayo-error en la actividad matemática, fue necesario llevar a cabo actividades que condujeran al cumplimiento de dichos objetivos, en función del objetivo general de fortalecer el razonamiento inductivo y desarrollar el pensamiento numérico.

Por consiguiente, el análisis que se realizará a continuación se centrará en actividades relacionadas con números naturales, sucesiones, el algoritmo de la división, aritmética modular y criterios de divisibilidad.

En primer lugar, para trabajar con el conjunto de los números naturales (Anexo 3-Guía 1: Naturales y sucesiones), se diseñaron una serie de interrogantes que despertaron en los estudiantes el deseo de indagar sobre el por qué y el para qué de este conjunto. En este sentido, estas preguntas no solo contribuyeron a consolidar la conceptualización del conjunto de los números naturales y

sus axiomas, sino que también marcaron el inicio de espacios destinados a la creación y justificación de conjeturas.

Actividad 1 (Naturales)

Esta actividad consistió en responder a los siguientes interrogantes:

1. Enlista de manera ordenada los primeros 10 números naturales.
2. ¿Cuál consideras que es el primer número natural?
3. ¿Cuál es el número que le sigue a 10? ¿Cómo se obtiene ese número?
4. ¿Para cada número natural será posible encontrar otro número que le siga?
5. ¿Cuántos números naturales hay entre el número 3 y el 7? ¿Será posible que existan números naturales entre el 2 y el 3?

Para abordar las preguntas planteadas, los estudiantes solo podían recurrir a sus conocimientos previos y al diálogo entre ellos. Sin embargo, los resultados obtenidos no fueron los esperados, ya que se evidenciaron discrepancias significativas entre sus respuestas verbales y escritas. Esta inconsistencia se puede atribuir a obstáculos didácticos surgidos a partir de la guía, que presentaba las respuestas a los interrogantes 1 y 2 en la parte inferior de la página. Al analizar la situación, se observó que, inicialmente, los estudiantes llegaron a la conclusión verbal de que el primer elemento del conjunto de los números naturales es el 1, y, por lo tanto, los primeros diez elementos son 1, 2, 3, ..., 10. Sin embargo, al trasladar esta comprensión a sus cuadernos (ver Ilustración 1 Primeros 10 elementos de los Naturales), se dieron cuenta de que la guía proporcionaba información contradictoria. Esto llevó a muchos a modificar sus respuestas basándose únicamente en lo que leyeron, sin asegurarse de comprender el por qué de esa información.

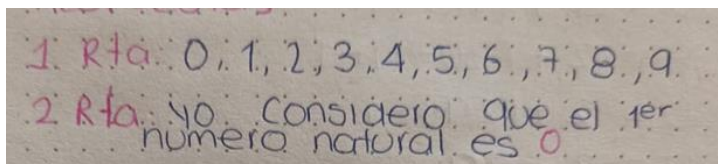


Ilustración 1 Primeros 10 elementos de los Naturales

Este fenómeno refleja un problema didáctico significativo: la falta de claridad y coherencia en la presentación de la información puede confundir a los estudiantes y obstaculizar su capacidad de razonamiento. En lugar de fomentar una comprensión profunda, el formato de la guía parece haber incentivado una actitud de conformidad ante la autoridad del texto, en la que los estudiantes priorizan la respuesta "correcta" sobre la construcción de su propio entendimiento.

Esta dinámica subraya la importancia de diseñar materiales didácticos que no solo sean informativos, sino que también promuevan la reflexión crítica y la validación de ideas, alentando a los estudiantes a cuestionar y profundizar en su aprendizaje. Para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje, es fundamental establecer un entorno en el que los alumnos se sientan empoderados para explorar, debatir y justificar sus pensamientos sin temor a desviarse de lo que está escrito en la guía. Ahora bien, durante la actividad, se presentó a los estudiantes interrogantes diseñados para estimular su curiosidad y reflexión sobre el conjunto de los números naturales.

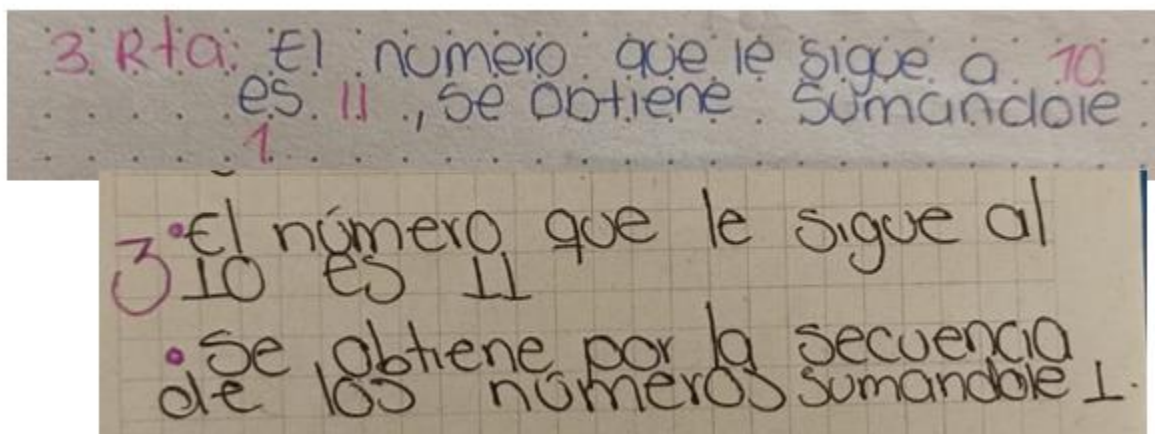


Ilustración 2- Sucesor del 10

A pesar de la falta de una guía explícita o de un marco conceptual previo, algunos estudiantes demostraron una intuición natural sobre la secuencia numérica. Por ejemplo, al responder a la pregunta sobre cuál es el número que sigue al 10, varios alumnos identificaron

correctamente el 11, lo que evidencia un aprendizaje implícito basado en su exposición previa a los números (ver Ilustración 2- Sucesor del 10).

Este hallazgo es significativo, ya que sugiere que los estudiantes pueden hacer inferencias correctas sobre patrones numéricos incluso sin una orientación formal. Esto plantea interrogantes sobre el potencial de aprendizaje que se podría alcanzar con un contexto más estructurado desde el inicio. Aprovechar esta capacidad innata es crucial para fomentar un aprendizaje significativo. A medida que los estudiantes verbalizan sus pensamientos, desarrollan un entendimiento más profundo que trasciende la memorización, estableciendo conexiones entre los números y operaciones básicas como la adición.

Además, se observó que algunos estudiantes copiaron las respuestas de sus compañeros en lugar de formular sus propias conjeturas. Esto resalta la necesidad de crear un ambiente de aprendizaje que priorice la autonomía y la responsabilidad. Estrategias didácticas, como la formación de grupos de trabajo y la elección de diversos espacios para realizar actividades, pueden incentivar la participación y el compromiso.

Así mismo, un estudiante que identifica que el número que sigue al 10 es el 11, al sumarle una unidad, demuestra comprender los principios fundamentales del sistema numérico. Este conocimiento no solo indica un manejo adecuado de la secuencia numérica, sino también una comprensión de la adición como operación lógica. Al reconocer esta relación, el estudiante desarrolla una base sólida para realizar operaciones más complejas, como la sustracción. Esta capacidad refleja un nivel inicial de pensamiento abstracto, interpretando los números como representaciones simbólicas de cantidades manipulables mentalmente.

También, enuncia uno de los axiomas del conjunto de los números naturales, (Todo número natural tiene un sucesor) proporcionando una justificación para una conjetura que, gracias a la actividad conjunta, se convirtió en la primera generalización reconocida por algunos estudiantes, permitiendo profundizar en otros axiomas de este conjunto inductivo.

Finalmente, es importante destacar el valor de los conocimientos previos y la creatividad matemática. Según el Ministerio de Educación Nacional (MEN), al abordar un nuevo concepto, las ideas previas del estudiante ya sean adquiridas formal o informalmente, junto con sus habilidades y actitudes, constituyen el punto de partida fundamental para su comprensión y asimilación.

Actividad 2 (El Intruso)

Esta actividad consistió en observar y manipular fichas de dominó para identificar cuál no pertenecía a una sucesión. La regla establecida era que la parte superior de cada ficha debía estar en orden ascendente, mientras que la parte inferior debía estar en orden descendente. Sin embargo, un obstáculo didáctico surgió cuando la disposición de las fichas no quedó clara para los estudiantes, ya que en la guía se presentaban de manera horizontal, como se observa en la Ilustración 3-El Intruso, lo que generó confusión sobre su correcta organización.

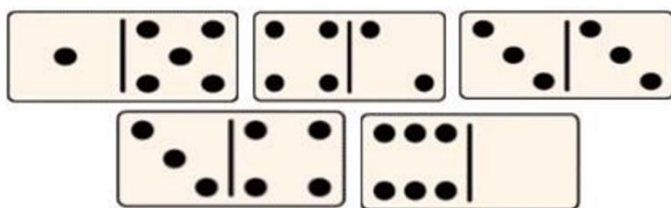


Ilustración 3-El Intruso

Este error dificultó el logro del objetivo definido para la tarea, pero también permitió que la creatividad y recursividad de un estudiante emergieran al intentar no solo identificar un

patrón en las fichas dispuestas horizontalmente, sino también responder a la pregunta sobre cuál ficha no pertenecía a la sucesión. Este estudiante observó que, al considerar las piezas en posición horizontal, se formaba un patrón en zigzag: la primera ficha en el lado izquierdo mostraba 1, la siguiente en el lado derecho 2, y así sucesivamente, identificando que la sucesión se interrumpía en la última ficha, que debería mostrar 5 puntos (ver Ilustración 4-El Intruso 2). Aunque este enfoque no se alineaba estrictamente con la actividad propuesta, el estudiante llegó a una respuesta válida, evidenciando un tipo de pensamiento flexible e independiente.

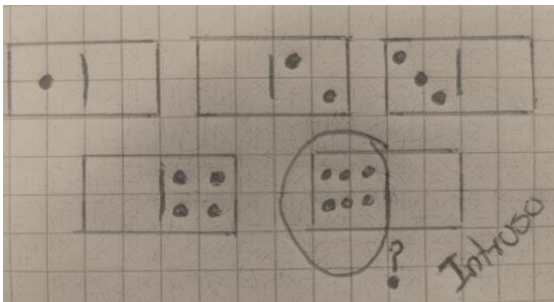


Ilustración 4-El Intruso 2

Este caso sugiere que, a pesar de no seguir las instrucciones o expectativas del docente, el alumno está utilizando su propio razonamiento inductivo para resolver el problema, lo que refleja creatividad y capacidad de análisis. La situación ilustra que el aprendizaje no siempre sigue un camino lineal y que los estudiantes pueden desarrollar competencias importantes, como la resolución de problemas y el pensamiento crítico, aunque de maneras distintas a las previstas. Según el marco teórico, el razonamiento inductivo permite a los estudiantes identificar patrones en los datos, lo que es crucial para el desarrollo del pensamiento numérico y la comprensión de las relaciones entre diferentes conceptos matemáticos.

A raíz de esta experiencia, se destacó la importancia de leer detenidamente la guía y las actividades propuestas. También se evidenció un caso de justificación errónea debido a errores

informales y sesgos en la información, lo que nos lleva a considerar la recomendación de Cañadas (2002) sobre ser cuidadosos en la manera de explicar la forma correcta de justificar las actividades, sin que esto limite la creatividad y las estrategias de los estudiantes. La verificación de las hipótesis formuladas por los estudiantes es esencial en el proceso de generalización, ya que permite establecer una base teórica que puede ser probada y verificada.

Además, los resultados que surgieron tras aclarar la actividad y que son presentados en la Ilustración 5, evidencian el uso de diferentes sistemas de representación. Según Duval (1999), estos sistemas no son independientes, sino que interactúan entre sí y se complementan para mejorar la comprensión matemática.

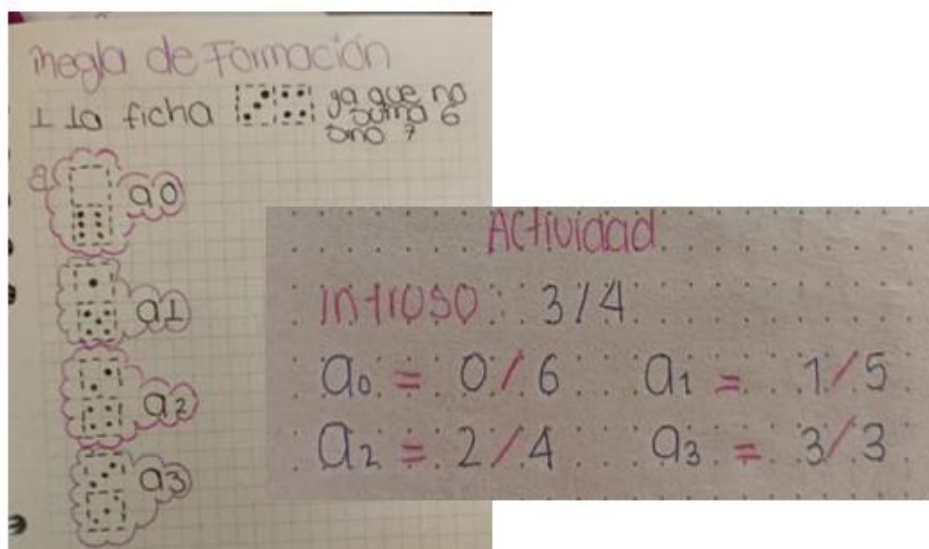


Ilustración 5

La diversidad de enfoques utilizados por los estudiantes para abordar el problema con las fichas de dominó ilustra la variedad de estilos de aprendizaje y procesos cognitivos en el entorno educativo. Algunos alumnos manipularon físicamente las fichas, mostrando un enfoque kinestésico, mientras que otros utilizaron dibujos para comprender de forma visual. Además,

algunos emplearon fracciones, lo que indica un pensamiento numérico más abstracto al traducir la observación de las fichas en expresiones numéricas.

Al trabajar con números enteros en diversas representaciones y contextos, los estudiantes pudieron reconocer cómo diferentes formas de presentar la información pueden conducir a distintas interpretaciones. Aunque algunos enfrentaron dificultades con la abstracción, cada uno aplicó recursos y habilidades que enriquecieron el proceso de aprendizaje. La manipulación de las fichas y el uso de fracciones reflejan habilidades como la creatividad matemática, el pensamiento lógico y la adaptación de herramientas cognitivas para la resolución de problemas. Este enfoque se alinea con la idea de que el pensamiento numérico va más allá de la simple interpretación de números, abarcando habilidades cognitivas esenciales para el análisis de fenómenos y la resolución de problemas matemáticos.

Con esta actividad se lograron varios objetivos específicos, como el aprendizaje a través del ensayo y error, la identificación de patrones, que según Castro et al. (2010) son fundamentales en la educación matemática en los primeros niveles, y la construcción de conjeturas, incluso sin justificación formal. Este proceso de generalización y la identificación de regularidades son esenciales para el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes, preparando el camino para un aprendizaje más efectivo y significativo en el futuro.

Actividad 3 (cuadrados)

En esta actividad se entregó una cantidad significativa de cuadrados hechos de papel para que los estudiantes escogieran cualquier pieza entregada (unidad) y fueran agregando el menor número de piezas posibles para formar un cuadrado y así sucesivamente; formando cuadrados hasta agotar las fichas entregadas. Con esta actividad se trabajaron casos particulares de la sucesión de los números cuadrados (n^2) y se buscó que los y las estudiantes fueran capaces de

identificar patrones mediante la observación y la organización de ciertos datos que se iban obteniendo a medida que se iba realizando el trabajo con el material manipulativo, finalmente se les pidió que identificaran la fórmula general de dicha sucesión. Las preguntas que se debían responder eran las siguientes:

- a) ¿Cuántas fichas agregadas y usadas se necesitarán en los pasos 6 y 9?
- b) Escriban la sucesión que se forma con el número de fichas agregadas.
- c) Escriban la sucesión que se forma con el número total de fichas usadas.
- d) ¿Por qué consideran que se llaman números cuadrados a los términos de la sucesión formada con el número total de fichas usadas?
- e) ¿Qué patrón se pueden asociar a la sucesión que se forma con el número total de fichas usadas?

Para dar respuesta al primer interrogante fue necesaria la manipulación de cuadrados pequeños con los cuales, según los pasos se iba aumentando su tamaño, es decir:

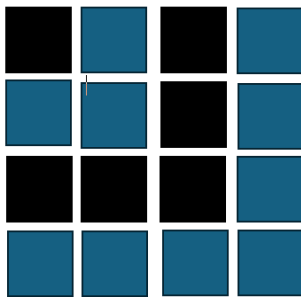


Ilustración 6

En principio, fue complejo lograr que se realizara la actividad pues esta no era explícita y presentaba poca información, con ello los estudiantes no entendían lo que se debían hacer ni observaban particularidades en la figura que iban construyendo. Fue gracias a la organización de los datos como en la Ilustración 7-Organización de datos que se lograron mejores resultados.

Durante la actividad se llenado el siguiente recuadro:

Núm. De Pasos	1	2	3	4	5
Núm. Fichas agregadas	0	3	5	7	9
Núm. Total de fichas usadas	1	4	9	16	25

Responder:

Ilustración 7-Organización de datos

A través de este ejercicio, se evidencia que la capacidad de organizar, representar y analizar datos es un pilar fundamental en el razonamiento inductivo. Al estructurar datos en formatos comprensibles, como tablas, los estudiantes pueden transformar información cruda en representaciones visuales que facilitan la identificación de patrones y tendencias que, de otro modo, podrían pasar desapercibidos. Esto permite descomponer información compleja en partes manejables, favoreciendo la observación de correlaciones que no son evidentes en conjuntos desorganizados. A través de esta claridad en la presentación de datos, los estudiantes pueden formular conjeturas fundamentadas en evidencias concretas, lo que es esencial para validar o refutar hipótesis. Cabe resaltar que esta tabla no solo facilitó la solución a la pregunta “a”, sino a la “b” y “c”.

Por otro lado, la pregunta "d" generó diversas respuestas, cada una con su respectiva justificación, basadas en el proceso de observación de algunos estudiantes sobre la figura que formaron con los cuadrados pequeños, tal como lo solicitaba la actividad en la guía. Además, se evidenció en la Ilustración 8, Ilustración 9 e Ilustración 10, el uso de conceptos geométricos en sus intentos de responder al interrogante.

4. Por el área de un cuadrado

Ilustración 8

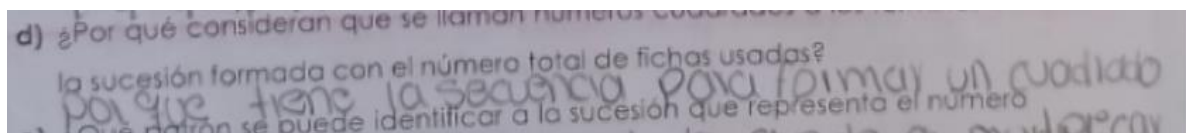


Ilustración 9

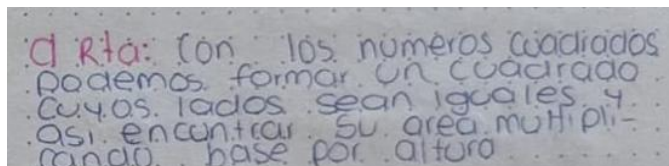


Ilustración 10

La conexión entre los conceptos matemáticos y el conocimiento previo de los estudiantes es fundamental en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La teoría constructivista de Jean Piaget (1969) resalta cómo los estudiantes no son meros receptores de información, sino que construyen su comprensión del mundo al integrar nueva información en sus estructuras mentales existentes. Este proceso de asimilación y acomodación es esencial para que los estudiantes puedan abordar conceptos más complejos, como los números cuadrados.

En particular, la habilidad de los alumnos para vincular el concepto de números cuadrados con sus conocimientos previos en geometría refleja su capacidad para integrar y ajustar nuevas ideas. No solo implica la memorización de fórmulas, sino también una comprensión más profunda de cómo se relacionan diferentes conceptos matemáticos. Al reconocer que los números cuadrados son el resultado del cuadrado de los números naturales, los estudiantes demuestran un entendimiento que va más allá de la simple aplicación de operaciones aritméticas.

También, la anticipación reflexiva en el aprendizaje matemático es un fenómeno crucial que permite a los estudiantes identificar patrones y conexiones antes de que se les enseñen formalmente. Este tipo de fomenta habilidades de razonamiento inductivo. Por ejemplo, un estudiante que puede prever que los números cuadrados siguen una secuencia específica (1, 4, 9,

16, etc.) está ejercitando su capacidad para generalizar y prever resultados, habilidades que son esenciales en matemáticas avanzadas y en la resolución de problemas.

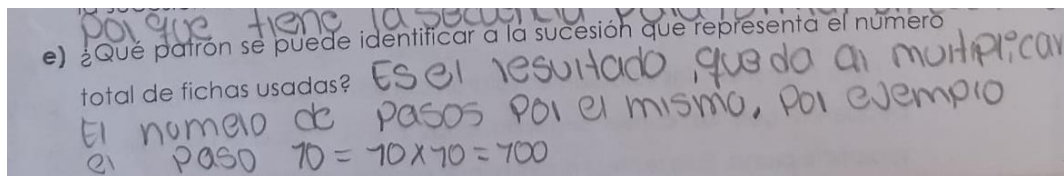


Ilustración 11

Finalmente, fueron pocos los estudiantes que lograron identificar la fórmula general de la sucesión de los números cuadrados. Este resultado se atribuye principalmente al desconocimiento de la variable y a la falta de comprensión sobre su papel en las expresiones matemáticas. Por tal razón fue necesario explicar que la variable es fundamental para expresar patrones y relaciones de manera generalizada, y que su manejo es crucial para entender conceptos más avanzados como el álgebra. Las variables pueden limitar la capacidad de los estudiantes para abstraer y generalizar conceptos matemáticos; en el caso de los números cuadrados, la fórmula general n^2 , donde n representa la posición en la sucesión, se convierte en un recurso poderoso para reconocer patrones. Sin embargo, si los estudiantes no comprenden cómo funcionan las variables, les resulta más difícil aplicar esta fórmula a situaciones concretas o identificar su relevancia en la resolución de problemas.

Una de las razones que los estudiantes afirmaron a esta falta de familiaridad con las variables estaba relacionada con métodos de enseñanza que no enfatizan su significado y aplicación en contextos diversos. Por tal razón, es esencial que los educadores proporcionen estrategias didácticas que integren el uso de variables desde etapas tempranas, promoviendo una comprensión más profunda que permita a los estudiantes abordar conceptos más complejos con confianza.

En referencia a la identificación de patrones, el estudiante que respondió lo expuesto en la Ilustración 13 identificó un patrón que se puede asociar a la sucesión que se forma con el número total de fichas usadas; él marcó con unas flechas el patrón encontrado. Debido a la baja calidad de la evidencia, es necesario retomar su idea así: El primer número de fichas usadas debe ser sumado al segundo número de fichas agregadas, de esta manera se puede obtener el número de fichas usadas del paso 2. De esta manera, solo era necesario completar la fila de fichas agregadas y seguir el patrón para llenar la tabla, lo cual fue lo que realizó el estudiante (Ilustración 12).

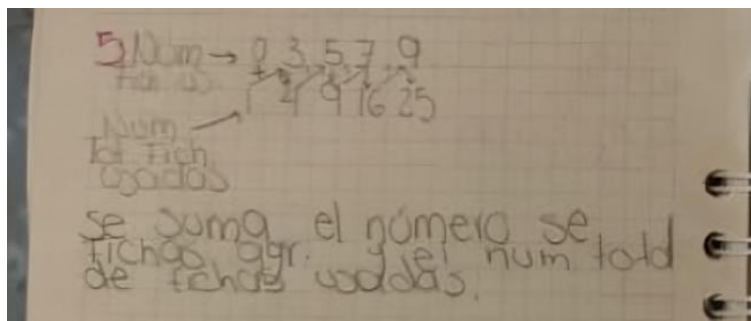


Ilustración 12

Num. De Pasos	1	2	3	4	5
Num. Fichas agregadas	0	3	5	7	9
Núm. Total de fichas usadas	1	4	9	16	25

Ilustración 13

Actividad 4 (pentagonales)

La actividad centrada en los números pentagonales, descritos por la fórmula $P(n) = \frac{n(3n-1)}{2}$, se presentó como una valiosa oportunidad para que los estudiantes interactuaran con conceptos matemáticos a través de un enfoque práctico y visual. Al inicio de la actividad, los estudiantes dibujaron un punto que representaba el primer número pentagonal, seguido de un

pentágono que ilustraba el segundo número, 5, mediante la cantidad de sus vértices. Este ejercicio inicial no solo introdujo a los estudiantes en la secuencia numérica de los números pentagonales, sino que también integró conceptos geométricos, permitiendo una conexión tangible entre la forma y el número.

Sin embargo, el éxito de esta actividad se vio comprometido por la falta de claridad en las instrucciones y la insuficiencia de recursos visuales. No se tuvo en cuenta el nivel de conocimientos previos de los estudiantes sobre conceptos básicos como el "vértice", lo que generó confusión y frustración. Esta falta de preparación adecuó la tarea a un nivel de complejidad que resultó desmotivador. La utilización de medios audiovisuales, que proporcionaron una explicación visual clara del concepto y la figura, fue esencial para que los estudiantes pudieran completar la actividad con éxito. Como se menciona en el marco teórico, "la tarea educativa fundamental de fortalecer el razonamiento inductivo de los y las estudiantes se cimienta en la capacidad que tengan para generalizar patrones a partir de observaciones específicas".

Este episodio denota la necesidad crítica de implementar recursos visuales y ejercicios estructurados en la enseñanza de conceptos abstractos. La representación gráfica no solo facilita la identificación de patrones y relaciones, sino que también fomenta el razonamiento inductivo. La posibilidad de construir conocimientos a partir de ejemplos concretos es fundamental para que los estudiantes puedan conectar nuevos conceptos con su conocimiento previo. Además, el empleo de ejercicios explícitos ofrece un marco claro donde los estudiantes pueden aplicar lo aprendido, mejorando su capacidad para generalizar conceptos y utilizarlos en nuevas situaciones, tal como lo sugiere Pólya (1994) en su enfoque sobre la generalización en el razonamiento matemático.

Al formular preguntas sobre el tercer y cuarto número pentagonal, se observó que los estudiantes utilizaron diversas estrategias, como el ensayo y error y la manipulación de materiales

(ver Ilustración 14). Este enfoque no solo facilitó la búsqueda de soluciones, sino que también estimuló el desarrollo de habilidades y confianza. Algunos estudiantes lograron resolver las tareas rápidamente, lo que indica un progreso significativo en su aprendizaje. La introducción de acertijos adicionales permitió mantener el interés y el compromiso de los estudiantes, alentando un aprendizaje continuo y crítico. Este tipo de interacción activa es fundamental para el desarrollo del pensamiento numérico, como lo enfatiza el Ministerio de Educación Nacional (MEN), que considera el pensamiento numérico como un componente esencial en la educación matemática.



Ilustración 14

Un aspecto destacado de esta actividad se manifiesta en los resultados de la Ilustración 15. Un estudiante sumó los puntos de los lados en lugar de considerar el total, lo que indica un malentendido de las instrucciones del docente. Este tipo de error resalta la necesidad de que los ejemplos abordados sean claros y guiados adecuadamente, como enfatiza Cañadas (2002). La claridad en la presentación de casos particulares es vital para evitar confusiones y garantizar que los estudiantes comprendan lo que se espera de ellos. Además, el error mencionado podría estar relacionado con una conexión involuntaria a una actividad previa sobre los números cuadrados. Este cruce de conceptos revela que los estudiantes, al no identificar las diferencias en las actividades, pueden perder la oportunidad de profundizar en el aprendizaje. Por lo tanto, es esencial

presentar cada actividad con suficiente claridad y contexto para que los estudiantes comprendan la singularidad de cada tarea.

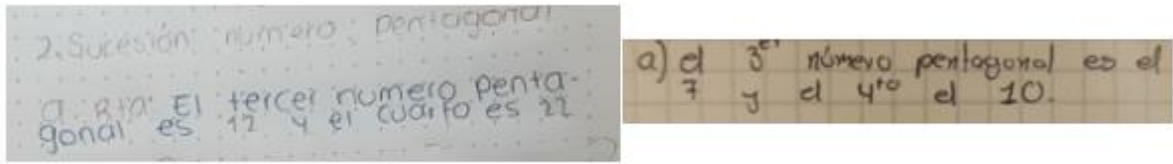


Ilustración 15

Para mejorar futuras experiencias de aprendizaje, es crucial prestar atención a cómo se presentan las guías y los ejemplos. La claridad en las instrucciones y la utilización de recursos visuales robustos pueden prevenir malentendidos y mantener el interés de los estudiantes. La integración de ejemplos accesibles y observables es fundamental para facilitar la formulación de conjeturas correctas y la justificación adecuada de las respuestas.

Además, fomentar un entorno de aprendizaje que valore el pensamiento crítico y la resolución de problemas puede ser determinante para el éxito en la comprensión de conceptos matemáticos más complejos. En este sentido, el razonamiento inductivo se convierte en una herramienta clave, ya que permite a los estudiantes identificar patrones en los datos numéricos y formular generalizaciones sobre las propiedades aritméticas, lo que a su vez enriquece su comprensión y aplicación de las matemáticas en contextos diversos.

Actividad 5 (sucesión de Fibonacci)

El objetivo principal de esta actividad fue que los estudiantes logaran identificar la sucesión de Fibonacci de manera personal. A través de la visualización de una imagen que ilustra el comportamiento de los conejos en la secuencia de Fibonacci, los alumnos pudieron discernir que esta sucesión se basa en la suma de los dos números anteriores. Este enfoque visual no solo

ayuda a anclar el concepto matemático en una representación tangible, sino que también activa el interés y la curiosidad de los estudiantes, elementos esenciales para un aprendizaje significativo.

Como se menciona, otro de los objetivos de esta actividad fue poner en práctica lo que Salgado y Salinas (2012) afirman: el docente, al enseñar, no debe limitarse a la definición matemática y al algoritmo de contar, sino que es fundamental crear situaciones que permitan a los estudiantes comprender la utilidad de los números y sus diversas aplicaciones. La integración de propuestas didácticas que invitan a la exploración activa de conceptos matemáticos se convierte en un vehículo para desarrollar un pensamiento crítico y reflexivo. Esto es crucial, ya que las matemáticas no son solo una serie de reglas y algoritmos, sino un lenguaje que describe patrones y relaciones en el mundo que nos rodea.

En este contexto, la sucesión de Fibonacci se presentó también mediante herramientas audiovisuales, facilitando su conexión con la realidad y captando mejor la atención de los estudiantes. La combinación de imágenes y explicaciones orales promueve un aprendizaje multisensorial, que puede ser particularmente efectivo para aquellos estudiantes que pueden no responder bien a métodos más tradicionales de enseñanza. Al diversificar las estrategias pedagógicas, se fomenta una mayor inclusión en el aula, asegurando que todos los estudiantes, independientemente de sus estilos de aprendizaje, tengan la oportunidad de comprender y relacionarse con el contenido.

Un aspecto significativo de la intervención fue la atención a las necesidades de los estudiantes que, como se indica, enfrentan dificultades o desinterés hacia las matemáticas. La ilustración elaborada por el practicante (Ilustración 16), en la que se representaron círculos pequeños y grandes simbolizando conejos bebés y adultos, destaca un momento crucial en el proceso de aprendizaje. Al colorear los círculos con tres tonalidades distintas, el estudiante no solo

incorrectas sobre la sucesión de Fibonacci o sobre patrones en general. Este fenómeno, conocido como "sesgo de confirmación", puede hacer que los estudiantes busquen solo aquellos ejemplos que confirmen sus hipótesis iniciales, ignorando aquellos que podrían contradecirlas. Por lo tanto, es esencial que los docentes fomenten un ambiente donde se valore la revisión crítica de las generalizaciones y se incentive la exploración de contraejemplos.

El hecho de que el estudiante generalice procedimientos de cálculo válidos para lograr la identificación de patrones a partir de gráficas sugiere que ha comenzado a desarrollar una comprensión más abstracta y conceptual de las matemáticas. Esta habilidad de reconocer relaciones y repeticiones en representaciones visuales implica que, al aplicar métodos específicos, también está desarrollando un marco conceptual que puede utilizar para hacer inferencias y resolver problemas en contextos matemáticos más amplios. En este sentido, el razonamiento inductivo no solo actúa como un puente hacia el razonamiento deductivo, sino que también se convierte en una herramienta esencial para la construcción de un pensamiento numérico robusto.

Actividad 6 (Sucesiones geométricas y aritméticas)

Las sucesiones geométricas y aritméticas han sido fundamentales en el estudio de patrones matemáticos, ya que proporcionan un marco robusto para identificar regularidades y realizar generalizaciones. Estas estructuras permiten a los estudiantes predecir comportamientos futuros y comprender conceptos abstractos. En las sucesiones aritméticas, cada término se obtiene sumando una constante al término anterior, mientras que, en las sucesiones geométricas, se multiplica el término anterior por una constante. Ambas secuencias ilustran la idea de cambio constante, ya sea aditivo o multiplicativo, lo cual es esencial para el desarrollo del pensamiento matemático.

El trabajo con estas sucesiones no solo promueve el razonamiento inductivo, sino que también fomenta el desarrollo de habilidades críticas en los estudiantes. Al analizar y manipular

estas secuencias, los alumnos aprenden a identificar patrones subyacentes, formular conjeturas fundamentadas y extraer conclusiones basadas en datos observados. Este proceso es crucial, ya que el razonamiento inductivo permite a los estudiantes establecer generalizaciones sobre propiedades aritméticas, lo que a su vez fortalece su pensamiento numérico. Además, como se menciona en el documento, el pensamiento numérico abarca una serie de habilidades cognitivas que permiten comprender símbolos, significados y relaciones numéricas, lo que es esencial para el análisis de fenómenos y la resolución de problemas matemáticos en diversos contextos.

Por lo tanto, el estudio de las sucesiones aritméticas y geométricas no solo facilita la comprensión de patrones matemáticos, sino que también actúa como un catalizador para el desarrollo de un pensamiento numérico robusto.

Sucesiones aritméticas

La actividad diseñada para explorar las sucesiones aritméticas incorporó diversas estrategias pedagógicas que fomentaron un aprendizaje significativo y activo. Se plantearon preguntas orientadas a la identificación y generalización de términos en sucesiones aritméticas, seguidas de un ejercicio práctico que utilizó fichas de dominó. Este enfoque se alineó con los principios del aprendizaje basado en la manipulación y la visualización, fundamentales en la enseñanza de conceptos matemáticos abstractos.

La actividad presentó un diseño didáctico que promovió la particularización, tal como describe Pólya (1994), donde los estudiantes analizaron casos específicos para extraer reglas generales. Esta metodología no solo facilitó la comprensión de las sucesiones aritméticas, sino que también fomentó un ambiente de aprendizaje activo. A través de la identificación de términos dentro de una sucesión, los estudiantes lograron reconocer patrones numéricos. Sin embargo, este proceso no estuvo exento de desafíos. Fue fundamental que los educadores guiaran a los

estudiantes para que evitaran el sesgo de confirmación, que podría haber llevado a ignorar ejemplos que no se ajustaban a las reglas generales establecidas.

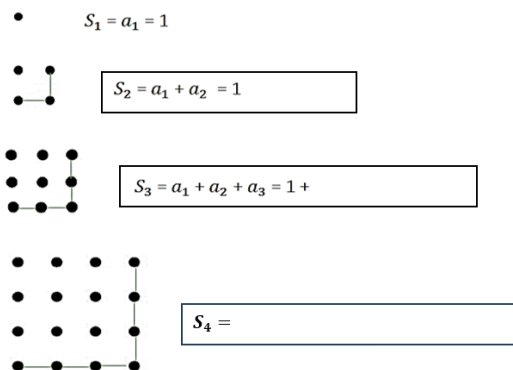


Ilustración 17

El uso del razonamiento inductivo fue crucial en esta actividad, ya que los estudiantes observaron términos anteriores para deducir el comportamiento del término S_4 . Sin embargo, se debe señalar que este tipo de razonamiento puede llevar a errores, como la generalización prematura. Algunos estudiantes pudieron haber concluido que el patrón observado se mantenía en todos los casos sin realizar un análisis crítico. Para mitigar este riesgo, los educadores presentaron ejemplos que desafiaron las generalizaciones iniciales, estimulando un análisis más profundo de las reglas matemáticas que estaban desarrollando.

La generalización de los términos de la sucesión mediante la expresión S_n demostró el desarrollo de habilidades de abstracción, donde los estudiantes trascendieron el contexto numérico particular y formularon una regla general. Esta capacidad es esencial en el aprendizaje matemático, ya que les permitió construir conocimiento sobre una base sólida. Sin embargo, se debió tener cuidado con el sesgo de representatividad, que pudo haber influido en la forma en que los estudiantes evaluaron los ejemplos. La presentación de una variedad de ejemplos y contraejemplos ayudó a clarificar las condiciones bajo las cuales se aplicaron las reglas formuladas.

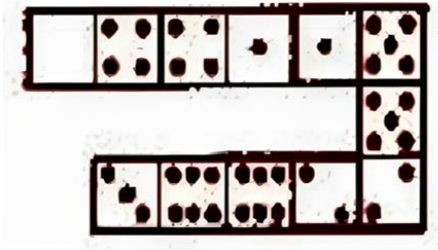


Ilustración 18

Otro aspecto significativo de la actividad fue la vinculación entre sucesiones aritméticas y figuras geométricas. Los estudiantes lograron visualizar cómo la organización de los términos en una sucesión generaba patrones geométricos, lo que demostró una comprensión más rica de las relaciones entre diferentes áreas matemáticas. Esta conexión no solo reforzó el concepto de sucesiones, sino que también promovió un razonamiento más profundo y flexible. La capacidad de representar un concepto numérico en una forma geométrica permitió a los estudiantes desarrollar un pensamiento más holístico y visual, lo cual es particularmente valioso en el aprendizaje de matemáticas.

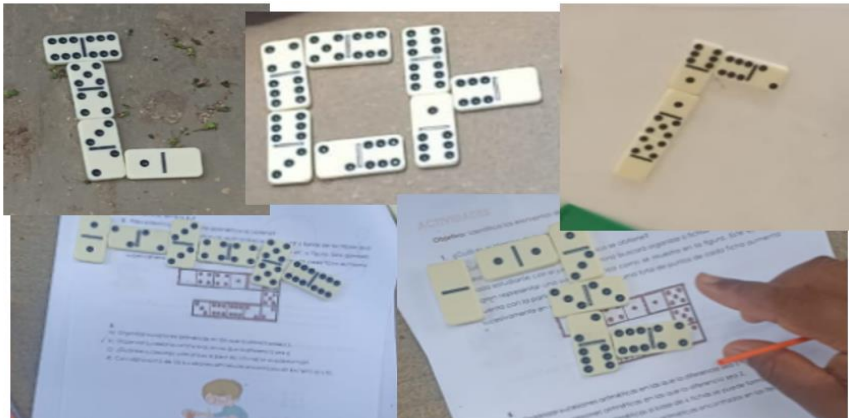


Ilustración 19

El ejercicio práctico que involucró el uso de fichas de dominó para representar una sucesión aritmética agregó una dimensión tangible a la actividad, facilitando el aprendizaje a través de la manipulación (ver Ilustración 19 e Ilustración 20). La utilización de materiales concretos se

consideró un enfoque pedagógico eficaz que permitió a los estudiantes experimentar de manera directa con los conceptos teóricos. Esta estrategia, fundamentada en la teoría del aprendizaje de Piaget, enfatizó la importancia del juego y la manipulación en el desarrollo cognitivo de los estudiantes. Al interactuar físicamente con los dominós, los estudiantes no solo reforzaron su comprensión de las sucesiones aritméticas, sino que también desarrollaron habilidades de resolución de problemas y colaboración.

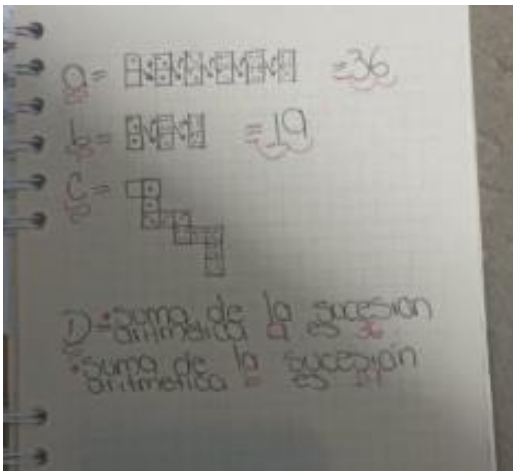


Ilustración 20

A pesar de los logros alcanzados, es crucial que el análisis de esta actividad incluya una reflexión crítica sobre los posibles sesgos y errores en el razonamiento inductivo. Se debió estar atentos a cómo los estudiantes interpretaron y generalizaron los patrones observados, proporcionando retroalimentación que los ayudara a reflexionar sobre su propio proceso de aprendizaje. La promoción de un aprendizaje reflexivo contribuyó a que los estudiantes no solo comprendieran el contenido matemático, sino que también desarrollaran habilidades críticas que les permitieran evaluar su propio razonamiento.

Sucesiones geométricas

El juego de la Torre de Hanói se presentó a los estudiantes como una actividad que fue crucial para la comprensión de las sucesiones geométricas. Este juego clásico, que implica mover

validar la sucesión encontrada, sino que también estimuló su curiosidad, llevándolos a explorar otros juegos matemáticos en línea para fortalecer sus habilidades de forma lúdica.

Además, esta actividad fue diseñada para fomentar la generalización de sucesiones, incluyendo las de los números cuadrados y pentagonales, permitiendo a los estudiantes conectar diferentes tipos de patrones. Este enfoque integral promovió una comprensión más profunda de las matemáticas, combinando conceptos abstractos con aplicaciones concretas.

El uso del razonamiento inductivo fue central en la actividad, ya que los estudiantes observaron patrones numéricos en los movimientos y formularon una regla general para describirlos. Si bien la actividad no evidenció errores específicos de razonamiento inductivo, es importante estar atentos a posibles fallos, como la tendencia a generalizar incorrectamente patrones a casos que no corresponden, lo que podría afectar la precisión de sus conclusiones.

Actividad 7 (Generalizando sucesiones)

La actividad se llevó a cabo con el propósito de que los estudiantes pudieran recordar cada una de las sucesiones previamente abordadas y dar el paso de trabajar con constantes a variables. A través de juegos en línea, cada estudiante debía identificar la pareja correspondiente a la fórmula general de una sucesión, como se ilustra en la imagen proporcionada.

El uso de este recurso digital (ver Ilustración 22) permitió a los estudiantes emparejar la fórmula general de una sucesión con su correspondiente secuencia numérica y, en algunos casos, formular expresiones algebraicas por sí mismos. Este enfoque resultó ser innovador y eficaz para la enseñanza de conceptos matemáticos, ya que no solo fomentó la comprensión conceptual de las sucesiones, sino que también promovió el desarrollo de habilidades de pensamiento numérico, lógico y crítico. Durante la actividad, los estudiantes se enfrentaron a diferentes tipos de sucesiones

y sus fórmulas, lo que les obligó a identificar patrones y conexiones, más allá de la simple memorización.

$2n+1$	3, 5, 7, 9, 11, 13...	$5n-2$	3, 8, 13, 18, 23, 28, 33...
$9n-4$	5, 14, 23, 32, 41, 50, 59...	$7n+8$	15, 22, 29, 36, 43, 50, 57
$11n$	11, 22, 33, 44, 55, 66, 77...	$12n-6$	6, 18, 30, 42, 54, 66, 78...
$-7n+4$	-3, -10, -17, -24, -31, -38...	$2n+2$	4, 6, 8, 10, 12, 14....
$8n-9$	1, 7, 15, 23, 31, 39...	$3n+6$	9, 12, 15, 18, 21, 24, 27...
$2n$	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14...	$10n-6$	4, 14, 24, 34, 44, 54, 64...
$4n+2$	7, 15, 23, 31, 39, 47, 55...	$8n-1$	7, 11, 15, 19, 23, 27, 31...

Se logró la identificación de algunas fórmulas generales de las sucesiones vistas en cada sesión

- n^2
- $\frac{n(n+1)}{2}$
- $2n$
- $2n + 1$
- $3n$
- $2^n - 1$



Ilustración 22

Un aspecto importante de la actividad fue el uso del ensayo y error como método de aprendizaje. Los estudiantes, al intentar asociar las fórmulas con las sucesiones correspondientes, identificaron que algunas de las secuencias no poseían una fórmula general precisa en el contexto del juego. Este hallazgo les permitió reflexionar sobre la complejidad de algunas sucesiones y sobre la necesidad de evaluar críticamente la información proporcionada por el recurso digital, lo que es un ejercicio valioso para desarrollar un pensamiento más analítico y crítico.

La experiencia de gamificación, además, transformó una actividad que podría percibirse como ardua en una experiencia divertida y atractiva. Los estudiantes valoraron la posibilidad de competir amistosamente con sus compañeros o colaborar en equipo, lo cual no solo hizo que disfrutaran el proceso de aprendizaje, sino que también generó un ambiente de trabajo colaborativo y motivador. Esto, a su vez, permitió establecer relaciones más sólidas entre los participantes, promoviendo un sentido de comunidad y apoyo mutuo en el aula.

La estructura del juego fue clave para brindar retroalimentación inmediata, un componente esencial en el proceso de aprendizaje. Los estudiantes podían visualizar al instante los resultados de sus respuestas, lo que les permitió reflexionar sobre sus errores y aciertos de manera continua. Este tipo de retroalimentación no solo les ayudó a identificar áreas de mejora, sino que también les brindó la oportunidad de ajustar sus estrategias y enfoques en tiempo real, perfeccionando así su comprensión de los conceptos.

Desde una perspectiva crítica, el diseño de la actividad también revela algunos aspectos que podrían ser mejorados. Por ejemplo, existe el riesgo de que algunos estudiantes se enfoquen más en superar los desafíos del juego que en entender profundamente las relaciones entre los términos de una sucesión y su expresión algebraica. Esto puede generar un sesgo de superficialidad, donde el estudiante prioriza la obtención de resultados inmediatos en lugar de una comprensión más profunda de los conceptos subyacentes. Por ello, sería importante complementar este tipo de actividades con espacios de reflexión y discusión guiada sobre los conceptos aprendidos.

A pesar de estos desafíos, la actividad demostró ser valiosa para promover actitudes positivas hacia las matemáticas y para desarrollar habilidades críticas esenciales para el crecimiento académico de los estudiantes. Al integrar juegos en línea como recurso pedagógico, se logra crear un entorno de aprendizaje que combina el entretenimiento con la adquisición de conocimientos, haciendo que el proceso educativo sea no solo más efectivo, sino también más significativo para los estudiantes.

Algunas de las fórmulas que pudieron identificar los estudiantes fueron:

- n^2

- $\frac{n(n+1)}{2}$
- $2n$
- $2n + 1$
- $3n$
- $2^n - 1$

Estas expresiones reflejan la capacidad de los estudiantes para observar patrones numéricos y traducirlos en términos algebraicos. La identificación y uso de estas fórmulas no solo reforzó la comprensión de sucesiones aritméticas y geométricas, sino que también les permitió conectar conceptos abstractos con situaciones concretas. En definitiva, la experiencia dejó una huella significativa en su formación, mostrando cómo la innovación en la enseñanza puede transformar el aprendizaje en un proceso más enriquecedor y agradable.

Actividad 8 (Algoritmo de la división)

La actividad "Divídalo y descubra el mensaje" fue parte de un conjunto de ejercicios diseñados para que los estudiantes consolidaran su comprensión del concepto de residuo en la división y sentaran una base sólida para el estudio de la aritmética modular. Este conjunto de actividades se estructuró para fomentar la aplicación práctica de la división y el residuo sin el uso de calculadoras, enfatizando un aprendizaje manual y conceptual que permitiera a los estudiantes dominar los elementos fundamentales de la división antes de adentrarse en temas más avanzados.

En particular, "Divídalo y descubra el mensaje" (ver Anexo 5-Guía 3: Algoritmo de la división) ofrecía una forma interactiva de trabajar con el algoritmo de la división. Los estudiantes debían calcular tanto el cociente como el residuo de varias divisiones, ya que estos dos elementos eran claves para descifrar un mensaje.

El cociente se relacionaba con las consonantes del mensaje y el residuo con las vocales, lo que incentivó a los estudiantes a realizar los cálculos de forma precisa y a comprender la relevancia de cada componente de la división. Esta tarea no solo hacía atractivo el proceso de aprendizaje, sino que también facilitaba la comprensión de cómo los elementos abstractos de la división se pueden aplicar a situaciones cotidianas y significativas.

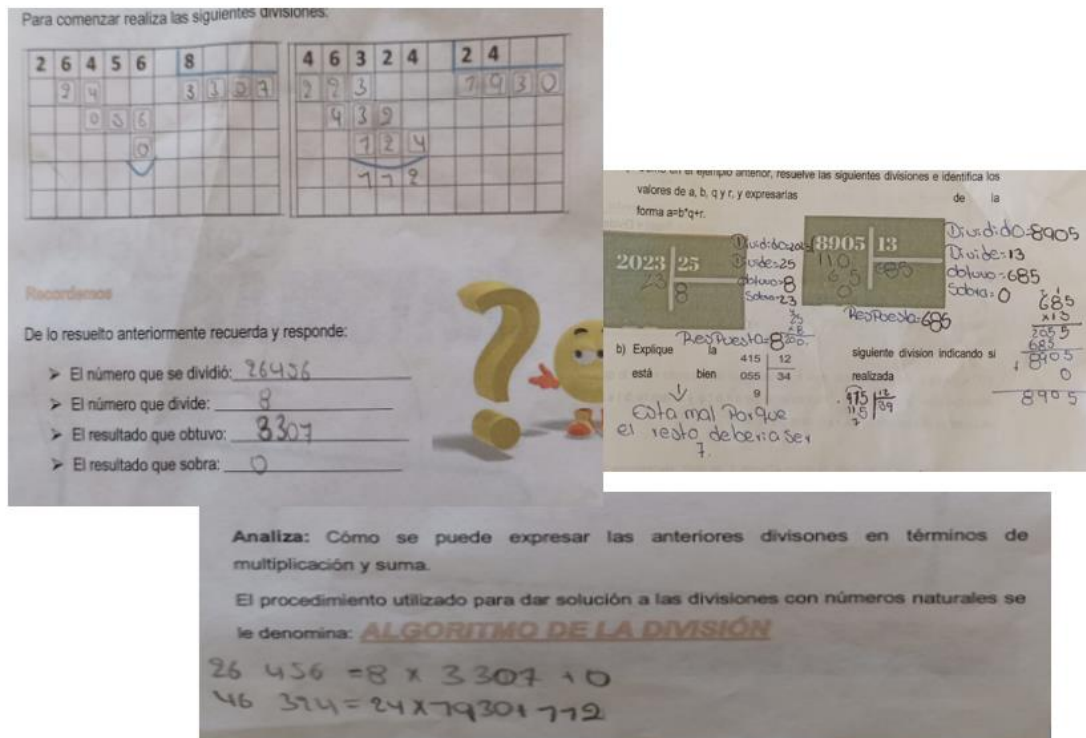


Ilustración 23

La actividad en conjunto, incluyendo otros ejercicios diseñados para la comprensión del algoritmo de la división, permitió a los estudiantes desarrollar su pensamiento lógico y su capacidad de expresión matemática. A través de métodos de ensayo y error, los estudiantes enfrentaron múltiples problemas de división que les exigieron pensar en términos de multiplicación y suma. Esto reforzó su capacidad para expresar matemáticamente que el dividendo se puede descomponer como el producto del divisor y el cociente, sumado al residuo, es decir $a = (b * q) + r$ donde a es el dividendo, b el divisor, q el cociente y r el residuo.

El proceso de realizar estos cálculos sin el apoyo de calculadoras representó un desafío para los estudiantes, pero también les brindó una experiencia valiosa de aprendizaje que les ayudó a construir una comprensión más sólida y significativa del algoritmo de la división. A medida que avanzaban en los ejercicios, pudieron identificar patrones en las divisiones y desarrollar estrategias para manejar de manera más eficiente los cálculos, lo cual se reflejó en una mayor seguridad en sus propias capacidades matemáticas (ver Ilustración 24-Residuos).

La actividad, además de centrarse en la comprensión del residuo, también tuvo un impacto importante en la preparación de los estudiantes para el siguiente tema: la aritmética modular. Al entender que el residuo tiene aplicaciones prácticas y no solo es un "resto" de una división, los estudiantes pudieron comenzar a vislumbrar la utilidad de este concepto en contextos más amplios. Esto facilitó una transición más fluida hacia la aritmética modular, un campo donde la comprensión del residuo es fundamental.

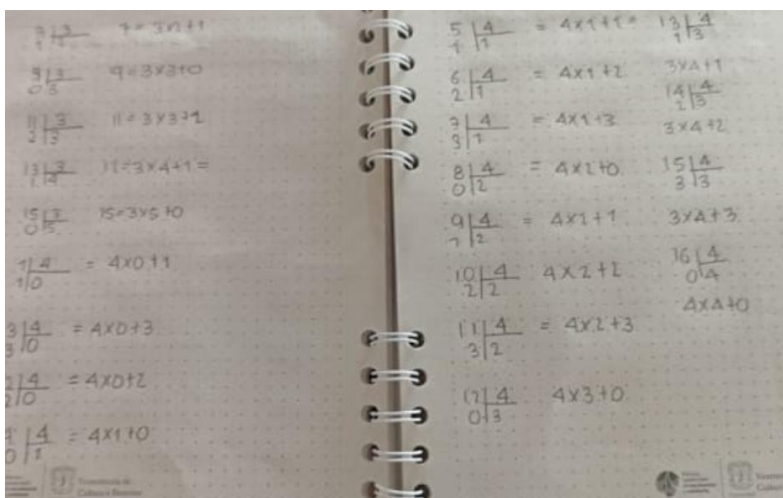


Ilustración 24-Residuos

El diseño de estas actividades también permitió identificar áreas de mejora y ciertos desafíos en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Por ejemplo, la falta de calculadoras fue una herramienta útil para reforzar el cálculo manual, pero supuso una dificultad adicional para aquellos

estudiantes con menos experiencia en cálculos aritméticos. Este enfoque podría generar un sesgo, beneficiando a aquellos estudiantes que ya poseían un nivel más avanzado en la aritmética manual, mientras que otros podrían haber sentido frustración ante la dificultad de los problemas. Un ajuste adecuado para superar este desafío podría haber sido incluir ejercicios introductorios de menor dificultad antes de abordar la actividad principal, asegurando una comprensión homogénea entre todos los estudiantes.

Asimismo, el ritmo de trabajo de cada estudiante varió considerablemente, lo que evidenció la necesidad de adaptar las actividades a las diferentes velocidades de aprendizaje. Algunos completaron los problemas de manera rápida y eficiente, mientras que otros necesitaron un apoyo adicional para comprender los conceptos clave y resolver las divisiones de manera adecuada. Este aspecto sugiere que, para futuras implementaciones de actividades similares, sería beneficioso incluir mecanismos de apoyo y diferenciación, de manera que todos los estudiantes puedan avanzar según sus necesidades y capacidades.

Actividad 9 (Aritmética modular)

La introducción de operaciones con clases residuales se llevó a cabo mediante una estrategia didáctica creativa: un truco matemático que invitaba a los estudiantes a pensar en un número de tres cifras y seguir una serie de indicaciones. A través de estas indicaciones, los estudiantes debían realizar divisiones exactas por 13, luego por 7 y finalmente por 11, para retornar al número inicial (ver Anexo 6-Guía 4: Aritmética modular). Este enfoque, que se apartaba de los métodos tradicionales de enseñanza, fue clave para captar la atención de los estudiantes y despertar su interés por la aritmética modular. La sorpresa y la curiosidad generadas por este truco demostraron ser herramientas valiosas para motivar el aprendizaje de conceptos abstractos.

Sí $13 = 5 * 2 + 3$, entonces se tiene que: $13 \bmod 5 = 3$.



Congruencia

Ahora, para poder entender esta sección, vamos a realizar las siguientes divisiones:

1. $8 \div 2 = \square$ su residuo es: \square 4. $18 \div 2 = \square$ su residuo es: \square

2. $9 \div 2 = \square$ su residuo es: \square 5. $19 \div 2 = \square$ su residuo es: \square

3. $15 \div 2 = \square$ su residuo es: \square 6. $32 \div 2 = \square$ su residuo es: \square

- Identifique, como en el ejemplo anterior, el módulo que tienen las anteriores divisiones.
- ¿Qué números tienen el mismo residuo?

Nota: A los números que tienen el mismo residuo e igual módulo se les denomina congruentes.

- ¿Qué números son congruentes, según las divisiones realizadas?

Ilustración 25

Un aspecto destacable de esta experiencia fue el comentario de un estudiante, quien mencionó que las matemáticas escolares le parecían limitadas, ya que consideraba que no se enseñaban temas que serían fundamentales para su desarrollo profesional. Este comentario refleja una crítica a la educación tradicional y destaca la importancia de introducir enfoques que conecten el contenido escolar con aplicaciones más amplias y relevantes para la vida futura de los estudiantes. Esta percepción también subraya la necesidad de abordar contenidos que no solo satisfagan los estándares académicos, sino que también ofrezcan una preparación más integral para los desafíos del futuro.

La actividad no solo buscaba introducir la aritmética modular, sino que también sirvió como un refuerzo del conocimiento previo sobre el algoritmo de la división, tal como se muestra en la Ilustración 26-Aritmética modular. El trabajo previo con el algoritmo de la división fue fundamental para que los estudiantes pudieran comprender y expresar operaciones de división en términos de clases residuales. Esto les permitió abordar la aritmética modular de manera más fluida, ya que podían conectar los conceptos recién adquiridos con los ya conocidos.

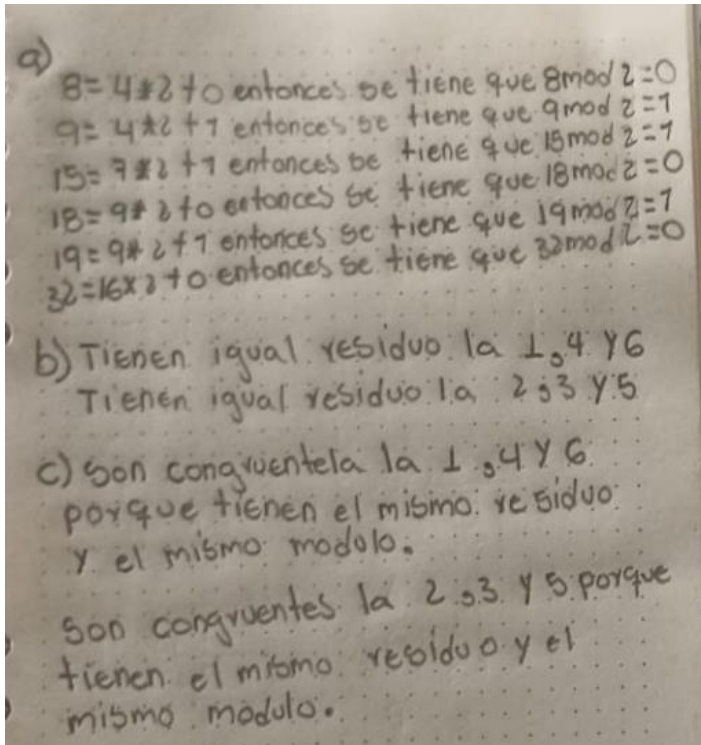


Ilustración 26-Aritmética modular

El éxito de la actividad fue notable, ya que no se requirieron explicaciones adicionales para los enunciados presentados, lo que indica que el diseño de la actividad fue claro y adecuado para los objetivos de aprendizajes planteados.

El estudiante no solo respondió adecuadamente a lo solicitado, sino que también mostró un buen entendimiento de las indicaciones y del ejemplo proporcionado al inicio de la actividad. La facilidad con la que resolvió las divisiones convencionales y las expresó como módulos, así como su habilidad para identificar números congruentes bajo ciertos módulos, evidencia un entendimiento profundo de los principios matemáticos subyacentes. Este nivel de competencia demuestra una capacidad para ir más allá de la mera aplicación de reglas y procedimientos, desarrollando una habilidad para generalizar conceptos y establecer conexiones entre diferentes áreas matemáticas.

La capacidad del estudiante para manejar conceptos abstractos y aplicarlos de manera flexible y crítica refleja un avance significativo en el desarrollo de su pensamiento numérico. Este avance es un indicativo de que ha superado la etapa de aprendizaje mecánico de los procedimientos y ha comenzado a explorar y aplicar principios matemáticos con mayor profundidad. A su vez, la aritmética modular no solo reforzó habilidades operativas básicas, sino que también incentivó el desarrollo de un pensamiento lógico y estructurado, esencial para abordar problemas complejos.

Sin embargo, la actividad también puso de manifiesto algunos desafíos en el proceso de enseñanza-aprendizaje, como se detalla en la Ilustración 27. Uno de estos desafíos es la tendencia de algunos estudiantes a trabajar rápidamente con el objetivo de destacarse entre sus compañeros, lo cual puede llevar a cometer errores por falta de atención al detalle. Este fue el caso de un estudiante que, motivado por la competencia, completó la actividad a un ritmo acelerado, sin percatarse de varios errores importantes.

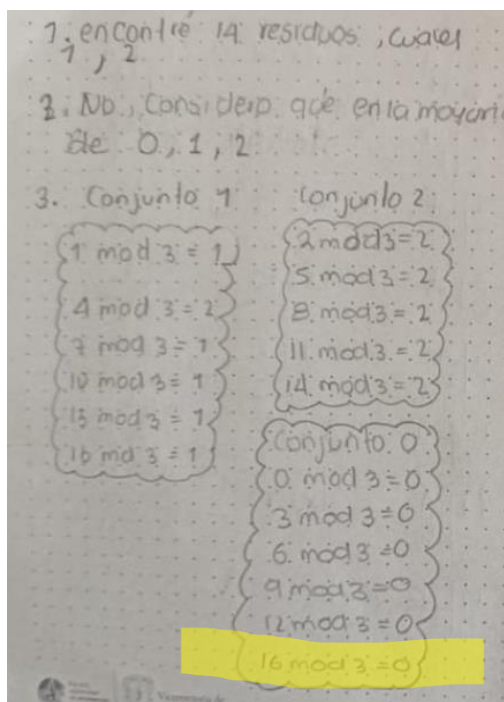


Ilustración 27

En un primer momento, afirmó haber encontrado 14 residuos, pero luego intentó expresar 17 en la respuesta a la pregunta c), sin darse cuenta de la contradicción. Este tipo de errores, aunque pueden no reflejar una falta de comprensión del tema en su totalidad, sí revelan la necesidad de una orientación más precisa y de un enfoque que fomente la reflexión cuidadosa.

Además, se observó una inconsistencia en la resolución de algunos ejercicios, como se muestra en lo subrayado en la Ilustración 27. Aunque el estudiante realizó correctamente más de 10 ejercicios anteriores, cometió un error al expresar un residuo, colocando un 16 en lugar de un 15. Esta discrepancia sugiere que el ritmo rápido al que trabajó afectó su precisión. También se identificó una falta de claridad en la comprensión del tercer requerimiento de la actividad, que consistía en expresar como conjunto los números congruentes. Este aspecto llevó a respuestas que no cumplían con los criterios solicitados, indicando que el enunciado podría haber sido más claro o que el estudiante necesitaba una guía más detallada.

Actividad 10 (Tablas de suma y multiplicación modular)

El objetivo principal de esta actividad fue que los estudiantes, después de identificar números congruentes, pudieran realizar sumas y multiplicaciones modulares, lo cual les permitiría profundizar en el tema de la aritmética modular. Esta actividad se llevó a cabo después de explicar el concepto de "reloj modular", un método visual que facilita la comprensión de operaciones modulares. El reloj modular consiste en dibujar un círculo y ubicar el número 0 en la parte superior, seguido de los números naturales (1, 2, 3, ...) en sentido de las manecillas del reloj, hasta llegar a un número menos que el módulo elegido. Este recurso visual les ayudó a los estudiantes a entender cómo los números "regresan" al 0 al alcanzar el módulo, reforzando así la idea de congruencia y el comportamiento cíclico de los módulos.

Sin embargo, la actividad no estuvo exenta de dificultades. En la Ilustración 29, se observa que un estudiante cometió un error al realizar una multiplicación modular. En la parte final de la tabla de multiplicaciones, en lugar de aplicar correctamente la operación modular, el estudiante introdujo un sustraendo que, al restarlo del producto, le daba como resultado el módulo en el que estaba trabajando. Por ejemplo, al realizar la operación $5 \times 5 = 25$, restó 19 de 25 para obtener 6. Esto refleja una confusión sobre cómo aplicar el concepto de reducción modular, mostrando que el estudiante comprendía parcialmente la operación, pero no dominaba su ejecución técnica.

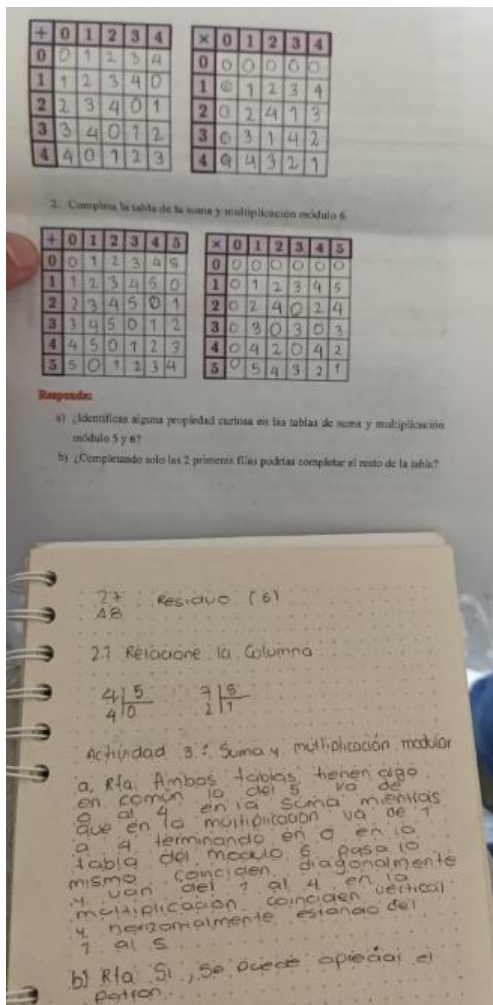


Ilustración 28

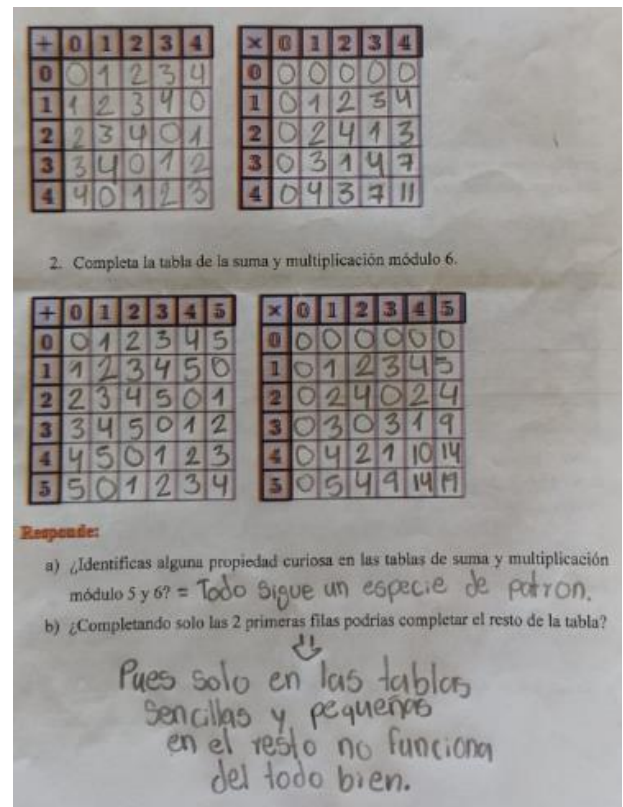


Ilustración 29

A pesar de este error, la respuesta del estudiante a la pregunta a) es significativa, ya que sugiere que estaba comenzando a formular una conjetura sobre los resultados de las operaciones modulares al decir que "todo sigue una especie de patrón". Aunque no fue capaz de expresarlo formalmente ni justificarlo con argumentos matemáticos sólidos, la respuesta indica que el estudiante está desarrollando una intuición matemática que aún no ha logrado consolidar. Este proceso de formulación de una conjetura implícita es un indicativo de que el estudiante está intentando ir más allá de la mecánica de los cálculos, buscando identificar regularidades subyacentes en los resultados

En contraste, la Ilustración 28 muestra a otro estudiante que fue capaz de realizar sumas y multiplicaciones de manera correcta en los módulos 5 y 6. Este estudiante logró proporcionar respuestas coherentes a las preguntas a) y b), lo que evidencia una comprensión adecuada de los conceptos trabajados en la actividad. Además, demostró atención durante el proceso, ya que fue capaz de identificar patrones que le facilitaron la resolución de los problemas. Esta habilidad para detectar regularidades es esencial en la aritmética modular y representa un paso importante en el desarrollo del razonamiento inductivo. Al reconocer estos patrones, el estudiante no solo muestra una comprensión técnica, sino también un enfoque que busca generalizar y abstraer las reglas de las operaciones modulares.

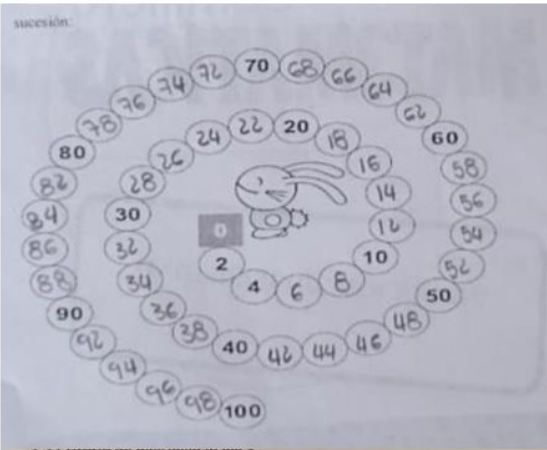
Esta actividad permitió observar tanto las dificultades como los avances en el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Aunque persisten algunos errores técnicos en la ejecución de las operaciones modulares, se evidencia un progreso significativo en la capacidad de los estudiantes para identificar patrones y formular hipótesis. Estos errores conceptuales son comunes en las etapas iniciales del aprendizaje de la aritmética modular, pero también son señales de un proceso de construcción del conocimiento más profundo. Con la orientación adecuada, es probable que los

estudiantes logren formalizar sus intuiciones y aplicar correctamente los principios de la aritmética modular.

La observación de patrones y la disposición para explorar relaciones numéricas por parte de los estudiantes son indicadores positivos de su avance. Estos elementos son cruciales para el fortalecimiento del razonamiento inductivo y del pensamiento numérico, permitiéndoles transitar de un enfoque mecánico a uno más conceptual. La actividad, al combinar el aspecto visual del reloj modular con la práctica de operaciones, proporcionó un contexto integral para que los estudiantes se familiaricen con la naturaleza cíclica de los números en el contexto de la aritmética modular. Así, aunque aún queda camino por recorrer para perfeccionar su dominio de estos conceptos, los estudiantes han demostrado avances significativos que sientan una base sólida para el aprendizaje de temas matemáticos más complejos en el futuro.

Actividad 11 (Criterios de divisibilidad)

Los estudiantes se enfrentaron a una de las preguntas fundamentales de la teoría de números: ¿qué ocurre cuando un número es divisible por más de un entero? Esta curiosidad inicial fue clave, ya que la divisibilidad múltiple es un concepto esencial en el campo de la teoría de números. A través de la exploración de esta relación, los estudiantes recurrieron al método de ensayo-error, lo que les permitió investigar posibles patrones y justificar sus conjeturas. Este enfoque no solo impulsó su curiosidad natural, sino que también fomentó un desarrollo significativo de sus habilidades de pensamiento crítico y analítico, al convertirse en aprendices activos que buscaban justificaciones y evidencias para sus ideas



2.2 Criterio de divisibilidad por 3

Complete la tabla de secuencia, donde el término general está dado por: $a_n = 3 \cdot n$

Número del término.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Número de la secuencia.	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48
Suma de los dígitos de cada término.	3	6	9	3	6	9	3	6	9	3	6	9	3	6	9	3

Observación: en caso de que el resultado de la suma sea un número de dos dígitos estos se sumaran de nuevo.

Ilustración 30

Al plantearse y defender sus hipótesis, los estudiantes no solo articulaban sus ideas, sino que también mejoraban su capacidad de argumentación y reflexionaban sobre sus errores. Este proceso de reflexión y ajuste continuo de sus conjeturas les permitió consolidar un enfoque riguroso en la investigación matemática, donde cada error se convertía en una oportunidad para afinar su comprensión de los conceptos de divisibilidad.

Gracias a la organización de datos y la formulación de conjeturas, los estudiantes lograron realizar generalizaciones importantes sobre los criterios de divisibilidad. Un ejemplo significativo de este proceso fue su comprensión del criterio de divisibilidad por 2: los estudiantes dedujeron que cualquier número par es divisible por 2 y definieron un número par como aquel que puede expresarse como $2n$, donde n es un número natural. A partir de esta observación, también comprendieron que un número impar se puede expresar como $2n + 1$, lo cual evidencia su habilidad para aplicar principios aritméticos y formular expresiones generales.

El análisis también se extendió al criterio de divisibilidad por 3. Los estudiantes identificaron que un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es 3, 6 o 9. Este hallazgo no solo reforzó su habilidad para reconocer patrones numéricos, sino que también les permitió aplicar este criterio de forma práctica en distintos contextos matemáticos. La identificación de este patrón en la suma de cifras es un claro reflejo de su capacidad para relacionar conceptos abstractos con procedimientos concretos, lo que les facilitó la aplicación de la teoría en la resolución de problemas.

Por último, los estudiantes abordaron el criterio de divisibilidad por 10. Aquí, comprendieron que cualquier número que termina en 0 es divisible por 10, lo que consolidó su entendimiento de las reglas básicas de divisibilidad. Esta regla, aunque aparentemente sencilla, les permitió observar la relación entre las cifras de un número y su divisibilidad, afianzando su comprensión de cómo las características de un número pueden determinar su comportamiento frente a divisiones.

Estos razonamientos y el proceso de formulación de conjeturas no solo demuestran que los estudiantes lograron comprender conceptos matemáticos fundamentales, sino que también reflejan su capacidad de análisis y generalización. El recorrido desde la exploración inicial hasta la formulación de reglas generales muestra cómo la curiosidad, el ensayo-error y la argumentación bien fundamentada pueden transformar la enseñanza de las matemáticas, llevando a los estudiantes a un nivel de comprensión más profundo y duradero.

Conclusiones

- El razonamiento inductivo va mucho más allá de ser una técnica matemática aislada para resolver problemas específicos. Se convierte en una herramienta poderosa que transforma la forma en que los estudiantes abordan cualquier desafío, especialmente aquellos que presentan incertidumbre o múltiples soluciones posibles. Al centrarse en el análisis de casos particulares para luego generalizar reglas o patrones, el razonamiento inductivo desarrolla una habilidad fundamental: la capacidad de explorar lo desconocido mediante estrategias basadas en la observación y la inferencia.
- Las estrategias pedagógicas implementadas no solo cumplieron con los objetivos específicos planteados, sino que también generaron un impacto significativo en el desarrollo del pensamiento numérico de los estudiantes. Este impacto se evidenció en la mejora de su capacidad para identificar patrones, formular conjeturas y justificar sus razonamientos, lo que refuerza la comprensión de conceptos matemáticos complejos.
- La creación de espacios donde el ensayo y error no solo se permitió, sino que se fomentó activamente, ayudó a los estudiantes a comprender que los errores son una parte intrínseca del proceso matemático. Cada intento fallido se convirtió en una oportunidad para ajustar, corregir y mejorar su razonamiento. Este enfoque no solo fortaleció su resiliencia frente a los desafíos matemáticos, sino que también les enseñó que las matemáticas son un proceso dinámico, donde las respuestas no siempre son inmediatas ni obvias, pero accesibles mediante la perseverancia y el análisis crítico.
- Aunque el razonamiento inductivo es una herramienta valiosa, también presenta limitaciones. Al no ser exacto, puede llevar a conclusiones incorrectas si no se maneja con rigor. Las hipótesis que genera pueden ser válidas solo en ciertos contextos, y su uso

indiscriminado puede conducir a sobregeneralizaciones y errores. Para evitar estos problemas, es crucial complementarlo con verificación constante, búsqueda de contraejemplos y un análisis crítico.

- Un hallazgo crucial fue la importancia de la justificación en el desarrollo del pensamiento crítico matemático. Al formular conjeturas y estar inmersos en la necesidad de justificarlas, los estudiantes aprendieron a estructurar argumentos coherentes y a sostener sus afirmaciones con razonamientos válidos. Este proceso permitió una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos y afianzó el rigor y la precisión en su pensamiento.
- El enfoque didáctico fomentó el aprendizaje autónomo y el pensamiento crítico. Al enfrentar desafíos y buscar justificaciones, los estudiantes desarrollaron habilidades de autoevaluación y reflexión, esenciales para su crecimiento académico y personal. Este proceso les ayudó a internalizar que el conocimiento matemático se construye de manera continua, integrando nuevas ideas y revisando constantemente las existentes.
- La capacidad de reconocer patrones es fundamental en el desarrollo del pensamiento inductivo. Como destacan Acero y Callejas Parra (2019) al referirse a Pólya (1966), esta habilidad no solo es crucial en las matemáticas, sino en todas las ciencias. El reconocimiento de patrones permite formular hipótesis y establecer conexiones generales entre fenómenos aparentemente dispares, lo que refuerza la idea de que las matemáticas son, en esencia, la ciencia de las estructuras repetitivas y las relaciones subyacentes en el mundo.

Bibliografía

- Acero, C. C., & Callejas Parra, D. (2019). Razonamiento inductivo desde el enfoque del Conocimiento Pedagógico del Contenido. *Tesis o trabajo de investigación presentada(o) como requisito parcial para optar al título de: Licenciado en Matemáticas y Física*. Apartadó, Colombia: Universidad de Antioquia .
- Albaladejo, I. R. (2000). Representación y comprensión en pensamiento numérico. En L. C. Nuria Climent Rodríguez (ed. lit.), *Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en educación matemática* (págs. 35-46). Huelva: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM.
- Araújo, E.; Palhares, P. y Giménez, J. (2008). Niños de cuatro años investigan con patrones. *UNO*, 47, 54-66.
- Arias, A. B. (2009). *Lógica y argumentación: De los argumentos inductivos a las álgebras de Boole*. Pearson Educacion de México S.A.
- Balacheff, N. (Agosto de 2000). *PROCESOS DE PRUEBA EN LOS ALUMNOS DE MATEMÁTICAS*. Funes: <http://funes.uniandes.edu.co/675/1/Balacheff2000Proceso.pdf>
- Bernuy, M. Y. (16 de Diciembre de 2022). La Matemática Recreativa. *TRABAJO MONOGRÁFICO PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADA EN EDUCACIÓN; ESPECIALIDAD: MATEMÁTICA, COMPUTACIÓN Y FÍSICA*. Nuevo Chimbote, Perú: Universidad Nacional del Santa.
- Calle Chacón , L. P., Garcia, D. G., Ochoa, S. C., & Erazo, J. C. (29 de Junio de 2020). La motivación en el aprendizaje de la matemática: Perspectiva de estudiantes de básica superior. *V(1)*. Santa Ana de Coro, Venezuela: FUNDACIÓN KOINONIA.
- Cañadas, M. C. (Septiembre de 2002). RAZONAMIENTO INDUCTIVO PUESTO DE MANIFIESTO POR ALUMNOS DE SECUNDARIA . *TRABAJO DE INVESTIGACIÓN TUTELADA* . Granada, España: Universidad de Granada.
- Cañadas, M. C. (1 de Abril de 2009). Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas. *Reseña de tesis*, 21(1), 159-164. Granada, España: Educación Matemática.
- Cañadas, M. C., & Castro Martínez, E. (s.f.). La importancia del razonamiento inductivo en la formación inicial de profesores. Funes: <http://funes.uniandes.edu.co/260/1/CannadasM02-2720.PDF>
- Cañadas, M. C., & Castro, E. (2004). Razonamiento Inductivo de 12 alumnos de secundaria en la resolución de un problema matemático. *Investigacion en educacion matemática*, 173-182. Coruña, España: Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación

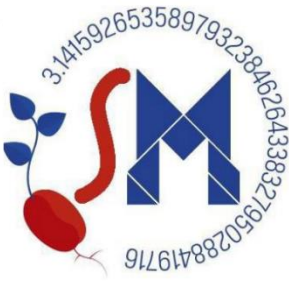
Matemática.

http://funes.uniandes.edu.co/1336/1/Castro2004Razonamiento_SEIEM_173.pdf

- Cañadas, M. C., & Castro, E. (2007). UN PROCEDIMIENTO PARA LA CARACTERIZACIÓN DE ESTRATEGIAS EN PROBLEMAS DE SUCESSIONES QUE INVOLUCRAN EL RAZONAMIENTO INDUCTIVO. *IV*, 13-24.
- Cardenas Soler, R., Piamonte Contreras, S., & Gordillo Catellanos, P. (26 de Octubre de 2017). Desarrollo del pensamiento numérico. Una estrategia: el animaplano. (33). Tunja, Boyacá, Colombia : Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.
- Castro, E. (2002). Razonamiento inductivo desde la Didáctica de la Matemática. En M. C. Penalva, G. Torregrosa y J. Valls (Eds). Aportaciones de la Didáctica de la Matemática a diferentes perfiles profesionales (pp. 157-166). Alicante: Universidad de Alicante.
- Castro, E., Cañadas, M. C., & Molina, M. (abril de 2010). EL RAZONAMIENTO INDUCTIVO COMO GENERADOR DE CONOCIMIENTO MATEMÁTICO. Granada, España: UNO 54.
- Gambra, J. (1996). *El Número en Aristóteles*.
<https://institucional.us.es/revistas/themata/17/03%20Gambra.pdf>
- González, A., Molina, J. G., & Sánchez, M. (3 de Diciembre de 2014). La matemática nunca deja de ser un juego: investigaciones sobre los efectos del uso de juegos en la enseñanza de las matemáticas. *Artículo de investigación*, 26(3), 109-133. Educación Matemática.
- Jiménez Villalpando, A., Garza Kanagusiko, A., Méndez Flores, C. P., Mendoza Carrillo, J., Acevedo Mendoza, J., Arredondo Contreras, L. C., & Quiroz Rivera, S. (2020). Motivación hacia las matemáticas de estudiantes de bachillerato de modalidad mixta y presencial. 44(1). Costa Rica: Revista Educación.
<https://www.redalyc.org/journal/440/44060092014/44060092014.pdf>
- Maseda, M. e. (diciembre de 2011). Estudio Biliografico de la Motivacion en el aprendizaje de las matemáticas y propuestas de talleres aplicados a la vida real. *Tesis de Maestría*. La Rioja, España: Universidad Internacional de La Rioja.
- Medina, Y. (s.f.). EL CONSTRUCTIVISMO Y LA REALIDAD MATEMÁTICA. e Universidad Corporación Unificada Nacional de Educación Superior.
- MEN. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Cooperativa Editorial Magisterio, 103.
- MEN. (2006). Lineamientos Curriculares para Matemáticas. Magisterio, 47–95.
https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf+-
- Mera, Y. F., & Paguay, E. D. (2022). *La Matemática Recreativa: un camino para fomentar el interés por el aprendizaje de las matemáticas*. Repositorio Universidad del Cauca: <http://repositorio.unicauca.edu.co:8080/xmlui/handle/123456789/7606>

- Núñez, K. P. (julio de 2018). RAZONAMIENTO INDUCTIVO EN PROFESORES DE MATEMÁTICAS AL RESOLVER TAREAS DE GENERALIZACIÓN CON SUCESIONES CUADRÁTICAS. *Tesis para obtener el título de maestría en ciencias áreas: matemática educativa*. Chilpancingo, Guerrero, México: UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO.
- Obando, G., & Vásquez, N. (s.f). *Pensamiento numérico del preescolar a la educación básica* . funes: <http://funes.uniandes.edu.co/933/1/1Cursos.pdf>
- Pachon, L. A., Parada Sanchez , R. A., & Chaparro Cardozo , A. Z. (2016). EL RAZONAMIENTO COMO EJE TRANSVERSAL EN LA CONSTRUCCIÓN DEL PENSAMIENTO LÓGICO. *Prax. Saber*, 7(14).
- Pólya, G. (1994). Cómo plantear y resolver problemas. *Décimo octava ed.* (J. Zugazagoitia, Trad.) México: Trillas.
- Recalde, L. C. (septiembre de 2018). *Lecturas de historia de las matemáticas*. Cali, Colombia: Programa Editorial.
- Salgado, M., & Salinas, M. J. (2012). El razonamiento inductivo como generador de la construcción del número en 5 años. En D. Arnau, J. Lupiáñez, & A. Maz, *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* (págs. 119-125). Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.
- Salgado, M., & Salinas, M. J. (2012). EL RAZONAMIENTO INDUCTIVO COMO GENERADOR DE LA CONSTRUCCIÓN DEL NÚMERO EN 5 AÑOS. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, & A. Maz, *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* (págs. 119-125). Valencia, España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.
- Villa Ochoa, J. A. (16 de Julio de 2006). El proceso de generalización matemática: Algunas reflexiones en torno a su validación. Medellín , Colombia: Revista Tecno lógica.

Anexos



Universidad
del Cauca

Estamos realizando una encuesta para conocer tus actitudes y opiniones hacia las matemáticas. Queremos saber cómo te sientes al respecto. Responde a las preguntas y ayúdanos a entender mejor tu relación con las matemáticas

Grado: _____ Edad: _____

1. ¿Las matemáticas se te facilitan?

- a) Sí
- b) No

¿Por qué?

2. ¿Te gusta estudiar matemáticas?

- a) Sí
- b) No

¿Por qué?

3. ¿Las matemáticas son importantes para tu futuro?

- a) Sí
- b) No

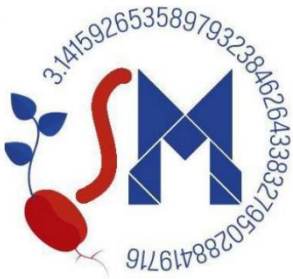
¿Por qué?

4. ¿Consideras que todos podemos aprender matemáticas?

- a) Sí
- b) No

¿Por qué?

5. ¿Las matemáticas solo se aprenden en el salón de clases?
- a) Sí
 - b) No
 - c) No estoy seguro (a)
6. ¿Los juegos y actividades que involucran matemáticas son divertidos?
- a) Sí
 - b) No
 - c) No estoy seguro (a)
7. ¿Te gustaría que hubiera juegos y actividades prácticas en clase de matemáticas?
- a) Sí
 - b) No
 - c) No estoy seguro (a)
8. ¿Las matemáticas son importantes en la vida cotidiana?
- a) Sí
 - b) No
 - c) No estoy seguro (a)
9. ¿Cómo te sientes en general acerca de las matemáticas?
- a) Me gustan
 - b) No me gustan
 - c) No estoy seguro (a)



El objetivo de la siguiente encuesta es conocer sus opiniones y actitudes hacia las matemáticas, teniendo en cuenta su experiencia vivida en el Semillero. Por lo anterior, responda cada uno de los interrogantes presentados de manera personal y con sinceridad



Grado: _____ **Edad:** _____

1. ¿Crees que los juegos y la metodología implementada en el Semillero pueden ser útiles en el aprendizaje de las matemáticas?

- a) Sí
- b) No

¿Por qué? _____

2. ¿Fueron divertidos los juegos y actividades que involucraron matemáticas?

- a) Sí
- b) No

¿Por qué? _____

3. ¿Las matemáticas son importantes para la vida cotidiana?

- a) Sí
- b) No

¿Por qué? _____

4. ¿Crees que mejoraste los conocimientos o habilidades en matemáticas?

- a) Sí
- b) No

¿Por qué? _____

5. ¿Fue fácil resolver las actividades de las guías, teniendo en cuenta la manera como estaban presentadas?

- a) Sí
- b) No

¿Por qué? _____

6. ¿Te gusta estudiar matemáticas?

- a) Sí
- b) No

¿Por qué? _____

7. ¿Cómo te sientes en general acerca de las matemáticas?
- a) Me gustan
 - b) No me gustan
 - c) No estoy seguro (a)

8. ¿Crees que mejoró tu comprensión hacia los números?
- a) Sí
 - b) No

¿Por qué? _____

9. ¿Hay algo que quieras compartir sobre tus experiencias con las matemáticas o alguna sugerencia para mejorar la enseñanza de esta materia?

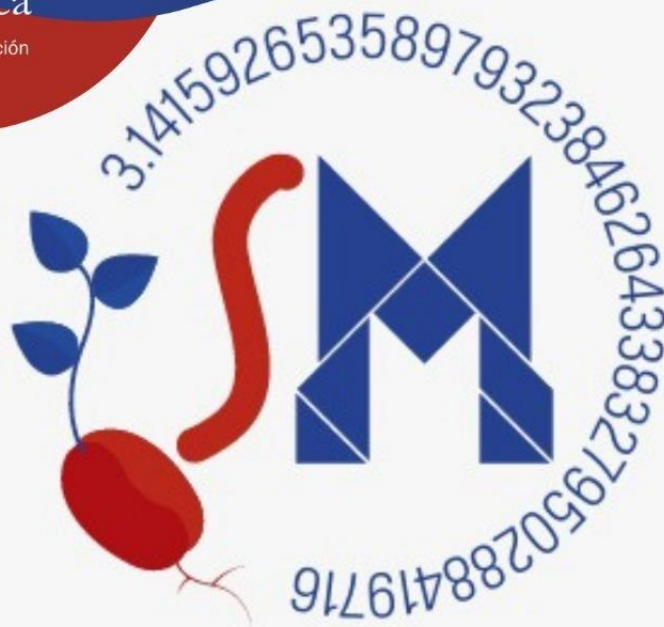
10. ¿Puedes compartir un logro personal relacionado con las matemáticas que te haya hecho sentir orgulloso (a)



Universidad
del Cauca

Vigilada Mineducación

FACNED
Centro de Regionalización



Semillero

MATEMÁTICAS

**Guía N°1 Teoría de números.
INDUCCIÓN: NÚMEROS
NATURALES, SUCESSIONES**

LOS NÚMEROS NATURALES

¿Sabías qué...?



Los números naturales surgieron por la necesidad de contar...

Realicemos las siguientes actividades:

1. Enlista de manera ordenada los primeros 10 números naturales.
2. ¿Cuál consideras que es el primer número natural?
3. ¿Cuál es el número que le sigue a 10? ¿Cómo se obtiene ese número?
4. ¿Para cada número natural será posible encontrar otro número que le siga?
5. ¿Cuántos números naturales hay entre el número 3 y el 7? ¿Será posible que existan números naturales entre el 2 y el 3?

Nota:

El conjunto de los números naturales tiene un primer elemento que es el **0**, pero no tiene último elemento.

La notación que generalmente se emplea para representar el conjunto de números naturales es:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$$

Algunas propiedades importantes son:

1. El cero es el primer elemento del conjunto de los Naturales.
2. El sucesor de un número natural es otro número natural.
3. Todo número natural tiene su sucesor.
4. El primer elemento no es sucesor de ningún natural.
5. Si se tienen dos números naturales y sus sucesores son iguales, entonces estos dos números son iguales.

¿Podríamos establecer una expresión matemática para los axiomas 3 y 5?

**¿Qué es una sucesión?**

Una **sucesión** es un conjunto de elementos (generalmente números), denominados términos los cuales están dispuestos uno detrás de otro, con un cierto orden el cual es determinado por un patrón o regla de formación.

El término que ocupa la posición siguiente con respecto a un término en la sucesión se le llama sucesor y este es único; mientras que el que está en la posición anterior se le denomina antecesor.

De manera general, una sucesión se suele representar de la siguiente forma:

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots$$

donde:

- a_1, a_2, a_3, \dots son términos de la sucesión.
- El subíndice de cada término son números naturales (0, 1, 2, 3, ...) e indica la posición que ocupa el término en la sucesión.
- a_n recibe el nombre de término general o término n-ésimo.

- a_n es antecesor de a_{n+1} ; a_n es sucesor de a_{n-1} .

Ejemplo: Sucesión de los números Naturales

Sea la sucesión: **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...**

- 1, 4, 7 son términos de la sucesión
- $a_3 = 2$ en este caso, el término 2 ocupa la posición número 3 en la sucesión.
- 5 es sucesor de 4 y antecesor de 6.

Observe que:

$$a_0 = 0, a_1 = a_0 + 1 = 1, a_2 = a_1 + 1 = 2$$

¿Cuál es la regla de formación para los términos a_4 , a_5 y a_6 ?

Notemos que el patrón que sigue la sucesión es:

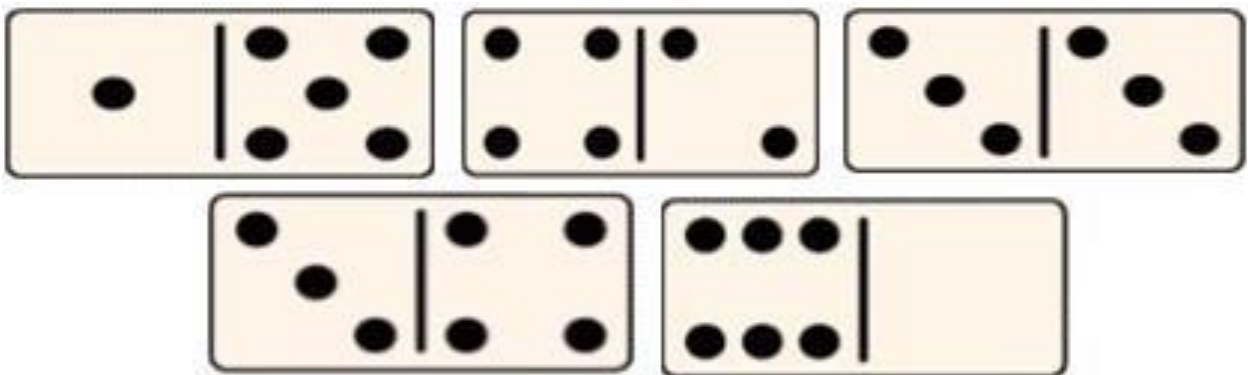
$a_n = a_{n-1} + 1$ con $a_0 = 0$, Siendo n la posición **n-ésima** de la sucesión.



ACTIVIDADES

1. ¿Cuál es el intruso?

Observa las fichas y ordénalas de manera que la parte superior de la ficha vaya de forma ascendente y la parte inferior de forma descendente.



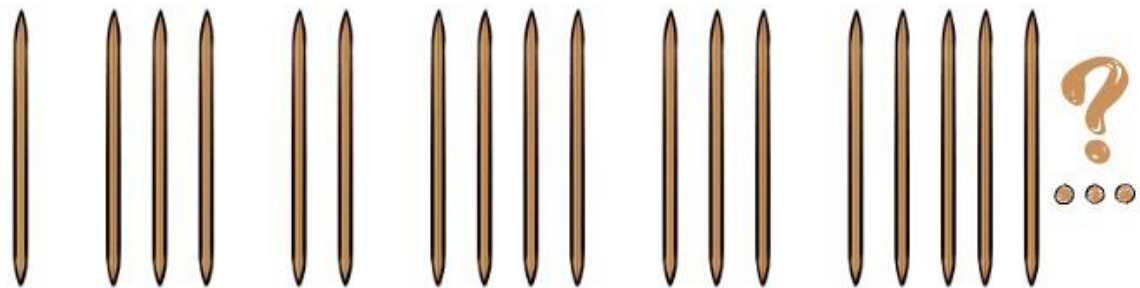
¿Cuál ficha considera que no pertenece a la sucesión? Explica tu elección.

Sabiendo que la parte superior muestra el término a_n de la sucesión ¿Cuál número le corresponde al término a_0, a_1, a_2 y a_3 ?

2. Sucesores y regla de formación

Objetivo: Encontrar el patrón y expresarlo matemáticamente.

Ordenar los palillos como muestra la imagen.



Descubra:

- ¿Cuántos palillos corresponden a los términos a_0, a_1, a_2, a_3 ?
- Podríamos saber cuántos palillos corresponden a los términos a_6, a_7 y a_8 ?
Justifica tu respuesta.
- Plantee una regla de formación.



2.2. Sucesión de números cuadrados

Escoger cualquier pieza entregada (unidad) luego agregar el menor número de piezas para formar un cuadrado y así sucesivamente formando cuadrados hasta agotar las fichas entregadas.



Durante la actividad ir llenando el siguiente recuadro:

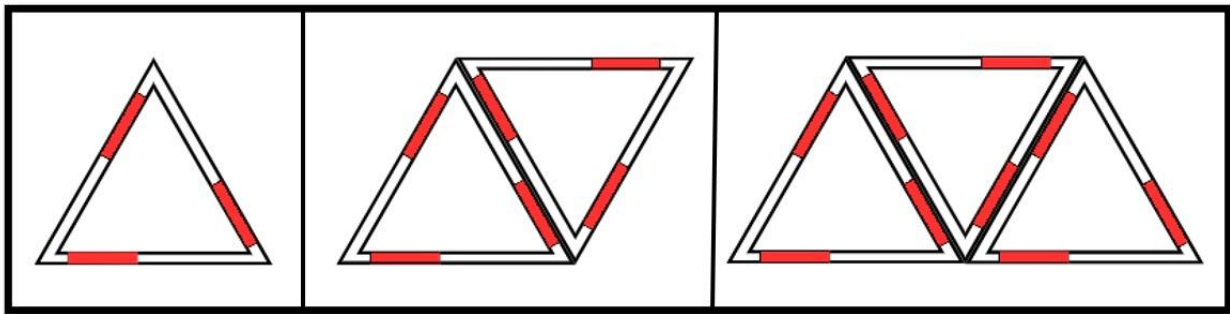
Núm. De Pasos	1	2	3	4	5
Núm. Fichas agregadas	0				
Núm. Total de fichas usadas	1				

Responder:

- ¿Cuántas fichas agregadas y usadas se necesitarán en los pasos 6 y 9?
- Escriban la sucesión que se forma con el número de fichas agregadas.
- Escriban la sucesión que se forma con el número total de fichas usadas.
- ¿Por qué consideran que se llaman números cuadrados a los términos de la sucesión formada con el número total de fichas usadas?
- ¿Qué patrón se pueden asociar a la sucesión que se forma con el número total de fichas usadas?

2.3. El joyero.

Para la elaboración de unas pulseras, el joyero ha creado varias piezas y las ha organizado siguiendo un patrón, como se muestra en la imagen.



Con la información anterior, llena la tabla:

Posición	1	2	3
Núm. triángulos			
Núm. Rectángulos			

Ahora realiza:

- Escriba numéricamente una sucesión para el número de triángulos y otra para el número de rectángulos; ambas sucesiones hasta el término a_{10} .
- Escriba el patrón que identifica la sucesión de números de triángulos.
- Escriba el patrón que identifica la sucesión de números de rectángulos.

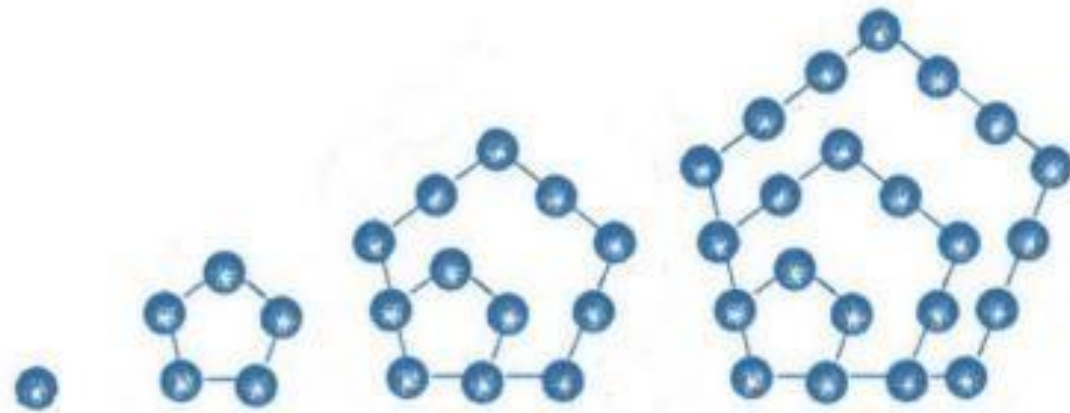
2.4. Sucesión números pentagonales (Actividad en parejas)

Van a participar de un juego a través del cual se forman pentágonos comenzando con la figura geométrica punto.

Dibujar un punto en un papel. Este representa el primer número pentagonal que es el **1**. Al lado del punto dibujar un pentágono (figura geométrica de cinco lados iguales), la cantidad de vértices representan al segundo número pentagonal, que es el **5**. Luego, extender en una unidad dos lados consecutivos del pentágono para formar otro pentágono. El pentágono formado tiene tres puntos en cada lado. La cantidad de puntos en los lados del pentágono

identifica al próximo número pentagonal, que es el _____. (Observen el diagrama).

A continuación, tienen un diagrama en el que se representan números pentagonales.



Responder:

- ¿Cuál es el tercer y cuarto número pentagonal?
- Observen el diagrama y escriban los números de la sucesión de números pentagonales hasta el término a_8 .
- ¿Existe un patrón entre los números pentagonales? Expliquen.

3. Sucesión de Fibonacci. (Actividad en parejas) Objetivo: identificar la sucesión de Fibonacci.

3.1. Los conejos de Fibonacci...

Se presenta aquí el problema de los conejos de Fibonacci que fue propuesto en el año 1202, el cual dice que:

Partiendo de una pareja de conejos bebés en una granja, cuántas parejas de conejos obtendremos después de un número dado de meses sabiendo que cada pareja al mes tiene una nueva pareja de bebés, la cual no tendrá conejos hasta que sea adulta, lo que ocurre a los dos meses de nacer.

Analícemos la imagen...



Respondamos lo siguiente:

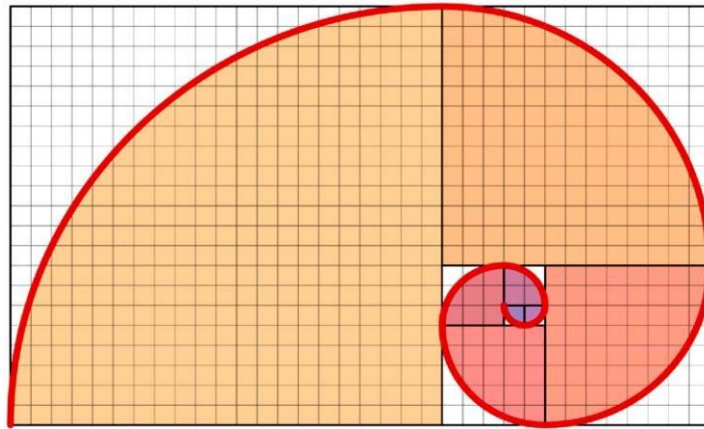
¿Cuál es el término a_6 de la sucesión? Este término ¿qué representa?

¿Cuántas parejas de conejos habrá en la granja a los **12** meses?

3.2. Espiral de Fibonacci

Objetivo: asociar una sucesión geométrica a una sucesión numérica.

En parejas: construir dos cuadrados de lado 1, que tengan un lado en común. Sobre ellos, construyan uno de lado 2; a continuación, otro que tenga por lado la suma de este último con el anterior. Podemos continuar agregando cuadrados de tal forma que cada uno tenga por lado la suma de los lados de los dos últimos cuadrados dibujados (agrega por lo menos cuatro más).



Durante la actividad ir llenando la tabla siguiente:

Número del Cuadrado	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Tamaño del lado del cuadrado	$1U$	$1U$	$2U$	$3U$					
Área del cuadrado	$1U^2$	$1U^2$							

Observación: A este conjunto de cuadrados los llamaremos cuadrados de Fibonacci.


Realizar:

- Escriban una sucesión con el número de lados, hasta el término a_{10} ; esos serán los primeros 10 términos de la sucesión de Fibonacci.
- ¿Qué patrón numérico se asocia a los lados de los cuadrados?
- Tracen una curva como se muestra en la figura. Podrías relacionar la curva con objetos de la naturaleza.
- ¿En qué se parece el problema de los conejos con los cuadrados de Fibonacci?

4. Actividad lúdica (En parejas)

Objetivo: lograr la habilidad para interpretar y hallar el patrón en una sucesión.

- Usar la tabla de bingo semejante a la que se muestra en la imagen, la cual tiene en cada fila una sucesión numérica.

				
a_0	$a_1 = a_0 + 2$	$a_2 = a_1 + 2$	$a_3 = a_2 + 2$	$a_4 = a_3 + 2$
b_0	$b_1 = 2b_0$	$b_2 = 2b_1$	$b_3 = 2b_2$	$b_4 = 2b_3$
c_0	$c_1 = c_0 + 7$	$c_2 = c_1 + 7$	$c_3 = c_2 + 7$	$c_4 = c_3 + 7$
d_0	$d_1 = 3d_0$	$d_2 = 3d_1$	$d_3 = 3d_2$	$d_4 = d_3$

2. Pensar en un número entre el 5 y el 9, luego reemplazarlo en a_0 y c_0 . Después, pensar en un número entre el 1 y 4, reemplazarlo en b_0 y d_0 . Posteriormente, completar la tabla.
3. Una vez completada la tabla, identifica la fórmula de la sucesión correspondiente a cada fila.

Y ahora sí, a jugar nuestro

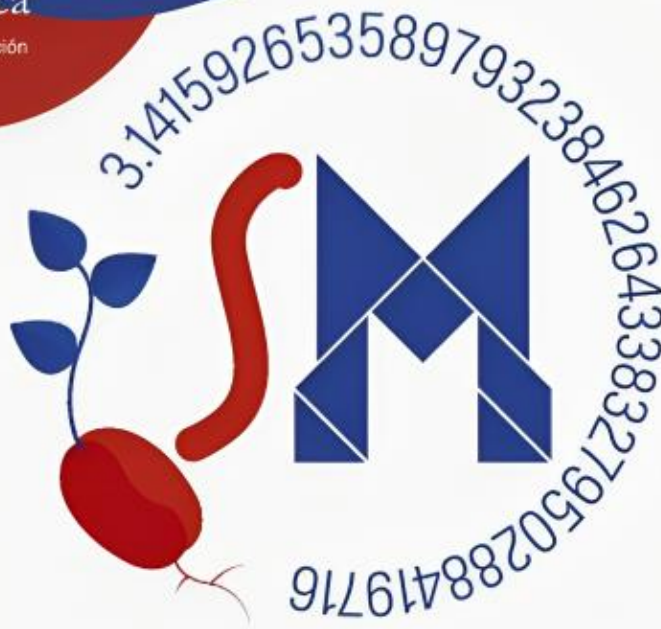




Universidad
del Cauca

Vigilada Mineducación

FACNED
Centro de Regionalización



Semillero

MATEMÁTICAS

GUÍA N°2
TEORÍA DE NÚMEROS:
SUCESIONES ARITMÉTICAS Y
SUCESIONES GEOMÉTRICAS



En la guía anterior se trabajó con sucesiones de números naturales, ahora se trabajará sobre la suma de sucesiones del conjunto de los números naturales

SUCESIONES ARITMÉTICAS

Una sucesión es aritmética cuando cada término se obtiene sumando un número al término que le precede. Este se denomina diferencia y se denota por **d** y es constante. Cada uno de los términos se representa con **a_n** que indica la posición de cada término y la fórmula del término general está dada por:

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

Por ejemplo:

Calculemos el décimo término de la sucesión de los pares.

Como el primer término es **$a_1 = 2$** y la diferencia es **$d = 2$** , el término que ocupa la décima posición es:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + d(n - 1) \\ a_{10} &= 2 + 2(10 - 1) \\ a_{10} &= 2 + 2(9) \\ a_{10} &= 20 \end{aligned}$$



Podemos calcular de manera análoga otros términos de esta sucesión a partir de su término general:

$$a_n = 2 + 2(n - 1)$$

$$a_n = 2 + 2n - 2$$

$$a_n = 2n$$

Encontremos el noveno término de la sucesión:

5, 8, 11, 14, ...

$$a_9 = 5 + 3(9 - 1)$$

$$a_9 = 5 + 3(8)$$

$$a_9 = 5 + 24$$

$$a_9 = 29$$

Suma de sucesiones aritméticas

Conociendo el primer término y el término n -ésimo de la sucesión, podemos calcular la suma de los n primeros términos con la fórmula:

$$S_n = \frac{n * (a_1 + a_n)}{2}$$

Por ejemplo:

Calculemos la suma de los 5 primeros términos de la sucesión de los pares:

Sin aplicar la fórmula:

$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

$$S_5 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10$$

$$S_5 = 30$$

Aplicando la fórmula:

$$S_5 = \frac{5 \times (a_1 + a_5)}{2}$$



$$S_5 = \frac{5 \times (2 + 10)}{2}$$

$$S_5 = \frac{5 \times (12)}{2}$$

$$S_5 = \frac{60}{2}$$

$$S_5 = 30$$

ACTIVIDADES

1. Observa la siguiente sucesión y determina su respectiva suma.



Los números impares forman la sucesión: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...

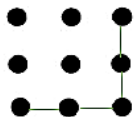
Esta sucesión es una sucesión aritmética, con diferencia $d = 2$, que tiene por término general: $a_n = 2n - 1$, siendo n un número natural.

Observa lo que se obtiene al realizar la suma aritmética de esta sucesión y completa

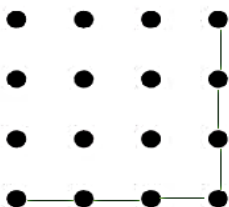
- $S_1 = a_1 = 1$



$$S_2 = a_1 + a_2 = 1$$



$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 +$$

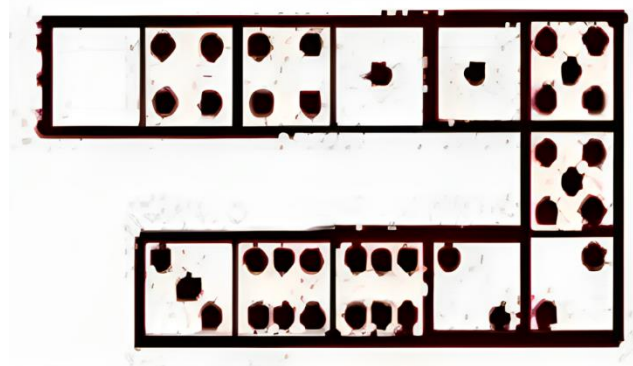


$$S_4 =$$

ACTIVIDADES

Objetivo: Identifica los elementos de una sucesión aritmética y calcula la suma.

1. ¿Cuál es el término de la anterior sucesión s_4 ?
2. ¿Cuál es el término s_n ?
3. Para n términos, ¿qué figura geométrica se obtiene?
4. Cada estudiante con el juego de dominó buscará organizar 6 fichas de tal modo que logren representar una suma aritmética como se muestra en la figura. Este ejemplo cuenta con la particularidad de que la suma total de puntos de cada ficha aumenta sucesivamente en una unidad.



5.
 - a) Organizar sucesiones aritméticas en las que la diferencia sea 1.
 - b) Organizar sucesiones aritméticas en las que la diferencia sea 2.
 - c) ¿Cuántas sucesiones aritméticas a base de 6 fichas se puede formar?
 - d) Calcular la suma de las sucesiones aritméticas encontradas en los ítems a) y b).



SUCESIONES GEOMÉTRICAS

Una sucesión geométrica (o progresión geométrica) es una sucesión en la que cada término a_n se obtiene multiplicando al término anterior a_{n-1} por un número r llamado **razón**. La razón de una sucesión geométrica debe ser constante en toda la sucesión.

a_n indica la posición de cada término y la fórmula del término general está dada por:

$$a_n = a_1 * r^{n-1}$$

El término general permite calcular cualquier término de la sucesión sin necesidad de calcular los anteriores.

Por ejemplo:

Calculemos el término general de la siguiente progresión geométrica:

$$a_1 = 8$$

$$a_2 = 24$$

$$a_3 = 72$$

$$a_4 = 216$$

...

La razón de la sucesión es $r = 3$ ya que:

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{24}{8} = 3$$

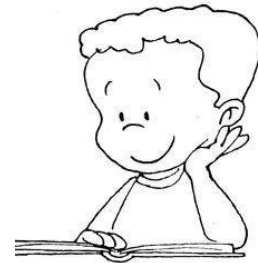
$$r = \frac{a_3}{a_2} = \frac{72}{24} = 3$$

$$r = \frac{a_4}{a_3} = \frac{216}{72} = 3$$

El término general de la sucesión es:

$$a_n = a_1 * r^{n-1}$$

$$a_n = 8 * 3^{n-1}$$



Ahora calcula el término general de la siguiente sucesión geométrica:

3, 15, 75, 375, 1875, ...

La razón de la sucesión es: . Justifica tu respuesta



El término general de la sucesión es:

Suma de sucesiones geométricas

Para sumar los primeros n términos de una progresión geométrica, se tiene la siguiente fórmula:

$$S_n = a_1 \left(\frac{r^n - 1}{r - 1} \right)$$

Ejemplo:

Suma los primeros 5 términos de la sucesión geométrica anterior:

$$S_n = a_1 \left(\frac{r^n - 1}{r - 1} \right)$$

$$S_5 = 3 \left(\frac{5^5 - 1}{5 - 1} \right)$$

$$S_5 = 3 \left(\frac{3125 - 1}{5 - 1} \right)$$

$$S_5 = 3 \left(\frac{3124}{4} \right)$$

$$S_5 = 3(781)$$

$$S_5 = 2343$$

ACTIVIDAD 1

Objetivo: Identificar los elementos de una sucesión geométrica y su velocidad de crecimiento.

1. Determinar la razón de las siguientes progresiones geométricas:

- a) 4, 12, 36, 108 ...
- b) 4, 20, 100, 500 ...
- c) 5, 10, 20, 40 ...

2. ¿Cuál de las siguientes sucesiones **no** es geométrica? ¿por qué?

- a) 1, 3, 9, 27 ...
- b) 1, -1, 1, -1 ...
- c) 2, 0, 2, 0 ...

3. Calcular el término general de las siguientes progresiones geométricas:

- a) 2, 8, 32, 128 ...
- b) $a_1 = 2, r = 6$
- c) $a_1 = -3, a_2 = -6$

4. A cada estudiante se le entregarán 3 palillos en donde al cabo de 2 minutos deben pegar 3 palillos en cada una de las puntas de los palillos anteriores. Así sí sucesivamente cada 2 minutos.



- a) ¿Cuántos palillos se pegaron al cabo de 6 minutos?
- b) ¿Cuál es el término inicial y cuál es la razón de la sucesión geométrica?
- c) Identifica la fórmula del término general de la sucesión geométrica.

ACTIVIDAD 2

Objetivo: Identificar los términos de la sucesión geométrica a partir de la resolución de problemas en contextos reales.

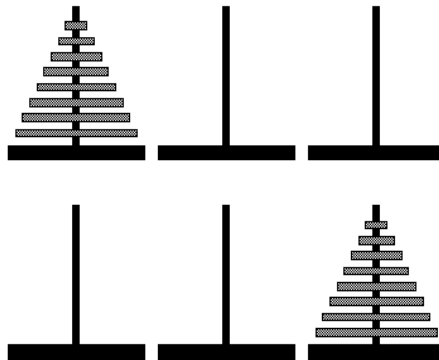
Un secreto a voces

A Luis y Aurora les han contado un secreto a las 9 de la mañana con la advertencia de no contárselo a nadie. Al cabo de un cuarto de hora cada uno de ellos solo se lo ha contado a tres amigos, eso sí de absoluta confianza, que al cabo de un cuarto de hora se lo cuentan a otros tres y así sucesivamente cada cuarto de hora

- ¿Cuánta gente se enteró del secreto a las once de la mañana?
- ¿Cuál es el término inicial y cuál es la razón de la sucesión geométrica?
- Identifica la fórmula del término general de la sucesión geométrica.

Las Torres de Hanoi

El número de movimientos de este juego está en función del número de discos (n). Se trata de una sucesión cuyo término general es $a_n = 2^n - 1$.



Resolver:

- Encontrar los primeros 6 términos de la sucesión geométrica.
- Con una Torre de Hanoi ¿Cuánto tiempo se tardaría en completar el juego utilizando 4 discos? Suponiendo 1 segundo por cada movimiento.
- Calcular la suma finita de términos consecutivos de la sucesión geométrica.



Universidad
del Cauca

Vigilada Mineducación

FACNE

Semillero **MAT3MATICAS**

GUIA 3:
ALGORITMO DE LA DIVISIÓN

Semillero MAT3MATICAS – Algoritmo de la División

¿Sabías que...?



INTRODUCCIÓN

En esta guía trabajaremos con un tema aritmético conocido por todos nosotros que se denomina: **División**.

Para comenzar realiza las siguientes divisiones:

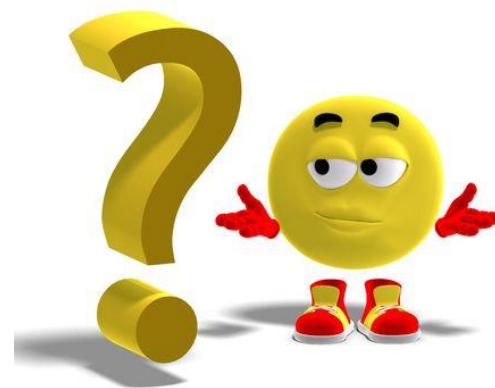
2	6	4	5	6	8				

4	6	3	2	4	2	4			

Recordemos

De lo resuelto anteriormente recuerda y responde:

- El número que se dividió: _____
- El número que divide: _____
- El resultado que obtuvo: _____
- El resultado que sobra: _____



Analiza: Cómo se puede expresar las anteriores divisiones en términos de multiplicación y suma.

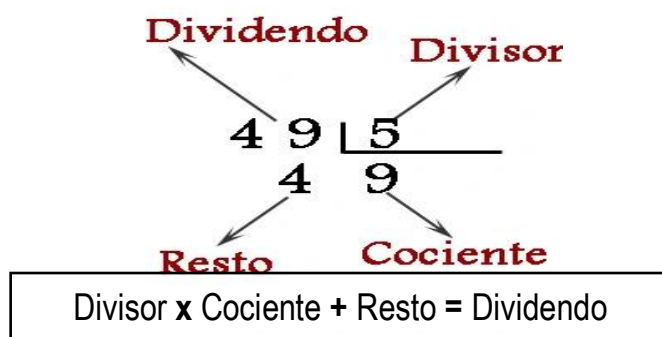
El procedimiento utilizado para dar solución a las divisiones con números naturales se le denomina: **ALGORITMO DE LA DIVISIÓN**

Semillero MAT3MATICAS – Algoritmo de la División

Lo que nos permite hacer el *algoritmo de la división* es saber cuántas veces cabe un natural en otro. En general, si hacemos la división de dos números naturales a y b , siendo $a > b$ y $b \neq 0$, es decir, $a \div b$; $b \neq 0$, vamos a poder escribir $a = (b * q) + r$ y esto querrá decir que b cabe q veces en a y sobran r .

De lo anterior, cada número (a , b , q y r) reciben un nombre, los cuales son:

- Al número a se le llama dividendo
- Al número b se le llama divisor
- Al número q se le llama cociente
- Al número r se le llama residuo



Cuando $r = 0$ ¿la división se llama? Respuesta:

Cuando $r \neq 0$ ¿la división se llama? Respuesta:

NOTA: Se dice que a es divisible entre b o b es divisor de a cuando $r = 0$, lo que indica que existe un número q en los naturales tal que $a = b * q$ y se denota $b | a$ (b es divisor de a), caso contrario $b \nmid a$ (b no es divisor de a).

Ejemplo: Hallemos el resultado de dividir 47 entre 3, es decir, encontremos los números q y r tales que $47 = 3 * q + r$.

En este caso $q = 15$ y $r = 2$, identificando cada término se tiene así:

$$q = 15$$

$$r = 2$$

$$\text{Por lo tanto, } 47 = 3 * 15 + 2$$

Semillero MAT3MATICAS – Algoritmo de la División

- El dividendo: 47
- El divisor: 3
- El cociente: 15
- El resto: 2

Además, la división, por tener resto diferente de 0 es *inexacta*

Actividad 1: Practicando aprendo

- a) Como en el ejemplo anterior, resuelve las siguientes divisiones e identifica los valores de a, b, q y r, y expresarlas de la forma $a=b*q+r$.

$$2023 \overline{) 25}$$

$$8905 \overline{) 13}$$

- b) Explique la siguiente division indicando si está bien realizada

$$\begin{array}{r} 415 \overline{) 12} \\ 055 \\ \hline 9 \end{array}$$

- c) Convierte la siguiente multiplicacion en una división.

$$\begin{array}{r} 246 \\ \times 12 \\ \hline 492 \\ 246 \\ \hline 2952 \end{array}$$

Semillero MAT3MATICAS – Algoritmo de la División

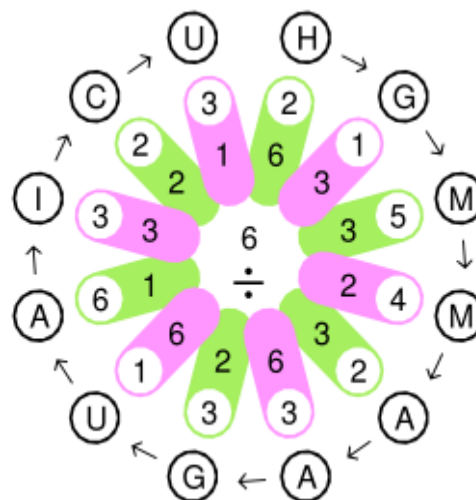
ACTIVIDAD 2: DIVIDADOS

Lanza el dado 3 veces para encontrar los dígitos del DIVIDENDO, luego lanza 2 veces para encontrar los dígitos del DIVISOR, por último, resuelve y halla el COCIENTE (q) y el RESIDUO (r)

5	3	1	2	3	q=
					r=
					q=
					r=
					q=
					r=
					q=
					r=

ACTIVIDAD 3: (en parejas) DESCUBRE EL MENSAJE

- a) Tachen las letras donde el cociente no corresponda al resultado de la división y por último anota la palabra secreta que resulta al unir las letras de las divisiones correctas.



Semillero MAT3MATICAS – Algoritmo de la División

b) Resuelve, en tu cuaderno, cada una de las siguientes divisiones, seguidamente asocia cada resultado con la palabra correspondiente y descubre el mensaje.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
8	1	17	37	7	5	11	23	4	30	14	3	12

N	Ñ	O	P	Q	R	S	T
15	21	9	16	13	67	40	25

U	V	W	X	Y	Z
50	10	18	41	22	2



Nota: Las letras corresponden al cociente y las vocales corresponden al resto.

1. $4420 \div 368 =$

2. $480 \div 12 =$

3. $3175 \div 96 =$

4. $464 \div 38 =$

5. $3727 \div 93 =$

6. $8542 \div 502 =$

7. $1232 \div 49 =$

8. $3560 \div 53 =$

9. $259 \div 21 =$

10. $3479 \div 139 =$

11. $7999 \div 216 =$

Mensaje: _____

 _____.





Semillero MAT3MATICAS – Algoritmo de la División

ACTIVIDAD 4: Sálvate Primero

OBJETIVO: Integrar y aplicar el algoritmo de la división.

Se forman grupos de 4 y lanzarán un dado, el número mayor inicia. El estudiante que sacó el número mayor vuelve y lanza el dado y el resultado será el número de casillas que deberá recorrer; tendrá 30 segundos para responder, si responde bien avanza a la casilla, de lo contrario deberá regresar a la casilla de salida y esperar su turno mientras sus otros compañeros realizan el juego con las mismas reglas. Ganará quien logre llegar primero a la casilla de llegada.

	<p>1. Di un número divisible entre 6 y avanza al 3.</p>	<p>Menciona los términos de la división (4) y avanza a 4.</p>	<p>Encuentra el divisor de esta división: $30 \div _ = 6$ y avanza al 5</p>
<p>Dí 3 números divisibles entre 4</p>	<p>De los siguientes números: 89, 49, 35, 16 ¿cuáles son divisibles entre 7?</p>	<p>Si $350 \div 7 = 50$ ¿cuál es el producto de 50×7? Avanza al 8.</p>	<p>Explica con tus palabras qué es la división.</p>
<p>Realiza un problema de división con las siguientes cantidades: 49 y 7</p>	<p>Encuentra el dividendo de la siguiente división: $_ \div 7 = 6$</p>	<p>Por último, realiza la siguiente división: $63 \div 9$</p>	



Universidad
del Cauca

Vigilada Mineducación

FACNED

Semillero **MAT3MAT1CAS**

**Guía 4 Teoría de Números
CLASES RESIDUALES**

Semillero MAT3MAT1CAS –Sucesiones Números Naturales

INTRODUCCIÓN

Hagamos un truco...

Piensa un número de tres cifras. Por ejemplo, 123. Copia ese número detrás de sí mismo, para obtener con eso un número de seis cifras. A mí me queda 123123. Mi número está amañado para que me salga el truco, pero el tuyo no tiene por qué estarlo, aún no sabes qué te voy a decir que hagas con él.

Ahora divide ese número de seis cifras por 13. Yo también voy a hacerlo, y el cociente ha sido 9471. Qué curioso, la división ha salido exacta. Pues vamos a aprovecharlo. Seguro que a ti también te ha salido exacta.

Puedo verlo. Así que ahora divide ese cociente por... vamos a ver... vale, ya lo sé. Divídelo por 7

Yo también dividiré mi 9471 por 7. Me sale 1353. Vaya, y otra vez la división exacta.

Es más, estoy convencida de que a ti también te ha salido exacta. ¿Probamos a dividir por un número más? Esta vez vamos a dividir el cociente obtenido por... hm... déjame concentrarme en tu número... Sí, ya lo veo claro. Vamos a dividir ese cociente por 11. Es más, antes de que hagas la división, te voy a decir el resultado. Te va a salir el número que has pensado al principio.

Voy a ver qué sucede con el mío. Divido 1353 entre 11 y obtengo... ¡123! ¡El número que he elegido al principio! ¿Sorprendido? Pues eso no es todo

Ahora invierte el número de seis cifras. En mi caso quedaría 321321. Voy a decirte algo que te va a sorprender más aún: ese número que queda al invertir también es un múltiplo exacto de 13. Y de 7. Y de 11. En este punto podría decir que he leído tu mente y he sabido, tras un rápido cálculo mental, que entre sus divisores estaban el 13, el 7 y el 11.

Es más, podría decir incluso que he intervenido en tus pensamientos para que eligieras un número de manera que, al darle la vuelta, también saliera múltiplo de 13, 7 y 11. Pero no voy a hacerlo. En lugar de eso, voy a explicarte el truco (Luque, 2005).



Semillero MAT3MAT1CAS –Sucesiones Números Naturales

OPERADOR MÓDULO

¡Recordemos !

Al dividir a y b números naturales con $a > b$ y $b \neq 0$ existen números naturales q y r tales que:

$$a = b * q + r, \text{ donde } q \text{ es el cociente y } r \text{ es el residuo; con } 0 \leq r < b$$

En esta sección nos centraremos en conocer cuál es el residuo al dividir a entre b . Para ello hay un operador llamado el **operador módulo** (abreviado como **mod**).

En otras palabras: $a \bmod b = r$, esto lo podemos leer como “ a módulo b es igual a r ”.

Ejemplo

Sí $13 = 5 * 2 + 3$, entonces se tiene que: $13 \bmod 5 = 3$.



Congruencia

Ahora, para poder entender esta sección, vamos a realizar las siguientes divisiones:

1. $8 \div 2 = \square$ su residuo es: \square 4. $18 \div 2 = \square$ su residuo es: \square
2. $9 \div 2 = \square$ su residuo es: \square 5. $19 \div 2 = \square$ su residuo es: \square
3. $15 \div 2 = \square$ su residuo es: \square 6. $32 \div 2 = \square$ su residuo es: \square

- a) Identifique, como en el ejemplo anterior, el módulo que tienen las anteriores divisiones.
- b) ¿Qué números tienen el mismo residuo?

Nota: A los números que tienen el mismo residuo e igual módulo se les denomina congruentes.

- c) ¿Qué números son congruentes, según las divisiones realizadas?

Semillero MAT3MAT1CAS –Sucesiones Números Naturales

Nota: A cada conjunto formado por los números congruentes $\text{mod } (3)$ se le denomina, clase residual $\text{mod } (3)$ y por lo general cada conjunto se representa por el menor número natural.

4. ¿Cuántas clases residuales encontró?
5. ¿Cuál es el menor número natural de cada clase residual?
6. ¿Encuentra algo común en las preguntas 1 y 2?

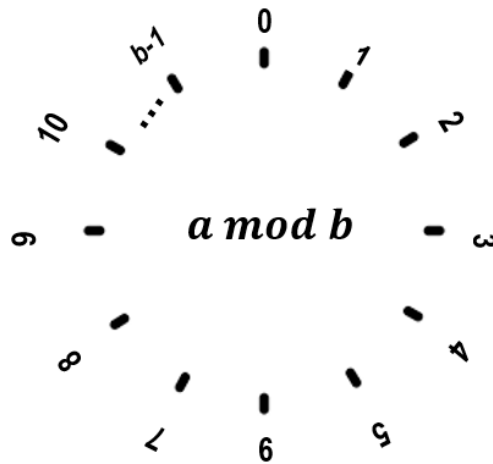
Actividad 1: (EN PAREJAS)

1.1 Reloj modular

Objetivo: Identificar el residuo de una división con el operador módulo

Elijan dos números (a y b) donde a es el número por modular y b el módulo, construyan un reloj para encontrar $a \text{ mod } (b)$ con las siguientes indicaciones:

1. Hallar $a \text{ mod } (b)$ con los números que escogieron.
2. Ahora, dibujen un círculo y en la parte superior ubiquen el número 0 y continuando en sentido de las manecillas del reloj escriba los números naturales 1, 2, 3, ... hasta un número menos que el módulo, de tal manera que la distancia sea igual entre cada número, como lo muestra la figura.



3. Ubíquense en el número cero y muévanse punto a punto tantas veces indique a .
4. Comparen la posición en la que cayó a y el resultado del módulo encontrado en el punto 1.
5. Escojan otros 5 valores para a y modúlenlos con el anterior valor de b , con ayuda del reloj.

Semillero MAT3MAT1CAS –Sucesiones Números Naturales

Actividad 2: (EN PAREJAS)

Objetivo: Identificar números congruentes según su módulo.

2.1

En parejas establecer que números son congruentes según el módulo que indique la tabla:

7	20	35	47	72
12	16	42	42	61
1	19	mod (5)	60	74
5	29	39	51	68
13	18	44	58	70

14	17	31	50	69
9	28	44	48	72
2	19	mod (3)	59	62
11	26	37	52	73
6	16	41	49	66

4	19	32	55	75
15	16	41	46	65
3	28	mod (4)	59	72
6	5	33	47	67
12	25	42	56	69

5	17	43	47	74
14	21	36	42	67
4	18	mod (7)	60	72
11	22	41	51	63
7	27	48	54	70

Semillero MAT3MAT1CAS –Sucesiones Números Naturales

2.2

Relacione la columna de módulos con sus respectivos conjuntos de números congruentes:

Módulos

Números congruentes

mód. (5)

{0, 4, 8, 12, 16, 20, ..., 40, 44}

{3, 7, 11, 15, 19, 23, ...}

{1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, ...}

{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 ...}

mód (11)

{0, 3, 6, 9, ..., 27, 30, 33}

{9, 20, 31, 42, 53, 64, 75, ...}

mód (2)

{2, 5, 8, 11, 14, ..., 29, 32, 35}

mód (4)

{1, 4, 7, 10, 13, 16, ...}

{0, 2, 4, 6, 8, 10, ...}

mód (3)

{4, 9, 14, 19, 24, ..., 54, 59}

{1, 12, 23, 34, 45, 56, ..., 111, 122, 133}

Semillero MAT3MAT1CAS –Sucesiones Números Naturales

Actividad 3: Tablas de suma y multiplicación modular

Objetivo: Sumar y multiplicar modulando.

1. Escribe las tablas de suma y multiplicación módulo 5.

+	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

×	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

2. Completa la tabla de la suma y multiplicación módulo 6.

+	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						

×	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						

Responde:

- a) ¿Identificas alguna propiedad curiosa en las tablas de suma y multiplicación módulo 5 y 6?
- b) ¿Completando solo las 2 primeras filas podrías completar el resto de la tabla?

Semillero MAT3MAT1CAS –Sucesiones Números Naturales

Actividad 4 (Grupos de 4 estudiantes)

Cubre el valor modular.

Objetivo: Identificar valores modulares con operaciones.

Para esta actividad contaremos con la caja matemática, un dado octaedro y dados tradicionales.

Jugaremos, en primer lugar, con la suma en los enteros positivos. El jugador debe lanzar los dados, y el valor que obtenga en ambos se suman, dicha cantidad la transfiere a las fichas volteando el mismo valor numérico, haciendo combinaciones entre ellas y poniéndolas cara abajo, este procedimiento se repite hasta que no sea posible voltear más fichas, es decir, que no exista una configuración posible en las fichas que permitan una correspondencia numérica con la cantidad obtenida en los dados.

En la imagen tienes un ejemplo:



Ahora, Para el desarrollo del juego considerando operaciones modulares, dispondremos de la caja matemática, un dado con forma de octaedro con caras enumeradas desde 2 hasta 9, y 3 dados tradicionales, el dado (octaedro) será utilizado para definir el módulo y los otros 3 para configurar la suma que permitirá realizar la operación y definir la cantidad numérica que debe ser volteada en las fichas.

Para saber la cantidad numérica que se debe voltear en un lanzamiento determinado, se debe resolver la congruencia $a \equiv c \pmod{b}$, donde a es la suma de los valores obtenidos en los 3 dados, b es el valor obtenido en el dado (octaedro) y c es el mayor número entero, menor que a , tal que x satisfaga la congruencia. El valor obtenido en c será el que se asocie a las fichas que posteriormente deben irse volteando, de la misma manera que se hizo en la primera explicación y representación del juego en el que no se hizo uso de las congruencias modulares.

Semillero MAT3MAT1CAS –Sucesiones Números Naturales

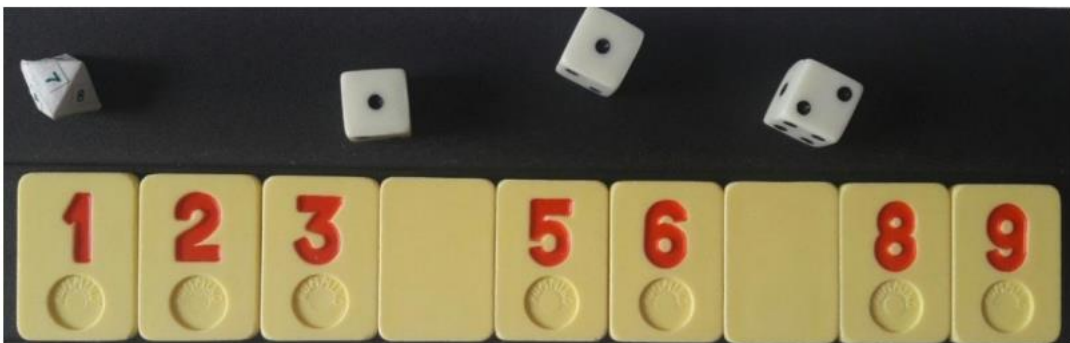
En las siguientes imágenes tienes un ejemplo:



El módulo para esta ronda de lanzamientos (de un jugador) será 7, que es el valor obtenido al lanzar el dado octaedro.



La suma obtenida en los dados es 14, por tanto, la congruencia a resolver es $14 \equiv c \pmod{7}$ y el mayor entero menor que 14 que cumple la congruencia es 7, por esta razón es que la ficha etiquetada con el número 7 fue volteada.



El único valor de c que cumple la congruencia lineal $4 \equiv c \pmod{7}$ bajo las condiciones del juego, luego del lanzamiento es $c=4$.



Universidad
del Cauca

Vigilada Mineducación

FACNED

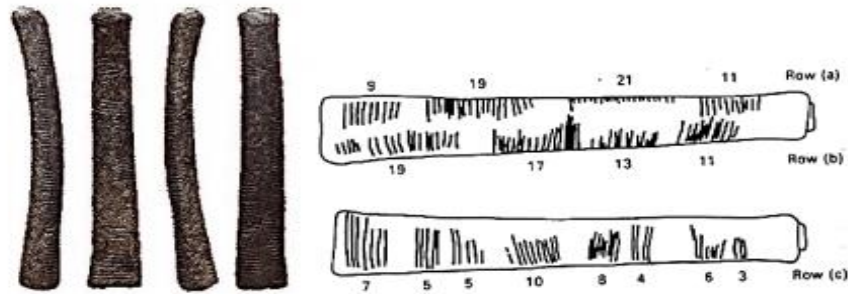
Semillero **MAT3MAT1CAS**

INDUCCIÓN: DIVISIBILIDAD

Semillero MAT3MAT1CAS –Divisibilidad

¿Sabías que...? 🤔

Las civilizaciones antiguas fueron pioneras en realizar descubrimientos y contribuciones significativas al estudio de los números naturales y enteros. El primer indicio sobre la divisibilidad se remonta a la prehistoria. En 1960, el geólogo y explorador belga Jean de Heinzelin encontró el hueso de Ishango cerca de las fuentes del río Nilo, en lo que hoy conocemos como la República Democrática del Congo. Este hueso pertenecía a un babuino y data aproximadamente del año 35,000 a.C. En él se encontraron una serie de marcas que incluyen cuatro números primos aislados, lo que sugiere que los antiguos conocían ciertas propiedades de los números. Tras un examen detenido, se llegó a la conclusión de que este hueso representaba un calendario lunar utilizado por las mujeres de la Edad de Piedra.



Imágenes tomadas de Martín (2011).

En la fila b, se ven los cuatro números primos mencionados.

Los antiguos egipcios desarrollaron conceptos de divisibilidad como respuesta a la necesidad de calcular impuestos basados en el tamaño de las tierras que poseían. Esta necesidad se refleja claramente en dos documentos históricos bien conocidos: el papiro egipcio de Rhind y el papiro de Moscú. Estos antiguos textos proporcionan evidencia de la comprensión de la divisibilidad por parte de los egipcios, ya que los utilizaban para resolver problemas relacionados con la medición de terrenos y otras cuestiones.

Tal como los egipcios, los babilonios también desarrollaron sistemas numéricos, uno decimal y otro sexagesimal. Este último sistema era especialmente útil debido a su facilidad para la subdivisión exacta, ya que 60 es divisible por 2, 3, 6, 12, 15, 20 y 30. La matemática

Semillero MAT3MAT1CAS –Divisibilidad

mesopotámica demostró ser más avanzada que la egipcia, ya que se centraba en soluciones prácticas. Esto ejemplifica cómo las civilizaciones antiguas buscaban simplificar cálculos mediante el uso de números que fueran múltiplos de otros.

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Son **reglas** que sirven para saber si un número entero se puede dividir entre otro sin necesidad de realizar la división, es decir:

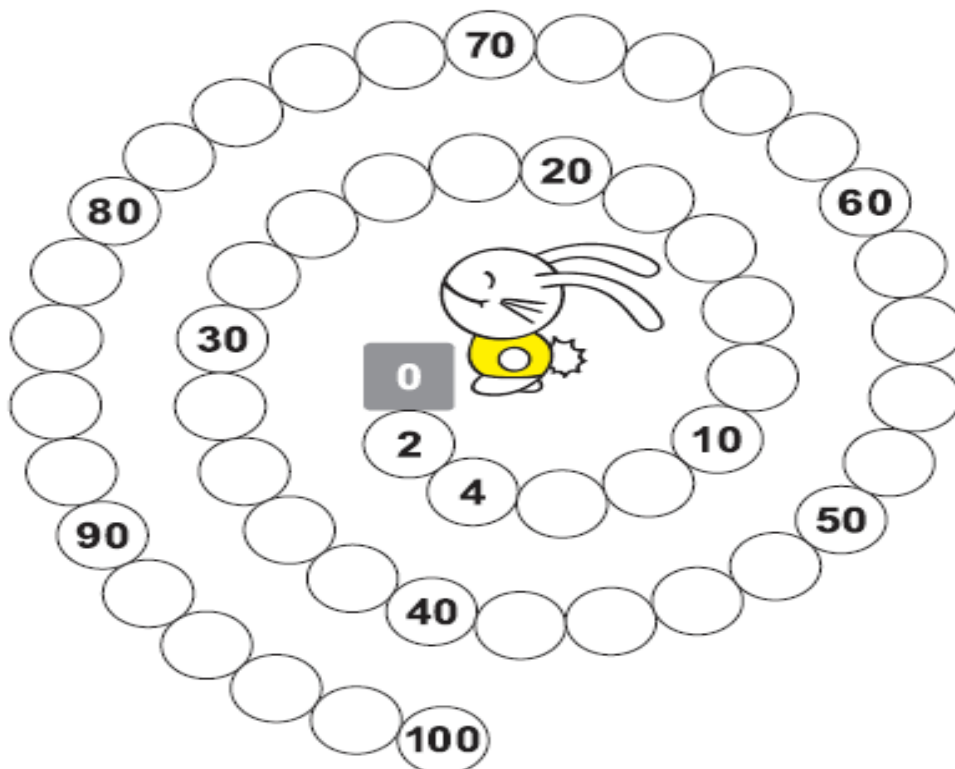
Un número **b** es divisible por otro **a** cuándo la división $b \div a$ es exacta, es decir, resulta un número entero.

Actividad 1.

Objetivo: Reconocer los criterios de divisibilidad

1.1 Criterio de divisibilidad del 2

Teniendo en cuenta las sucesiones, llenar los círculos con los términos correspondientes a la sucesión:



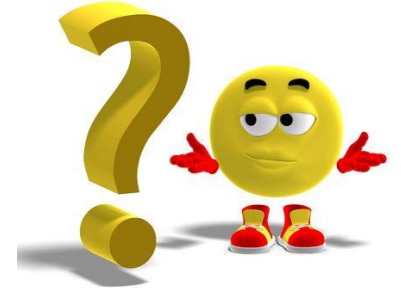
Semillero MAT3MAT1CAS –Divisibilidad

Responde:

1. ¿Encuentras algo en común en la secuencia?
2. ¿Qué característica tiene el último dígito de los términos de la secuencia?
3. Selecciona 10 números de la secuencia y divídelos entre dos.
4. Según el residuo de la división y teniendo en cuenta el algoritmo de la división ¿qué relación encuentra entre: el número seleccionado y el 2?

Un número es divisible por 2 si:

- a) La última cifra es cero o 5.
- b) Al sumar sus cifras el resultado es múltiplo de 3.
- c) Su última cifra es cero o un número par 2, 4, 6, ...



1.2 Criterio de divisibilidad del 3

Complete la tabla de secuencia, donde el término general está dado por: $a_n = 3 \cdot n$

Número del término.	1																		16
Número de la secuencia.																			
Suma de los dígitos de cada término.																			

Observación: en caso de que el resultado de la suma sea un número de dos dígitos estos se sumaran de nuevo.

Según los datos de la tabla anterior responder:

1. ¿Qué propiedad identifica entre: los números de la suma y el número 3?
2. ¿Qué relación existe entre los números de la secuencia y el 3, teniendo en cuenta el residuo?

Selecciona sólo los números que son divisibles por 3

12	16	21	37	42
91	54	86	73	157
45	81	126	98	137

Semillero MAT3MAT1CAS –Divisibilidad

Responde:

¿Será que los números seleccionados, al ser divisibles por 3, se verifica la misma propiedad de los números de la secuencia? Explique.

1.3 Criterio de divisibilidad del 4

1. Enliste una secuencia de **4 en 4** con 10 términos, donde el **primer término sea 4**.
2. ¿Qué relación tienen los números de la secuencia con la tabla de multiplicar del 4?
3. Encuentre y coloree las casillas de los números que son **divisibles entre 4** en la siguiente tabla:

2136	8741	9208	76800
9074	5329	6716	753
432	8400	25438	312
5704	1023	1320	3861

4. Relacione los **dos últimos dígitos** de los números encontrados con los **términos de la secuencia**.
5. Escriba tres números de 5 cifras en donde las **unidades y decenas sean 0** y divídalos entre **4**.

--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--

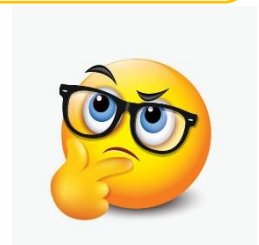
6. Teniendo en cuenta de las divisiones anteriores y su **residuo**, ¿Qué relación existe entre los tres números y el **4**?

1.4 Criterio de divisibilidad del 5

Observa los siguientes números, los cuales son divisibles por 5, propone 5 números más y luego responde:

65	20	35	5	40					
----	----	----	---	----	--	--	--	--	--

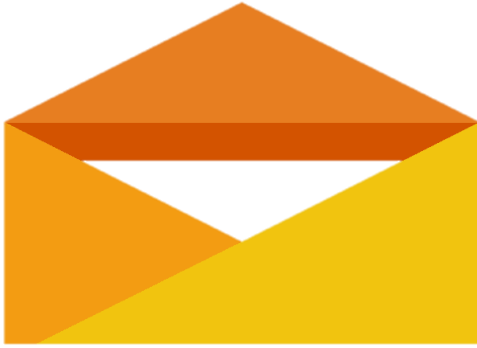
1. ¿Qué tienen en común los números divisibles por 5?
2. ¿Cómo es posible determinar si un número es divisible 5?



Semillero MAT3MAT1CAS –Divisibilidad

1.5 Criterio de Divisibilidad del 10 (En parejas)

se dará a escoger un sobre que contiene varios números, algunos de ellos son divisibles entre 10, respondan:



1. ¿Cuáles son los números divisibles de **10**?
2. ¿Qué observa de la unidad del número divisible entre **10**?

1.6 Criterio de divisibilidad del 11

1. Enlisten los primeros 10 múltiplos de **11**

Primeros 10 múltiplos de 11									
0				44					

2. **Obtengan** 5 números de tres cifras con el lanzamiento de un dado y multiplíquelos por **11**, como se muestra en el ejemplo:



5	4	3	X 11	= 5973

Semillero MAT3MAT1CAS –Divisibilidad

3. Con ayuda del algoritmo de la división, identifiquen el residuo de los productos al dividirlos entre **11**.
4. Según el residuo que identificaron ¿Qué relación hay entre cada uno de los productos y el número **11**?
5. Para cada producto obtenido, hagan lo siguiente:
 - a. sume los números en posiciones pares.
 - b. Sume los números en posiciones impares.
 - c. Reste los resultados obtenidos en la suma
 - d. ¿Qué relación observa con los números enlistados?

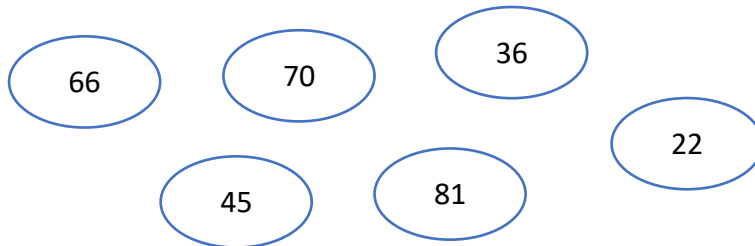
Actividad de resumen:

En grupos de 4, responder basados en las actividades anteriores:

1. ¿Piensan que todo número **terminado en un número par o cero** es divisible entre **2**?
2. Si dado un número y al sumar sus cifras resulta ser múltiplo de **3**, ¿es posible afirmar que ese número es divisible entre **3**?
3. Si tienen un número de tres o más cifras, donde la unidad y la decena son: 00 o múltiplo de 4, ¿Qué pueden concluir de ese número?
4. ¿Cómo pueden identificar que un número es divisible entre **11**?
5. Colorea con azul si es divisible por 2, con verde si es divisible por 3, con amarillo si es divisible por 5, y naranja si es divisible por 11.

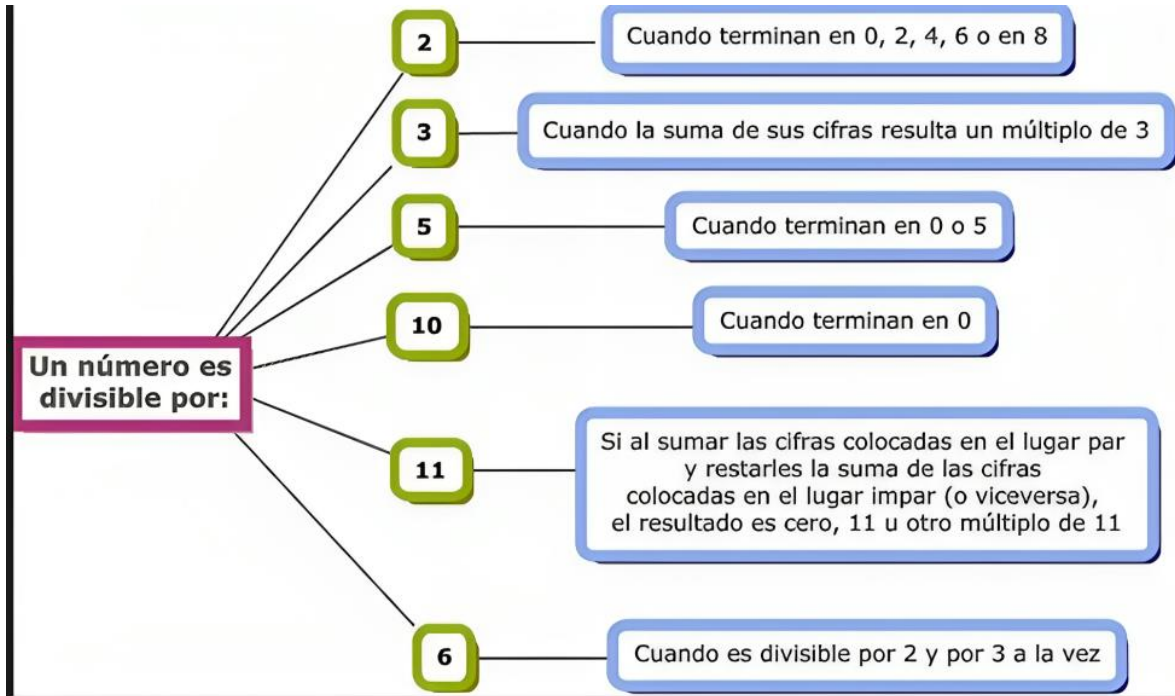
3	14	7	44	31	100	10	23
126	87	27	24	18	35	69	5
400	48	77	122	60	13	6	42

6. Descubre si los siguientes números, cumplen con más de un criterio de divisibilidad.... ¿Cuales?

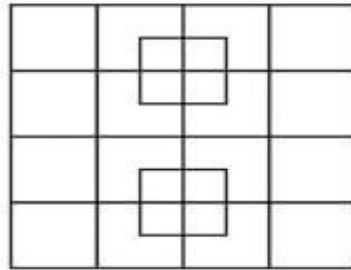


Semillero MAT3MAT1CAS –Divisibilidad

EN RESUMEN:



¿Cuántos cuadrados hay en este dibujo?



Piensa rápido

NO es 60

111	→	12
231	→	24
324	→	36
435	→	48
542	→	?

¿Cuál es el valor de cada figura?

$$4 + \text{●} = \text{▲}$$

$$\text{▲} - 5 = \text{■}$$

$$6 - \text{■} = \text{♥}$$

$$\text{♥} + 2 = 2$$

Coloque todos los números
1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 y sin repetir.

$$\square + \square \times \square = 25$$

$$\begin{array}{c} + \\ \square - 6 \div \square = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} + \\ \square + \square \times \square = 11 \end{array}$$



18

15

10



¿Cómo sigue la secuencia?

A S D F G H J ...

ACERTIJOS MATEMÁTICOS

Maestra: Andrea Ríos Vargas



1. Observa y analiza la siguiente imagen y encuentra el resultado correcto.

$$\text{Gamepad} + \text{Controller} = 18$$

$$\text{Gamepad} \times \text{Gamepad} + \text{Gamepad} = 88$$

$$\text{Controller} \times \text{Controller} = 121$$

$$\text{Gamepad} + \text{Controller} \times \text{Gamepad} = ?$$

2. Debajo de cada casilla hay 2 casillas cuyos números sumados equivalen al primero
¡Completa la pirámide!

100

